Estudiantes: Daniel Kohlkemper
Fabricio Quirós

Examen Final - PA

Pregunta 1

- Vector de entradas constantes: $\breve{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$

  donde $x_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, m$

- Vector aleatorio de observación: $\bar{y} = [\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m]^T$

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = s_1 x_1 + \bar{v}_1 \\ \bar{y}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i x_i + \bar{v}_k \end{cases} \quad \text{con } k = 2, 3, \dots, m$$

  donde $s_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, m$

- Vector aleatorio de ruido aditivo: $\bar{v} = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m]^T$

  con $E[\bar{v}] = \emptyset$ y $\sigma_{\bar{v}_1}^2 = \sigma_{\bar{v}_2}^2 = \dots = \sigma_{\bar{v}_m}^2 = \sigma_{\bar{v}}^2$ (constante)

  además $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$ son ortogonales.

Partiendo del modelo lineal:

$$\bar{y} = H\breve{x} + \bar{v}$$

Se obtiene la matriz H:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & & & & \\ s_1 & s_2 & & & \\ s_1 & s_2 & s_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_m \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

a partir de:
$$\bar{y} = \begin{bmatrix} s_1 x_1 + v_1 \\ s_1 x_1 + s_2 x_2 + v_2 \\ \vdots \\ s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_m x_m + v_m \end{bmatrix}$$

Ahora, la matriz de covarianza $R_{\bar{v}}$:

$$R_{\bar{v}} = E\left\{ (\bar{v} - \tilde{v})(\bar{v} - \tilde{v})^* \right\} \quad \text{donde } \tilde{v} = E[\bar{v}] = \phi$$

$$\Rightarrow R_{\bar{v}} = E\left\{ \bar{v}\bar{v}^* \right\}$$

$$\Rightarrow R_{\bar{v}} = \begin{bmatrix} E\{\bar{v}_1\bar{v}_1\} & & \\ & E\{\bar{v}_2\bar{v}_2\} & \\ & & \ddots & \\ & & & E\{\bar{v}_m\bar{v}_m\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{v}_1}^2 & & & \\ & \sigma_{\bar{v}_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{\bar{v}_m}^2 \end{bmatrix}$$

con $\sigma_{\bar{v}_1}^2 = \sigma_{\bar{v}_2}^2 = \ldots = \sigma_{\bar{v}_m}^2$

Como se tiene un vector constante $\bar{x}$, se puede aplicar el Teorema de Gauss - Markov para el estimador lineal :

$$\hat{x} = K_0 \bar{y} \qquad ; \qquad K_0 = \left(H^* R_{\bar v}^{-1} H\right)^{-1} H^* R_{\bar v}^{-1} \quad (1)$$

H es una matriz triangular inferior, y como es real ($s_j \in \mathbb{R}$), el conjugado transpuesto H^* resulta en una ~~tra~~ matriz triangular superior :

$$H^* = \begin{bmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \dots & s_1 \\ & s_2 & s_2 & \dots & s_2 \\ & & s_3 & \dots & s_3 \\ & & & \ddots & s_m \end{bmatrix}$$

y la inversa de $R_{\bar v}$ es :

$$R_{\bar v}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{\bar v}^2 & & & \\ & 1/\sigma_{\bar v}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_{\bar v}^2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (1):

$$K_0 = \left(\begin{bmatrix} s_1 & s_1 & \cdots & s_1 \\ & s_2 & \cdots & s_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_{\bar{v}}^2 & & & \\ & 1/\sigma_{\bar{v}}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_{\bar{v}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ s_1 & s_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_1 & \cdots & s_1 \\ & s_2 & \cdots & s_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_{\bar{v}}^2 & & & \\ & 1/\sigma_{\bar{v}}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_{\bar{v}}^2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

el cual es el estimador lineal óptimo.

Además, la matriz de mínimo costo, según el Teorema de Gauss-Markov:

$$m.m.s.e = \left(H^* R_v^{-1} H \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s_1 & s_1 & \cdots & s_1 \\ & s_2 & \cdots & s_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_{\bar{v}}^2 & & & \\ & 1/\sigma_{\bar{v}}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_{\bar{v}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ s_1 & s_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (3)$$

Para el siguiente inciso, primero se obtiene el estimador lineal óptimo para el caso $\underline{m=3}$:

$$s_j = \frac{j}{j+1} \quad \text{donde} \quad s_1 = \frac{1}{2}, \; s_2 = 2/3 \;\; y \;\; s_3 = 3/4$$

Resolviendo la Ec. (2) y la Ec. (3):

$$K_0 = \left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 3/4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

$$m.m.s.e = \left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 3/4 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

Ahora, para el caso $\underline{m=4}$, se obtiene:

$$s_j = \frac{j}{j+1} \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{2}{3}, \quad s_3 = \frac{3}{4} \quad y \quad s_4 = \frac{4}{5}$$

Resolviendo (2) y (3), nuevamente:

$$K_o = \left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_v^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 3/4 & 4/5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_v^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{m.m.se.} = \left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_v^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 3/4 & 4/5 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$