

# 조화진동 모델을 통한 대규모 질량-스프링 시뮬레이션의 수치안정성 개선 및 병렬 처리

강영민  
동명대학교 게임공학과  
e-mail : ymkang@tu.ac.kr

## Improvement of Numerical Stability of Complex Mass-Spring Simulation based on Harmonic Oscillation Model

Young-Min Kang  
Department of Game Engineering, Tongmyong University

### 요 약

질량 스프링 모델은 옷감의 애니메이션이나 변형 가능한 다양한 물체의 물리적 시뮬레이션을 위해 가장 흔히 사용되는 모델이다. 그러나 이 모델은 간단하다는 장점과 함께 심각한 문제를 갖고 있다. 스프링 모델은 수치적으로 불안정하여 잘 늘어나지 않는 스프링을 시뮬레이션하려고 하면 매우 짧은 시간 간격을 사용하거나, 암시적 적분법을 통해 대규모 선형 시스템을 풀어야 하는 문제가 있다. 본 논문에서는 현재 일반적 개인용 컴퓨터 환경에서도 사용할 수 있는 CUDA 환경에서 대규모 질량-스프링 모델 시뮬레이션을 수행할 수 있도록 하기 위해 수치적 안정성을 높이고 물리적 사실성을 개선한 새로운 시뮬레이션 모델을 제안한다. 제안된 기법은 조화진동 모델에 기반을 두고 있으며, 암시적 적분법과 달리 선형시스템의 풀이 등이 요구되지 않는다. 따라서 CUDA 등을 활용하여 병렬적으로 처리가 가능하며, 개인 컴퓨터 환경에서 높은 수준의 품질을 가진 시뮬레이션을 가능하게 한다.

### 1. 서론

본 논문은 변형 가능한 물체의 물리적 시뮬레이션을 수행하는 데에 매우 빈번히 사용되는 질량-스프링 모델의 효율적인 시뮬레이션 수행을 위해 개선된 수치 안정성을 가진 모델을 제안한다.

본 논문의 기법은 조화진동자 모델을 기반으로 스프링의 속도 변화를 계산하여 단순한 후크(Hooke) 모델로 표현된 힘에 대한 오일러(Euler) 적분 적용 기법이 가진 수치 불안정성 문제를 최소화한다.

일반적으로 수치 불안정성 문제는 암시적 적분법(implicit integration)을 적용하여 해결하였으나, 이 방법은 대규모 선형 시스템을 풀어야 한다는 문제가 추가적으로 발생한다. 특히 질점의 수가 많아지면 선형 시스템의 행렬을 구성하는 성분의 수가 질점 수의 제곱으로 늘어나며, 병렬 처리에도 적합하지 않다.

본 논문은 개인용 컴퓨터 환경에서도 일반화되고 있는 CUDA 환경에서도 쉽게 구현할 수 있으며, 수치 안정성도 크게 개선된 시뮬레이션 기법을 제안한다.

### 2. 관련연구

질량 스프링 모델은 옷감 애니메이션 분야에서 활발히 다루어졌던 모델이다. 이 모델을 실시간에 처리할 때 발생하는 어려움을 해결하기 위한 다양한 연구들 가운데 가

장 중요한 성과는 암시적 적분법(implicit integration)이다. 이 암시적 적분법을 옷감 애니메이션에 적용하면 선형 시스템 풀이 문제가 된다[1]. 문제는 이 선형 시스템이 희소 행렬이기는 하지만 매우 큰 행렬을 다루어야 한다는 것이다. 이러한 행렬이 포함된 선형 시스템 풀이 과정의 계산 부담을 줄일 수 있는 효율적인 기법들을 제안하여 실시간 옷감 애니메이션에 이용하려고 하였지만 [2,5,6,8], 이러한 기법들은 실시간 성능을 얻기 위해 정확성을 희생하였고 질점의 수가 많은 복잡한 모델에는 적용이 힘들었다. 코르디에(Cordier)에 의해 옷감을 완전히 갖춰 입은 캐릭터 모델의 실시간 애니메이션 기법이 제안되었다[4]. 그러나 이 기법은 물리 시뮬레이션 자체의 성능을 개선하지는 못했다. 본 논문에서는 안정적인 결과를 얻을 수 있으면서도 병렬처리에 적합한 형태로 각 질점의 상태 변화를 계산할 수 있는 기법을 제안한다.

### 3. 문제의 형식화

가장 단순한 수치 적분 기법은 명시적(explicit) 오일러 적분법이다. 이 방법은 다음과 같은 방법으로 입자의 가속도를 근사한다.

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} \cong \frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{m}f(t) \quad (1)$$

따라서, 시뮬레이션은 다음과 같은 방식으로 현재의 속도

와 현재 얻어진 힘을 이용하여 다음 상태의 속도를 계산하는 것이다.

$$\mathbf{v}(t+h) = \mathbf{v}(t) + \frac{h}{m} \mathbf{f}(t) \quad (2)$$

이러한 기법은 심각한 수치 불안정성 문제를 갖는다. 이는 물론  $\mathbf{f}(t)$   $h$ 가 정확한 적분치가 아니기 때문이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 암시적 적분법은 다음 상태의 힘, 즉  $\mathbf{f}(t+h)$ 를 이용하여 수치 적분을 수행한다. 하지만, 이 미래의 힘은 지금의 상태로 알 수 없는 값이며, 테일러(Taylor) 전개를 이용하여 근사할 수밖에 없다. 이 근사는 다음과 같이 수행할 수 있다.

$$\mathbf{f}(t+h) = \mathbf{f}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \quad (3)$$

여기서 다시 문제가 추가로 발생하게 된다. 이는  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ 가 벡터가 아니라는 것이다. 질점의 개수가  $n$ 개 일 때, 이 미분치는  $n \times n$ 의 행렬이다. 따라서 문제는 질점의 수가 증가할 경우 원소가  $o(n^2)$ 인 행렬을 포함한 대규모 선형 시스템 풀이가 된다.

암시적 적분법이 언제나 안정적인 결과를 보장하기는 하지만, 이러한 대규모 선형 시스템 풀이는 구현의 어려움이 있으며, 병렬 처리에도 적합하지 못하다. 이러한 문제를 해결하기 위해 본 논문에서는 크게 개선된 수치 안정성을 갖고 입자별로 독립적으로 계산될 수 있는 명시적 적분법의 방식을 따르는 새로운 기법을 제안하고자 한다.

기본적인 아이디어는 수치 불안정성의 원인이 부정확한 수치 적분이었으므로, 이를 개선하여 더욱 정확한 수치 적분을 수행하는 것이다. 원래의 수치 적분법에서  $\mathbf{f}(t_0)h$ 는 정확한 적분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v}(t_0+h) = \mathbf{v}(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_0+h} \mathbf{f}(t) dt \quad (4)$$

문제는 이 정확한 적분치를 어떻게 구하는가이다. 후크(Hooke)의 법칙에서 정의된 스프링 힘을 적분할 경우, 적분 구간 동안 변화하는 힘을 고려하지 않기 때문에 문제가 발생한 것이다. 따라서 우리는 이를 고려한 모델을 구상하였다. 이 모델은 스프링의 움직임이 조화진동을 한다는 가정을 기반으로 한다. 조화진동은 해석적으로 기술될 있으며, 정확한 적분이 가능하다. 따라서 문제는 식 4의 값을 해석적으로 구하는 것이 된다.

## 4. 조화 진동 기반의 질량-스프링 모델

### 4.1 표기법

어떤 두 입자  $i$ 와  $j$ 가 서로 스프링으로 연결되어 있다고 하자, 이 스프링은  $(i, j)$ 로 표현한다. 두 입자의 위치는  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 로 표현하며, 속도는 각각  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ , 질량은  $m_i, m_j$ 로 표현하자. 입자  $i$ 의 위치에서  $j$ 의 위치로 가는

벡터는  $\mathbf{x}_{ji} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$ 로 표현하며, 비슷하게 상대 속도도  $\mathbf{v}_{ji} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$ 로 정의한다. 정규화된 벡터는 다음과 같이 표현하기로 하자.

$$\hat{\mathbf{x}}_{ji} = \frac{\mathbf{x}_{ji}}{|\mathbf{x}_{ji}|} \quad (5)$$

시간을 고려하여  $\mathbf{x}_i(t)$ 는 시간  $t$ 일 때의 입자  $i$ 의 위치가 된다. 다른 벡터에 대해서는 동일한 방식으로 표현한다. 스프링의 휴지상태 길이는  $l_0$ 로 표현하고, 시간  $t$ 일 때의 길이는  $l(t) = |\mathbf{x}_{ji}(t)|$ 이다. 휴지 상태와의 길이 차이는  $\delta(t) = l(t) - l_0$ 로 표현하며, 스프링의 경직도(stiffness)는  $\kappa$ 로 표현한다.

### 4.2 조화진동에 기반한 속도 변화 계산

조화진동의 간단한 예는 하나의 질점이 1차원 공간에서 스프링으로 정적 객체에 고정되어 있는 것이다. 이때 질점의 위치는 하나의 스칼라  $y$ 로 표현할 수 있고,  $y = A \sin \omega t$ 의 진동을 한다. 이때,  $\omega$ 는  $\sqrt{\kappa/m}$ 이다. 이때  $m$ 은 진동자의 질량이다. 두 입자가 서로 연결되어 있는 경우는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta(T) = A \sin \omega T = A \sin \left( T \sqrt{\frac{\kappa}{m_i} + \frac{\kappa}{m_j}} \right) \quad (5)$$

여기서  $A$ 를 계산하는 방법은 에너지 보존의 법칙을 적용하는 것이다. 전체 에너지는 운동에너지와 위치에너지의 합이다. 스프링이 가진 에너지는  $\frac{1}{2} \kappa A^2$ 이므로 이 값이 운동에너지와 위치에너지의 합과 일치해야 한다. 위치에너지는  $\frac{1}{2} \kappa \delta^2$ 로 표현된다. 두 질점의 운동 에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{2} m_i \left( \frac{m_j}{m_i + m_j} \dot{\delta} \right)^2 + \frac{1}{2} m_j \left( \frac{m_i}{m_i + m_j} \dot{\delta} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \right) \dot{\delta}^2 \quad (6)$$

따라서 다음과 같은 항등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \kappa A^2 &= \frac{1}{2} \kappa \delta^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \right) \dot{\delta}^2 \\ \kappa A^2 &= \kappa \delta^2 + \left( \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \right) \dot{\delta}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

이를 통해 우리는 스프링의 조화 진동 진폭인  $A$ 를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$A = \sqrt{\delta^2 + \frac{m_i m_j}{\kappa(m_i + m_j)} \dot{\delta}^2} \quad (8)$$

이 식을 계산하기 위해서는 변형도의 시간 미분치를 계산해야 한다. 이 값은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \delta(t) = \frac{d}{dt} (l(t) - l_0) = \frac{d}{dt} l(t) \quad (9)$$

따라서 다음과 같이 계산할 수 있다.

(10)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\delta(t) &= \frac{d}{dt} \sqrt{\mathbf{x}_{ji}(t)^T \mathbf{x}_{ji}(t)} \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{ji}(t)^T \mathbf{x}_{ji}(t))^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_{ji}(t)^T \mathbf{x}_{ji}(t)) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{ji}(t)^T \mathbf{x}_{ji}(t))^{-\frac{1}{2}} (2 \mathbf{x}_{ji}(t)^T \mathbf{v}_{ji}(t)) \\
 &= \frac{2 \mathbf{x}_{ji}(t)^T \mathbf{v}_{ji}(t)}{2 \sqrt{\mathbf{x}_{ji}(t)^T \mathbf{x}_{ji}(t)}} \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_{ji}(t)^T \mathbf{v}_{ji}(t)
 \end{aligned}$$

이를 이용하여 진폭을 계산하면 다음과 같다.

$$A = \sqrt{\delta^2 + \frac{m_i m_j}{\kappa(m_i + m_j)} \dot{\delta}^2} \quad (11)$$

스프링의 조화진동은  $\delta(t) = A \sin(\omega T)$ 로 표현할 수 있다. 이때,  $t$ 는 시뮬레이션이 적용되는 세계의 시간이며,  $T$ 는 조화진동의 주기 내에서 정의되는 시간이다. 따라서  $T$ 의 범위는 0에서  $2\pi/\omega$  사이의 값이 된다. 정확한 적분을 수행하려면, 현재의 시간  $t$ 가  $T$ 로 어떻게 변환되는지를 계산해한다. 이를  $T_0$ 라고 하자. 이 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_0 = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \frac{\delta(t)}{A} \right) \quad (12)$$

이제 이 힘이 조화진동을 하는 스프링의 길이에 따라 어떻게 변화하는지 알 수 있으므로 이를 해석적으로 적분한다. 적분 방법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_0+h} f(t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+h} \kappa \delta(t) dt \\
 &= \int_{T_0}^{T_0+h} \kappa A \sin(\omega T) dT \\
 &= \kappa A \int_{T_0}^{T_0+h} \sin(\omega T) dt \\
 &= -\frac{\kappa A}{\omega} (\cos \omega t) \Big|_{T_0}^{T_0+h}
 \end{aligned} \quad (13)$$

이 적분을 통해 우리는 더욱 정확한 수치 적분을 질량-스프링 모델에 적용할 수 있다. 이 힘은 두 질점에 적용되어야 하므로 각각의 질점에 대해서는 2로 나눈 크기가 적용된다. 이 힘의 크기를 간단히  $\phi$ 로 정의하자. 이는 다음과 같이 간단히 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{1}{2} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(t) dt \\
 &= -\frac{\kappa A}{2\omega h} (\cos \omega(T_0 + h) - \cos \omega T_0)
 \end{aligned}$$

이제 시뮬레이션은 표 1과 같은 절차를 계속해서 반복

하는 것이다.

표1. 제안된 기법의 시뮬레이션 절차

1. 모든 스프링  $(i, j)$ 에 대해  $\phi_{ij}$ 를 계산한다.
2. 입자  $i$ 에 대해 속도 변화를 계산한다

$$\Delta \mathbf{v}_i = \sum_{(i,j) \in E} \phi_{ij} \hat{\mathbf{x}}_{ij}$$

3. 모든 입자의 속도를 갱신한다.

$$\mathbf{v}_i(t+h) = \mathbf{v}_i(t) + \Delta \mathbf{v}_i$$

4. 모든 입자의 위치를 갱신한다.

$$\mathbf{x}_i(t+h) = \mathbf{x}_i(t) + \Delta \mathbf{x}_i$$

## 5. 실험결과

본 논문의 기법을 구현하기 위해 사용한 시스템은 마이크로소프트의 Window 7 운영체제를 사용하는 intel 3.47GHz i7 CPU와 24G RAM, GTX590 GPU 환경이었다. 12 코어 시스템이지만, CPU 상에서 병렬 처리를 수행하지는 않았으며, GPU를 이용하여 병렬 처리를 수행하였다.

사용된 모델은 16,384 개의 질점을 가진 스프링 네트워크였으며, 시뮬레이션을 통해 얻은 애니메이션 결과는 그림 1에 나타나있다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 매우 많은 질점을 가진 질량-스프링을 다루고 있다.

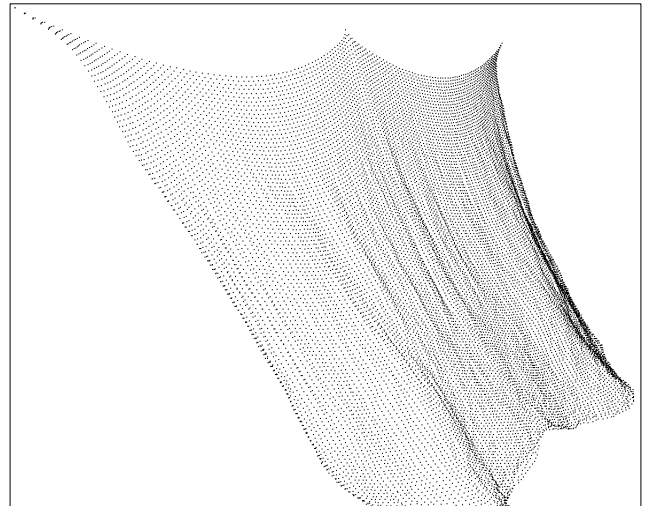
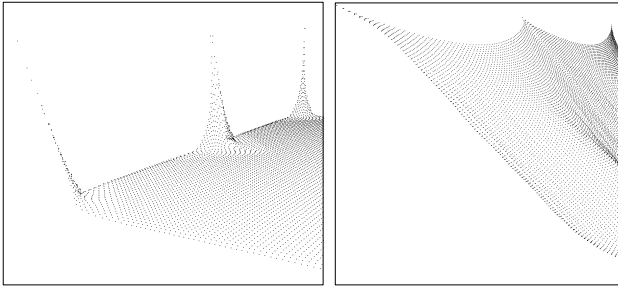


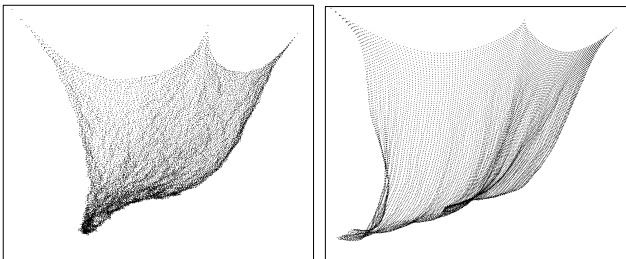
그림1. 본 논문의 기법을 적용한 질량-스프링 모델의 복잡도

일반적인 오일러 적분 기법과의 비교를 수행하기 위해 후크의 법칙에 의한 스프링 힘을 단순 수치적분하는 기법도 같이 구현하였다. 그림 2는 단순한 오일러 적분법의 결과와 본 논문의 기법을 비교한 결과이다. 그림에서 확인할 수 있는 바와 같이, 단순 오일러 적분법의 경우 스프링 상수를 매우 높이지 않을 경우 후크의 힘에 의한 복원이 전파되는 속도가 느려 매우 부자연스러운 동작을 보이게 된다. 이와 달리 제안된 기법은 자연스러운 복원 행동을 보이고 있다.



(a) 단순 오일러 적분법 (b) 조화진동 기반 모델  
그림2. 제안된 기법과 단순 오일러 적분법의 비교 ( $k = 2000$ )

그림 2에서 나타난 문제를 해결하기 위해 단순 오일러 적분법에 매우 높은 스프링 상수를 적용하였다. 그림 3의 (a)는 오일러 적분법을 적용한 모델의 스프링 상수를 1,000,000까지 높인 결과이다. 이 경우 스프링이 지나치게 늘어나는 문제는 해결되었다. 하지만, 시스템이 매우 빠르게 불안정해지면서 그림과 같이 입자의 진동이 발생하였다. 따라서 이 모델을 이용하여 안정적이면서 과도한 스프링 늘어남이 없는 시뮬레이션을 생성하는 것이 매우 힘들었다. 이와 달리 그림 3의 (b)는 본 논문의 기법이 스프링 상수 2000에도 매우 안정적이며 자연스럽게 스프링의 길이를 유지하고 있음을 보이고 있다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 제안된 기법은 대규모 질량-스프링 모델의 시뮬레이션에 적합하다.



(a) 단순 오일러 적분법 (b) 조화진동 기반 모델  
그림3. 제안된 기법과 단순 오일러 안정성 비교

제안된 기법은 명시적 적분법처럼, 인접한 질점의 상태만을 고려하면 된다. 이러한 병렬화에 매우 적합하다. 따라서 우리는 제안된 기법을 CUDA 환경에서 실행하였다. GTX 590 GPU 환경에서 입자의 시뮬레이션을 CUDA로 수행했을 때, 질점이 16,384 개인 복잡한 메시를 초당 66 프레임 이상의 성능으로 시뮬레이션 하는 것이 가능하였다.

## 6. 결론

본 논문은 조화진동 모델을 기반으로 개선된 수치 안정성을 갖는 질량 스프링 모델의 시뮬레이션 기법을 제안하였다. 제안된 기법은 단순한 명시적 오일러 기법에 비해 더욱 안정적이며, 암시적 기법처럼 선형 시스템을 풀 필요도 없다. 이러한 특성은 병렬 처리에 적합하며, CUDA 등을 활용한 고성능 고품질 시뮬레이션이 가능한 기술이

다. 제안된 기법은 매우 간단히 CUDA 환경에서 구현될 수 있으며, 실험 결과는 실시간 응용 프로그램에서 불가능하던 대규모 질량-스프링 네트워크의 입자간 상호작용을 시뮬레이션 할 수 있는 기술이다.

## 감사의 글

본 연구는 지경부 및 정보통신산업진흥원의 대학IT연구센터지원사업의 연구결과로 수행되었음 [NIPA-2011(C-1090-1021-0006)]

## 참고문헌

- [1] David Baraff and Andrew Witkin. Large steps in cloth simulation. *Proceedings of SIGGRAPH 98*, pp. 43-54, 1998.
- [2] A. Vlachos, J. Peters, C. Boyd, and J. Mitchell. Curved PN triangles. *Symposium on Interactive 3D Graphics 2001*, pp. 159-166, 2001.
- [3] Kwang-Jin Choi and Hyeong-Seok Ko. Stable but responsive cloth. *ACM Transactions on Graphics: Proceedings of SIGGRAPH 2002*, pp. 604-611, 2002.
- [4] Frederic Cordier and Nadia Magnenat-Thalmann. Realtime animation of dressed virtual humans. *Proceedings of Eurographics 2002*, 2002.
- [5] Mathieu Desbrun, Peter Schroder, and Alan Barr. Interactive animation of structured deformable objects. *Graphics Interface '99*, pp. 1-8, 1999.
- [6] Young-Min Kang, Jeong-Hyeon Choi, Hwan-Gue Cho, and Chan-Jong Park. An efficient animation of wrinkled cloth with approximate implicit integration. *The Visual Computer Journal*, 17(3):147-157, 2001.
- [7] M. Kass. An introduction to continuum dynamics for computer graphics. In *SIGGRAPH Course Note: Physically-based Modelling*. ACM SIGGRAPH, 1995.
- [8] Masaki Oshita and Akifumi Makinouchi. Real-time cloth simulation with sparse particles and curved faces. *Proc. of Computer Animation 2001*, pp. 220-227, November 2001.
- [9] Xavier Provot. Collision and self-collision handling in cloth model dedicated to design. *Computer Animation and Simulation '97*, pp. 177-190, September 1997.
- [10] Pascal Volino and Nadia Magnenat-Thalmann. Efficient self-collision detection on smoothly discretized surface animations using geometrical shape regularity. *Computer Graphics Forum*, 13(3):155-166, 1994.