Теор G_1, G_2 – дискретно-треуг. $\Rightarrow G_1 \times G_2$ тоже

д-во: $d_1 = diam(G_1)$, $d_2 = diam(G_2) \Rightarrow diam(G_1 \times G_2) = d_1 + d_2$

Проверим определение.

$(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(G_1 \times G_2)$

$$\underbrace{\rho_{G_1 \times G_2}((u_1,v_1),(u_2,v_2))}_{a} = \underbrace{\rho_{G_1}(u_1,u_2)}_{a_1} + \underbrace{\rho_{G_2}(v_1,v_2)}_{a_2}$$

$b, c \le d_1 + d_2$: (a, b, c) удовл. нер-ву Δ

Нужно д-ть $\exists (u_3, v_3)$: $\begin{cases} \rho_{G_1 \times G_2}((u_1,v_1),(u_3,v_3)) = b \\ \rho_{G_1 \times G_2}((u_2,v_2),(u_3,v_3)) = c \end{cases}$

$\Leftarrow$

$$\begin{cases} \rho_{G_1}(u_1,u_3) + \rho_{G_2}(v_1,v_3) = b \\ \rho_{G_2}(u_2,u_3) + \rho_{G_2}(v_2,v_3) = c \end{cases}$$

Достаточно разбить треугольник (a,b,c) на два: $(a_1, x, y) + (a_2, b-x, c-y)$, где все стороны 1-ого $\le d_1$, все стороны 2-ого $\le d_2$.

G_1, G_2 дискр. треуг. $\Rightarrow \exists u_3 \in V(G_1)\ \exists v_3 \in V(G_2)$

такие что $\rho_{G_1}(u_1,u_3) = x$, $\rho_{G_1}(u_2,u_3) = y$

$\rho_{G_2}(v_1,v_3) = b - x$, $\rho_{G_2}(v_2,v_3) = c - y$.

$\Rightarrow (u_3, v_3)$ построена.

Осталось научиться так разбивать треугольник на 2.

Утв. 1 $\forall$ треуг (a,b,c) $\forall a_1, a_2 : a_1 + a_2 = a$

$\exists$ разбиение $(a,b,c) = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$

такое что $a_1 \ge b_1, c_1$

д-во: Мат. индукция по a_1

База: $a_1 = 0$. $(a,b,c) = (0,0,0) + (a,b,c)$

Переход $a_1 \to a_1 + 1$. Имеем разбиение $(a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2)$.

Разберем 4 случая:

1. $a_2 = b_2 = c_2$
   $(a,b,c) = (a_1+1, b_1+1, c_1+1) + (a_2-1, b_2-1, c_2-1)$
2. $b_2 \ne c_2$ Уменьшим a_2, $max(b_2, c_2) > 0$
   $(a,b,c) = (a_1+1, b_1+1, c_1) + (a_2-1, b_2-1, c_2)$, если $b_2 > c_2$.
3. $a_2 < b_2 = c_2$
   $(a,b,c) = (a_1+1, b_1+1, c_1+1) + (a_2-1, b_2-1, c_2-1)$
4. $a_2 > b_2 = c_2 \Rightarrow b_2, c_2 > 0$
   $(a,b,c) = (a_1+1, b_1+1, c_1) + (a_2-1, b_2-1, c_2)$

ч.т.д.

Утв.2 Пусть дан треуг. (a,b,c), $a_1 + a_2 = a$, $a_1 \le d_1$, $a_2 \le d_2$

Все стороны $\le d_1 + d_2$. Тогда $\exists$ разбиение

$(a,b,c) = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$, такое что $\begin{cases} a_1, b_1, c_1 \le d_1 \\ a_2, b_2, c_2 \le d_2 \end{cases}$

д-во: По Утв. 1 $\exists$ разбиение

$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$, такое что $a_1 \ge b_1, c_1$

$a_1 \le d_1 \Rightarrow b_1, c_1 \le d_1$. Хотим: $b_2, c_2 \le d_2$.

Гипотеза: Пусть дано разбиение $(a,b,c) = (a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2)$

где $a_1 \le d_1$, $a_2 \le d_2$, $b_1, c_1 \le d_1$, $a, b, c \le d_1 + d_2$, тогда $\exists x, y \ge 0$

что $(a_1, b_1 + x, c_1 + y) + (a_2, b_2 - x, c_2 - y) = (a,b,c)$ – разб.

удовл. искомому свойству.

Мат. индукция по b_2. Не умаляя общности считаем $b_2 \geqslant c_2$

База: $b_2 \le d_2$. $\Rightarrow x = y = 0$, т.к. $d_2 \geqslant a_2$, $d_2 \geqslant b_2 \geqslant c_2$.

Переход: $b_2 - 1 \longrightarrow b_2$.

3 случая:

1. $b_2 \geqslant c_2 > d_2$

   Уменьшим b_2, c_2 на 1, увеличим b_1, c_1 на 1.

   $\Rightarrow b_1 \le d_1$, т.к. иначе $b_2 \ge d_2$ и $b_1 > d_1 \Rightarrow b > d_1 + d_2$

   Аналогично $c_1 \le d_1$. Далее предположение индукции.

2. $c_2 \le d_2$ и $c_1 < d_1$

   Так же $b_2 \downarrow$, $c_2 \downarrow$, $b_1 \uparrow$, $c_1 \uparrow$

   $\Rightarrow c_1 \le d_1$, $b_2 \le d_1$, т.к. иначе $b > d_1 + d_2$.

3. $c_2 \le d_2$ и $c_1 = d_1$

   $\Rightarrow b_2 \downarrow$, $b_1 \uparrow$

   (a_2, b_2, c_2) валидный тр., т.к. $b_2 \ge d_2 \geqslant a_2, c_2$.

   (a_1, b_1, c_1) валидный, иначе $b_1 > a_1 + c_1 = a_1 + d_1 \ge d_1$

   Пр-ие, т.к. $b = b_1 + b_2 > d_1 + d_2$.

ч.т.д.