

Tarea 4 - Métodos para PDS

Fabrizio Quirós Corella

2 de Diciembre 2018

Ejercicio 1

Inciso a.

El artículo considerado para la resolución de este ejercicio utiliza la siguiente notación:

- y : representa un vector aleatorio de entrada o señal de referencia.
- x : constituye a la señal comprimida y reconstruida.
- \mathbf{T}_{RRWF} : filtro de Wiener de rango reducido, representado por la expresión:

$$\mathbf{T}_{RRWF} = \mathbf{T} = \mathbf{A}_{opt} \mathbf{B}_{opt}^H \quad (1)$$

- \mathbf{A}_{opt} : matriz óptima de reconstrucción.
- \mathbf{B}_{opt} : matriz óptima de compresión.
- H : denota al operador de la transpuesta conjugada.

Inciso b.

El problema que muestra el artículo es encontrar la matriz de la ecuación [1] que permita reducir la siguiente expresión:

$$J(\mathbf{T}) = E[||y - \mathbf{T}x||^2] \quad (2)$$

Para lograr esto, se emplea un algoritmo que considera la truncación SVD (*Descomposición en Valores Singulares*) de rango r , de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}_{RRWF} = \text{trun}_r\{\mathbf{R}_{yx} \mathbf{R}_{xx}^{-1/2H}\} \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \quad (3)$$

Inciso c.

No obstante, el detalle y el problema como tal resulta ser que dicho algoritmo [3] requiere de una cantidad importante de operaciones, por lo que en el artículo en cuestión proponen un método iterativo para encontrar las matrices óptimas de la ecuación [1], denominado IQMD (del inglés, *Iterative-Quadratic-Minimum-Distance*) que necesita de un menor número de instrucciones.

Inciso d.

La matriz \mathbf{B}_0 corresponde a una matriz definida de forma aleatoria, la cual se asume es de rango completo, y es considerada especialmente para la iteración del algoritmo IQMD. La expresión a continuación define dicha condición inicial:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{T}(0) \quad (4)$$

Inciso e.

A continuación, se resume el pseudo-código planteado con el propósito de implementar el algoritmo IQMD y que da solución al problema descrito:

```
1 function [A, B] = iqmd(r, E{xx}, E{yx})
2     # Transpuesto conjugado de las matrices de covarianza de
   entrada
3     Rxx = E{xx^H}
4     Ryx = E{xx^H}
5
6     # Matriz aleatoria de rango completo
7     Bvt = V T(0)
8
9     # Condicion inicial
10    B(0) = Rxx^(-1/2) Bvt
11
12    # Proceso iterativo
13    for k=1:K
14        A(k+1) = Rxy B(k) pinv(B^H(k) Rxx B(k))
15        B^H(k+1) = pinv(A^H(k+1)A(k+1)) A^H(k+1)Ryx pinv(Rxx)
16        B(k+1) = B^H(k+1)
17    end
18 endfunction
```

Inciso f.

En cuánto a la implementación efectuada en MATLAB, esta se encuentra adjunta a este documento, donde se localiza el código fuente con *scripts* y funciones para verificar su funcionalidad.

Inciso g.

Al implementar dicho algoritmo, fue posible obtener la gráfica del rango variable en relación con el error al calcular el filtro de Wiener de rango reducido con el método IQMD en comparación al cálculo directo de la [3], resultado que se evidencia a continuación:

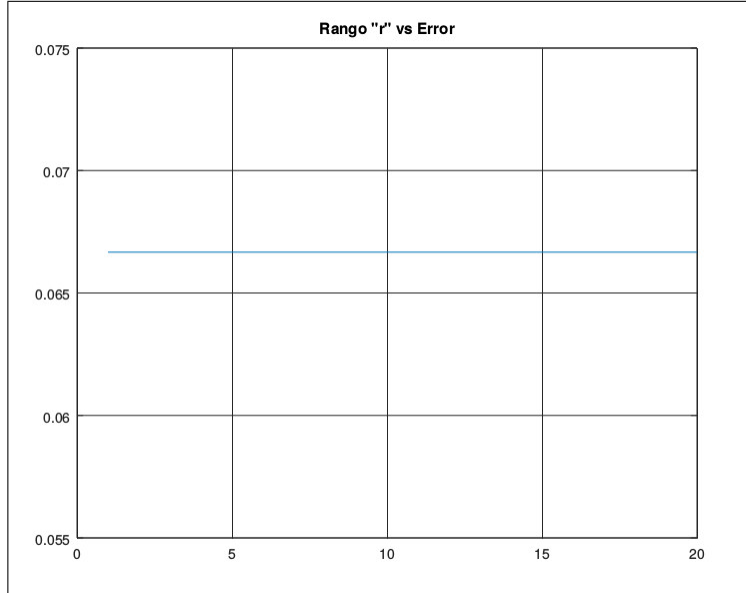


Figura 1: Gráfica del rango r variable vs el error asociado.

Ejercicio 2

Inciso a.

En cuánto a la notación empleada por el artículo científico, se tiene lo siguiente:

- x : representa un vector aleatorio o señal aleatoria a ser estimada.
- y : representa el vector aleatorio a medir; es la señal x contaminada con ruido.
- $F_{(1,2)}$ filtro de segundo orden, expresado por la siguiente ecuación:

$$F_{(1,2)}(y) = F_1 y + F_2 y^2 \quad (5)$$

Inciso b.

El problema expuesto en el artículo científico consiste en hallar $F_{(1,2)}$ matrices que minimicen la expresión mostrada a continuación:

$$J(F_1, F_2) = E[||x - F_{(1,2)}y||^2] \quad (6)$$

Esto, con el propósito de obtener una reconstrucción de la señal a estimar, al aplicar el filtrado $F_{(1,2)}$ a la señal con ruido.

Inciso c.

El método que se utiliza para resolver el problema mencionado en el inciso anterior, y tomando las matrices M_1 y M_2 como nulas, consiste en las próximas ecuaciones, donde:

$$A = E_{zz} - E_{zy}E_{yy}^\dagger E_{yz} \quad (7)$$

$$B = (E_{xz} - E_{xy}E_{yy}^\dagger E_{yz})A^\dagger \quad (8)$$

Ahora, se obtienen para el filtro de segundo orden, sus matrices F_1 y F_2 , así:

$$F_1 = (E_{xy} - BE_{zy})E_{yy}^\dagger \quad (9)$$

$$F_2 = B \quad (10)$$

Una vez calculado lo anterior, se sustituye en la ecuación [5] las expresiones obtenidas en [9] y [10] y la señal contaminada con ruido, para así poder de restaurarla.

Inciso d.

En cuánto a la implementación del algoritmo para el filtro de segundo orden descrito en el artículo científico facilitado para la resolución de esta asignación, se basa principalmente en el diagrama de bloques a continuación:

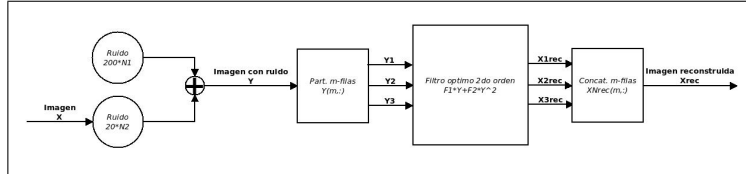


Figura 2: Diagrama de bloques representativo del sistema implementado.

Inicialmente, se tiene una imagen de entrada en escala de grises, denotada con X ; en este caso, de dimensiones 512x512, tal y como menciona el artículo. Luego, se introduce ruido aditivo con distribución normal N_1 y ruido multiplicativo con distribución uniforme N_2 , generando así una imagen contaminada, definida por Y .

Seguidamente, se efectúa una partición de m -filas ($M=3$) de la señal con ruido, para que esta sea procesada en partes por el filtro de segundo orden tal y como se puede evidenciar en la Figura 2, con el objeto de obtener una señal reconstruida en tres fragmentos X_{rec} , donde finalmente se concatenan dichas partes para conformar la imagen reconstruida.

Para mayor información de la implementación realizada del bloque principal, tómese la libertad de revisar los scripts facilitados junto a este documento. Las siguientes imágenes muestran los resultados obtenidos, donde se adjunta la imagen original, la contaminada, y la reconstruida con dicho filtro, respectivamente.

Donde, con la finalidad de validar estos resultados, se calculó el porcentaje de recuperación de la imagen, el cual equivale a:

$$RecoveryRate = 90,0306 \%$$

Fig 1. Imagen original de Lenna (512x512) en escala de grises



Figura 3: Señal de entrada sin alteraciones.

Fig 2. Imagen con ruido de Lenna (512x512) en escala de grises

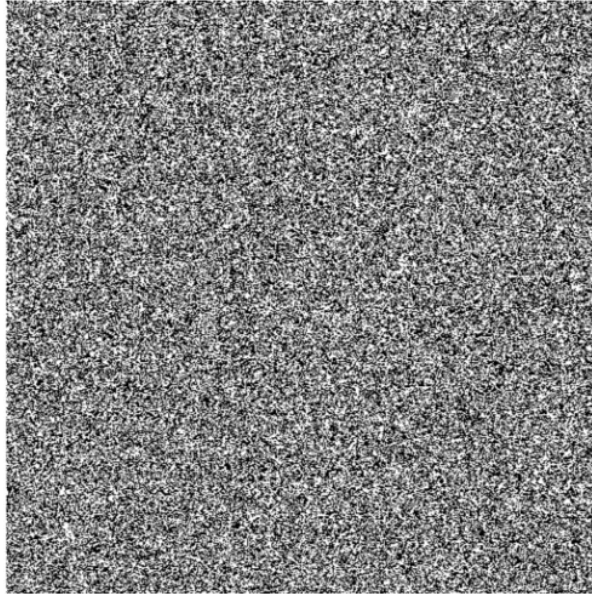


Figura 4: Señal de entrada con ruido.

Fig 3. Imagen reconstruida de Lenna (512x512) - Filtro de Segundo Orden Optimo



Figura 5: Señal recuperada.