FUNDATEC
Maestría en Electrónica
Puntaje Total: 100 puntos

MP-6124: Procesamiento Adaptivo
Cuatrimestre: III - 2019
Valor Porcentual: 10 %

Tarea 2

1 Instrucciones generales

- Esta tarea se realizará individual o en grupos de 2 personas
- Los documentos y archivos necesarios para resolver la tarea se encuentran en el TEC Digital, especificamente en la sección `Documento->Tareas->Tarea 2`.
- Los archivos de programación deben ser realizados en GNU Octave, MATLAB ó Python. Pueden utilizar *Jupyter Notebook* para presentar los códigos y las respuestas de cada unas de las preguntas. **Nota:** Ver el video en la dirección electrónica

  `https://www.youtube.com/watch?v=5johhf8DnLI`

  para instalar el *kernel* de GNU Octave en *Jupyter Notebook*.
- La parte escrita puede ser realizada en papel. Realice un escaneo de la solución de cada uno de los ejercicios asignados. **Nota**: Se les motiva utilizar *Jupyter Notebook* para esta parte.
- Los archivos de esta tarea deben ser enviados al correo `jusoto@tec.ac.cr`, en un archivo con extensión `.zip` con nombre `tarea2_pa`. En el correo se debe indicar el nombre de los miembros del grupo.
- **Fecha y Hora de Entrega:** Miércoles 20 de Noviembre del 2019 a las 11:59 p.m.

2 Preguntas

1. [**65 puntos**]: Del libro *"Fundamentals of Adaptive Filtering"* de Ali Sayed, implemente cada uno de los algoritmos de gradiente estocástico que se encuentran en la Tabla 5.1., página 230. Cada uno de los algoritmos de la Tabla 5.1. da una aproximación a la solución del problema de optimización

$$\min_{w \in \mathbb{C}^n} \mathbb{E}[|\mathbf{d} - \mathbf{u}w|^2], \tag{1}$$

donde $\mathbf{d}$ es una variable aleatoria, $\mathbf{u}$ es un vector fila aleatorio de tamaño n y w es un vector columna constante de tamaño n. Para la implementación de cada algoritmo, considere las siguientes indicaciones:

- Cada algoritmo debe ser implementado como una función.
- Los parámetros iniciales de cada función son los siguientes:
  - Observaciones de la variable aleatoria $\mathbf{d}$, que se representan en el vector $d = [d_0 \; d_1 \; .... \; d_{s-1}] \in \mathbb{C}^s$, donde $d_j \in \mathbb{C}$ es la observación j de $\mathbf{d}$.
  - Observaciones del vector aleatorio $\mathbf{u}$, que se representan en la matriz $U = \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{s-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{s \times n}$, , donde $u_j \in \mathbb{C}^n$ es la observación j de $\mathbf{u}$.
  - Vector inicial $w^{(-1)} \in \mathbb{C}^m$, el cual es un vector columna.
  - Tolerancia $tol > 0$ para el criterio de parada.
  - Iteraciones máximas $iterMax > 0$.
- Los parámetros finales son el número de iteraciones k y el vector $w^{(k)}$ que aproxima la solución del problema (1).
- Utilice nombres significativos para definir cada una de las funciones.
- La criterio de parada de cada algoritmo será la condición $\|w^{(k)} - w^{(k-1)}\|_2 < tol$ o cuando el número de iteraciones es mayor a $iterMax$.

- En el método LMS con tamaño de paso variante, puede utilizar como tamaño de paso $\mu_i = \dfrac{2}{1+i}$ en cada iteración. Si considera oportuno, puede utilizar otro tamaño de paso. De ser así, debe justificar porque seleccionó otro tamaño de paso μ_i.
- Cada método debe generar dos gráficas: una de iteraciones versus error y otra de iteraciones versus valor mínimo. El error se medirá con el criterio $e_k = \|w^{(k)} - w^{(k-1)}\|_2$ y el valor mínimo se medirá con el criterio

$$m_k = \widehat{R}_{d_k d_k} - (\widehat{R}_{d_k u_k})^* w^{(k)} - (w^{(k)})^* \widehat{R}_{d_k u_k} + (w^{(k)})^* \widehat{R}_{u_k u_k} w^{(k)},$$

donde $\widehat{R}_{d_k d_k} = d_k (d_k)^*$, $\widehat{R}_{d_k u_k} = d_k (u_k)^*$ y $\widehat{R}_{u_k u_k} = (u_k)^* u_k$.

2. [**35 puntos**]: Considere el siguiente problema

Estimación de un Canal de Respuesta Finito. Considere un canal de respuesta finito, el cual se representa a través de una función de transferencia $\mathcal{C}$ definida por

$$\mathcal{C}(z) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k z^{-k}.$$

El canal $\mathcal{C}$ es estimulado con una secuencia de valores aleatorios $\{\mathbf{u}(i)\}$, donde cada $\mathbf{u}(i)$ es una variable aleatoria con media igual a cero. La salida obtenida después de pasar por el canal es otra secuencia de valores aleatorios $\{\mathbf{d}(i)\}$, donde cada $\mathbf{d}(i)$ es una variable aleatoria con media igual a cero definido por $\mathbf{d}(i) = \mathbf{u}_i c + \mathbf{v}(i)$, donde

- $\{\mathbf{v}(i)\}$ es una secuencia de variables aleatorias ortogonales entre si, con media cero. Además, la secuencia $\{\mathbf{v}(i)\}$ es ortogonal a la secuencia $\{\mathbf{u}(i)\}$.
- $\mathbf{u}_i$ es un vector fila aleatorio de tamaño p tal que $\mathbf{u}_i = [\mathbf{u}(i) \ \ \mathbf{u}(i-1) \ \ \mathbf{u}(i-2) \ \ \ldots \ \ \mathbf{u}_i(i-p+1)]$.
- c es un vector columna constante tal que $c = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{p-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, donde cada c_j son las constantes que pertenecen al canal de respuesta finita.

El objetivo de este problema es encontrar los coeficientes $c_0, c_1, ..., c_{p-1}$ del canal de respuesta finito, es decir, el vector c. Una alternativa para estimar el vector c es resolver el problema de optimización

$$\min_{c \in \mathbb{C}^n} \mathbb{E}[|\mathbf{d}(i) - \mathbf{u}_i c|^2], \tag{2}$$

Es conocido que la solución exacta del problema anterior se obtiene utilizando matrices de covarianza $R_{\mathbf{d}_i \mathbf{u}_i}$ y $R_{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i}$. Sin embargo, en la práctica rara vez se tiene conocimiento de estas matrices de covarianza. En estos casos, se utilizan observaciones de $\mathbf{d}(i)$ y $\mathbf{u}_i$. Estas observaciones se definen como $d = [d_0 \ d_1 \ .... \ d_{s-1}] \in \mathbb{R}^s$ y $U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{s-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times n}$, donde u_j es un vector fila de tamaño n.

(a) Aproxime el vector $c \in \mathbb{R}^{10}$ del canal $\mathcal{C}$ utilizando las observaciones (o muestras) que se encuentran en los archivos `d.txt` y `U.txt`. El archivo `d.txt` contiene un vector fila $d \in \mathbb{R}^{100000}$ con 100 000 muestras de $\mathbf{d}(i)$ y el archivo `U.txt` contiene una matriz $U \in \mathbb{R}^{100000 \times 5}$ con 100 000 muestras de $\mathbf{u}_i$. Para esto, utilice cada uno de los métodos implementados en la Pregunta 1, con una tolerancia de 10^{-5} y un vector columna inicial $c^{(-1)} = [0 \ 0 \ ... \ 0]^T \in \mathbb{R}^{10}$.

(b) ¿Cuál de los métodos iterativos genera una mejor aproximación del vector c? Justifique su respuesta.

(c) Si se sabe de antemano que los coeficientes $c_0, ..., c_9$ son números enteros, ¿cuál sería el valor exacto del vector c?. Justifique su respuesta.

Nota: La justificación de las preguntas (b) y (c) se puede realizar utilizando las gráficas generadas en cada una de las funciones.