Рассмотрим ЛНС с матрицей

$A=\begin{pmatrix}4&2&-2\\-27&-9&11\\0&1&-1\end{pmatrix}$, имеющей собственные числа $\lambda_{1,2,3}=-2$, и

$$q(x)=\begin{pmatrix}\alpha_0x^{-2}e^{-2x}+\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3+(\alpha_4x+\alpha_5)e^{-2x}+(\alpha_6x+\alpha_7)\sin x\\ \beta_0x^{-2}e^{-2x}+\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3+(\beta_4x+\beta_5)e^{-2x}+(\beta_6x+\beta_7)\sin x\\ \gamma_0x^{-2}e^{-2x}+\gamma_1x^2+\gamma_2x+\gamma_3+(\gamma_4x+\gamma_5)e^{-2x}+(\gamma_6x+\gamma_7)\sin x\end{pmatrix};$$

Варианты неоднородностей:

1) $q(x)=\begin{pmatrix}2\big(-x^2+x-2-e^{-2x}(8x-1-x^{-2})+2(12x+1)\sin x\big)\\ 9(x^2-x+3)+e^{-2x}(56x+1-3x^{-2})-8(21x+4)\sin x\\ -x^2+x+1-e^{-2x}(8x-1-3x^{-2})+39x\sin x\end{pmatrix}$,

2) $q(x)=\begin{pmatrix}4x^2-2x+4-e^{-2x}(6x+1)+(10x+6)\sin x\\ -27x^2-27+e^{-2x}(27x+9+2x^{-2})-39x\sin x\\ e^{-2x}x^{-2}+(13x-1)\sin x\end{pmatrix}$.

1. Найдем фундаментальную матрицу линейной однородной системы

$y_1'=4y_1+2y_2-2y_3,\quad y_2'=-27y_1-9y_2+11y_3,\quad y_3'=y_2-y_3.$

Три линейно независимых решения ЛОС будем искать в виде

$y_1=e^{-2x}(a_2x^2+a_1x+a_0),\ y_2=e^{-2x}(b_2x^2+b_1x+b_0),\ y_3=e^{-2x}(c_2x^2+c_1x+c_0).$

Подставим эти функции в систему, получая тождества:

$$\begin{aligned}&-2(a_2x^2+a_1x+a_0)+(2a_2x+a_1)\equiv\\&\qquad\equiv 4(a_2x^2+a_1x+a_0)+2(b_2x^2+b_1x+b_0)-2(c_2x^2+c_1x+c_0),\\&-2(b_2x^2+b_1x+b_0)+(2b_2x+b_1)\equiv\\&\qquad\equiv -27(a_2x^2+a_1x+a_0)-9(b_2x^2+b_1x+b_0)+11(c_2x^2+c_1x+c_0),\\&-2(c_2x^2+c_1x+c_0)+(2c_2x+c_1)\equiv\ (b_2x^2+b_1x+b_0)-(c_2x^2+c_1x+c_0).\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при x^2,x^1,x^0:

$\begin{cases}-2a_2=4a_2+2b_2-2c_2,\\-2b_2=-27a_2-9b_2+11c_2,\\-2c_2=b_2-c_2;\end{cases}\qquad \begin{cases}2a_2-2a_1=4a_1+2b_1-2c_1,\\2b_2-2b_1=-27a_1-9b_1+11c_1,\\2c_2-2c_1=b_1-c_1;\end{cases}$

$\begin{cases}a_1-2a_0=4a_0+2b_0-2c_0,\\b_1-2b_0=-27a_0-9b_0+11c_0,\\c_1-2c_0=b_0-c_0.\end{cases}$

Приведем подобные члены:

$\begin{cases}6a_2+2b_2-2c_2=0,\\27a_2+7b_2-11c_2=0,\\b_2+c_2=0;\end{cases}\quad \begin{cases}3a_1+b_1-c_1=a_2,\\27a_1+7b_1-11c_1=-2b_2,\\b_1+c_1=2c_2;\end{cases}\quad \begin{cases}6a_0+2b_0-2c_0=a_1,\\27a_0+7b_0-11c_0=-b_1,\\b_0+c_0=c_1.\end{cases}$

В полученных системах выразим коэффициенты a_j,b_j через c_j $(j=1,2,3)$:

$\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_2/3\\-c_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_1/3-4c_2/9\\2c_2-c_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_0/3-2c_1/9+2c_2/27\\c_1-c_0\end{pmatrix}.$

Имеет место невырожденный случай I, при котором три линейно независимых частных решения ЛОС ищем, последовательно приравнивая строку коэффициентов (c_0, c_1, c_2) к строкам единичной (или диагональной, чтобы убрать числовые знаменатели) матрицы и находя по ним остальные коэффициенты:

$c_0 = 3, c_1 = 0, c_2 = 0$, тогда $a_0 = 2, b_0 = -3, a_1 = 0, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 0$;
$c_0 = 0, c_1 = 9, c_2 = 0$, тогда $a_0 = -2, b_0 = 9, a_1 = 6, b_1 = -9, a_2 = 0, b_2 = 0$;
$c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 27$, тогда $a_0 = 2, b_0 = 0, a_1 = -12, b_1 = 54, a_2 = 18, b_2 = -27$.

В результате вещественная фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(x) = e^{-2x}\begin{pmatrix} 2 & 6x-2 & 18x^2-12x-2 \\ -3 & -9x+9 & -27x^2+54x \\ 3 & 9x & 27x^2 \end{pmatrix},$$

а общее решение $y = \Phi(x)c$ ЛОС, где $c = \operatorname{colon}(c_1, c_2, c_3)$, имеет вид

$$y = e^{-2x}\begin{pmatrix} 2\big(c_1 + c_2(3x-1) + c_3(9x^2-6x-1)\big) \\ 3\big(-c_1 - 3c_2(x-1) - 9c_3(x^2-2x)\big) \\ 3(c_1 + 3c_2 x + 9c_3 x^2) \end{pmatrix}.$$

2. Неоднородность запишем в виде: $q = \sum\limits_{j=0}^{3} q^{(j)}(x)$, где $q^{(0)} = x^{-2}e^{-2x}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\\ \gamma_0\end{pmatrix}$,

$$q^{(1)} = \begin{pmatrix}\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 \\ \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3 \\ \gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3\end{pmatrix}, \quad q^{(2)} = e^{-2x}\begin{pmatrix}\alpha_4 x + \alpha_5 \\ \beta_4 x + \beta_5 \\ \gamma_4 x + \gamma_5\end{pmatrix}, \quad q^{(3)} = \begin{pmatrix}(\alpha_6 x + \alpha_7)\sin x \\ (\beta_6 x + \beta_7)\sin x \\ (\gamma_6 x + \gamma_7)\sin x\end{pmatrix}.$$

2^0. Частное решение для неоднородности $q^0 = x^{-2}e^{-2x}\operatorname{colon}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ будем искать методом вариации произвольной постоянной, считая константы из формулы общего решения ЛОС функциями x, т. е. в виде $y = \psi^{(0)}(x)$, где

$$\begin{cases} \psi_1^{(0)} = e^{-2x}\left(2c_1(x) + c_2(x)(6x-2) + c_3(x)(18x^2-12x-2)\right), \\ \psi_2^{(0)} = e^{-2x}\left(-3c_1(x) + c_2(x)(-9x+9) + c_3(x)(-27x^2+54x)\right), \\ \psi_3^{(0)} = e^{-2x}\left(3c_1(x) + 9c_2(x)x + 27c_3(x)x^2\right). \end{cases}$$

Как было установлено, вектор производных $c'(x)$ удовлетворяет системе

$$\Phi(x)c'(x) = q_0(x), \text{ или } \begin{cases} 2c_1' + (6x-2)c_2' + (18x^2-12x-2)c_3' = \alpha_0 x^{-2}, \\ -3c_1' + (-9x+9)c_2' + (-27x^2+54x)c_3' = \beta_0 x^{-2}, \\ 3c_1' + 9xc_2' + 27x^2c_3' = \gamma_0 x^{-2}. \end{cases}$$

$$\text{Следовательно, } \begin{cases} c_1' = -\Big(3(9\alpha_0 + 2\beta_0 - 4\gamma_0) + 2(\beta_0+\gamma_0)x^{-1} - 2\gamma_0 x^{-2}\Big)/6, \\ c_2' = \Big(3(9\alpha_0 + 2\beta_0 - 4\gamma_0)x^{-1} + (\beta_0+\gamma_0)x^{-2}\Big)/9, \\ c_3' = -(9\alpha_0 + 2\beta_0 - 4\gamma_0)x^{-2}/18. \end{cases}$$

$$\text{Поэтому } \begin{cases} c_1(x) = -\Big(3x(9\alpha_0 + 2\beta_0 - 4\gamma_0) + 2(\beta_0+\gamma_0)\ln|x| + 2\gamma_0 x^{-1}\Big)/6, \\ c_2(x) = \Big(3(9\alpha_0 + 2\beta_0 - 4\gamma_0)\ln|x| - (\beta_0+\gamma_0)x^{-1}\Big)/9, \\ c_3(x) = (9\alpha_0 + 2\beta_0 - 4\gamma_0)x^{-1}/18. \end{cases}$$

Введем два обозначения: $K = 9\alpha_0 + 2\beta_0 - 4\gamma_0$ и $L = \beta_0 + \gamma_0$. В результате

$$\begin{cases} \psi_1^{(0)} = e^{-2x}\Big[2\big(Kx - (K+L)/3\big)\ln|x| - 2Lx/3 - 2K/3 - \alpha_0 x^{-1}\Big], \\ \psi_2^{(0)} = e^{-2x}\Big[\big(-3Kx + 3K + L\big)\ln|x| + Lx + 3K - \beta_0 x^{-1}\Big], \\ \psi_3^{(0)} = e^{-2x}\Big[\big(3Kx - L\big)\ln|x| - Lx - \gamma_0 x^{-1}\Big]. \end{cases}$$

Варианты выбора параметров неоднородности:

$$1)\ \begin{matrix} \alpha_0 = 2, \\ \beta_0 = -3, \\ \gamma_0 = 3, \end{matrix} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} \psi_1^{(0)} = -2e^{-2x}x^{-1}, \\ \psi_2^{(0)} = 3e^{-2x}x^{-1}, \\ \psi_3^{(0)} = -3e^{-2x}x^{-1}; \end{cases} \qquad (K = L = 0).$$

$$2)\ \begin{matrix} \alpha_0 = 0, \\ \beta_0 = 2, \\ \gamma_0 = 1, \end{matrix} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} \psi_1^{(0)} = -2e^{-2x}\big(\ln|x| + x\big), \\ \psi_2^{(0)} = e^{-2x}\big(3\ln|x| + 3x - 2x^{-1}\big), \\ \psi_3^{(0)} = -e^{-2x}\big(3\ln|x| + 3x + x^{-1}\big); \end{cases} \qquad (K = 0,\ \ L = 3).$$

2^1. Частное решение для неоднородности $q^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 \\ \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3 \\ \gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3 \end{pmatrix}$ будем искать методом неопределенных коэффициентов.

Характеристическое число $\lambda_0 = 0$ неоднородности $q^{(1)}(x)$ не совпадает с собственными числами матрицы A, поэтому решение ищем в виде $y = \psi^{(1)}(x)$, где

$\psi_1^{(1)} = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \psi_2^{(1)} = b_2x^2 + b_1x + b_0, \quad \psi_3^{(1)} = c_2x^2 + c_1x + c_0.$

Подставляя эти функции в ЛНС $y' = Ay + q^{(1)}(x)$, получаем тождества

$$\begin{aligned} 2a_2x + a_1 &\equiv 4(a_2x^2 + a_1x + a_0) + 2(b_2x^2 + b_1x + b_0) - 2(c_2x^2 + c_1x + c_0) + \\ &\quad + (\alpha_1x^2 + \alpha_2x + \alpha_3), \\ 2b_2x + b_1 &\equiv -27(a_2x^2 + a_1x + a_0) - 9(b_2x^2 + b_1x + b_0) + 11(c_2x^2 + c_1x + c_0) + \\ &\quad + (\beta_1x^2 + \beta_2x + \beta_3), \\ 2c_2x + c_1 &\equiv (b_2x^2 + b_1x + b_0) - (c_2x^2 + c_1x + c_0) + (\gamma_1x^2 + \gamma_2x + \gamma_3). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при линейно независимых функциях:

$$x^2: \begin{cases} 4a_2 + 2b_2 - 2c_2 + \alpha_1 = 0, \\ 27a_2 + 9b_2 - 11c_2 - \beta_1 = 0, \\ b_2 - c_2 + \gamma_1 = 0; \end{cases} \qquad x^1: \begin{cases} 2a_2 - 4a_1 - 2b_1 + 2c_1 - \alpha_2 = 0, \\ 2b_2 + 27a_1 + 9b_1 - 11c_1 - \beta_2 = 0, \\ 2c_2 - b_1 + c_1 - \gamma_2 = 0; \end{cases}$$

$$x^0: \begin{cases} a_1 - 4a_0 - 2b_0 + 2c_0 - \alpha_3 = 0, \\ b_1 + 27a_0 + 9b_0 - 11c_0 - \beta_3 = 0, \\ c_1 - b_0 + c_0 - \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Решая системы последовательно, начиная с последней, находим значения коэффициентов:

$$a_2 = (-\alpha_1 + 2\gamma_1)/4, b_2 = (-27\alpha_1 - 4\beta_1 + 10\gamma_1)/8, c_2 = (-27\alpha_1 - 4\beta_1 + 18\gamma_1)/8,$$

$$a_1 = (13\alpha_1 + 2\beta_1 - 8\gamma_1 - \alpha_2 + 2\gamma_2)/4, b_1 = (27\alpha_1 + 6\beta_1 - 8\gamma_1 - 27\alpha_2 - 4\beta_2 + 10\gamma_2)/8,$$
$$c_1 = (81\alpha_1 + 14\beta_1 - 44\gamma_1 - 27\alpha_2 - 4\beta_2 + 18\gamma_2)/8,$$

$$a_0 = (-34\alpha_1 - 6\beta_1 + 18\gamma_1 + 13\alpha_2 + 2\beta_2 - 8\gamma_2 - 2\alpha_3 + 4\gamma_3)/8,$$
$$b_0 = (-2\beta_1 - 6\gamma_1 + 27\alpha_2 + 6\beta_2 - 8\gamma 2/ - 54\alpha_3 - 8\beta_3 + 20\gamma_3)/16,$$
$$c_0 = (-162\alpha_1 - 30\beta_1 + 82\gamma_1 + 81\alpha_2 + 14\beta_2 - 44\gamma_2 - 54\alpha_3 - 8\beta_3 + 36\gamma_3)/16.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \psi_1^{(1)} = \big[2(-\alpha_1 + 2\gamma_1)x^2 + 2(13\alpha_1 + 2\beta_1 - 8\gamma_1 - \alpha_2 + 2\gamma_2)x - \\ \qquad - 34\alpha_1 - 6\beta_1 + 18\gamma_1 + 13\alpha_2 + 2\beta_2 - 8\gamma_2 - 2\alpha_3 + 4\gamma_3\big]/8, \\ \psi_2^{(1)} = \big[2(-27\alpha_1 - 4\beta_1 + 10\gamma_1)x^2 + 2(27\alpha_1 + 6\beta_1 - 8\gamma_1 - 27\alpha_2 - 4\beta_2 + 10\gamma_2)x - \\ \qquad - 2\beta_1 - 6\gamma_1 + 27\alpha_2 + 6\beta_2 - 8\gamma_2 - 54\alpha_3 - 8\beta_3 + 20\gamma_3\big]/16, \\ \psi_3^{(1)} = \big[2(-27\alpha_1 - 4\beta_1 + 18\gamma_1)x^2 + 2(81\alpha_1 + 14\beta_1 - 44\gamma_1 - 27\alpha_2 - 4\beta_2 + 18\gamma_2)x - \\ \qquad - 162\alpha_1 - 30\beta_1 + 82\gamma_1 + 81\alpha_2 + 14\beta_2 - 44\gamma_2 - 54\alpha_3 - 8\beta_3 + 36\gamma_3\big]/16. \end{cases}$$

Варианты выбора коэффициентов:

1) $\begin{matrix} \alpha_1 = -2, & \alpha_2 = 2, & \alpha_3 = -4, \\ \beta_1 = 9, & \beta_2 = -9, & \beta_3 = 27, \\ \gamma_1 = -1, & \gamma_2 = 1, & \gamma_3 = 1, \end{matrix}$ тогда $\begin{cases} \psi_1^{(1)} = 1, \\ \psi_2^{(1)} = x^2, \\ \psi_3^{(1)} = x; \end{cases}$

2) $\begin{matrix} \alpha_1 = 4, & \alpha_2 = -2, & \alpha_3 = 4, \\ \beta_1 = -27, & \beta_2 = 0, & \beta_3 = -27, \\ \gamma_1 = 0, & \gamma_2 = 0, & \gamma_3 = 0, \end{matrix}$ тогда $\begin{cases} \psi_1^{(1)} = -x^2 - 1, \\ \psi_2^{(1)} = 0, \\ \psi_3^{(1)} = 0; \end{cases}$

2^2. Частное решение для неоднородности $q^{(2)}(x) = e^{-2x}\begin{pmatrix} \alpha_4 x + \alpha_5 \\ \beta_4 x + \beta_5 \\ \gamma_4 x + \gamma_5 \end{pmatrix}$ ищем методом неопределённых коэффициентов.

Характеристическое число $\lambda_0 = -2$ неоднородности $q^{(2)}(x)$ совпадает с собственным числом матрицы A, причем $m = 1$, $\tilde{k} = k = s = 3$, поэтому решение ищем в виде $y = \psi^{(2)}(x)$, где

$$\begin{cases} \psi_1^{(2)} = e^{-2x}(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0), \\ \psi_2^{(2)} = e^{-2x}(b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0), \\ \psi_3^{(2)} = e^{-2x}(c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0). \end{cases}$$

Выбираем $c_2 = c_1 = c_0 = 0$ и подставляем эти функции в ЛНС $y' = Ay + q^{(2)}(x)$, получая тождества:

$$
\begin{aligned}
&-2(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+(4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1)\equiv\\
&\quad\equiv 4(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+2(b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)-\\
&\quad-2(c_4x^4+c_3x^3)+(\alpha_4x+\alpha_5),\\
&-2(b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)+(4b_4x^3+3b_3x^2+2b_2x+b_1)\equiv\\
&\quad\equiv -27(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)-9(b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)+\\
&\quad+11(c_4x^4+c_3x^3)+(\beta_4x+\beta_5),\\
&-2(c_4x^4+c_3x^3)+(4c_4x^3+3c_3x^2)\equiv\\
&\quad\equiv (b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)-(c_4x^4+c_3x^3)+(\gamma_4x+\gamma_5).
\end{aligned}
$$

Приравниваем коэффициенты при линейно независимых функциях:

$$
x^4:\begin{cases}-6a_4-2b_4+2c_4=0,\\ 27a_4+7b_4-11c_4=0,\\ -b_4-c_4=0;\end{cases}\qquad
x^3:\begin{cases}-6a_3+4a_4-2b_3+2c_3=0,\\ 27a_3+7b_3+4b_4-11c_3=0,\\ -b_3-c_3+4c_4=0;\end{cases}
$$

$$
x^2:\begin{cases}-6a_2+3a_3-2b_2=0,\\ 27a_2+7b_2+3b_3=0,\\ -b_2+3c_3=0;\end{cases}\quad
x^1:\begin{cases}-6a_1+2a_2-2b_1=\alpha_4,\\ 27a_1+7b_1+2b_2=\beta_4,\\ -b_1=\gamma_4;\end{cases}\quad
x^0:\begin{cases}-6a_0+a_1-2b_0=\alpha_5,\\ 27a_0+7b_0+b_1=\beta_5,\\ -b_0=\gamma_5.\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_0=(\beta_5+7\gamma_5+\gamma_4)/27,\quad a_1=\alpha_5+2(\beta_5-2\gamma_5+\gamma_4)/9,\\
&a_2=(3\alpha_4+18\alpha_5+4\beta_5-8\gamma_5-2\gamma_4)/6,\\
&a_3=\alpha_4-3\alpha_5+(\beta_4-2\beta_5+4\gamma_5-\gamma_4)/3,\quad a_4=(-9\alpha_4-2\beta_4+4\gamma_4)/8,\\
&b_0=-\gamma_5,\quad b_1=-\gamma_4,\quad b_2=-3\beta_5+6\gamma_5+(\gamma_4+\beta_4-27\alpha_5)/2,\\
&b_3=\beta_5-2\gamma_5-(27\alpha_4-27\alpha_5+7\beta_4-11\gamma_4)/6,\quad b_4=(9\alpha_4+2\beta_4-4\gamma_4)/8,\\
&c_3=2\gamma_5-\beta_5-(27\alpha_5-\beta_4-\gamma_4)/6,\quad c_4=(-9\alpha_4-2\beta_4+4\gamma_4)/8.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{cases}
\psi_1^{(2)}=e^{-2x}\Big[6(3\alpha_4+\beta_4-\gamma_4-9\alpha_5-2\beta_5+4\gamma_5)x^3+\\
\quad+3(3\alpha_4-2\gamma_4+18\alpha_5+4\beta_5-8\gamma_5)x^2+\\
\quad+2(2\gamma_4+9\alpha_5+2\beta_5-4\gamma_5)x+2(\gamma_4+\beta_5+7\gamma_5)\Big]/18,\\
\psi_2^{(2)}=e^{-2x}\Big[(-27\alpha_4-7\beta_4+11\gamma_4+27\alpha_5+6\beta_5-12\gamma_5)x^3+\\
\quad+3(\beta_4+\gamma_4-27\alpha_5-6\beta_5+12\gamma_5)x^2-6\gamma_4x-6\gamma_5\Big]/6,\\
\psi_3^{(2)}=e^{-2x}\Big[\beta_4+\gamma_4-27\alpha_5-6\beta_5+12\gamma_5\Big]x^3/6.
\end{cases}
$$

И здесь степень многочлена «случайно» оказалась ниже четвертой.

Варианты выбора коэффициентов:

$$1)\ \begin{array}{ll} \alpha_4 = -16, & \alpha_5 = 2, \\ \beta_4 = 56, & \beta_5 = 1, \\ \gamma_4 = -8, & \gamma_5 = 1, \end{array} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} \psi_1^{(2)} = 0, \\ \psi_2^{(2)} = e^{-2x}(8x-1), \\ \psi_3^{(2)} = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{array}{ll} \alpha_4 = -6, & \alpha_5 = -1, \\ \beta_4 = 27, & \beta_5 = 9, \\ \gamma_4 = 0, & \gamma_5 = 0, \end{array} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} \psi_1^{(2)} = e^{-2x}(x+1), \\ \psi_2^{(2)} = 0, \\ \psi_3^{(2)} = 0. \end{cases}$$

2^3. Частное решение для $q_3(x) = \begin{pmatrix} (\alpha_6 x + \alpha_7)\sin x \\ (\beta_6 x + \beta_7)\sin x \\ (\gamma_6 x + \gamma_7)\sin x \end{pmatrix}$ ищем методом неопределенных коэффициентов.

Характеристическое число $\lambda_0 = i$ неоднородности $q^{(3)}(x)$ не совпадает с собственными числами матрицы A, поэтому решение ищем в виде
$\psi_j^{(3)} = (a_j x + b_j)\sin x + (c_j x + d_j)\cos x \quad (j = 1, 2, 3)$.

Подставляя эти функции в ЛНС $y' = Ay + q^{(3)}(x)$, получаем тождества

$$\begin{aligned} &(a_1 \sin x + c_1 \cos x + (a_1 x + b_1)\cos x - (c_1 x + d_1)\sin x) \equiv \\ &\equiv \big(4(a_1 x + b_1)\sin x + 2(a_2 x + b_2)\sin x - 2(a_3 x + b_3)\sin x + \\ &\quad + (\alpha_6 x + \alpha_7)\sin x + 4(c_1 x + d_1)\cos x + 2(c_2 x + d_2)\cos x - 2(c_3 x + d_3)\cos x\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(a_2 \sin x + c_2 \cos x + (a_2 x + b_2)\cos x - (c_2 x + d_2)\sin x) \equiv \\ &\equiv \big(-27(a_1 x + b_1)\sin x - 9(a_2 x + b_2)\sin x + 11(a_3 x + b_3)\sin x + \\ &\quad + (\beta_6 x + \beta_7)\sin x - 27(c_1 x + d_1)\cos x - 9(c_2 x + d_2)\cos x + 11(c_3 x + d_3)\cos x\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(a_3 \sin x + c_3 \cos x + (a_3 x + b_3)\cos x - (c_3 x + d_3)\sin x) \equiv \\ &\equiv \big((a_2 x + b_2)\sin x - (a_3 x + b_3)\sin x + (c_2 x + d_2)\cos x - \\ &\quad - (c_3 x + d_3)\cos x + (\gamma_6 x + \gamma_7)\sin x\big). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при $x\cos x, \cos x, x\sin x, \sin x$:

$$x\cos x : \begin{cases} a_1 - 4c_1 - 2c_2 + 2c_3 = 0, \\ a_2 + 27c_1 + 9c_2 - 11c_3 = 0, \\ a_3 - c_2 + c_3 = 0; \end{cases} \qquad \cos x : \begin{cases} b_1 + c_1 - 4d_1 - 2d_2 + 2d_3 = 0, \\ b_2 + c_2 + 27d_1 + 9d_2 - 11d_3 = 0, \\ b_3 + c_3 - d_2 + d_3 = 0; \end{cases}$$

$$x\sin x : \begin{cases} -4a_1 - 2a_2 + 2a_3 - c_1 = \alpha_6, \\ 27a_1 + 9a_2 - 11a_3 - c_2 = \beta_6, \\ -a_2 + a_3 - c_3 = \gamma_6; \end{cases} \qquad \sin x : \begin{cases} a_1 - 4b_1 - 2b_2 + 2b_3 - d_1 = \alpha_7, \\ a_2 + 27b_1 + 9b_2 - 11b_3 - d_2 = \beta_7, \\ a_3 - b_2 + b_3 - d_3 = \gamma_7. \end{cases}$$

Решая системы последовательно, находим значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2(52\alpha_6 + 11\beta_6 - 7\gamma_6)/125,\\
b_1 &= (-573\alpha_6 - 124\beta_6 + 208\gamma_6 + 520\alpha_7 + 110\beta_7 - 70\gamma_7)/625,\\
c_1 &= (53\alpha_6 + 4\beta_6 - 48\gamma_6)/125,\\
d_1 &= (-536\alpha_6 - 68\beta_6 + 356\gamma_6 + 265\alpha_7 + 20\beta_7 - 240\gamma_7)/625,\\
a_2 &= (-351\alpha_6 - 43\beta_6 + 141\gamma_6)/125,\\
b_2 &= (1107\alpha_6 + 191\beta_6 - 472\gamma_6 - 1755\alpha_7 - 215\beta_7 + 705\gamma_7)/625,\\
c_2 &= (243\alpha_6 + 49\beta_6 - 88\gamma_6)/125,\\
d_2 &= (-1026\alpha_6 - 238\beta_6 + 346\gamma_6 + 1215\alpha_7 + 245\beta_7 - 440\gamma_7)/625,\\
a_3 &= (-54\alpha_6 + 3\beta_6 + 89\gamma_6)/125,\\
b_3 &= (-567\alpha_6 - 146\beta_6 + 157\gamma_6 - 270\alpha_7 + 15\beta_7 + 445\gamma_7)/625,\\
c_3 &= (297\alpha_6 + 46\beta_6 - 177\gamma_6)/125,\\
d_3 &= (-1944\alpha_6 - 322\beta_6 + 1074\gamma_6 + 1485\alpha_7 + 230\beta_7 - 885\gamma_7)/625.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{cases}
\psi_1^{(3)} = \Big[\Big(10(52\alpha_6 + 11\beta_6 - 7\gamma_6)x - 573\alpha_6 - 124\beta_6 + 208\gamma_6 + 520\alpha_7 + 110\beta_7 - \\
\quad -70\gamma_7\Big)\sin x + \Big(5(53\alpha_6 + 4\beta_6 - 48\gamma_6)x - 536\alpha_6 - 68\beta_6 + 356\gamma_6 + 265\alpha_7 + 20\beta_7 - \\
\quad -240\gamma_7\Big)\cos x\Big]/625,\\
\psi_2^{(3)} = \Big[\Big(-5(351\alpha_6 + 43\beta_6 - 141\gamma_6)x + 1107\alpha_6 + 191\beta_6 - 472\gamma_6 - 1755\alpha_7 - \\
\quad -215\beta_7 + 705\gamma_7\Big)\sin x + \Big(5x(243\alpha_6 + 49\beta_6 - 88\gamma_6) - 1026\alpha_6 - 238\beta_6 + \\
\quad +346\gamma_6 + 1215\alpha_7 + 245\beta_7 - 440\gamma_7\Big)\cos x\Big]/625,\\
\psi_3^{(3)} = \Big[\Big(-5x(54\alpha_6 - 3\beta_6 - 89\gamma_6) - 567\alpha_6 - 146\beta_6 + 157\gamma_6 - 270\alpha_7 + 15\beta_7 + \\
\quad +445\gamma_7\Big)\sin x + \Big(5x(297\alpha_6 + 46\beta_6 - 177\gamma_6) - 1944\alpha_6 - 322\beta_6 + 1074\gamma_6 + \\
\quad +1485\alpha_7 + 230\beta_7 - 885\gamma_7\Big)\cos x\Big]/625.
\end{cases}$$

Варианты выбора коэффициентов:

1) $\begin{matrix} \alpha_6 = 48, & \alpha_7 = 4, \\ \beta_6 = -168, & \beta_7 = -32, \\ \gamma_6 = 39, & \gamma_7 = 0, \end{matrix}$ тогда $\begin{cases} \psi_1^{(3)} = 6x\sin x, \\ \psi_2^{(3)} = (-33x + 4)\sin x + 2\cos x, \\ \psi_3^{(3)} = 3(x+1)\sin x - (3x-2)\cos x; \end{cases}$

2) $\begin{matrix} \alpha_6 = 10, & \alpha_7 = 6, \\ \beta_6 = -39, & \beta_7 = 0, \\ \gamma_6 = 13, & \gamma_7 = -1, \end{matrix}$ тогда $\begin{cases} \psi_1^{(3)} = 8\sin x - 2(x-3)\cos x, \\ \psi_2^{(3)} = -22\sin x - (5x-18)\cos x, \\ \psi_3^{(3)} = 4x\sin x - 9(x-3)\cos x. \end{cases}$

Ответ: $y = \Phi(x)c + \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \psi^{(3)}$.

Ответ для первого $q(x)$:

$$\begin{cases} y_1 = 2e^{-2x}\Big(9c_3x^2 + 3(c_2 - 2c_3)x + c_1 - c_2 - c_3 - x^{-1}\Big) + 1 + 6x\sin x, \\ y_2 = -e^{-2x}\Big(27c_3x^2 + (9c_2 - 54c_3 - 8)x + 3c_1 - 9c_2 + 1 - 3x^{-1}\Big) + x^2 - \\ \qquad - (33x - 4)\sin x + 2\cos x, \\ y_3 = 3e^{-2x}\Big(9c_3x^2 + 3c_2x + c_1 - x^{-1}\Big) + x + 3(x+1)\sin x - (3x-2)\cos x. \end{cases}$$

Ответ для второго $q(x)$:

$$\begin{cases} y_1 = e^{-2x}\Big(18c_3x^2 + (6c_2 - 12c_3 - 1)x + 2c_1 - 2c_2 - 2c_3 + 1 - 2\ln|x|\Big) - x^2 - 1 + \\ \qquad + 8\sin x - 2(x-3)\cos x, \\ y_2 = -e^{-2x}\Big(27c_3x^2 + 3(3c_2 - 18c_3 - 1)x + 3c_1 - 9c_2 - 3\ln|x| + 2x^{-1}\Big) - \\ \qquad - 22\sin x - (5x - 18)\cos x, \\ y_3 = e^{-2x}\Big(27c_3x^2 + 3(3c_2 - 1)x + 3c_1 - 3\ln|x| - x^{-1}\Big) + x^2 + 4x\sin x - 9(x-3)\cos x. \end{cases}$$