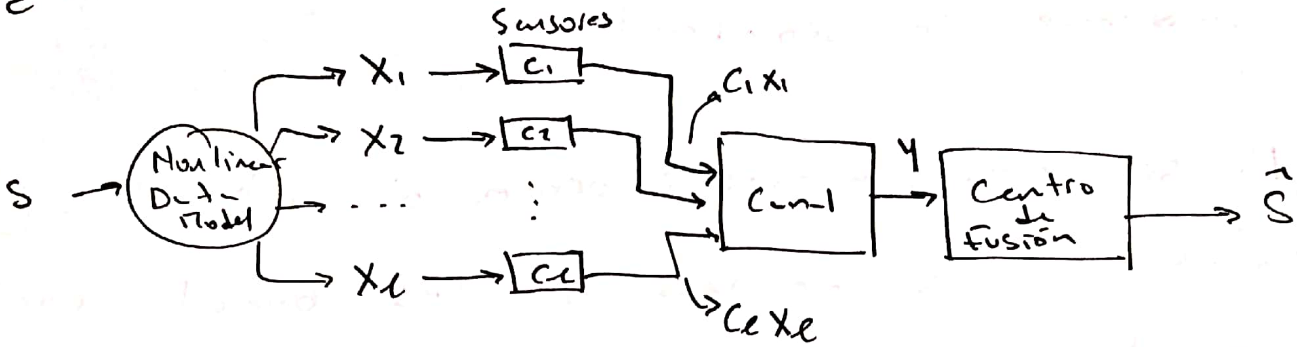
# Problema 2

a. ¿Qué representan los vectores $\bar{s}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_L$




Cada sensor $C_i$ observa un vector $x_i$ $N_i \times 1$ que está correlacionado con una señal aleatoria $\bar{s}$ de tamaño $p \times 1$.

fat matriz ~~x~~ $\longrightarrow$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en donde $n > m$.

Sea $C_i$ una matriz gorda $K_i \times N_i$. Cada sensor transmite un vector comprimido $C_i x_i$ de tamaño $K_i \times 1$.

Con esto, a través de una matriz $B$, el centro de fusión crea un estimado lineal $\hat{s}$ de $s$.

---

Con esto,

$\bar{s}$ es una señal aleatoria de interés, de tamaño $p \times 1$. Las señales $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_L$ son observadas por cada sensor $C_i$, es decir, $\bar{x}_i$ es la entrada al sensor $C_i$.

b) Para el problema $\min E[\|\bar{s} - B_1 C_1 \bar{x}_1 - \cdots - B_L C_L \bar{x}_L\|^2]$

Se asume lo siguiente:

a1. No se intercambia información entre los sensores y los canales que los conectan con el centro de fusión son ideales (no hay pérdidas).

a2. Los vectores $\bar{x}_i$ y $\bar{s}$ son de media cero y las matrices de auto- y cross-varianza, $\Sigma_{ss}$, $\Sigma_{sx_i}$ y $\Sigma_{x_i x_j}$, $\forall\, i,j \in [1, L]$, son conocidas y disponibles en el centro de fusión.

---

Adicionalmente se consideran 2 escenarios:

<u>S1</u>. Los sensores forman vectores $C_i \bar{x}_i$ reducidos en dimensión, de tamaño idéntico $k = k_i\ \forall i$, y se transmiten simultáneamente. El FC recibe:

$$y = \sum_{i=1}^{L} C_i x_i$$

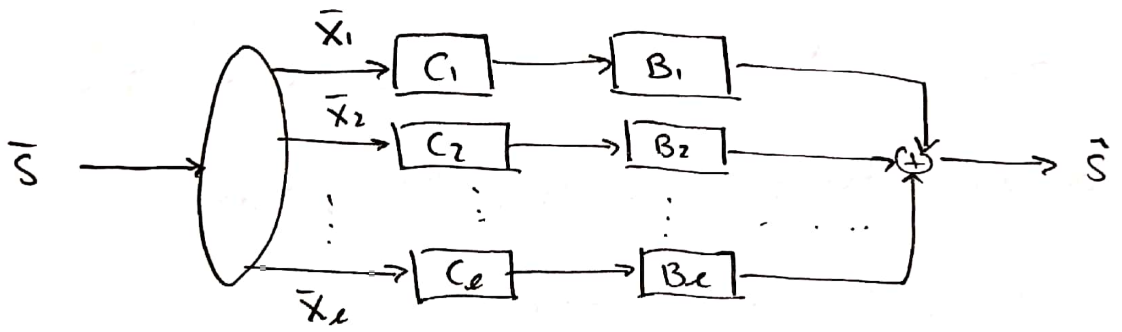
<u>S2</u>. Los sensores transmiten sobre canales ortogonales; el FC separa y concatena los vectores comprimidos de los sensores individuales para formar el vector $k \times 1$: $y = \mathrm{diag}(C_1 \cdots C_L)\,\bar{x}$

c) Las matrices $C_i$ para $i \in [1, L]$ representan los sensores. Estos son de tamaño $K_i \times N_i$.

Las matrices $B_i$ es lo que se utiliza para crear el estimado lineal $\hat{S}$ de $\bar{S}$.

---

d) El diagrama del ~~bloq~~ problema sigue a continuación:



e) Pseudocódigo.

```
dim = 30; K1 = 15; K2 = 15;
% Inicializar matrices
S_mat = rand(dim)
V1_mat = rand(dim, 1); V2_mat = rand(dim, 1);
Rv1v1 = 0,25 * eye(dim); Rv2v2 = 0,75 * eye(dim)
A1_mat = tridiag(dim); A2_mat = tridiag(dim);
B1_mat = rand(dim, K1); B2_mat = rand(dim, K2)
C1_mat = rand(K1, dim); C2_mat = rand(K2, dim)

% Inicializar matrices de covarianza.
Rx1x1, Rx2x2, Rx1x2, Rx2x1, Rsx1, Rsx2

Loop for i=1 : max_iter
    % Calcular matrices
    Rξξ, Rvv, Rvξ;
    % Obtener eigen values
    [U, λ] ← eig(·)
    % Calcular C y B
    C1, C2, B1, B2
    % Calcular error

    % Actualizar matrices
    if (error < tol) then break;
end
```

Matrices de covarianza conocidas:

$R_{ss} \Rightarrow$ matriz. de covarianza exponencial

$R_{v_1v_1} = 0{,}25\, I_{30}$ $\qquad$ $R_{v_2v_2} = 0{,}75\, I_{30}$

---

Matrices por encontrar: Con $\bar{X}_1 = A_1\bar{S} + \bar{V}_1$
$\bar{X}_2 = A_2\bar{S} + V_2$

$R_{x_1x_1}$, $R_{x_2x_2}$, $R_{x_1x_2}$, $R_{x_2x_1}$, $R_{sx_1}$, $R_{sx_2}$, $R_{x_2s}$

---

$$R_{s\bar{x}_1} = R_{s(A_1S+V_1)} = R_{sA_1S} + R_{sv_1} = \cancel{A_1} R_{ss}A_1^T + \cancel{R_{sv_1}}^{\,0:\ \perp}$$

$$\boxed{R_{s\bar{x}_1} = \cancel{A_1} R_{ss}A_1^T}$$ //

$$R_{s\bar{x}_2} = R_{s(A_2S+V_2)} = \cancel{R_{sA_2S}} \cancel{R}\ R_{sA_2S + sV_2} = R_{sA_2S} + R_{sv_2}$$

$$= \cancel{A_2} R_{ss}A_2^T + \cancel{R_{sv_2}}^{\,0\ \perp} \qquad \boxed{R_{sx_2} = \cancel{A_2}\, R_{ss}A_2^T}$$

$$R_{x_2s} = R_{(A_2S+V_2)S} = R_{A_2SS + V_2S} = R_{A_2SS} + R_{V_2S} = A_2R_{ss} + \cancel{R_{v_2s}}^{\,0}$$

$$\boxed{R_{x_2s} = A_2\, R_{ss}}$$ //

---

$$R_{\bar{x}_1\bar{x}_1} = R_{(A_1S+V_1)(A_1S+V_1)} = R_{(A_1SA_1S + A_1SV_1 + V_1A_1S + V_1V_1)}$$

$$= R_{A_1SA_1S} + R_{A_1SV_1} + R_{V_1A_1S} + R_{V_1V_1}$$

$$= A_1 R_{ss} A_1^T + A_1 \cancel{R_{sv_1}}^{\,0} + \cancel{R_{v_1s}}^{\,0} A^T + R_{v_1v_1}$$

$$\boxed{R_{x_1x_1} = A_1 R_{ss} A_1^T + R_{v_1v_1}}$$ //

$$R_{x_2x_2} = R_{(A_2S+V_2)(A_2S+V_2)} = R_{(A_2SA_2S + A_2SV_2 + V_2A_2S + V_2V_2)}$$

$$= R_{A_2SA_2S} + R_{A_2SV_2} + R_{V_2A_2S} + R_{V_2V_2}$$

$$= A_2 R_{SS} A_2^T + A_2 \cancel{R_{SV_2}}^{\to 0} + \cancel{R_{V_2S}}^{\to 0} A_2^T + R_{V_2V_2}$$

$$\boxed{R_{x_2x_2} = A_2 R_{SS} A_2^T + R_{V_2V_2}}$$

---

$$R_{x_1x_2} = R_{(A_1S+V_1)(A_2S+V_2)} = R_{(A_1SA_2S + A_1SV_2 + V_1A_2S + V_1V_2)}$$

$$= R_{A_1SA_2S} + R_{A_1SV_2} + R_{V_1A_2S} + R_{V_1V_2}$$

$$= A_1 R_{SS} A_2^T + A_1 \cancel{R_{SV_2}}^{\to 0} + \cancel{R_{V_1S}}^{\to 0} A_2^T + \cancel{R_{V_1V_2}}^{\to 0}$$

$$\boxed{R_{x_1x_2} = A_1 R_{SS} A_2^T}$$

$$R_{x_2x_1} = R_{(A_2S+V_2)(A_1S+V_1)} = R_{(A_2SA_1S + \overline{A_2SV_1 + V_2A_1S + V_2V_1})}$$

$$\boxed{R_{x_2x_1} = A_2 R_{SS} A_1^T}$$

En resumen:

$$R_{x_1x_1} = A_1 R_{ss} A_1^T + R_{v_1v_1}$$

$$R_{x_2x_2} = A_2 R_{ss} A_2^T + R_{v_2v_2}$$

$$R_{x_1x_2} = A_1 R_{ss} A_2^T \quad , \quad R_{x_2x_1} = A_2 R_{ss} A_1^T$$

$$R_{sx_1} = R_{ss} A_1^T \quad , \quad R_{sx_2} = R_{ss} A_2^T \quad , \quad R_{x_2s} = A_2 R_{ss}$$