

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Kolegium Analiz Ekonomicznych

**Polityka fiskalna w Polsce:
stabilizująca reguła wydatkowa
oraz optymalizacja polityki finansowej samorządów**

Dominik Korniluk

Rozprawa doktorska napisana
pod kierunkiem
dr. hab. Jakuba Growca, prof. SGH
Katedra Ekonomii Ilościowej
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie



Warszawa, 2017

Spis treści

Streszczenie	6
Abstract	8
Wprowadzenie	9
I Stabilizująca reguła wydatkowa a stabilność i cykliczność finansów publicznych w Polsce	12
1 Stabilizująca reguła wydatkowa	12
1.1 Przegląd literatury	12
1.2 Formuła SRW obowiązującej w Polsce	14
2 Symulacje stochastyczne polskiej gospodarki przy założeniu obowiązywania SRW	16
2.1 Założenia	16
2.1.1 Luka produktowa	17
2.1.2 Inflacja	20
2.1.3 Stopa procentowa dłużu i wynik pierwotny	21
2.1.4 Pozostałe założenia	22
2.2 Wyniki symulacji	23
3 Ocena polityki fiskalnej prowadzonej zgodnie z SRW	26
3.1 Cykliczność i stabilność finansów publicznych przed i po SRW	27
3.1.1 Graficzna analiza cykliczności	27
3.1.2 Ocena stabilności w oparciu o stopień integracji	29
3.1.3 Fiskalna funkcja reakcji	31
3.2 Ocena modyfikacji SRW z 2014 i 2015 r.	34
Podsumowanie części I	37
II Optymalizacja polityki finansowej samorządów	38
4 Polityka finansowa samorządów w świetle literatury	38
4.1 Teorie dawne (pierwszej generacji)	38
4.2 Kwestia stopnia decentralizacji władzy i teorie wyboru publicznego	40
4.3 Współczesne teorie fiskalnego federalizmu	41
4.4 Badania poświęcone polityce samorządowej w Polsce	41
5 Model decyzyjny władz samorządowych	42
5.1 Preferencje	43
5.2 Ograniczenia budżetowe	44
5.3 Reguły fiskalne zapobiegające eksplozji dłużu	46
6 Rozwiążanie modelu	47
6.1 Zapis rozwiązania modelu za pomocą warunków Karusha-Kuhna-Tuckera	47
6.2 Analityczne rozwiązanie dla czwartego roku z napiętym warunkiem IWZ	49
6.3 Analityczne rozwiązanie dla trzeciego roku z napiętym warunkiem IWZ	53
6.4 Numeryczna metoda rozwiązania modelu	56
7 Dobór wartości parametrów strukturalnych modelu	61

7.1	Kalibracja parametrów i wartości startowych modelu w oparciu o dane empiryczne dla Polski	62
7.1.1	Limit dochodów unijnych	62
7.1.2	Udział finansowania własnego inwestycji unijnych	62
7.1.3	Stopa procentowa i stopa zapadalności długu	63
7.1.4	Wskaźnik zadłużenia	65
7.1.5	Dynamika dochodów bieżących	66
7.1.6	Wskaźnik wydatków bieżących	67
7.1.7	Wskaźnik wartości infrastruktury	67
7.1.8	Stopa deprecjacji infrastruktury	69
7.2	Analiza struktury warunków ograniczających	69
7.3	Kalibracja wartości parametrów behawioralnych α i β	71
8	Rozwiązywanie numeryczne modelu oraz analiza wrażliwości optymalnych poziomów wydatków bieżących i inwestycyjnych	74
8.1	Wyniki analizy wrażliwości dla scenariusza rozwiązanego analitycznie z ustalonimi: strukturą warunków ograniczających oraz α i β	75
8.2	Rozwiązywanie numeryczne pełnego modelu oraz wyniki analizy wrażliwości	77
Podsumowanie części II		81
Uwagi końcowe i wnioski		83
Literatura		85
Aneks		91
A Rozwiązywanie dla czwartego roku		91
A.1	Przykładowe rozwiązywanie wariantu I	93
A.2	Przykładowe rozwiązywanie wariantu II	94
A.3	Przykładowe rozwiązywanie wariantu IV	97
B Analityczne rozwiązywanie dla trzeciego roku z napiętym warunkiem IWZ - szczegółowe obliczenia		98
C Rozwiązywanie dla trzeciego roku		103
C.1	Przykładowe rozwiązywanie metodą analityczną	103
C.2	Przykładowe rozwiązywanie metodą numeryczną	110
C.3	Przykładowe rozwiązywanie za pomocą warunków I rzędu	113
D Model o nieskończonym horyzoncie czasowym		117

Córce, Żonie i Rodzicom

Streszczenie

Politykę fiskalną w Polsce można rozpatrywać z dwóch perspektyw, rządowych podsektorów: centralnego i ubezpieczeń społecznych oraz samorządowego podsektora lokalnego. Wydatki tych podsektorów odgrywają znaczącą rolę w polskiej gospodarce, jako że stanowią łącznie prawie połowę produktu krajowego brutto. Celem niniejszej pracy była ocena wpływu reguł fiskalnych na funkcjonowanie polityki fiskalnej, w tym stabilność fiskalną, w całym sektorze instytucji rządowych i samorządowych (ang. general government, GG), przy uwzględnieniu specyfiki jego podsektorów.

Przedmiotem pierwszej części niniejszej pracy było zbadanie wpływu stabilizującej reguły wydatkowej (SRW) na cykliczność i stabilność polityki fiskalnej w Polsce. W zakresie cykliczności zauważono słabą korelację pomiędzy skorygowanym cyklicznie wynikiem i luką produktową, co wskazywałyby na acykliczność lub lekką procykliczność przyszłej polityki fiskalnej prowadzonej zgodnie z SRW. Z drugiej strony, większość oszacowanych funkcji reakcji fiskalnej wskazywała na pozytywny i umiarkowanie odporny wpływ skorygowanej luki produktowej na wysokość wyniku pierwotnego. W zakresie stabilności, fiskalne funkcje reakcji pokazywały pozytywny i umiarkowanie odporny wpływ dłużu w relacji do PKB na wysokość wyniku pierwotnego. Świadczyłyby to o stabilności polityki fiskalnej. Nie zostały jednak spełnione warunki stabilności dłużu, odnoszące się do właściwości szeregu czasowych.

Symulacje stochastyczne wskazały, że dług sektora GG w relacji do PKB obniży się, zgodnie z centralną ścieżką, z 50% w 2014 r. do 10 – 20% w 2040 r., mimo tego mechanizm korygujący będzie aktywny nawet w długim okresie. Deficyt zaś będzie przekraczał 3% PKB średnio co 5-6 lat. Gdyby w 2014 r. nie obniżono progów dłużu w mechanizmie korygującym, to zabrakłoby korekty w latach 2016-2017. To z kolei opóźniłoby osiągnięcie średniookresowego celu budżetowego i wydłużyło okres korekty. Pomimo to, obniżenie progów zacieśniło politykę fiskalną tylko w krótkim okresie. W przeciwieństwie do ww. modyfikacji, zmiana ustawowa z 2015 r. - zastąpienie prognozowanej inflacji CPI celem inflacyjnym - nie jest neutralne, nawet w długim okresie. Obecna formuła narzuca bowiem bardziej restrykcyjną politykę w czasach ponadprzeciętnie wysokiej inflacji.

Dzięki modelowi optymalizacyjnemu polityki finansowej samorządów, będącemu przedmiotem drugiej części pracy, zweryfikowane zostały hipotezy o wpływie wybranych czynników na optymalny poziom w relacji do dochodów bieżących: wydatków bieżących oraz inwestycyjnych. Potwierdzono hipotezę, że większa wartość infrastruktury powoduje zwiększenie wydatków bieżących samorządów. Pokazano także, iż wzrost: stopy deprecjacji infrastruktury, zadłużenia w relacji do dochodów bieżących i, w mniejszym stopniu, stopy współfinansowania inwestycji unijnych wpływa negatywnie na poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących. Oddziaływanie stopy procentowej zaś okazało się być ujemne lub neutralne. Zwiększenie czynnika dyskontowego wywiera różny efekt na wydatki bieżące w zależności od okresu. Nieoczekiwany efekt zaobserwowano w odniesieniu do wskaźnika wydatków bieżących poniesionych przed rozpoczęciem modelowanego okresu. Wyższe przeszłe wydatki ograniczają przestrzeń na wydatki bieżące na początku badanego okresu, ale w kolejnym roku następuje efekt kompensacji, tj. uprzednie oszczędności umożliwiają większe wydatki w porównaniu ze scenariuszem bez oszczędności.

Stwierdzono także, że dodatni wpływ na inwestycje zwykłe (tj. niewspółfinansowane ze środków unijnych) w relacji do dochodów bieżących ma wzrost stopy deprecjacji infrastruktury oraz czynnika dyskontowego. Potwierdzona została także hipoteza o ujemnym wpływie na inwestycje zwykłe w relacji do dochodów bieżących wzrostu: stopy procentowej, stopy zapadalności zadłużenia i wskaźnika infrastruktury. Pozytywnie zweryfikowano natomiast hipotezę o ujemnym wpływie wzrostu limitu dochodów unijnych. W przypadku wskaźnika zadłużenia można także doszukać się efektu kompensacji - ujemny wpływ występuje tylko na początku okresu. Efekt ten

występuje również w odniesieniu do wskaźnika inwestycji zwykłych w roli zmiennej objaśnianej i wskaźnika przeszłych wydatków bieżących jako zmiennej objaśniającej. Okazał się on nawet silniejszy niż w przypadku wydatków bieżących jako zmiennej objaśnianej. Optymalny poziom wydatków inwestycyjnych co do zasady maleje w czasie, co jest konsekwencją przyjętej funkcji użyteczności, która premiuje inwestycje poczynione we wcześniejszym okresie, gdyż poprawiona w ten sposób infrastruktura jest uwzględniana wielokrotnie w użyteczności.

Abstract

Fiscal policy in Poland can be examined from two perspectives, the governmental central and social security subsectors and the local government subsector. Expenditures of those sub-sectors play an important role in the Polish economy, since they constitute together almost half of the gross domestic product. The aim of this dissertation was to assess the impact of fiscal rules on fiscal policy, including fiscal stability, in the general government (GG) sector, accounting for the specific features of its subsectors.

The objective of the first part of this thesis was to investigate the impact of the stabilizing expenditure rule (SER) on cyclical and stability of the fiscal policy in Poland. With regard to the cyclical, weak correlation was found between the cyclically-adjusted balance and the output gap, which would indicate acyclicity or weak procyclicality of the future fiscal policy conducted according to the SER. On the other hand, most of the estimated fiscal reaction functions showed a positive and moderately robust impact of the adjusted output gap on the level of primary balance. With regard to the stability, the fiscal reaction functions showed a positive and moderately robust impact of the debt-to-GDP ratio on the level of primary balance. This would suggest stability of the fiscal policy. However, conditions for the debt stability based on features of the time series were not met.

According to stochastic simulations, the GG debt-to-GDP ratio will decline, along the central path, from 50% in 2014 to 10 – 20% in 2040, though the correction mechanism will be active even in the long term. The deficit will exceed 3% of GDP every 5-6 years on average. If the debt thresholds had not been lowered in 2014, then there would have been no correction in 2016-2017. This, in turn, would have delayed the achievement of the medium term objective and prolonged the period of correction. Nevertheless, the lowered debt thresholds made the fiscal policy narrower only in the short term. Contrary to the aforementioned modification, the amendment introduced in 2015 - the replacement of the forecast CPI by the inflation target - will not be neutral, even in the long term. The reason is that the current formula imposes more restrictive policy during times of extraordinarily high inflation.

In the second part of this dissertation, hypotheses of an impact of the selected factors on the optimal level of current and investment expenditure of local government were verified, based on a novel optimization model of local government financial policy. The hypothesis about the positive impact of value of infrastructure on the current expenditure level was confirmed. It was also shown that an increase in: the rate of infrastructure depreciation, interest rate, debt level and the discount rate of future utility influence negatively the level of current expenditure. An unexpected effect was observed concerning the current expenditure incurred before the modeled period, namely higher past expenses reduce the space for current spending at the beginning of the considered period, but in the next year there is a compensation effect, i.e. former savings allow for higher expenditure than in a scenario without the savings.

It was also found that an increase in the rate of infrastructure depreciation and the discount rate has a positive impact on the ordinary investment (i.e. not funded from the EU funds). Similarly, hypothesis was confirmed about a negative impact of: the interest rate, the debt maturity rate, the debt level and the value of infrastructure on ordinary investment. In the case of debt, however, there is a compensation effect - similar to the one described in the former paragraph. Such an effect occurs also for ordinary investment as a response variable and the past current expenditure as an explanatory variable. It turned out to be even stronger than for the current expenditure as a response variable. The optimal level of investment expenditure declines over time, which is a consequence of an adopted utility function. This function rewards investment realized earlier, because the infrastructure improved in this way is included several times in the utility.

Wprowadzenie

Wydatki sektora instytucji rządowych i samorządowych w Polsce w okresie 2000-2015 r. stanowiły ok. 41 – 46%, a dochody - 38 – 42% PKB. Sektor ów składa się z trzech podsektorów: centralnego i ubezpieczeń społecznych, zarządzanych przez rząd, oraz podsektora lokalnego, na funkcjonowanie którego największy wpływ mają władze jednostek samorządu terytorialnego (JST): województw, powiatów i gmin. O ile polityka fiskalna prowadzona na szczeblu centralnym pozwala na stabilizację wahań cyklicznych i redystrybucję dochodów, tak zaletą polityki prowadzonej w podsektorze lokalnym jest to, że można jej instrumenty (np. poziom i strukturę wydatków) lepiej dostosować do preferencji mieszkańców danego obszaru. Na podstawie powyższych informacji można stwierdzić, że rola państwa w gospodarce polskiej jest fundamentalna, a jego politykę należy rozpatrywać z dwóch perspektyw: centralnego rządu oraz licznych, heterogenicznych władz lokalnych.

Celem pracy jest ocena wpływu reguł fiskalnych na funkcjonowanie polityki fiskalnej, w tym stabilność fiskalną na szczeblu centralnym i lokalnym. Tak sformułowany cel ogólny dzieli się na dwa cele szczegółowe. Cel pierwszej części rozprawy stanowi określenie, jak - według najbardziej prawdopodobnych scenariuszy - przyjęta w 2013 r. stabilizująca reguła wydatkowa wpłynie na zrównoważenie finansów publicznych i antycykliczność polityki fiskalnej w Polsce. Celem części drugiej jest sformułowanie optymalnej polityki finansowej gmin i miast powiatowych w warunkach czteroletniej kadencji władz i istotnego współfinansowania inwestycji ze środków unijnych, przy założeniu napiętego ograniczenia związanego z indywidualnym wskaźnikiem zadłużenia lub regułą zrównoważonego wyniku bieżącego.

Punktem wyjścia rozważań przeprowadzonych w obu częściach w niniejszej pracy jest założenie, że reguła fiskalna będzie stanowić wiążące ograniczenie. Kluczowe pytanie przyświecające części pierwszej to, czy kierowanie się jedynie SRW będzie wystarczające do zapewnienia stabilności i antycykliczności polityki fiskalnej na szczeblu centralnym. Problem podjęty w części drugiej jest o tyle bardziej skomplikowany, że samorządy są heterogeniczne, mogą być w różnym stopniu zadłużone, mieć inaczej rozwiniętą infrastrukturę, inne tempo wzrostu dochodów bieżących, itd. Dlatego, w przeciwieństwie do rządu centralnego, nie istnieje jeden wzór reguły fiskalnej, zgodnie z którym samorządy miałyby prowadzić swoją politykę finansową. Osiąganie maksymalnych kwot dopuszczalnych przez indywidualny wskaźnik zadłużenia nie wystarcza bowiem, aby określić optymalną wysokość wydatków bieżących i inwestycyjnych. Główną wartością dodaną drugiej części rozprawy jest propozycja wzoru (nieformalnej reguły wydatkowej) opisującego optymalną politykę, uzależnioną od specyfiki poszczególnych gmin i miast powiatowych.

Aby zrealizować pierwszy cel szczegółowy rozprawy, przeprowadzono stochastyczne symulacje, bazujące na założeniu, że polska gospodarka będzie zachowywała się podobnie, pod względem inflacji, stopy procentowej czy wahań PKB i dochodów publicznych, do gospodarek strefy euro, a prognozy Ministerstwa Finansów nie będą obciążone. Przyjęto, że reguła może stabilizować jedynie finanse publiczne, a nie wygładzać fluktuacje makroekonomiczne. Założono również stałą ścieżkę wzrostu PKB potencjalnego, zaś kształtowanie się luki produktowej uzależnione m.in. od wysokości deficytu. Przy tych założeniach wygenerowano szereg scenariuszy - zestawów szeregow czasowych dla lat 2014-2040 - ewolucji najważniejszych zmiennych makroekonomicznych i fiskalnych. Symulowane wartości tych zmiennych pochodziły z modeli ekonometrycznych, zawierających m.in. składnik autoregresyjny oraz składnik losowy generowany przy użyciu maticy kowariancji.

Analiza taka powinna przynieść też odpowiedź na pytanie: jaki jest efekt obniżki progów długu w 2014 r. wskutek reformy OFE oraz efekt zmiany w nominalnej części formuły w 2015 r. Wyniki symulacji zostały poddane ocenie pod kątem cykliczności, z wykorzystaniem metody korelacyjnej, oraz stabilności - na podstawie testów pierwiastka jednostkowego. Zbudowano

fiskalną funkcję reakcji, która pozwoli na jednoczesną ocenę stabilności i antycykliczności polityki (dyskrecjonalnej i wynikającej z automatycznych stabilizatorów koniunktury) prowadzonej zgodnie z SRW.

W literaturze poświęconej symulacjom polityki fiskalnej, fiskalną funkcję reakcji (FFR) używa się zazwyczaj do modelowania wyniku nominalnego bądź pierwotnego (Celasun i in., 2007). Jednak w omawianej tutaj pracy doktorskiej, wynik był determinowany przez SRW i równanie generujące poziom dochodów publicznych. FFR została więc oszacowana dopiero po uzyskaniu rezultatów symulacji. Modelowano tu zarówno natychmiastowy wpływ polityki fiskalnej na zmienne makroekonomiczne, jak i odwrotną zależność.

Zgodnie z sugestią pochodzącą z ww. tekstu Celasun i in., modele służące do symulowania zmiennych makroekonomicznych i fiskalnych oszacowano na próbce państw członkowskich strefy euro, a nie na historycznych danych dotyczących Polski. Wynika to z faktu, że „w wielu gospodarkach rozwijających się, identyfikowanie stabilnych gospodarczych zależności stanowi wyzwanie: brak długich szeregow czasowych wraz z ciągłymi zmianami strukturalnymi oraz zmianami reżimów politycznych w sposób nieunikniony redukuje wiarygodność ekonometrycznych oszacowań mających na celu prognozowanie przyszłych tendencji” (Celasun in., 2007, s. 409).

Aby zrealizować drugi cel szczegółowy rozprawy, wszechstronnej dyskusji poddano determinanty optymalnych poziomów wydatków bieżących i inwestycyjnych gmin oraz miast powiatowych. Analizowanie podsektora lokalnego sektora finansów publicznych jako agregatu nie byłoby bowiem wskazane z uwagi na jego heterogeniczność. Inherentną cechą samorządów jest przecież możliwość kształtowania własnej specyficznej polityki finansowej. Badanie polityk wszystkich jednostek samorządowych oddziennie byłoby jednak zadaniem zbyt złożonym, dlatego w rozprawie skoncentrowano się na analizie reprezentatywnego samorządu optymalizującego swoją funkcję celu przy warunkach ograniczających.

Zbudowano model decyzyjny władz gminy lub miasta powiatowego. Teoretyczne rozkłady parametrów modelu oszacowano z wykorzystaniem danych empirycznych dla Polski z lat 2010-2015. Model rozwiązało częściowo w sposób analityczny, a częściowo - tam, gdzie uzyskanie rozwiązania analitycznego nie jest możliwe - numeryczny, za pomocą nowatorskiej metody meta-algorytmu wykorzystującego jednocześnie kilkanaście algorytmów optymalizacyjnych. Wybrane zostały wartości parametrów behawioralnych, które prowadziły do optymalnych rozwiązań bliiskich wartośćom empirycznym. Z odpowiednich rozkładów wylosowano następnie wiele zestawów parametrów, którym przypisano optymalne wartości wydatków bieżących oraz inwestycyjnych. Zależność między wartościami parametrów a rozwiązaniami optymalnymi została przedstawiona na podstawie liniowych meta-modeli ekonometrycznych.

W niniejszej pracy doktorskiej postawiono następujące hipotezy:

1. Stabilizująca reguła wydatkowa poprawi charakterystykę polityki fiskalnej w Polsce:
 - (a) Reguła uczyni politykę fiskalną antycykliczną.
 - (b) Reguła doprowadzi do spadku zadłużenia i zapewni stabilność finansów publicznych.
 - (c) Reguła będzie zapobiegała przekraczaniu progu 3% PKB przez deficyt nominalny sektora instytucji rządowych i samorządowych.
 - (d) Obniżenie progów odnoszących się do dłużu w mechanizmie korygującym SRW spowoduje zacieśnienie polityki fiskalnej.
 - (e) Zastąpienie w formule prognozowanej inflacji celem inflacyjnym Rady Polityki Pieniężnej będzie neutralne z perspektywy polityki fiskalnej.
2. Optymalna polityka finansowa gmin i miast powiatowych uwzględnia wiele czynników:

- (a) Dodatni wpływ na optymalny poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: wskaźnika wartości infrastruktury oraz limitu dofinansowania unijnego.
- (b) Ujemny wpływ na optymalny poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: czynnika dyskontowego, współczynnika deprecjacji infrastruktury, udziału dochodów własnych w inwestycjach unijnych, stopy procentowej, stopy zapadalności dłużu, wskaźnika zadłużenia oraz wskaźnika wydatków bieżących z lat poprzednich.
- (c) Dodatni wpływ na optymalny poziom zwykłych wydatków inwestycyjnych (tj. nie-współfinansowanych ze środków UE) w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: czynnika dyskontowego, współczynnika deprecjacji infrastruktury oraz udziału dochodów własnych w inwestycjach unijnych.
- (d) Ujemny wpływ na optymalny poziom zwykłych wydatków inwestycyjnych w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: stopy procentowej, stopy zapadalności dłużu, wskaźnika zadłużenia, wskaźnika wydatków bieżących z lat poprzednich, wskaźnika wartości infrastruktury oraz limitu dofinansowania unijnego.

Niniejsza praca składa się z dwóch części, poświęconych: (i) stabilizującej regule wydatkowej oraz (ii) optymalnej polityce finansowej gmin i miast na prawach powiatu. W rozdziale pierwszym zaprezentowano tło literackie dotyczące reguł i polityki fiskalnej, uwarunkowania prawno-historyczne i formułę obowiązującej w Polsce stabilizującej reguły wydatkowej. Temat rozdziału drugiego to symulacje stochastyczne polskiej gospodarki przy założeniu obowiązywania SRW. Uwzględniono w nim założenia dotyczące danych i modelu, a także dokładne omówienie wyników. W trzecim rozdziale poruszoно temat efektów zmian w formule reguły w 2014 i 2015 r. oraz postaci fiskalnej funkcji reakcji po wprowadzeniu SRW.

Część drugą rozprawy rozpoczyna rozdział czwarty, stanowiący przegląd literatury dotyczącej optymalnej alokacji dóbr w sektorze lokalnym. W rozdziale piątym przedstawiono model decyzyjny władz samorządowych oraz sposób jego rozwiązania analitycznego z wykorzystaniem warunków Karusha-Kuhna-Tuckera. W rozdziale szóstym wyprowadzono analityczne rozwiązanie dla trzeciego i czwartego roku kadencji prezydenta miasta, burmistrza lub wójta gminy. Opisano też numeryczny meta-algorytm optymalizacyjny dla wszystkich czterech lat kadencji władz samorządowych. Siódmy rozdział zawiera opis użytych danych, a także opis dopasowania rozkładów teoretycznych do rozkładów empirycznych parametrów strukturalnych modelu. Przeanalizowano w nim także strukturę warunków ograniczających i dokonano kalibracji parametrów behawioralnych. Rozdział ósmy poświęcono analizie wrażliwości optymalnych poziomów wydatków bieżących i inwestycyjnych względem wartości parametrów. Został on oparty na wynikach oraz oszacowaniach liniowych meta-modeli ekonometrycznych. Pracę kończy rozdział podsumowujący. Praca została uzupełniona o aneksy A, B i C, w których zamieszczono kody programu R, zawierające przykładowe rozwiązania modelu za pomocą metody analitycznej i numerycznej oraz o aneks D prezentujący pomocniczy model o nieskończonym horyzoncie decyzyjnym. Wyniki przedstawione w rozdziałach 1-3 zostały opublikowane w formie odrębnego artykułu w języku angielskim (Korniluk, 2016).

Część I

Stabilizująca reguła wydatkowa a stabilność i cykliczność finansów publicznych w Polsce

Celem bieżącej części pracy jest ocena wpływu stabilizującej reguły wydatkowej na zrównoważenie finansów publicznych i cykliczność polityki fiskalnej w Polsce. Dodatkowo przeanalizowano skutki zmian w formule reguły - obniżenia progów zadłużeniowych oraz wprowadzenia celu inflacyjnego zamiast prognozy inflacji z korektą błędów przeszłych prognoz.

1 Stabilizująca reguła wydatkowa

1.1 Przegląd literatury

Rządowa polityka fiskalna w Polsce jest od końca 2013 r. podporządkowana stabilizującej reguле wydatkowej (SRW). Zgodnie z SRW, dług publiczny powinien ukształtować się w średnim okresie poniżej 43% PKB, a wynik nominalny - przeciętnie w wysokości średniookresowego celu budżetowego wynoszącego obecnie -1% PKB. Osiągnięcie tych celów ma zostać zapewnione dzięki ograniczeniu wzrostu wydatków publicznych: SRW ustala, że ich tempo wzrostu zasadniczo nie może przekroczyć średniookresowego realnego tempa wzrostu PKB. Reguła ma zatem uczynić politykę fiskalną stabilną oraz antycykliczną w odniesieniu do wyniku nominalnego iacykliczną w odniesieniu do dynamiki wydatków.

Stabilność fiskalną należy w tym kontekście rozumieć jako „zdolność rządu do trwałego utrzymywania tej samej polityki pozostającą wypłacalnym” (zob. Burnside, 2005). Z kolei antycykliczność polityki fiskalnej polega na negatywnej korelacji pomiędzy zmiennymi reprezentującymi nastawieniem polityki, np. deficytem pierwotnym a fazą cyklu koniunkturalnego, mierzoną np. luką produktową.

Uwarunkowania rządowej polityki fiskalnej były dyskutowane w szeregu innych badań. Międzynarodowy Fundusz Walutowy (Akitoby i in., 2013) sugeruje, że po kryzysie 2008-09 nastąpiła zdecydowana zmiana w podejściu do stabilizacyjnej roli polityki fiskalnej. Według MFW, rola ta powinna polegać nie tylko na zapewnieniu stabilności długookresowej, ale także na stabilizowaniu krótkookresowych wahań koniunkturalnych. Podczas kryzysu podważony został bowiem paradygmat, iż optymalna polityka fiskalna sprowadza się do umożliwienia funkcjonowania automatycznych stabilizatorów koniunktury, w myśl tez formułowanych przez Gordona i Leepera (2005): „polityki antycykliczne mogą wywołać cykl koniunkturalny”, zaś „utrzymywanie się wartości niektórych głównych zmiennych makroekonomicznych może być spowodowane wyłącznie oczekiwaniemi formułowanymi wobec polityki”.

Kryzys, skutkujący m.in. nadmiernym zadłużeniem państw peryferyjnych strefy euro, przyczynił się także do wzrostu zainteresowania badaczy tematem przestrzeni fiskalnej, która mierzy dystans do utraty przez dane państwo stabilności (zob. Ghosh i in., 2013). Przed 2008 r. ryzyko dłużu publicznego w wielu rozwiniętych gospodarkach było niedoszacowane, a polityka fiskalna była prowadzona w sposób procykliczny, np. Eyraud i Wu (2015) zauważyl ujemną korelację między przyrostem wyniku strukturalnego (wyniku nominalnego skorygowanego o składnik cykliczny i działania jednorazowe i tymczasowe) a lukią produktową na poziomie państw strefy euro. Polska nie była wyjątkiem i także prowadziła ekspansywną politykę fiskalną w czasach dobrej koniunktury lat 2005-2008. Ministerstwo Finansów (2012) przyznało, że stosowane wówczas

reguły nie zapobiegły głębszej nierównowadze finansów publicznych i niezbędne jest wzmocnienie ram fiskalnych. Także Jajko (2008) stwierdziła, że nierównowaga w polskich finansach publicznych doprowadziła do systematycznego wzrostu dłużu publicznego. Nadmiernie luźna polityka fiskalna została zaobserwowana też przez Jędrzejowicza, Kitalę i Wronkę (2008). Pokazali oni, że w latach 1995-2007 deficyt strukturalny przekraczał poziom zapobiegający złamaniu reguł unijnego Paktu Stabilności i Wzrostu (pod warunkiem swobodnego działania automatycznych stabilizatorów koniunktury). Z drugiej strony, konsensus ów nie był podzielany przez Mackiewicza (2010), który stwierdził, że polityka fiskalna w Polsce w latach 1993-2008 była antycykliczna i stabilna.

Jako remedium na słabości dyskrecyjonalnej polityki fiskalnej proponuje się stosowanie reguł fiskalnych, w szczególności wydatkowych. Ayuso-i-Casals (2012) przedstawił klasyfikację i opis elementów takich reguł w kontekście unijnym. Holm-Hadulla i in. (2010) pokazali, iż reguły wydatkowe redukują procykliczność wydatków rządowych w sytuacji niespodziewanych wahań luki produktowej. Inni autorzy poddawali analizie formuły takich reguł. Carnot (2014) faworyzował reguły, zgodnie z którymi wydatki podążają za trendem PKB skorygowanym o dyskrecyjonalne działania po stronie dochodów. Petrova (2012) sygnalizowała konieczność uwzględnienia w regule mechanizmu korygującego uzależnionego od odchyлеń prognozowanej dynamiki PKB od długookresowej średniej oraz odchyłeń deficytu z poprzedniego okresu od poziomu docelowego. Debrun i in. (2008) zaproponowali natomiast korektę, która byłaby uruchamiana po odchyleniu wskaźnika zadłużenia od celu.

Lu, Vazquez i Ho (2013) przeprowadzili symulacje polskiej gospodarki przy założeniu obowiązywania czterech wariantów reguły wydatkowej. W świetle uzyskanych wyników zarekomendowane zostały dwa z nich: reguła z addytywną korektą dynamiki wydatków oraz tzw. zmodyfikowany szwajcarski hamulec zadłużenia. Podobne, stochastyczne podejście zastosowano w dwóch innych artykułach z serii MFW. Celasun, Debrun i Ostry (2007) odnieśli się przy tym do analiz stabilności zadłużenia, standardowo przeprowadzanych przez MFW, krytykując je za uczynienie polityki fiskalnej egzogeniczną względem szoków makroekonomicznych. W drugim artykule, Kawakami i Romeu (2011) przedstawili model, w którym szoki makroekonomiczne wpływały na wartości zmiennych fiskalnych z tego samego okresu. Odwrotny wpływ - polityki fiskalnej na gospodarkę - został uwzględniony jedynie z rocznym opóźnieniem. Endogenizacja obu zmiennych, czyli uwzględnienie tzw. efektów drugiej rundy miało statystycznie i ekonomicznie istotny wpływ na medianę i zmienność wskaźnika zadłużenia.

Warto także odnotować pracę Pigonia i Ramszy (2014), którzy poddali ocenie stabilizującą regułę wydatkową w Polsce sprzed modyfikacji z 2014 i 2015 r. Cykl gospodarczy został w tym artykule wygenerowany na trzy sposoby, zaczerpnięte z pracy Geiera (2012) - za pomocą funkcji sinusoidalnej, zmiennej z rozkładu jednostajnego oraz błądzenia losowego z dryfem. W pracy pominięto błędy prognoz PKB - stwierdzono bowiem, że wyniki nie różnią się istotnie przy założeniu systematycznie obciążonej prognozy. Model pomija także inflację, od której zależy m.in. wskaźnik zadłużenia w relacji do PKB. Abstrahowano również od współzależności między cyklem koniunkturalnym, wielkością deficytu oraz inflacji. Wątpliwości może budzić także szacowanie modelu cyklu na bazie relatywnie krótkiego szeregu czasowego - Polski z lat 1995-2013.

Brak zatem w literaturze symulacji polskiej gospodarki wygenerowanych na podstawie szczegółowych, wszechstronnie zweryfikowanych modeli ekonometrycznych opisujących główne zmienne makroekonomiczne i fiskalne, przy założeniu obowiązywania stabilizującej reguły wydatkowej w obecnej postaci. Aktualizacji wymagają także analizy cykliczności i stabilności polityki fiskalnej w Polsce. Niniejsza praca doktorska wypełnia tę lukę.

1.2 Formuła SRW obowiązującej w Polsce

Pierwsza zapowiedź zamiarów rządu dotyczących wprowadzenia nowej reguły fiskalnej pojawiła się w Planie Rozwoju i Konsolidacji Finansów 2010-2011 (Kancelaria Prezesa Rady Ministrów, 2010, s. 9-10). Koncepcja polskiej reguły wydatkowej ewoluowała jednak w czasie. Ostatecznie, projekt założeń do projektu ustawy o zmianie ustawy o finansach publicznych został przygotowany 6 czerwca 2013 r., a Prezydent podpisał ustawę (Dz. U. 1646, 2013) 23 grudnia 2013 r. Stabilizująca reguła wydatkowa weszła w życie 28 grudnia 2013 r. Ma ona następującą postać:

$$WYD_n = WYD_{n-1} \cdot E_n(CCPI_n) \cdot (WPKB_n + K_n) + E_n(\Delta DD_n), \quad (1)$$

gdzie: X_n - wartość zmiennej X w roku n; $E_n(X)$ - prognoza zmiennej X w projekcie ustawy budżetowej na rok n; WYD - kwota wydatków implikowana przez SRW; $CCPI$ - docelowa wartość wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych określana przez Radę Polityki Pieniężnej, $WPKB$ - średniookresowe realne tempo wzrostu PKB; K - korekta wynikająca z mechanizmu korygującego zaprezentowanego we wzorze (4); ΔDD - działania dyskrecjonalne po stronie dochodowej, w podatkach i składkach, przekraczające 0,03% PKB. Cel inflacyjny (obecnie 2,5%) stanowi nominalną część, natomiast średniookresowy realny wzrost PKB - realną część wzoru.

Pojawiająca się w formule (1) kwota wydatków obejmuje cały sektor instytucji rządowych i samorządowych (ang. general government, GG) z wyjątkiem jednostek niezdolnych do generowania istotnych deficytów oraz wydatków w pełni finansowanych ze środków unijnych. Kwota ta zasadniczo rośnie w tempie średniookresowego realnego wzrostu PKB pomnożonego przez cel inflacyjny. Jest także korygowana o prognozę dyskrecjonalnych zmian w dochodach i składkach. Generalnie, wydatki sektora GG powinny kształtować się według powyższego wzoru, a ewentualne korekty są możliwe tylko w ścisłe określonych sytuacjach. Pierwotnie w formule znajdowała się prognoza inflacji CPI skorygowana o błędy w prognozach inflacji z dwóch poprzednich lat, ale te elementy zostały zastąpione celem RPP, ustawą zmieniającą ustawę o finansach publicznych (Dz. U. 2150, 2015) z 10 grudnia 2015 r.

W celu oszacowania średniookresowego realnego tempa wzrostu PKB, zgodnie z wzorem (2) obliczana jest ośmioletnia średnia, z czego sześć lat stanowią najnowsze odczyty, a dwa lata - prognozy autorstwa Ministerstwa Finansów. Zgodnie z założeniami do ustawy wprowadzającej SRW (Dz. U. 1646, 2013), osiem lat ustalono z uwagi na to, że maksymalna długość trwania cyklu koniunkturalnego w Polsce i gospodarkach rozwiniętych jest szacowana właśnie na taki okres (Gradzewicz i in. 2010; Skrzypczyński, 2010):

$$WPKB_n = \sqrt[8]{\frac{PKB_{n-2}}{PKB_{n-8}}} \cdot E_n \left(\frac{PKB_{n-1}}{PKB_{n-2}} \right) \cdot E_n \left(\frac{PKB_n}{PKB_{n-1}} \right), \quad (2)$$

gdzie: PKB - poziom PKB w cenach stałych.

Dopóki finanse publiczne znajdują się w równowadze, dopóty równania (1) i (2) są wystarczające do obliczenia kwoty wydatków. Na wypadek wystąpienia nierównowagi, reguła wyposażona jest jednak także w mechanizm korygujący, który został zapisany w uproszczonej postaci w równaniu (4). Warto podkreślić, że mechanizm ten, zapisany w ustawie o finansach publicznych, działa automatycznie i precyzyjnie określa skalę korekty. Jego celem jest doprowadzenie do długookresowej równowagi w finansach publicznych poprzez tymczasowe obniżenie (podwyższenie) tempa wzrostu kwoty wydatków poniżej (powyżej) średniookresowego tempa wzrostu PKB. Mechanizm korygujący funkcjonuje, dopóki nie zostaną zniwelowane nadmierne odchylenia od celu. Formułę można skrótnie przedstawić w następujący sposób. Silniejsza korekta, 2 p.p. odejmowane od średniookresowego realnego tempa wzrostu PKB, następuje, niezależnie od prognozowanej

koniunktury, w sytuacji wysokiego deficytu sektora GG (powyżej 3% PKB) lub dłużu (powyżej 48% PKB zgodnie z obniżonymi progami - Dz. U. 911, 2014 - szczegóły w podrozdziale 3.2). Obie kategorie - deficyt i dług zostały nieco zmodyfikowane dla celów SRW. Deficyt został skorygowany o koszty reformy emerytalnej, które wyniosły 0,47% PKB w 2014 r. Założono, że od 2015 r. koszty te spadną do 0,12% PKB, ponieważ po ostatniej reformie emerytalnej (z 2014 r.) około 1/4 dotychczasowej kwoty składek będzie wpływało do Otwartych Funduszy Emerytalnych (OFE). Dług publiczny natomiast został skorygowany zgodnie z art. 38a ustawy o finansach publicznych, czyli o „kwotę wolnych środków służących finansowaniu potrzeb pożyczkowych budżetu państwa w kolejnym roku budżetowym” przy założeniu średnioroczych kursów walutowych. Obie korekty definicji dłużu miały pozwolić na lepsze nim zarządzanie, lecz zarazem znacznie oddaliły ryzyko przekroczenia 55-procentowego progu zadłużenia w regule z art. 86 ustawy o finansach publicznych.

Jeżeli państwo dług publiczny przekroczy 43% PKB, wtedy następuje zwykła korekta - 1,5 p.p. jest odejmowane od średniookresowego realnego tempa wzrostu PKB, chyba że wystąpi silne spowolnienie gospodarcze (prognozowana dynamika PKB będzie niższa od średniookresowej o ponad 2 p.p. - tzw. „złe czasy”). W przeciwnym razie, ewentualna korekta zależy od sumy skumulowanych różnic pomiędzy wynikiem nominalnym sektora GG a średniookresowym celem budżetowym - MTO, czyli tzw. „sumy różnic” (patrz formuła 3). Jeżeli skumulowane odchylenia przekroczą -6% (+6%) PKB, to ujemna (dodatnia) korekta jest stosowana odpowiednio. Wyjątek od tej zasady stanowią wyżej wspomniane „złe czasy”, kiedy nie obowiązuje ujemna korekta lub „dobre czasy” (prognozowana dynamika PKB wyższa od średniookresowej o ponad 2 p.p.), kiedy zawieszana jest korekta dodatnia.

$$SR_n = SR_{n-1} + WN_n - MTO_n, \quad (3)$$

gdzie: SR - suma różnic pomiędzy wynikiem nominalnym a MTO; WN - wynik nominalny sektora GG; MTO - średniookresowy cel budżetowy (ang. medium-term objective) ustalony przez Rząd na poziomie -1% PKB.

Omawiana korekta ma zatem postać:

$$K_n = \begin{cases} -2 \text{ p.p.}, & WN_{n-2} < -3\% \text{ PKB lub } D_{n-2} > 48\% \text{ PKB} \\ -1,5 \text{ p.p.}, & \left\{ \begin{array}{l} WN_{n-2} \geq -3\% \text{ PKB i } D_{n-2} \in (43\% \text{ PKB}, 48\% \text{ PKB}] \\ E_{n-1}(PKB_n) \geq PKB_n^* - 2 \text{ p.p.} \end{array} \right. \\ -1,5 \text{ p.p.}, & \left\{ \begin{array}{l} WN_{n-2} \geq -3\% \text{ PKB i } D_{n-2} \leq 43\% \text{ PKB} \\ SR_{n-2} < -6\% \text{ PKB i } E_{n-1}(PKB_n) \geq PKB_n^* - 2 \text{ p.p.} \end{array} \right. \\ +1,5 \text{ p.p.}, & \left\{ \begin{array}{l} WN_{n-2} \geq -3\% \text{ PKB i } D_{n-2} \leq 43\% \text{ PKB} \\ SR_{n-2} > 6\% \text{ PKB i } E_{n-1}(PKB_n) \leq PKB_n^* + 2 \text{ p.p.} \end{array} \right. \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \quad (4)$$

gdzie: D - poziom państwowego dłużu publicznego obliczonego przy założeniu średniej arytmetycznej średnich kursów walutowych oraz po odjęciu kwoty wolnych środków służących finansowaniu potrzeb pożyczkowych budżetu państwa w kolejnym roku budżetowym.

Istotnym wydarzeniem w polskich finansach publicznych, także w kontekście SRW, było obniżenie dłużu sektora GG z 55,7% PKB w 2013 r. do zaledwie 50,1% PKB w 2014 r. dzięki reformie systemu emerytalnego, która polegała na transferze, a następnie umorzeniu obligacji skarbowych będących w posiadaniu otwartych funduszy emerytalnych. W konsekwencji duża część zobowiązań emerytalnych została przejęta przez państwo. Oprócz tego, progi odnoszące się do dłużu w mechanizmie korygującym SRW zostały obniżone. Pierwotnie (Dz. U. 1646, 2013) opiewały bowiem na 50% (słabsza korekta) i 55% PKB (silniejsza korekta). Z powodu reformy emerytalnej zostały obniżone o 7 p.p. do odpowiednio: 43% i 48% PKB. Ustawa (Dz. U. 911,

2014) została podpisana przez Prezydenta Polski 30 czerwca 2014 i weszła w życie następnego dnia.

Obowiązująca SRW podlegała także innym modyfikacjom. Ustawa z 22 lipca 2015 r. (Dz. U. 1190, 2015) objęła stabilizującą regułą wydatkową także wydatki Bankowego Funduszu Gwarancyjnego. Z kolei ustawa z 11 grudnia 2015 r. (Dz. U. 2150, 2015) wprowadziła dwie istotne zmiany. Pierwsza umożliwiła zwiększenie limitu wydatkowego o prognozowane dochody z działań jednorazowych i tymczasowych (ang. one-off). Wspomniany limit jest liczony jako różnica między *kwotą wydatków* (WYD) wynikającą z formuły SRW a prognozowanymi wydatkami JST, Narodowego Funduszu Zdrowia, Bankowego Funduszu Gwarancyjnego i kilku innych jednostek, które same określają wysokość swoich wydatków budżetowych, a którą to wysokość może zmienić tylko Sejm. Limit, w przeciwieństwie do *kwoty wydatków*, jest prawnie obowiązującym nieprzekraczalnym poziomem wydatków. W niniejszej pracy nie rozróżniano między wydatkami objętymi limitem a objętymi jedynie *kwotą wydatków* SRW.

Warto nadmienić, że klauzule wyjścia zezwalające na odstępstwie od kalkulowania *kwoty wydatków* zgodnie z SRW obowiązują podczas stanu wojennego, stanu wyjątkowego lub klęski żywiołowej na terenie całej Rzeczypospolitej Polskiej. W tych czasach *kwota wydatków* powinna jednak zostać określona, ale w dowolnej wysokości.

Reguła została przetestowana tylko w kontekście polskiej gospodarki, ale symulowane scenariusze zostały oparte na modelach szacowanych na danych z państw UE. Co więcej, formuła reguły jest uniwersalna, jeśli tylko dane państwo przyjmie swój średniookresowy cel budżetowy oraz inflacyjny. Podobnie, progi dotyczące deficytu i dłużu mogą zostać określone na dowolnie ustalonym poziomie. To pokazuje, że SRW, po pewnych modyfikacjach, mogłyby obowiązywać także w innych krajach.

2 Symulacje stochastyczne polskiej gospodarki przy założeniu obowiązowania SRW

2.1 Założenia

W celu oceny stabilności i cykliczności polskiej polityki fiskalnej w warunkach obowiązywania SRW, przeprowadzono symulacje stochastyczne, obejmujące okres 2014-2040. Stojące u ich podstaw rozkłady najistotniejszych zmiennych opisujących polską gospodarkę i finanse publiczne określono w oparciu o tysiąc symulacji Monte Carlo. Kategoriami, które zostały poddane symulacji, były zmienne makroekonomiczne: luka produktowa, inflacja CPI, deflator PKB oraz fiskalne: wydatki, dochody i wynik (nominalny, strukturalny i pierwotny) sektora instytucji rządowych i samorządowych, a także dług publiczny (obliczany zgodnie z metodyką krajową i unijną) oraz oprocentowanie dłużu. Symulowano także zmienne związane z SRW: sumę różnic pomiędzy wynikiem nominalnym a MTO oraz składnik korekty wynikający z mechanizmu korygującego SRW.

Wartości teoretyczne tych zmiennych zostały uzyskane z modeli ekonometrycznych oszacowanych na podstawie danych historycznych. Owe wartości teoretyczne zostały uzupełnione składnikami losowymi uzyskiwanymi z wielowymiarowego rozkładu normalnego z niesferyczną macierzą kowariancji. Macierz ta została oszacowana na bazie reszt pochodzących z wspomnianych powyżej modeli. Również wartości współczynników modeli były losowane z macierzy kowariancji (po jednej na każde równanie).

Wszystkie wielkości prognozowane do 2015 r. pochodzą z aktualizacji Programu Konwergencji z 2015 r. (Ministerstwo Finansów, 2015). Źródłem ścieżki realnego wzrostu PKB potencjalnego

oraz inflacji CPI po 2015 r. są Wytyczne dotyczące założeń makroekonomicznych na potrzeby wieloletnich prognoz finansowych jednostek samorządu terytorialnego (Ministerstwo Finansów, 2014).

Za każdym razem, gdy w kontekście symulacji przywoływane są dochody lub wydatki sektora GG, należy je interpretować jako kategorie skonsolidowane (kalkulowane po wyeliminowaniu przepływów pomiędzy jednostkami sektora GG), bez składników w pełni finansowanych ze środków unijnych (gdź odjęcie tych samych kwot ze strony dochodowej i wydatkowej jest neutralne z perspektywy deficytu i dłużu). W przeciwnym razie, prognozowanie wydatków finansowanych z UE w długim okresie byłoby obarczone dużą niepewnością.

Deficyt sektora GG był obliczany poprzez odjęcie niezależnie modelowanych dochodów od wydatków determinowanych przez SRW. Długi zostały zdefiniowane jako suma deficytów dodana do startowego poziomu zadłużenia. Długi, do których odnoszą się progi w mechanizmie korygującym, wynikający z art. 38a ustawy o finansach publicznych, był kalkulowany zgodnie z metodyką krajową, po odjęciu wolnych środków. Kursu walutowego nie symulowano. Długi krajowy został zdefiniowany jako unijny (sektora GG) pomniejszony o 3,8% PKB, co stanowiło różnicę pomiędzy oboma rodzajami dłużu w 2015 r. W symulacjach abstrahowano też od innej reguły fiskalnej - progów zadłużeniowych wynoszących 55% i 60% PKB - zapisanych w art. 86 ustawy o finansach publicznych. Symulacje badają bowiem efektywność SRW, a nie całych krajowych ram fiskalnych. Należy też wspomnieć, że nie symulowano działań jednorazowych i tymczasowych, zatem wynik strukturalny był liczyony jedynie na podstawie wyniku nominalnego i luki produktowej.

Wartości teoretyczne, wykorzystywane później w symulacjach, wyprowadzono w oparciu o cztery jednorównaniowe modele ekonometryczne, opisujące luki produktową, CPI, dochody w relacji do PKB i oprocentowanie dłużu. Modele posiadają kilka cech wspólnych. Po pierwsze, specyfikacje zostały ograniczone do kluczowych zmiennych makroekonomicznych i fiskalnych. Przykładowo, nie modelowano dekompozycji PKB na konsumpcję i inwestycje, który to podział mógłby mieć wpływ na oszacowania tempa wzrostu gospodarczego, a w konsekwencji na ostateczne wyniki. Wzrost PKB potencjalnego został założony ex ante. Położono nacisk na ciągłość pomiędzy najnowszymi prognozami polskiej gospodarki i symulowanymi wartościami. Ponieważ symulacje obejmowały okres do 2040 r., ważne było, aby modele zostały wyspecyfikowane w odporny sposób, tak aby uchwycić zasadnicze, podstawowe i stabilne relacje makroekonomiczne przy możliwie niewielkiej złożoności modeli. Warto też wspomnieć, że każdy model został oszacowany uogólnioną metodą momentów Arellano-Bonda (1991) z efektami stałymi dla państw i n-krokową, okresową macierzą wag instrumentów White'a, jak również odpornymi błędami standardowymi White'a z efektami czasowymi (Arellano, 1987). Zgodnie z tą metodą estymacji, efekty przekrojowe nie są szacowane bezpośrednio, tylko kalkulowane ex post, stąd przypis „brak spec.” w komórkach odpowiadających wyrazom wolnym (stałym). Uogólniona metoda momentów została użyta, aby ograniczyć problem endogeniczności opóźnionych zmiennych wyjaśnianych użytych w charakterze regresorów.

2.1.1 Luka produktowa

W celu modelowania luki produktowej posłużyono się procesem autoregresyjnym AR(2). W zależności od równania, próba składała się z 1) krajów UE lub 2) członków strefy euro, tak, by objąć możliwie szerokie spektrum różnych cykli koniunkturalnych. W pierwszym przypadku, użyto danych zgodnych z metodyką rachunkową ESA 95 ze względu na dostępność i porównywalność danych, natomiast w drugim przypadku użyto danych zgodnych z ESA 2010. Założono, że amplituda i kształt cykli koniunkturalnych, które będą występować w Polsce, będą przypominały cykle obserwowane historycznie w poszczególnych państwach UE.

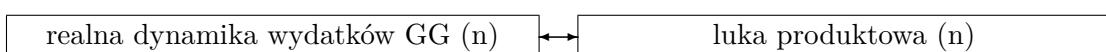
Zgodnie ze wskazaniami teoretycznymi, w modelu uwzględniono wpływ polityki fiskalnej na wzrost gospodarczy. Takie stwierdzenie potwierdził test t-Studenta, który wskazał na istotną zależność między realną dynamiką wydatków GG a wielkością luki produktowej. Inaczej wygląda to w przypadku potencjalnego PKB, dla którego założono stałą (egzogeniczną) ścieżkę wartości. Trzeba tutaj zważyć na fakt, że SRW implikuje wynik nominalny przeciętnie na poziomie MTO. Pociąga to za sobą stałość popytu publicznego w średnim okresie, czyli zbliżony wpływ na potencjalny PKB we wszystkich symulacjach.

Tabela 1: Równania opisujące lukę produktową

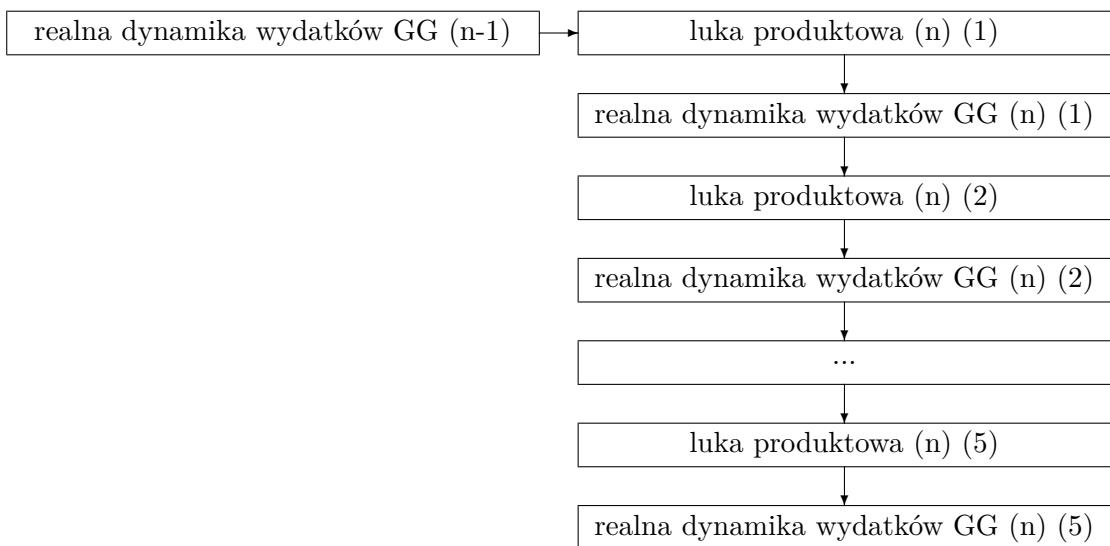
	(1)	(2)	(3)	(4)
zmienna objaśniana	luka produktowa			
okres	2000-2014	2000-2014	1973-2013	1973-2013
liczba obserwacji	165 (euro 11)	165 (euro 11)	570 (EU28)	388 (EU28)
metoda estymacji	panelowa uogólniona metoda momentów Arellano-Bonda			
instrumenty	Δ luka(-2,-3,-4)	Δ luka(-2,-3,-4)	Δ luka(-2,-3,-4,-5,-6,-7)	Δ luka(-2,-4,-5,-6,-7)
wyraz wolny	-0,002 brak spec.	-0,003 brak spec.	-0,003 brak spec.	-0,005 brak spec.
luka produktowa (-1)	0,737*** 0,009	0,775*** 0,039	0,830*** 0,003	0,311*** 0,087
luka produktowa (-2)	-0,349*** 0,011	-0,447*** 0,047	-0,374*** 0,003	-0,598*** 0,039
realna dynamika wydatków GG		0,054*** 0,018	0,103*** 0,001	0,565*** 0,096
8-letnie odchylenie standardowe realnej dynamiki wydatków GG				-0,091 0,133
standardowy błąd regresji	0,019	0,019	0,020	0,034
R^2 ogólny	0,517	0,494	0,559	0,133
R^2 within	0,507	0,483	0,551	0,123
R^2 between	0,990	0,958	0,906	0,748
statystyka J	10,412	7,991	25,669	23,049
wartość p (statystyka J)	0,318	0,434	0,425	0,112
wartość p testu autokorelacji AB, st. 2	0,018**	0,050**	0,097*	0,896

Uwzględnienie zmiennej fiskalnej w modelu opisującym lukę produktową doprowadziło do problemu endogeniczności, gdyż jednocześnie pierwsza zmienna zależy także od drugiej. Dynamika wydatków oddziałuje na lukę, ta na PKB, który z kolei stanowi jeden z elementów wskaźnika realnego średniookresowego tempa wzrostu PKB służącego do kalkulacji wydatków na podstawie SRW. Takie sprzężenie zwrotne, czy też wzajemna współzależność, nie jest oczywiście niczym wyjątkowym w gospodarce. Aby jednak uniknąć problemu obliczeniowego związanego z owym odwołaniem cyklicznym (patrz rysunek 1), w symulacjach od 2016 r. zastosowano pięciostopniowy algorytm, rodzaj metody iteracyjnej Banacha (Krzyczkowski, Plaskota, 2014, s. 105) z modyfikacją Seidela. Algorytm ten wykorzystano nie tylko do modelowania wyżej opisanej relacji między dynamiką wydatków i lukaną produktową, ale także w odniesieniu do kilku innych zmiennych.

Rysunek 1: Zakładana zależność w symulacji stochastycznej



Rysunek 2: Techniczne rozwiązywanie służące do uniknięcia w obliczeniach cyklicznego odwołania pokazanego na rysunku 2



Algorytm, którego celem jest eliminacja odwołania cyklicznego, działa w następujący sposób. W pierwszym kroku oblicza się równanie na lukę produktową z użyciem dynamiki wydatków z poprzedniego roku, czyli na niezależnie ustalonym, stałym poziomie. Tak obliczona luka przybliża ostateczną wielkość bardzo zgrubnie, ale za to stanowi wartość startową, pozwalającą na uruchomienie całej procedury. Następnie kalkulacji podlegają wszystkie zmienne makroekonomiczne i fiskalne oparte pośrednio i bezpośrednio na luce. Jedną z tych zmiennych jest realna dynamika wydatków GG. W drugim kroku, dynamika wydatków otrzymana w poprzednim kroku wchodzi do równania na lukę produktową. Wartości pozostałych zmiennych są odpowiednio wyliczane. Następnie wykonywany jest trzeci i czwarty krok. W podobny sposób, dynamika wydatków uzyskana w czwartym kroku wchodzi do równania opisującego lukę po raz piąty - ostatni. Wyniki symulacji wskazują na to, że zmienne generowane zgodnie z takim pięcio-etapowym algorytmem zbiegają dla każdego roku do swoich punktów stałych. Zostało to pokazane w tabeli 2. Zaobserwowana zbieżność pozwoliła na pozbycie się ww. technicznego problemu odwołania cyklicznego, umożliwiając modelowanie wzajemnej współzależności między dynamiką wydatków a luką produktową. Dynamika wydatków obliczana na podstawie luki z piątego etapu jest bowiem praktycznie identyczna jak dynamika wydatków używana w równaniu na lukę w piątym kroku (patrz rysunek 2).

Warto wspomnieć, iż algorytmy stosowane powszechnie w ekonometrii do rozwiązywania układów równań współzależnych, Gaussa-Seidela lub Newtona (Krzyżanowski, Plaskota, 2014, s. 60 i 107), nie zostały tu wykorzystane, gdyż odnoszą się do układu równań liniowych lub jedynie aproksymacji funkcji nieliniowych (podczas gdy SRW zawiera nieliniowości i nieciągłości) albo wymagają obliczania pochodnych, co byłoby kłopotliwe.

Ostatnią godną wyjaśnienia kwestią jest zbieżność wartości zmiennych obliczanych w pięcio-etapowym algorytmie. Zbieżność ta została osiągnięta, o czym zaświadczenie badanie oparte na różnicach między wartościami z danego etapu a wartością finalną. Jeżeli zmienna była wyrażona w poziomach, to różnica - w procentach, zaś w pozostałych przypadkach różnica została wyrażona w wielkościach bezwzględnych. Oczywiście, im dalszy etap, tym obserwowano mniejsze różnice. Przykładowo, maksymalna roczna różnica w pojedynczym scenariuszu dla kwoty wydatków implikowanej przez SRW pomiędzy pierwszym a piątym krokiem wynosiła zazwyczaj (medianą

\pm odchylenie standardowe) około 1,4 – 2,3%, zaś pomiędzy czwartym i piątym - tylko około 0,3 – 0,4%, co można zignorować. W niektórych symulacjach pojawiły się jednak pewne odchylenia od tej ogólnej prawidłowości. Takie ekstremalne przypadki można znaleźć w tabeli 2, choć nadal nie są to dramatyczne rozbieżności, biorąc pod uwagę, że zdarzyły się raz na 27 tysięcy obserwacji.

Tabela 2: Maksymalne względne/bezwzględne różnice między wartościami zmiennych w n-tej i ostatnim, piątym kroku, zaobserwowane w 1000 symulacji w okresie 2014-2040

	poziom wydatków	poziom nomin. PKB	luka produktowa	dynamika nomin. PKB	deflator PKB	inflacja CPI
różnica	względna	względna	bezwzględna	bezwzględna	bezwzględna	bezwzględna
1-5	3,8%	2,9%	1,8%	3,7%	0,4%	0,4%
2-5	1,5%	1,4%	0,5%	0,7%	0,1%	0,1%
3-5	1,5%	1,2%	0,4%	0,4%	0,1%	0,1%
4-5	1,5%	1,2%	0,3%	0,3%	0,1%	0,1%

Ostatecznie równanie (3) zostało użyte w symulacjach - cechowały je bowiem statystyczna istotność wszystkich zmiennych wyjaśniających i zadowalająca wartość statystyki J. Rozważano dodanie jeszcze jednej zmiennej - zmienności realnej dynamiki wydatków GG w ciągu 8 lat (patrz równanie (4)). Tym samym dołożono starań, aby model był odporny na krytykę Lucasa (1976). Polityka fiskalna prowadzona przed i po wprowadzeniu SRW może się bowiem fundamentalnie różnić, z czego może wynikać zawodność modelu estymowanego na przeszłych danych. Pierwsza różnica polega na przestrzeganiu bardziej restrykcyjnego celu, MTO. Wprawdzie obowiązywał i obowiązywałby on dalej nawet w sytuacji bez wprowadzenia SRW, ale reguła ta wymusza automatyczną korektę w momencie stwierdzenia nadmiernego odchylenia od niego. Druga, mniej ewidentna różnica polega natomiast na możliwej mniejszej zmienności realnej dynamiki wydatków po wprowadzeniu SRW. Dzięki regule, wydatki będą określane w dość stabilny, anty- lub acykliczny sposób (w zależności od tego, czy wyrazić je w procentach PKB czy jako realna dynamika), co mogłoby złagodzić fluktuacje koniunktury. Być może takie zjawisko wystąpi w polskiej gospodarce, ale równanie (4) nie potwierdza tej hipotezy. Można zatem wy ciągnąć wniosek, że chwiejność realnej dynamiki wydatków GG, wyrażona jako 8-letnie odchylenie standardowe, nie wyjaśnia kształtuowania się luki produktowej. Skoro wyłączenie tej zmiennej nie poprawia jakości modelu (pod kątem wszystkich współczynników R-kwadrat), to ostatecznie wybrane zostało równanie (3) a nie (4). Podobna sytuacja miała miejsce podczas specyfikacji modelu wykorzystywanego do generowania CPI.

2.1.2 Inflacja

Kolejny model został oszacowany w celu uzyskania procesu generującego CPI (ang. Consumer Price Index). Został on jednak oparty na danych bardzo podobnej miary inflacji konsumenckiej, HICP (ang. Harmonised Index of Consumer Prices). Tym razem próba została ograniczona do grona państw założycielskich strefy euro. Powodem był fakt, iż długookresowe projekcje, używane tutaj do określenia ścieżki poziomu potencjalnego PKB, zostały przygotowane przez Ministerstwo Finansów (2014) przy założeniu, że Polska wejdzie do strefy euro. Dlatego wszystkie równania, które opisują kategorie nominalne, w których kwestia waluty odgrywa istotną rolę (stopa procentowa długu, inflacja i deflator PKB), zostały oszacowane na danych dla państw strefy euro. Ewolucyjny proces modelowania inflacji został podsumowany w tabeli 3.

Najpierw wyspecyfikowano, a następnie oszacowano równanie (1) jako proces autoregresyjny 1 rzędu, AR(1). Proces nie charakteryzował się jednak wystarczająco dobrym dopasowaniem. Nie brał też pod uwagę, że celem EBC jest inflacja nieznacznie poniżej 2%. Począwszy od rów-

nania (2) zmienną objaśnianą był przyrost inflacji, a jedny z regresorów - odchylenie od celu inflacyjnego, dzięki czemu równania (3)-(5) zawierały mechanizm korekty błędem. Dodanie luki produktowej (patrz równanie (3)), dzięki której równanie przybrało postać krzywej Phillipsa, poprawiło dopasowanie modelu. Ostatecznie właśnie to równanie zostało użyte w symulacjach. Konkurencyjne równanie (4) zostało odrzucone, ponieważ zmienna mierząca chwiejność wydatków okazała się być nieistotna statystycznie.

Tabela 3: Równania opisujące inflację CPI

	(1)	(2)	(3)	(4)
zmienna objaśniana	HICP	Δ HICP	Δ HICP	Δ HICP
okres	2000-2014	2000-2014	2000-2014	2000-2013
liczba obserwacji	165 (euro 11)	165 (euro 11)	165 (euro 11)	133 (euro 11)
metoda estymacji	panelowa uogólniona metoda momentów Arellano-Bonda			
instrumenty	Δ HICP(-2,-3,-4) Δ luka(-2,-3)		Δ HICP(-2,-3,-4,-5) Δ luka(-2,-3,-4)	
wyraz wolny	0,017 niewyspec. 0,179*** 0,005	0,001 niewyspec.	0,002 niewyspec.	0,002 niewyspec.
HICP (-1)				
HICP (-1) - 2%		-0,821*** 0,005	-0,858*** 0,043	-0,932*** 0,079
luka produktowa			0,317*** 0,044	0,286*** 0,077
8-letnie odchylenie standardowe realnej dynamiki wydatków				0,009 0,028
standardowy błąd regresji	0,012	0,012	0,010	0,011
R^2 ogólny	0,075	0,339	0,547	0,569
R^2 within	0,051	0,355	0,586	0,626
R^2 between	0,976	0,613	0,654	0,319
statystyka J	10,775	10,775	10,440	8,272
wartość p (statystyka J)	0,375	0,375	0,316	0,407
wartość p testu autokorelacji AB, st. 2	0,056*	0,056*	0,197	0,141

2.1.3 Stopa procentowa dłużu i wynik pierwotny

Wynik pierwotny sektora finansów publicznych mierzy restrykcyjność polityki fiskalnej prowadzonej przez rząd. Zmienna ta została w szczególności użyta jako zmienna objaśniana w równaniach fiskalnej funkcji reakcji (tabele 8 i 9). Aby obliczyć wynik pierwotny, koszty obsługi dłużu (płatności odsetkowe) są odejmowane od wyniku nominalnego. W celu modelowania stopy procentowej dłużu, oszacowano model autoregresyjny, uwzględniający także deflator PKB¹ na danych panelowych z lat 1999-2014 dla państw strefy euro. Rentowności obligacji w Polsce osiągnęły średnie wartości obserwowane w strefie euro dopiero dość niedawno, dlatego same szeregi czasowe dla Polski nie byłyby wystarczające do odpornej estymacji modelu.

Model ten został jednak utworzony tylko po to, aby obliczyć wynik pierwotny. SRW odnosi się bowiem tylko do wyniku nominalnego i zagregowanych wydatków. Dlatego zmienna objaśniana

¹Dynamika deflatora PKB, mimo że porusza się co do zasad równolegle z inflacją CPI w długim okresie, jest oczywiście inną miarą. Różnice w wysokościach obu tych kategorii wynikają z różnic w dynamikach cen dóbr eksportowych oraz importowych. Przeciętnie, CPI różni się w wartościach bezwzględnych od dynamiki deflatora PKB o około 0,8 p.p. w okresie 1998-2014 w dziesięciu krajach strefy euro. Różnica ta była losowana z macierzy kowariancji dla składników losowych ze wszystkich modeli. Abstrahowano natomiast tutaj od nieznacznej różnicy pomiędzy wskaźnikami HICP i CPI.

nie powinna być utożsamiana z jakkolwiek inną stopą procentową w gospodarce, w szczególności z referencyjną stopą procentową, której wysokość jest ustalana przez Radę Polityki Pieniężnej, a która to stopa ma wpływ na stan gospodarki. Należy przyznać, że estymowane równania są proste; większość czynników wpływających na rynki obligacji, np. sprawy polityczne bądź nastroje inwestorów, są jednak trudne do modelowania, a niepewność dotycząca przyszłej gospodarki jest duża, szczególnie od wybuchu kryzysu finansowego w 2008 r. Rola składnika losowego musi być więc w tym przypadku ogromna. W symulacjach zdecydowano się użyć równania (2), ponieważ, w przeciwieństwie do równania (1), uniemożliwiało ono wystąpienie błądzenia losowego, które mogłyby przyczynić się do nienaturalnie wysokich lub ujemnych stóp procentowych. Aby dodatkowo zabezpieczyć się przed nadmiernie niskimi stopami, ustanowiono dolny limit dla stopy nominalnej na poziomie 1%.

Tabela 4: Równania opisujące stopę procentową dłużu

	(1)	(2)
zmienna objaśniana	Δ stopa proc. dłużu	stopa proc. dłużu
okres		1999-2014
liczba obserwacji		176 (euro 11)
metoda estymacji	panelowa uogólniona metoda momentów Arellano-Bonda	
instrumenty	Δ stopa proc. dłużu(-2,-3,-4)	
wyraz wolny	-0,004 niewyspec.	-0,0001 niewyspec.
stopa proc. dłużu(-1)		0,879*** 0,026
deflator PKB	0,113*** 0,031	0,175*** 0,045
standardowy błąd regresji	0,004	0,004
R^2 ogólny	0,002	0,834
R^2 within	0,004	0,836
R^2 between	0,083	0,818
statystyka J	10,971	10,346
wartość p (statystyka J)	0,360	0,323
wartość p testu autokorelacji AB, st. 2	0,159	0,118

2.1.4 Pozostałe założenia

Formuła SRW zawiera dwie prognozy PKB. Średni błąd bezwzględny (MAE) w realnej dynamiczce PKB zależy od czasu sporządzenia prognozy. Jeżeli jest ona dokonywana w tym samym roku, co prognozowana zmienna, to MAE wynosi jedynie 0,5 p.p. Jeżeli jednak prognoza odnosi się do następnego roku, MAE wynosi już 1,6 p.p. Błędy prognozy były symulowane z niezależnych rozkładów logistycznych dopasowanych do próby ww. wartości bezwzględnych błędów prognozy, uzupełnionych o odpowiedniki z ujemnymi znakami. We wszystkich rozkładach logistycznych zerowe restrykcje zostały narzucone na parametry położenia. Dlatego prognozy były nieobciążone i nieskorelowane z wartościami innych zmiennych.

Ostatni zestaw założeń dotyczy zmiennych fiskalnych. Wydatki sektora GG objęte SRW były kształtowane zgodnie z regułą w sposób opisany w podrozdziale 1.2, podczas gdy wydatki jednostek nieobjętych SRW założono na poziomie 4% kwoty wydatków. Aby być spójnym z modelem, zgodnie z którym CPI oscyluje wokół celu EBC 2%, a nie celu NBP 2,5%, w formule SRW również ustwiono element odnoszący się do inflacji na poziomie 2%. Założono, że dochody sektora GG w relacji do PKB kształtowały się zgodnie z równaniem (2), które zawiera

składnik korekty błędem ($\alpha + \beta \cdot \text{dochody}/\text{PKB}(-1)$) można łatwo przekształcić do postaci: $\beta \cdot [\text{dochody}/\text{PKB}(-1) - \gamma]$, gdzie $\gamma = -\frac{\alpha}{\beta}$), jak też lukę produktową, która istotnie poprawiła dopasowanie modelu w porównaniu z równaniem (1). Wyrazy wolne w równaniach zawartych w tabelach 1 i 3 stanowią efekty średnie, otrzymane dzięki założeniu zerowych restrykcji na średnie wartości reszt. Jednak w regresjach (1)-(2), stała została ustalona w wysokości 37,2%, niezależnie od losowanych oszacowań parametrów stojących przy pozostałych zmiennych objaśniających. Wynika to z faktu, iż prognozowana na 2015 r. relacja dochodów do PKB wynosiła w 2015 r. 37,2% (MF, 2015).

Tabela 5: Równania opisujące dochody w relacji do PKB

	(1)	(2)
zmienna objaśniana		$\Delta \text{ dochody} / \text{PKB}$
okres		1999-2014
liczba obserwacji		176 (euro 11)
metoda estymacji		panelowa uogólniona metoda momentów Arellano-Bonda
instrumenty	$\Delta\Delta \text{ dochody}/\text{PKB}(-2,-3,-4)$	$\Delta\Delta \text{ dochody}/\text{PKB}(-2,-3,-4)$ $\Delta \text{ luka}(-2,-3,-4)$
wyraz wolny	0,237	0,135
dochody/PKB(-1)	niewyspec. -0,531*** 0,069	niewyspec. -0,301*** 0,094
luka produktowa		-0,069*** 0,013
standardowy błąd regresji	0,030	0,018
R^2 ogólny	0,196	0,323
R^2 within	0,691	0,658
R^2 between	0,054	0,089
statystyka J	10,392	10,780
wartość p (statystyka J)	0,363	0,291
wartość p testu autokorelacji AB, st. 2	0,558	0,567

Symulacjom stochastycznym podlegał zatem następujący wielorównaniowy model ekonomiczny:

$$\text{PKB nominalny} = (\text{PKB potencjalny} + \text{luka}) \cdot \text{deflator PKB}$$

$$\text{PKB potencjalny} = \text{egzogenicznie}$$

$$\text{luka} = -0,299 + 0,775 \cdot \text{luka}(-1) - 0,447 \cdot \text{luka}(-2) + 0,054 \cdot \Delta \text{wydatki} + \varepsilon(\text{luka})$$

$$\Delta \text{CPI} = 0,002 - 0,858 \cdot [\text{CPI}(-1) - 0,02] + 0,317 \cdot \text{luka} + \varepsilon(\text{CPI})$$

$$\text{deflator PKB} = \text{CPI} + \varepsilon(\text{deflator})$$

$$\Delta(\text{dochody} / \text{PKB}) = -0,301 \cdot [(\text{dochody} / \text{PKB})(-1) - 0,372] - 0,069 \cdot \text{luka} + \varepsilon(\text{dochody})$$

$$\text{wydatki} = \text{zgodnie z SRW}$$

$$\text{dług} = \text{dług}(-1) + \text{wydatki} - \text{dochody}$$

$$\text{stopa procentowa dłużu} = -0,013 + 0,879 \cdot \text{stopa proc. dłużu}(-1) + 0,175 \cdot \text{deflator PKB} + \varepsilon(\text{stopa})$$

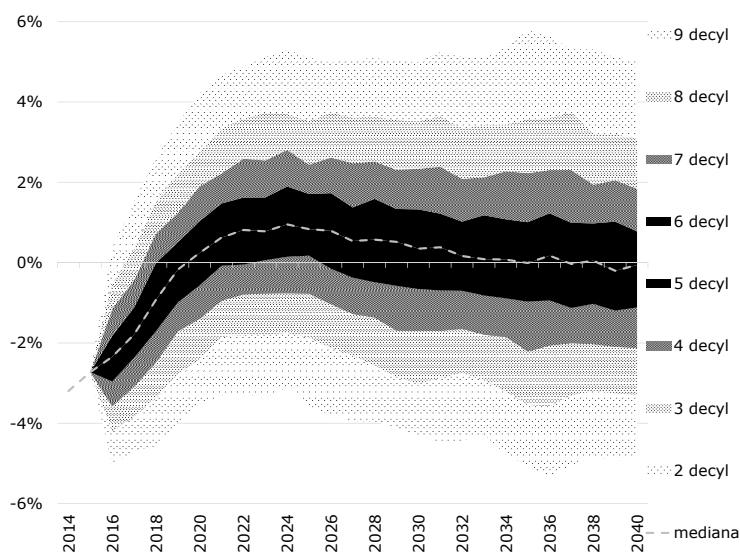
2.2 Wyniki symulacji

Główne wyniki symulacji zostały zaprezentowane na wykresach wachlarzowych na rysunkach 3-5, które zawierają medianowe wartości z symulacji i wszystkie decyle od 1 do 9 oznaczone różnymi odcieniami szarości. Zgodnie z tym, czego można było oczekiwąć, przedziały wyznaczone

przez kolejne decyle stają się coraz szersze wskutek rosnącego znaczenia losowości. Mediana wyniku nominalnego, zaprezentowana na wykresie 3, zbiega do MTO, ale dość powoli. Na kształt centralnych decylów duży wpływ wywarły finanse publiczne na początku rozpatrywanego okresu, kiedy deficyt był oddalony od MTO. W efekcie, „suma różnic” szybko przekraczała 6% PKB, a takie odchylenie nie mogło zostać natychmiast całkowicie skorygowane pomimo aktywnego mechanizmu korygującego.

Jednym z celów SRW jest ochrona przed przekroczeniem progu nadmiernego deficytu, czyli progu 3% PKB przez wynik nominalny. Zgodnie z rozporządzeniem ws. wzmacniania nadzoru pozycji budżetowych oraz nadzoru i koordynacji polityk gospodarczych (EU, 2011; por. też KPRM, 2010): „Osiągnięcie średniookresowego celu budżetowego powinno zapewnić państwom członkowskim margines bezpieczeństwa w odniesieniu do wartości odniesienia 3% PKB w celu zapewnienia długookresowej stabilności finansów publicznych lub szybkiego postępu w jej osiąganiu, pozostawiając przestrzeń dla prowadzenia polityki budżetowej, ze szczególnym uwzględnieniem potrzeb w zakresie inwestycji publicznych.” Na podstawie wyników symulacji należy stwierdzić, że SRW nie w pełni wypełnia ten cel. Próg 3% jest przekraczany średnio co pięć-sześć lat w okresie 2016-2040, co jest wynikiem antycyklicznego charakteru reguły. Jednak mimo to, postęp jest oczywisty, jeżeli wziąć pod uwagę, że w okresie 2001-2013 średni deficyt nominalny w Polsce opierał na 4,9% PKB. W praktyce należy zastrzec, że tak ambitna zmiana w polityce fiskalnej wymaga wiele politycznego wysiłku w ograniczaniu wydatków i/lub zwiększaniu dochodów.

Rysunek 3: Wynik nominalny GG w % PKB: mediana i decyle z symulacji stochastycznych

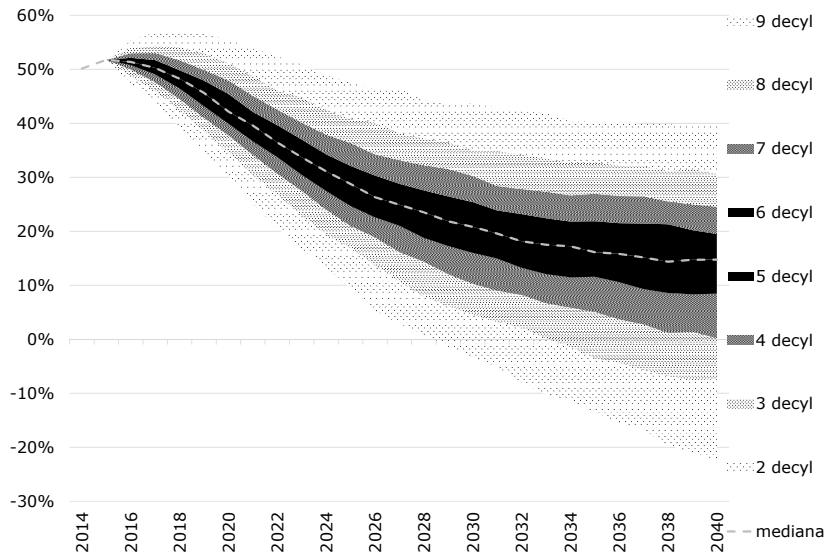


Źródło: obliczenia własne

Centralna ścieżka symulacji odnosząca się do dłużu publicznego, zaprezentowana na wykresie 4 obniża się łagodnie z 50 do 20% PKB. Przy założeniach opisanych w poprzednim podrozdziale, cały dług może nawet zostać spłacony przed końcem analizowanego okresu z 29,4-procentowym prawdopodobieństwem. W praktyce, taka sytuacja doprowadziłaby zapewne wcześniej do złagodzenia poziomu MTO.

Taki spadek dłużu w relacji do PKB może wydawać się restrykcyjny z dzisiejszej perspektywy. Restrykcyjność ta jest podkutowana faktem, że mechanizm korygujący „posiada pamięć”. Innymi słowy, SRW stawia ostrzejsze wymogi niż tylko przywrócenie bieżącego wyniku nominalnego do poziomu MTO po znaczącym jego odchyleniu (tak jest to wymagane przez Komisję

Rysunek 4: Dług GG w % PKB: mediana i decyle z symulacji stochastycznych



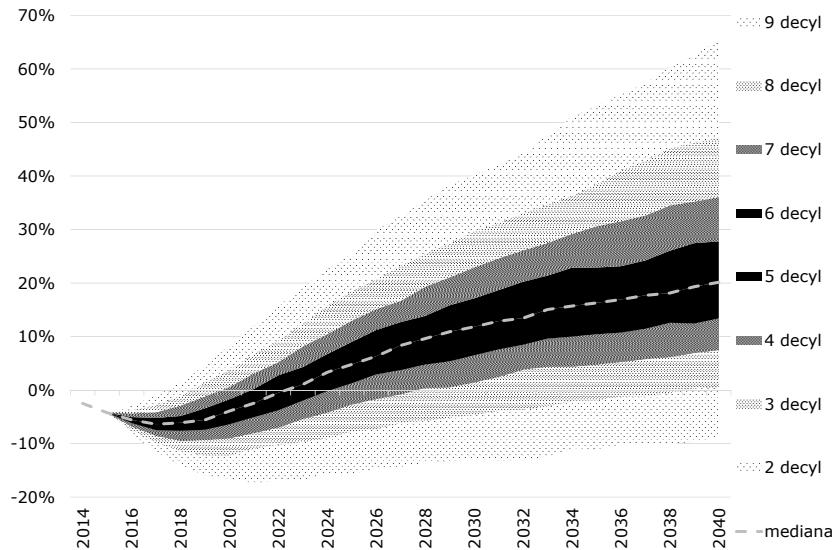
Źródło: obliczenia własne

Europejską, 2012). SRW wymaga, aby do wysokości MTO powróciła średnia z historycznych wyników nominalnych (począwszy od 2014 r.). Ponadto, choć w długim okresie wskaźnik zadłużenia wynoszący ok. 20% PKB może być oceniany jako zbyt ambitny, to wystarczy złagodzić MTO, a malejący trend ulegnie osłabieniu lub nawet zatrzymaniu. Także wolniejszy niż założony wzrost PKB może sprawić, że dług będzie obniżał się w relacji do PKB wolniej niż na wykresie.

Najbardziej pożądanym scenariuszem jest ten, w którym suma różnic pomiędzy wynikiem nominalnym a MTO oscyluje wewnątrz przedziału $\pm 6\%$ PKB, tak że nie włącza się korekta z powodu naturalnych wahań cyklicznych w gospodarce. Wykres 5 pokazuje jednak, że „suma różnic” może rosnąć wraz z upływem czasu i przekroczyć progę o kilka dłużokości. Po 2015 r. kategoria ta pozostanie w przedziale $\pm 10\%$ PKB z prawdopodobieństwem 45,5%.

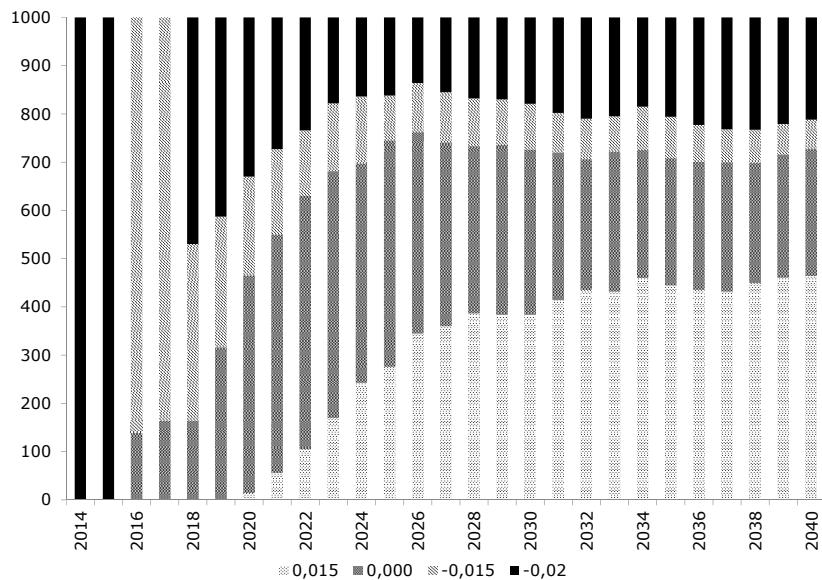
Żadna reguła nie jest w stanie jednocześnie: redukować, a następnie stabilizować wskaźnik zadłużenia na określonym poziomie, stabilizować wynik strukturalny w wysokości MTO oraz wygładzać realną dynamikę wydatków. Wykresy 3-5 pokazują, że, jeśli SRW będzie obowiązywała do 2040 r., to należy spodziewać się stopniowej redukcji długu i mediany deficytu na poziomie prawie -1% PKB. Z drugiej strony, rozkład wysokości wyniku nominalnego jest dość płaski (tj. nie jest skoncentrowany wokół MTO), a „suma różnic” często wykracza poza przedział $\pm 6\%$ PKB. Wykres 6 potwierdza, że nawet w długim okresie korekta, ujemna bądź dodatnia, jest stosowana często. Może to być problematyczne z dwóch powodów: zmienna dynamika wydatków utrudnia proces planowania wieloletniego, a ponadto stawia w niewygodnym położeniu nowo-wybrany rząd, jeżeli „dziedziczy” ujemną korektę w spadku po swoich poprzednikach. Przynajmniej trzy czynniki mogą wpływać na rzadsze występowanie korekty: 1) ww. złagodzenie MTO po silnym obniżeniu zadłużenia; 2) stabilizacja dochodów w relacji do PKB, np. pośrednio dzięki SRW; 3) wolna, rezerwowa przestrzeń w limicie wydatkowym określona na niższym lub wyższym poziomie w zależności od bieżącej „sumy różnic”. Kwestii częstej korekty nie należy jednak wyolbrzymiać, biorąc pod uwagę, iż roczna zmiana dynamiki wydatków o 1,5 – 2 p.p., z historycznej perspektywy polskich finansów publicznych, nie jest nadzwyczajnym wydarzeniem.

Rysunek 5: Suma różnic w mechanizmie korygującym w p.p. PKB: mediana i decyle z symulacji stochastycznych



Źródło: obliczenia własne

Rysunek 6: Rozkład korekty implikowanej przez SRW w 1000 symulacjach

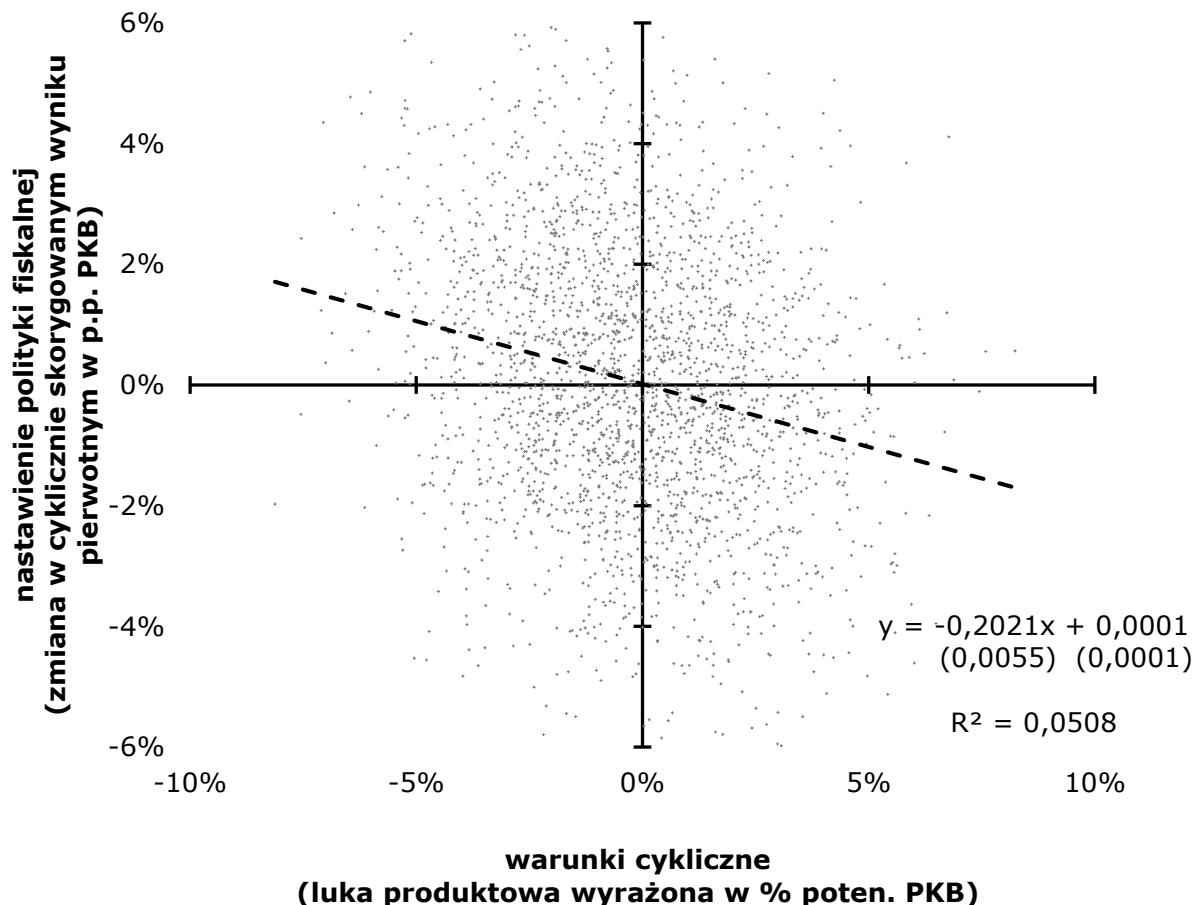


Źródło: obliczenia własne

3 Ocena polityki fiskalnej prowadzonej zgodnie z SRW

Dokonawszy symulacji ewolucji gospodarki Polski przy założeniu obowiązywania SRW, przedstawione zostaną teraz własności implikowanej przez nią polityki fiskalnej. Analiza tych własności zostanie dokonana na podstawie wykresów, badania stopnia integracji określonych szeregow czasowych i fiskalnej funkcji reakcji. Ponadto ocenie będą podlegały zmiany prawne w SRW z 2014 i 2015 r.

Rysunek 7: Cykliczność polityki fiskalnej na podstawie 1000 symulacji - zmiana w CAPB na tle luki



Źródło: obliczenia własne

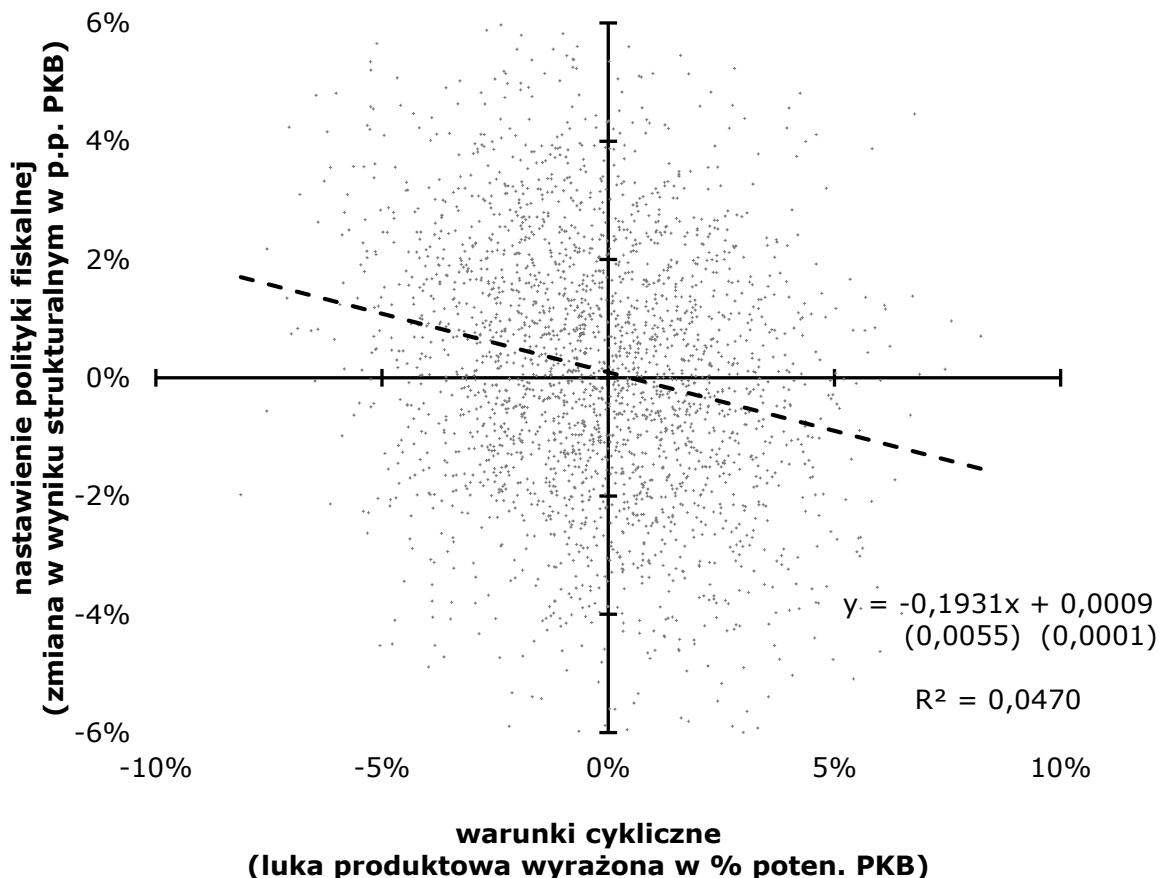
3.1 Cykliczność i stabilność finansów publicznych przed i po SRW

Polityka fiskalna implikowana przez SRW zostanie teraz oceniona pod kątem dwóch kryteriów: antycyklicznej reakcji na sytuację gospodarczą i długookresowej stabilności (zrównoważenia).

3.1.1 Graficzna analiza cykliczności

Jako pierwszy krok kryterium cykliczności zostanie ocenione w prosty sposób, za pomocą graficznej metody zaproponowanej przez Jędrzejowicza, Kitalę i Wronkę (2008). Wykresy 7 i 8 prezentują cykliczność polityki fiskalnej prognozowaną na lata 2014-2015 w Programie Konwergencji (MF, 2015) i symulowaną na lata 2016-2040 w oparciu o dwa wskaźniki nastawienia polityki fiskalnej: skorygowany cyklicznie wynik pierwotny (ang. cyclically-adjusted primary balance, CAPB) i wynik strukturalny (w symulacjach jest równy skorygowanemu cyklicznie wskutek braku modelowania działań jednorazowych). Zmiany w CAPB i wyniku strukturalnym zostały przedstawione na osiach pionowych, a luka produktowa - na poziomych. W obu przypadkach punkty są rozmieszczone dość równomiernie i nie układają się wokół żadnej linii. Na podstawie współczynników R-kwadrat równych w przybliżeniu 5% można wysunąć hipotezę, że nie należy oczekiwać istotnego związku między warunkami cyklicznymi a nastawieniem

Rysunek 8: Cykliczność polityki fiskalnej na podstawie 1000 symulacji - wynik strukturalny na tle luki



Źródło: obliczenia własne

polityki fiskalnej w Polsce. Tej hipotezie zaprzecza jednak statystycznie istotne ujemne oszacowanie zależności między luką produktową a nastawieniem polityki fiskalnej. Zależność ujemna oznacza, że w dobrych czasach wynik sektora jest gorszy, a więc ekspansywna polityka fiskalna przyczynia się wtedy do dodatkowej poprawy koniunktury - pogłębia, a nie łagodzi wahania cykliczne. Można zatem stwierdzić, że SRW będzie raczej acykliczna lub słabo procykliczna.

Wnioski poczynione przez Jędrzejowicza, Kitalę i Wronkę (2009), odnoszące się do przeszłych wyników, były mieszane. Według nich, polityka fiskalna w latach 1995-2003 była przeważnie procykliczna. Jednak korelacja między zmianą w CAPB a luką produktową sugeruje, że polityka w 2004-2007 była już antycykliczna, co można wyjaśnić stosowaniem się do kryteriów fiskalnych z Maastricht. Tak długo, jak dotyczyło to ujemnych luk produktowych, występowały epizody zarówno ekspansywnej, jak i restrykcyjnej polityki fiskalnej. Z drugiej strony, dodatnie luki produktowe zazwyczaj oznaczały pogorszenie się CAPB. Autorzy postawili hipotezę, że reguła dłużu przyczyniła się do procykliczności polityki fiskalnej w Polsce, ponieważ reguła wymuszała zacieśnienie podczas spowolnienia gospodarczego.

Analiza wizualna wykresów 7 i 8 wskazywałaby raczej na acykliczność SRW, ale o procykliczności można by wnioskować na podstawie modeli opisujących zależności przedstawione na owych wykresach. Niemniej jednak, w celu dogłębniego zbadania antycykliczności i długookresowej stabilności, potrzebne są bardziej zaawansowane metody niż analiza wizualna czy analiza mo-

delu ekonometrycznego z jednym regresorem. W niniejszej pracy skorzystano z dwóch metod opartych na ocenie zintegrowania zmiennych fiskalnych (wyrażonych w poziomach, w cenach stałych). Ich celem jest weryfikacja stabilności zadłużenia poprzez sprawdzenie, czy oczekiwana, zdyskontowana wartość przyszłego zadłużenia zbiega do zera w długim okresie (w przeciwnym razie rząd finansowałby w nieskończoność odsetki starych obligacji za pomocą nowo wyemitowanych). Jeśli tak się dzieje, to bieżąca wartość realna dłużu równa się zdyskontowanej wartości bieżącej i przyszłych oczekiwanych wartości wyników pierwotnych, z czym utożsamia się stabilną (zrównoważoną) politykę fiskalną (Bohn 2005, s. 7).

3.1.2 Ocena stabilności w oparciu o stopień integracji

Wśród ekonomistów nie ma konsensusu, która metoda oceny stabilności fiskalnej związana z badaniem zintegrowania lub kointegracji zmiennych jest najlepsza. Co więcej, niektóre metody są poddawane silnej krytyce z perspektywy metodologicznej. Bohn (2005, s. 15 i 21) pokazuje np., że niektóre warunki, opisywane jako konieczne, są w rzeczywistości jedynie wystarczające. Ciekawą dyskusję na temat założeń owych metod, ich krytyki i sposobu testowania przeprowadził też Mackiewicz (2010). Poniżej zostały zastosowane najbardziej popularne z nich.

Pierwsza metoda oceny stabilności fiskalnej zaproponowana przez Hamiltona i Whitemana (1985) polega na porównaniu stopni integracji zadłużenia publicznego i wyniku pierwotnego. Jeżeli wynik pierwotny jest zintegrowany w stopniu q , to spełnione międzyokresowe ograniczenie budżetowe sektora GG implikuje zintegrowanie dłużu także w stopniu q . Innymi słowy, stabilność implikuje ten sam stopień zintegrowania zmiennych, a więc różny stopień zintegrowania implikuje brak stabilności. Mimo to, Hamilton i Flavin (1985) twierdzą, iż stacjonarność deficytu i dłużu USA oznacza stabilność fiskalną.

Poniżej stopnie zintegrowania zostały ocenione za pomocą trzech panelowych testów pierwiastka jednostkowego: Ima, Pesaran i Shina (2003), Fishera-ADF i Fishera-Phillipsa-Perrona (Maddala i Wu, 1999; Choi, 2001 oraz Hadri, 2000). Formuła (5) przedstawia równanie testujące każdą zmienną y w każdej symulacji ($i = 1, 2, \dots, 1000$). To równanie zawiera indywidualny wyraz wolny, dwa opóźnienia zmiennej objaśnianej, ale nie zawiera trendu, zgodnie z metodyką przyjętą przez Mackiewicza (2010):

$$\Delta y_{it} = \alpha_{i0} + \alpha_i y_{it-1} + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \Delta y_{it-j} + \varepsilon_{it}. \quad (5)$$

Hipotezy podlegające testowaniu były następujące:

$$H_0 : \alpha_i = 0 \forall_i.$$

$$H_1 : \begin{cases} \alpha_i = 0 & \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \\ \alpha_i < 0 & \text{dla } i = N+1, N+2, \dots, 1000. \end{cases}$$

Hipoteza zerowa mówi, że w każdej symulacji zmienna objaśniana stanowiła szereg niestacjonarny. Hipoteza alternatywna z kolei oznacza, że w N symulacjach szeregi były niestacjonarne, zaś w $1000-N$ - stacjonarne.

Testy różnią się sposobem agregowania wyników (za pomocą statystyki t lub wartości p) indywidualnych testów pierwiastków jednostkowych (rozszerzonego testu Dickeya-Fullera - ADF lub Phillipsa-Perrona - PP). W tabeli (6) pokazano wartości p implikowane przez poszczególne testy.

Tabela 6: Wartości p w panelowych indywidualnych testach pierwiastka jednostkowego dla wybranych zmiennych fiskalnych

test	poziom długu	przyrost długu	wynik pierwotny	przyrost wyniku pierw.
Im, Pesaran, Shin	0,8465	0,0000	0,0000	0,0000
Fisher-ADF	0,6603	0,0000	0,0000	0,0000
Fisher-Phillips-Perron	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Na podstawie powyższych wyników, można wnioskować o niestacjonarności poziomu zadłużenia we wszystkich przypadkach, podczas gdy wynik pierwotny musiał być przynajmniej w kilku przypadkach stacjonarny. Niestety, wyżej podane testy mogą jedynie oddzielić realizacje procesów, w których występował pierwiastek jednostkowy we wszystkich przypadkach (symulacjach) od tych, które były przynajmniej w kilku przypadkach stacjonarne. Nie są to zatem w pełni użyteczne testy. Z tego powodu poddano analizie z wykorzystaniem testu ADF także poszczególne przebiegi symulacji. Z tabeli 7 wynika, że poziom długu był przeważnie I(2) (zintegrowany w stopniu 2) lub I(3), podczas gdy wynik pierwotny I(1) lub I(2). Tylko w 7% symulacji stopnie zintegrowania tych szeregów były takie same, co oznacza niespełnienie warunku Hamiltona i Whitemana, a tym samym brak długookresowej stabilności polskiej polityki fiskalnej opartej o SRW.

Tabela 7: Częstość występowania różnych stopni zintegrowania wybranych zmiennych fiskalnych

stopień integracji	poziom długu	wynik pierwotny	wynik nominalny
0	3%	5%	6%
1	5%	42%	42%
2	40%	49%	48%
3	47%	0%	0%
nieokreślony	4%	4%	4%

Trehan i Walsh (1991) zaproponowali dwie inne metody badania stabilności fiskalnej² - w zależności od tego, czy oczekiwana wysokość stopy procentowej ma być stała czy zmienna.

W tym pierwszym przypadku (s. 209-211), przy założeniu stacjonarności (o zerowej średniej) quasi-przyrostu wyniku pierwotnego³, podali konieczny i wystarczający warunek na stabilność: kointegrację pomiędzy długiem i wynikiem pierwotnym. Test śladu i maksymalnej wartości własnej rzeczywiście wskazały, że kointegracja występuje odpowiednio w 80% i 84% przypadków. Warunek na stacjonarność quasi-przyrostu wyniku pierwotnego jest jednak spełniony rzadko, gdyż bardzo często wynik pierwotny jest I(2) (patrz tabela 7). Również założenie o stałości oczekiwanej stopy procentowej wydaje się silne, jeżeli założyć, że oczekiwania są formułowane w symulowanej gospodarce zgodnie z powszechnie znanim procesem generującym wysokości stopy procentowej.

W odniesieniu do drugiego przypadku, Trehan i Walsh stwierdzili (1991, s. 215), że jeżeli wartość oczekiwana realnej stopy procentowej jest zmienna, ale dodatnia, to wystarczającym warunkiem na stabilność długu jest stacjonarność wyniku nominalnego. Ponownie, warunki nie zostały spełnione. Nie tylko wynik nominalny bardzo rzadko wykazuje stacjonarność (patrz tabela 7), ale w dodatku realna stopa procentowa przyjmuje ujemne wartości w 17% symulacji.

²W artykule, na podstawie którego powstała ta część rozprawy (Korniluk, 2016) znalazła się jeszcze jedna metoda - opisana błędnie - którą tutaj pominięto.

³Gdzie: $y_t - \lambda y_{t-1}, 0 \leq \lambda \leq 1 + r$. To założenie oznacza, że wynik pierwotny może być albo stacjonarny ($0 \leq \lambda < 1$) albo zintegrowany w stopniu 1, tj. I(1) ($1 \leq \lambda \leq 1 + r$).

Podsumowując, powyższe metody testowania stabilności fiskalnej oparte na badaniu stopnia zintegrowania zmiennych wskazują na brak stabilności w polityce fiskalnej prowadzonej zgodnie z SRW.

3.1.3 Fiskalna funkcja reakcji

Wnioski, jakie można wyciągnąć z rezultatów testów przeprowadzonych w poprzednim podrozdziale nie mogą być silne z uwagi na słabości metodologiczne użytych narzędzi. Konkluzja o braku stabilności fiskalnej stoi ponadto w sprzeczności z wynikami symulacji stochastycznych, zgodnie z którymi wskaźnik zadłużenia silnie obniża się dzięki obowiązywaniu SRW. Dlatego posłużyono się jeszcze jedną metodą - fiskalną funkcją reakcji (FFR), która pozwala na jednocześnie ocenę stabilności i cykliczności polityki fiskalnej. FFR to model wyjaśniający kształtowanie się zmiennej reprezentującej nastawienie w polityce fiskalnej (np. wynik pierwotny bądź strukturalny) za pomocą zmiennych odzwierciedlających stan finansów publicznych lub koniunktury. Politykę fiskalną prowadzoną w danym państwie można zatem interpretować na podstawie istotności i znaku współczynnika stojącego przy danej zmiennej objaśniającej.

Należy w tym miejscu przytoczyć artykuł Bohna (1998, s. 961). Bohn pokazał, że następujące warunki są wystarczające do stabilności w polityce fiskalnej: 1) wynik pierwotny powinien być funkcją wskaźnika zadłużenia do PKB i innych zmiennych, których wartości są ograniczone; 2) bieżąca wartość przyszłego PKB powinna być skończona; 3) pierwotna nadwyżka powinna rosnąć przynajmniej liniowo z długiem w relacji do PKB. Ostatni warunek miał być spełniony tylko dla wysokich wartości wskaźnika zadłużenia, więc ewentualna istotność dodatniego oszacowania przy dlużu w FFR implikuje wypełnienie tego warunku z nadmiarem.

Różne rodzaje fiskalnych funkcji reakcji zostały zaprezentowane w tabelach 8-9. Dwie z nich zostały oszacowane na historycznych polskich danych: oryginalna zaproponowana przez Mackiewicza (2010) oraz zaktualizowana przez autora niniejszej pracy. Pozostałe zostały oszacowane na podstawie wyników symulacji stochastycznych.

W pierwszej FFR, w równaniu (1), zmienną objaśnianą stanowił wynik pierwotny, natomiast jedną ze zmiennych objaśniających była luka produktowa. W przeciwnym razie, gdyby zmienną objaśnianą uczyniono wynik skorygowany o wahania cykliczne, możliwe byłoby precyzyjne uchwycenie reakcji polityki dyskrecjonalnej na wahania cykliczne. Jednak wielu autorów zajmujących się FFR także wybierają wynik nieskorygowany (znakomity przegląd tematu został dokonany przez Galiego i Perottiego (2003)) i podobnie uczyniono w niniejszej pracy we wszystkich równaniach zebranych w tabeli 9 z wyjątkiem jednego. Po pierwsze, oczyszczenie wyniku o wahania cykliczne charakteryzuje się wysoką niepewnością. Ten argument nie obowiązuje jednak w symulacjach, gdzie dokładnie znane są wartości luki produktowej. Ważniejszy jest drugi argument - bardziej interesujące jest badanie reakcji polityki fiskalnej ogółem, a nie tylko dyskrecjonalnej, gdyż automatyczne zachowanie wydatków i dochodów publicznych też jest uwarunkowane uprzednimi decyzjami politycznymi. Przykładowo, wysokość i warunki przyznawania zasiłków dla bezrobotnych albo kształt systemu podatkowego można zmieniać tak, aby odznaczały się mniejszą lub większą wrażliwością na wahania cykliczne.

W równaniu (1) wynik pierwotny oryginalnie odnosił się tylko do budżetu państwa, ale został przez Mackiewicza odpowiednio zmodyfikowany, aby uczynić szereg porównywalnym w czasie. Nie zmienia to faktu, że wynik całego sektora GG lepiej odzwierciedla ogólny stan finansów publicznych niż tylko saldo budżetu centralnego. W tym podrozdziale wynik sektora GG, a nie budżetu państwa, był zatem używany we wszystkich FFR z wyjątkiem równania (1) z tabeli 8. Zgodnie z FFR wyspecyfikowaną i oszacowaną przez Mackiewicza, polityka fiskalna w latach 1993-2008 była nie tylko antycykliczna, ale też zrównoważona: „Otrzymany wynik testu [istotności parametru mierzącego reakcję salda pierwotnego finansów publicznych na kształtowanie

się dłużu publicznego] wskazuje, że istniejące w Polsce instytucje wymuszają, średnio rzecz biorąc, wzrost nadwyżki pierwotnej w reakcji na wzrost poziomu dłużu publicznego.” (Mackiewicz 2010, s. 170). Te konkluzje, przeciwnie do stwierdzeń z poprzedniego podrozdziału, zostały wy ciągnięte na podstawie istotnego dodatniego oszacowania parametru odnoszącego się do luki produktowej i dłużu publicznego w równaniu (1).

Równanie (2), oszacowane na danych historycznych z okresu 1997-2013, w porównaniu z (1): o nieco innej zmiennej objaśnianej, bardzo różnymi wartościami luki produktowej (silnie zrewidowanymi po kryzysie) i bez żadnych zmiennych zero-jedynkowych, nie wykazało żadnego istotnego związku między zmienną objaśnianą a objaśniającymi. Wskazuje to, że wynik pierwotny przed wprowadzeniem SRW był podyktowany polityką dyskrecyjną, a nie czynnikami makroekonomicznymi. Słabość modelu (2) podkreślają także reszty podlegające procesowi autokorelacji.

Tabela 8: Wyniki estymacji fiskalnej funkcji reakcji (FFR) na podstawie rzeczywistych danych

	Mackiewicz (2010) (1)	FFR zaktualizowana (2)
zmienna objaśniana	wynik pierwotny budżetu	wynik pierwotny GG
okres	1993-2008	1997-2013
liczba obserwacji	15	16
metoda estymacji	KMNK	KMNK
zmienna 0-1	nieistotna po 2008	brak
zmienna objaśniana (-1)	-0,004 0,103 0,049*** 0,012 0,454** 0,070 stała	0,378 0,251 -0,079 0,073 0,149 0,133 -0,012 0,008
skorygowany R^2	0,740	0,378
test ADF	-3,504***	-3,891***
wartość p (ADF)	0,008	0,001
statystyka Ljunga-Boxa Q	5,994	12,153***
wartość p (Q) (3 opóźn.)	0,112	0,007
test LM Breuscha-Godfreya	-	5,479**
wartość p (LM) (3 opóźn.)	-	0,015
test Jarque'a-Bera	1,978	5,239*
wartość p (JB)	0,372	0,073

Tabela 9 prezentuje natomiast wyniki estymacji bazowej specyfikacji FFR (1) i, jako sprawdzian odporności wyników, kilka FFR, których specyfikacja lub metoda szacunku trochę się różni (2-6). Wszystkie te równania zostały oszacowane na wartościach symulowanych zmiennych makroekonomicznych i fiskalnych. Równanie (2) wyjaśnia skorygowany cyklicznie wynik pierwotny a nie zwykły wynik pierwotny. Regresja (3) została oszacowana prostą metodą KMNK bez żadnych efektów stałych bądź losowych. W równaniu (4) ortogonalne odchylenia zostały użyte zamiast różnic w specyfikacji efektów stałych - to odstępstwo symbolizuje symbol (*), natomiast w równaniu (5) instrumenty zawierają Δ deflator PKB(-2) i Δ wynik pierwotny(-2)(**). Regresja (6) różni się od bazowej tylko dodatkowym regresorem - deflatorem PKB, w szczególności ma takie same instrumenty co bazowa FFR.

Galí i Perotti (2003) zauważali, że większość FFR zawiera nieskorygowane luki produktowe, co w takich modelach stanowi zagrożenie odwrotną przyczynowością. Ponieważ polityka fiskalna oddziałuje na PKB, a więc też na lukę produktową, może to spowodować dodatnie obciążenie w oszacowaniu współczynnika stojącego przy luce. W przypadku omawianych tutaj symulacji,

dokładnie znany jest proces generujący lukę produktową (5 w tabeli 5). Stąd wystarczy z owego równania odjąć wyrażenie z realną dynamiką wydatków, aby wyeliminować wpływ polityki fiskalnej na lukę produktową.

Tabela 9: Wyniki estymacji fiskalnej funkcji reakcji (FFR) na podstawie 1000 symulacji 2016-2040

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
zmienna objaśniana	wynik pierwotny	cykl. skor. wyn. pier.	wynik pierwotny	wynik pierwotny	wynik pierwotny	wynik pierwotny
metoda estymacji	panelowa UMM AB	panelowa UMM AB	KMNK	panelowa UMM AB(*)	panelowa UMM AB	panelowa UMM AB
instrumenty			Δ deflator PKB (-2)		(**)	(***)
zmienna objaśniana (-1)	0,529*** 0,118	0,243** 0,124	0,814*** 0,005	1,070*** 0,049	0,526*** 0,077	0,279* 0,143
dług publiczny (-1)	0,088*** 0,031	0,053 0,037	0,016*** 0,001	0,018*** 0,005	0,035*** 0,013	0,119*** 0,033
skorygowana luka produktowa	0,598*** 0,107	0,599*** 0,099	0,248*** 0,005	0,154 0,201	0,628*** 0,079	0,714*** 0,111
deflator PKB	- -	- -	- -	- -	- -	0,049*** 0,018
stała	-0,009 niewysp.	0,004 niewysp.	0,002*** 0,000	-0,003 niewysp.	0,006 niewysp.	-0,014 niewysp.
standardowy błąd regresji	0,031	0,037	0,021	0,023	0,026	0,042
R^2 ogólny	0,267	0,031	0,640	0,631	0,446	0,050
R^2 within	0,325	0,047	0,612	0,598	0,456	0,094
R^2 between	0,001	0,049	0,949	0,977	0,377	0,147
statystyka J	32,116	26,737	-	34,206	66,339	22,527
wartość p (J)	0,075*	0,221	-	0,047**	0,021**	0,370
wartość p (AB)	0,175	0,000***	-	-	0,000***	0,287
autokorel. AR(2)						

Większość regresji wykazuje pozytywny wpływ dłużu w relacji do PKB, skorygowanej luki produktowej i deflatora PKB na wynik pierwotny. Można z tego wyciągnąć wniosek o stabilności i antycykliczności polityki fiskalnej. Jednak odpowiadające sobie oszacowania są dość zróżnicowane w poszczególnych modelach. Poza tym, zgodnie z równaniem (6), finanse publiczne mogą korzystać z „premii inflacyjnej”, czyli nieoczekiwane wysokiej inflacji, która zapewnia niezапланowane dochody, podczas gdy wydatki są ustalone w sensie nominalnym ex ante (z kolei nieoczekiwana deflacja pogarsza stan budżetu państwa).

Wyżej opisywane wyniki wydają się umiarkowanie odporne. W szczególności równania (2) i (5) nie przeszły udanie etapu weryfikacji z powodu autokorelacji składnika losowego drugiego stopnia, natomiast równanie (3) nie może być wiarygodne ze względu na nieodpowiednią metodę estymacji. Również wartości współczynnika determinacji były rozczarowująco niskie, nawet biorąc pod uwagę, że powierzchniowa ocena wysokości R-kwadrat może wprowadzać w błąd. Celem szacowania równań było bowiem zidentyfikowanie zależności związanych z polityką fiskalną, a nie całościowe wyjaśnienie jej funkcjonowania - zwłaszcza, że znany jest prawdziwy model ją generujący. Równania (2) i (6) cechują się niskim R-kwadrat⁴, w porównaniu z regresją KMNK

⁴W szczególności warto zauważyć, że ogólny R-kwadrat w równaniu (6) jest istotnie niższy niż w (1). Oba równania różnią się tylko jedną zmienną objaśniającą - deflatorem PKB. Metoda estymacji jest taka sama. Gdyby to była klasyczna metoda najmniejszych kwadratów, wówczas R-kwadrat w modelu z dodatkową zmienną nie mógłby spaść. Jednak posługując się uogólnioną metodą momentów, dodanie słabego instrumentu może spowodować nieoczekiwany spadek R-kwadrat. Dyskusję na temat obliczania współczynnika R-kwadrat w regresji zmiennych instrumentalnych przeprowadził Woolridge (2003, s. 471-472). Wynika z niej, że R-kwadrat przy

w związku z niższym oszacowaniem parametru przy opóźnionej zmiennej objaśnianej, która jest silnie auto-skorelowana. Z drugiej strony, równania (1) i (6) odznaczają się dobrymi właściwościami statystycznymi - poprawnością doboru instrumentów i brakiem autokorelacji drugiego stopnia.

Warto w tym punkcie podkreślić, że ze względu na fakt, iż ww. modele estymowane były w oparciu o wyniki symulacji stochastycznych, a nie rzeczywiste dane empiryczne, nie należy wyciągać wniosków w oparciu o testy statystycznej istotności. Znając proces generujący dane, wiemy, które zmienne mają wpływ na wynik pierwotny sektora instytucji rządowych i samorządowych. Ponadto błędy standardowe oszacowań będą zależały od liczby przeprowadzonych symulacji, co jest kontrolowane przez badacza. Sformułowane modele pozwalają natomiast lepiej zrozumieć względową siłę wpływu poszczególnych zmiennych objaśniających na wynik pierwotny i tym samym zweryfikować hipotezę o stabilności i cykliczności polityki fiskalnej prowadzonej w zgodzie z SRW.

3.2 Ocena modyfikacji SRW z 2014 i 2015 r.

Trzy elementy formuły zostały zmodyfikowane, odkąd SRW weszła w życie: 1) kalkulacja limitu (możliwość zwiększenia o jednorazowe dochody); 2) część nominalna i 3) wysokość progów zadłużeniowych. Dwie pierwsze zmiany zostały dokonane w 2015 r., a trzecia w 2014 r. Te poprawki, które zostały poddane ocenie za pomocą różnych narzędzi w niniejszej pracy, mają bardzo zróżnicowany wpływ na zrównoważenie finansów publicznych.

Jednorazowe i tymczasowe (dalej używa się w skrócie określenia: jednorazowe) działania po stronie dochodów oddziałują na limit, ale nie na kwotę wydatków, która jest obliczana rekurencyjnie ze wzoru (1). Wynika z tego, iż ewentualne zwiększenie limitu nie ma trwałego charakteru, a w konsekwencji nie ma znaczenia dla wydatków z następnych lat. Z perspektywy stabilności finansów publicznych, jednorazowe dochody i odpowiadające im kwotowo jednorazowe wydatki znoszą się wzajemnie, zatem deficyt pozostaje bez zmian. Ewentualne modelowanie działań jednorazowych w symulacjach nie wpłyniełoby na ich rezultaty. Jednak z teoretycznego punktu widzenia, dochody jednorazowe nie powinny pozwalać decydentom na zwiększenie wydatków w żadnym roku, m.in. dlatego, że trudniej jest wycofywać wydatki niż je wprowadzać. Poza tym, dochody jednorazowe są wyłączone z wyniku strukturalnego - często używanego do planowania i oceny polityki fiskalnej, zwłaszcza na szczeblu unijnym. Takie wyłączenie tym samym redukuje dopuszczalny poziom wydatków, przy założeniu docelowej wysokości wyniku strukturalnego.

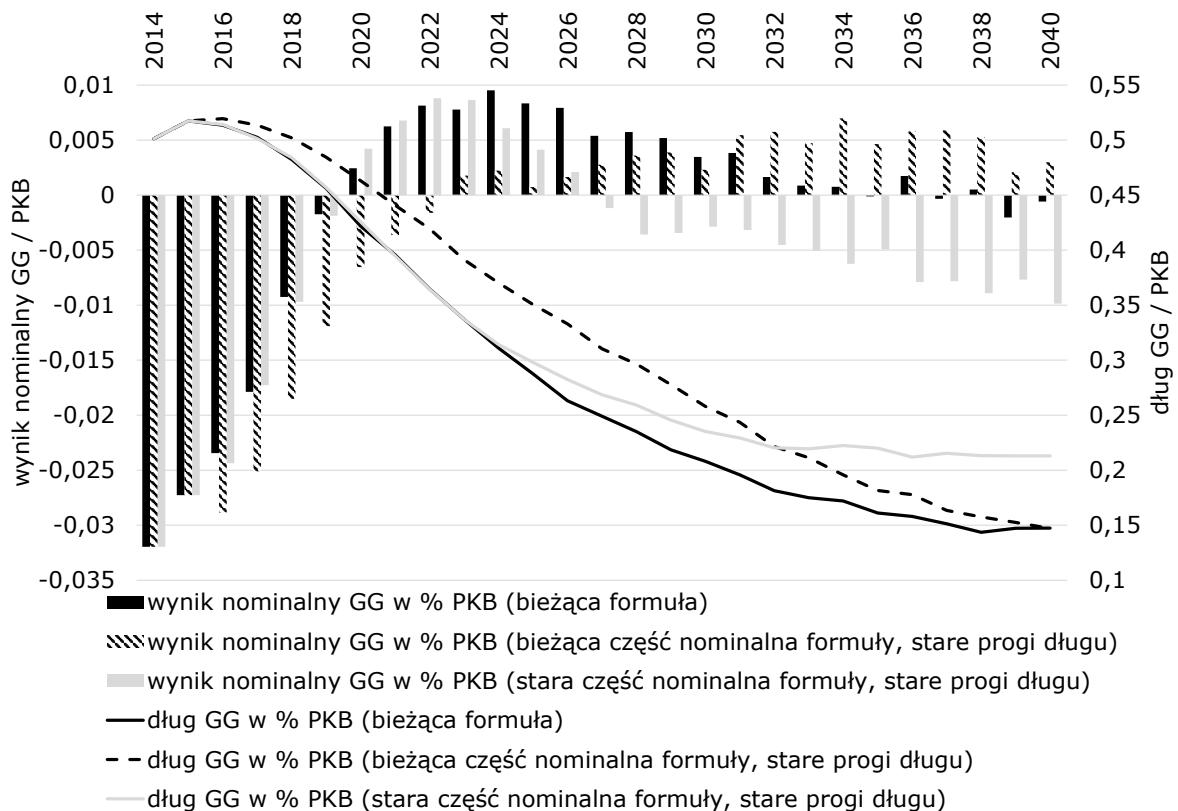
Druga modyfikacja formuły polegała na zmianie części nominalnej formuły - z iloczynu prognozy CPI i aktualizacji prognoz z dwóch poprzednich lat na cel inflacyjny RPP. Aby dokonać jej oceny, należy odróżnić konsekwencje długookresowe od krótkookresowych. Jak długo dynamika inflacji CPI będzie oscylowała wokół celu Rady Polityki Pieniężnej (co jest silnym założeniem, szczególnie w krótkim okresie), można postawić hipotezę, że zmiana w formule będzie neutralna w odniesieniu do finansów publicznych. Jednakże w listopadzie 2015 r., kiedy wprowadzano tę zmianę, Narodowy Bank Polski prognozował, że dynamika CPI utrzyma się poniżej celu w dwuletnim horyzoncie projekcji. Fakt ten, a także poprzedni akapit skłaniają do wniosku, iż obie modyfikacje miały na celu zwiększyć bieżącą kwotę wydatków wynikającą z SRW⁵.

zastosowaniu omawianej tu metody nie jest zbyt użyteczna diagnostyka, gdyż jej cel stanowi uzyskanie dobrego oszacowania parametru w sytuacji, gdy zmienna objaśniająca jest skorelowana ze składnikiem losowym, a nie dobre dopasowanie modelu do danych.

⁵ Podobnie objęcie regulą Bankowego Funduszu Gwarancyjnego (BFG) (Dz. U. 1190, 2015), którego wydatki są z zasady jednorazowe, nie było uzasadnione teoretycznie, gdyż mogło prowadzić do procykliczności. Banki mają trudności w okresie złej koniunktury, więc wydatki BFG wypychałyby inne wydatki w czasie, gdy istnieje zapotrzebowanie na ekspansywną politykę fiskalną. Jak zauważył Wiertz (2008): „Reguły fiskalne (...) zostały

Jednak, niezgodnie z powyższą hipotezą, symulacje pokazują, że wprowadzenie celu inflacyjnego jako części nominalnej formuły nie jest neutralne nawet w długim okresie. Oba warianty nominalnej części formuły zostały ocenione *ceteris paribus*. Ścieżka medianowa najważniejszych zmiennych fiskalnych (patrz wykres 9) okazała się być mniej restrykcyjna, jeżeli w formule stosowano prognozę CPI i aktualizację prognoz a nie sam cel CPI. Tę obserwację można wyjaśnić odmienną reakcją obu formuł na niespodziewanie wysoką inflację. Zgodnie z pierwotną postacią części nominalnej, nieoczekiwane zacieśnienie było anulowane w kolejnym roku. Zgodnie natomiast z obecną postacią części nominalnej, nie ma takiego natychmiastowego dostosowania. Dlatego ewentualne nadwyżki budżetowe, utrzymywane przez autoregresyjny proces generujący CPI oraz rekurencyjnie obliczaną kwotę wydatków, mogą zostać zredukowane dopiero wtedy, gdy „suma różnic” przekroczy +6% PKB. Tymczasem skumulowane ujemne odchylenia od MTO na początku funkcjonowania SRW silnie wydłużają czas dojścia do dodatniej korekty. Można to zauważać na wykresie 9, który pokazuje, jak wynik sektora GG odchyla się od MTO w długim okresie.

Rysunek 9: Wynik i dług GG w relacji do PKB implikowany przez formuły: pierwotną i bieżącą



Źródło: obliczenia własne.

Uwaga: Stare progi dlużu i stara część nominalna formuły odnoszą się do pierwotnej postaci formuły SRW (Dz. U. 1646, 2013). Bieżąca formuła dotyczy stanu prawnego na 1 stycznia 2016 r.

Trzecia poprawka, tj. obniżenie progów zadłużeniowych także zostało zbadane *ceteris paribus*. Symulacje zostały wykonane przy założeniu pierwotnych, wyższych progów (50 i 55 % zamiast

poddane krytyce. (...) Reguły wydatkowe w UE są zwykle wprowadzane w życie przez te same instytucje, które decydują o wydatkach, tj. Ministerstwa Finansów. Powstaje pytanie, dlaczego politycy mieliby się trzymać reguł, które sami sobie narzucili zamiast kierować się własnymi motywacjami.”

43 i 48 % PKB), ale z obecną częścią nominalną, tj. celem inflacyjnym. Dlatego kwota wydatków od 2016 r. uległa zmianie. W latach 2014-2015 korekta wynosiła -2 p.p. niezależnie od wysokości progów. W 2016 r. mechanizm korygujący przestał wykazywać nadmierny deficyt (istnieje dwuletnie opóźnienie między wystąpieniem nadmiernej wartości deficytu lub dłużu a zastosowaniem odpowiedniej korekty w SRW), więc progi dotyczące dłużu zaczęły odgrywać znaczącą rolę. W przeciwieństwie do symulacji bazowych (patrz wykres 6), nie zastosowano absolutnie żadnej korekty w latach 2016-2017. Dochody kształtowały się zgodnie z tym samym modelem, co w scenariuszu bazowym, więc wyższe wydatki doprowadziły w alternatywnych symulacjach do wyższej mediany deficytu o średnio 0,5 p.p. w 2016 r. i o 0,9 p.p. w 2017 r. Ponieważ SRW została wprowadzona zanim Polska osiągnęła MTO, korekty w 2016-2017 r. były konieczne do redukcji deficytu, tak aby dojść do MTO w 2018 r. W przeciwnym wypadku, MTO mogłoby zostać osiągnięte dopiero w 2020 r., zbyt późno z perspektywy unijnego Paktu Stabilności i Wzrostu (KE, 2013). Owo opóźnienie, z kolei, wydłużyło średnią długość okresu ujemnej korekty i opóźniło jego zakończenie. Deficyt wyniósł średnio 0,2% PKB w obu wariantach progów dłużu, co świadczy o tym, że w długim okresie mechanizm korygujący mógłby wystarczyć nawet bez progów odnoszących się do dłużu. Jednak bieżące, niższe progi prowadzą do szybszej stabilizacji.

Podsumowanie części I

W pracy postawiono hipotezę, iż stabilizująca reguła wydatkowa poprawi charakterystykę polityki fiskalnej w Polsce:

- (a) Reguła uczyni politykę fiskalną antycykliczną.
- (b) Reguła doprowadzi do spadku zadłużenia i zapewni stabilność finansów publicznych.
- (c) Reguła będzie zapobiegała przekraczaniu progu 3% PKB przez deficyt nominalny sektora instytucji rządowych i samorządowych.
- (d) Obniżenie progów odnoszących się do długu w mechanizmie korygującym SRW spowoduje zacieśnienie polityki fiskalnej.
- (e) Zastąpienie w formule prognozowanej inflacji celem inflacyjnym Rady Polityki Pieniężnej będzie neutralne z perspektywy polityki fiskalnej.

Ocena cykliczności SRW jest mieszana. Zauważono słabą ujemną korelację pomiędzy skorygowanym cyklicznie wynikiem i luką produktową, co wskazywałoby na antycykliczność lub lekką antycykliczność przyszłej polityki dyskrecjonalnej. Z drugiej strony, większość oszacowanych funkcji reakcji fiskalnej wskazywała na pozytywny i umiarkowanie odporny wpływ skorygowanej luki produktowej na wysokość wyniku pierwotnego. Oznaczałoby to antycykliczność polityki fiskalnej prowadzonej w zgodzie z SRW, częściowo potwierdzając hipotezę (1a).

Zgodnie ze ścieżką medianową przeprowadzonych symulacji, dług sektora GG w relacji do PKB obniży się z 50% w 2014 do 10 – 20% w 2040. Spadek ten może jednak zostać spowolniony poprzez złagodzenie średniookresowego celu budżetowego. Podobnie, jak w przypadku badania cykliczności, fiskalne funkcje reakcji również pokazują pozytywny i umiarkowanie odporny wpływ długu w relacji do PKB na wysokość wyniku pierwotnego, co świadczyłoby o stabilności polityki fiskalnej. Nie zostały jednak spełnione warunki na stabilność długu, które odnosiły się do właściwości szeregiów czasowych: stopnia zintegrowania i kointegracji odpowiednich zmiennych. Również hipoteza (1b) została zatem jedynie częściowo potwierdzona.

Symulacje wskazały także, iż mechanizm korygujący będzie działał nawet w długim okresie. Deficyt będzie przekraczał 3% PKB średnio co 5-6 lat. Choć więc hipoteza (1c) nie została potwierdzona, i tak oznacza to ogromną poprawę w odniesieniu do okresu przed 2014 r., zważwszy też na to, że SRW jest regułą wydatkową, a nie dotyczącą wprost wyniku nominalnego bądź strukturalnego.

Modyfikacja SRW z 2014 r., dotycząca obniżenia progów długu w mechanizmie korygującym, została uwzględniona w scenariuszu bazowym. Gdyby jednak ta nowelizacja ustawy nie została zrealizowana i progi pozostały na pierwotnych poziomach, to zabrakłoby korekty w latach 2016-2017. To z kolei opóźniłoby osiągnięcie MTO i wydłużyło okres korekty. Mimo tego, w długim okresie wyższe progi byłyby neutralne. W odniesieniu do hipotezy (1d) oznacza to, że obniżenie progów zacieśniło politykę fiskalną tylko w krótkim okresie.

Ostatnia z postawionych hipotez także nie została potwierdzona: okazuje się bowiem, że zastąpienie prognozowanej inflacji CPI celem inflacyjnym nie jest neutralne, nawet w długim okresie. Obecna formuła narzuca bowiem bardziej restrykcyjną politykę w czasach ponadprzeciętnie wysokiej inflacji. Dzieje się tak z uwagi na brak składników korygujących błędne prognozy CPI w formule oraz skumulowane ujemne odchylenia od celu na początku funkcjonowania SRW, co silnie wydłuża czas dojścia do dodatniej korekty.

Część II

Optymalizacja polityki finansowej samorządów

Celem bieżącej części rozprawy jest sformułowanie optymalnej polityki finansowej samorządów w zakresie wydatków bieżących oraz inwestycyjnych gmin i miast powiatowych w ciągu czteroletniej kadencji władz samorządowych. Zgodnie z ustaleniami zawartymi w powiązanej literaturze, przyjęto założenie, że optymalna polityka powinna uwzględniać regułę zrównoważonego wyniku bieżącego i indywidualny wskaźnik zadłużenia. Powinna też zależeć od: parametrów określających preferencje samorządów, stopy procentowej, zapadalności dłużu, tempa wzrostu dochodów bieżących, stopy amortyzacji, początkowych wskaźników zadłużenia, wydatków bieżących oraz poziomu infrastruktury, a także limitu funduszy przeznaczonych na inwestycje unijne i udziału środków unijnych w finansowaniu inwestycji.

4 Polityka finansowa samorządów w świetle literatury

Literatura poświęcona optymalnej alokacji dóbr na poziomie lokalnym i - generalnie - polityce fiskalnej samorządów, czyli tzw. „fiskalnemu federalizmowi”, jest bogata i różnorodna, acz nie wiąże się aż tak silnie z bieżącymi wydarzeniami politycznymi jak literatura na temat reguł fiskalnych oraz polityki fiskalnej prowadzonej na szczeblu centralnym. Oates (2005) wyróżnił w jej ramach trzy nurty: 1) teorii dawnych (pierwszej generacji), 2) teorii wyboru publicznego oraz 3) teorii współczesnych (drugiej generacji, patrz też Weingast, 2009). Przełomowe prace na temat alokacji dóbr publicznych, w tym samorządowych, zostały opublikowane w latach '50 XX wieku. Zaliczają się one do teorii dawnych według klasyfikacji Oatesa.

4.1 Teorie dawne (pierwszej generacji)

Samuelson (1955) stwierdził, że nie istnieje mechanizm rynkowy, który doprowadziłby do zdecentralizowanej i efektywnej alokacji dóbr publicznych. Myśl tę rozwiniął później Varian (2002), opisując potencjalne sposoby rozwiązania tego problemu i wskazując na słabości każdego z nich. Przykładowo, można by posłużyć się mechanizmem głosowania, lecz okazuje się, że nie jest on doskonałą metodą, m. in. dlatego, że jego wynik może być wrażliwy na kolejność głosowanych opcji. Alternatywnie, można przyjąć, że koszt wytworzenia dobra publicznego ponosiłby jego użytkownicy proporcjonalnie do użyteczności, jaką by z niego czerpali. Jednak racjonalnemu konsumentowi opłacałoby się wówczas zaniżać swoje ujawniane preferencje, aby ponosić mniejszy, a nawet zerowy, udział w finansowaniu dobra publicznego, z którego tak czy inaczej będzie korzystał (typowy efekt gapowicza). Z kolei założenie stałego kosztu finansowania dobra publicznego powoduje to, że osoby optujące za (przeciw) wytworzeniem dobra publicznego mogą zawyjażać (odpowiednio zaniżać) swoje ujawniane preferencje.

W celu naklonienia konsumentów do ujawnienia ich rzeczywistych preferencji można zastosować podatek Grovesa - Clarke'a (Clarke, 1971 i Groves, 1973). Podatek ten opłaca jedynie kluczowy głosujący, czyli ten, bez którego decyzja grupy różniłaby się od decyzji podjętej razem z nim. Dzięki temu podatnik internalizuje koszty społeczne podejmowanej przez siebie decyzji. Wysokość podatku jest równa stracie tej części grupy, która przegrała głosowanie z powodu „kluczowego głosu”. Taki podatek sprawia, że racjonalny głosujący wskazuje rzeczywistą użyteczność (netto), jaką czerpie z danego dobra publicznego, dzięki czemu wybierany jest optymalny poziom tego dobra z punktu widzenia społeczeństwa. Podobnie, jak przednio przytoczone metody,

również podatek Grovesa-Clarke'a nie jest idealnym rozwiążaniem. Wymaga on, aby preferencje konsumentów były quasi-liniowe (tzn. żeby na użyteczność z konsumpcji dobra publicznego nie wpływał poziom konsumowanego dobra prywatnego). Ponadto, podatek ten nie prowadzi do alokacji Pareto-efektywnej, gdyż konsumpcja prywatna kluczowych głosujących mogłaby być wyższa. Wynika to z faktu, iż podatek stanowi czystą strategię społeczeństwa. Nie może on bowiem trafić do zwykłych głosujących, gdyż miałoby to wpływ na ujawniane przez nich preferencje.

Z tezą Samuelasona (1955) nie zgadzał się Tiebout. W swoim słynnym artykule, Tiebout (1956) przekonywał, iż może istnieć efektywne, przynajmniej w przybliżeniu, pseudo-rynkowe rozwiązanie w odniesieniu do lokalnych dóbr publicznych. Takie dobra mogą jednocześnie konsumować jednostki danej społeczności lokalnej (np. gminy), a nie całą populację. Zaproponowany przez Tieboutha mechanizm prowadzący do efektywnej alokacji polegał na tzw. „głosowaniu nogami”, tzn. przeprowadzaniu się konsumentów do tych gmin, które zapewniają najbardziej odpowiedni, według ich preferencji, zestaw dóbr publicznych.

Tiebout wymienił siedem założeń, na których oparł swój model:

- 1) pełna mobilność konsumentów-głosujących;
- 2) pełna informacja o różnicach pomiędzy wydatkami na dobra publiczne i podatkami w gminie (społeczności);
- 3) duża liczba gmin, spośród których konsumenti mogą wybierać;
- 4) brak bezrobocia, każdy żyje z egzogenicznego dochodu pochodzącego z dywidend;
- 5) usługi publiczne świadczone przez jedną gminę nie mają wpływu na użyteczność mieszkańców innych gmin (brak efektów zewnętrznych);
- 6) dla każdego wariantu zestawu usług w gminie istnieje optymalna liczba mieszkańców, która zapewnia minimalny przeciętny koszt świadczenia owych usług - oznacza to, że musi istnieć pewien czynnik produkcji lub zasób, np. ograniczone terytorium albo plaża o z góry ustalonej wielkości;
- 7) jeżeli w danej gminie liczba mieszkańców jest niższa od optymalnej, to gmina próbuje przyciągnąć nowych mieszkańców, aby obniżyć średni koszt usług. W sytuacji odwrotnej, gmina zachęca część mieszkańców do wyprowadzki.

Należy też odnotować wymogi niewymienione przez Tieboutha explicite. Po pierwsze, konieczność wystarczająco dużej liczby konsumentów o podobnych preferencjach - tak, aby zaistniały korzyści skali w produkcji dóbr publicznych. Po drugie, model wymagał podatku nałożonego na każdą osobę w takiej samej wysokości, co w rzeczywistości jest niespotykane. Gdyby bowiem podatek był uzależniony od wartości nieruchomości, wówczas konsumenti woleliby mieszkać z bogatymi sąsiadami, aby uzyskać większą ilość dóbr publicznych niż wynikłoby to z ich podatków. Bogaci mieszkańcy w takiej sytuacji próbowałiby narzucić ograniczenia (np. poprzez plan zagospodarowania przestrzennego) uniemożliwiające nabycie tanich mieszkań w ich gminie. Po trzecie, brak kosztów przeprowadzki i brak problemu ze znalezieniem pracy w innym mieście.

Tiebout był świadomy, że równowagowe rozwiązanie jego modelu może być optymalne, w odniesieniu do użyteczności konsumentów, jedynie w przybliżeniu. Przykładowo, do pewnej gminy mogłoby chcieć się wprowadzić więcej konsumentów niż wynosiłaby liczba mieszkańców tej gminy minimalizująca średni koszt dóbr publicznych. Część osób musiałaby więc zdecydować się na gminę znajdującą się na drugim miejscu prywatnego rankingu. Ogólnie rzecz biorąc, całkowita efektywność alokacji wymagałaby nieskończonej liczby gmin - tak, aby każdy konsument mógł wybrać gminę z idealnym, z jego punktu widzenia, zestawem usług. Jednak model opisujący np. jednoosobowe gminy byłby, zdaniem Tieboutha, zbyt oderwany od rzeczywistości.

Na podstawie modelu Tiebouta można stwierdzić, że dobra publiczne powinny być finansowane przez samorządy, jeżeli:

- 1) służą większości mieszkańców (wtedy widzą oni efekt płacenia podatków lokalnych i dzięki temu nie unikają tych opłat);
- 2) nie wywołują efektów zewnętrznych;
- 3) ich produkcja nie cechuje się bardzo dużymi korzyściami skali (jak np. obrona narodowa).

Choć model Tiebouta opierał się na wielu założeniach, dalsze prace wykazały, że należy na niego jeszcze nałożyć dodatkowe warunki, aby liczba gmin, alokacja osób pomiędzy gminami i poziom dostarczanych usług publicznych były efektywne. Jednym z artykułów, który stanowi krytykę modelu Tiebouta, jest praca Bewleya (1981) dowodząca, że w modelu Tiebouta nie można znaleźć Pareto-efektywnej równowagi. Zasadniczy powód to niewiedza konsumentów o tym, iż ich przeprowadzki wywarłyby wpływ na zmianę ilości dóbr publicznych oferowanych przez samorządy, co przyczyniłoby się do zwiększenia użyteczności konsumentów. Inne powody stanowią: niemożność różnicowania stawek podatkowych obowiązujących bardziej i mniej pracowitych podatników, a także mechanizm ciągłej ucieczki bardziej produktywnych mieszkańców przed mniej produktywnymi. Teoria Tiebouta miała pokazać, w jaki sposób mogłyby dojść do efektywnej alokacji dóbr publicznych. Bewley stawia zarzut, że aby wykazać ową efektywność, należy poczynić tak liczne i silne założenia, że lokalne dobra publiczne de facto mają cechy dóbr prywatnych, a sposób alokacji sprowadza się do rozwiązania znalezionej już wcześniej w teorii równowagi ogólnej.

4.2 Kwestia stopnia decentralizacji władzy i teorie wyboru publicznego

Teorie dawne, według Oatesa (2005), często sprowadzały się do wyboru między decentralizacją a centralizacją władzy. Przy założeniu, że wszyscy politycy maksymalizują dobrobyt wyborców, decentralizacja przyczynia się do wzrostu użyteczności obywateli. Polityka może zostać wtedy lepiej skrojona pod potrzeby poszczególnych regionów, różniących się pod względem preferencji mieszkańców. Takie rozwiązanie zostało nazwane przez Olsona (1969) „ekwiwalencją fiskalną”.

Z drugiej strony, nie można wykluczyć, że rząd centralny byłby w stanie zarządzać różnymi regionami, uwzględniając ich specyfikę - modele takiego rządu zostały przedstawione w artykułach zaliczanych do drugiej generacji: Lockwooda (2002) oraz Besleya i Coate'a (2003). Istotny jest tu fakt, że dobra wytwarzane w jednym regionie mogą wywierać pozytywne lub negatywne efekty zewnętrzne wobec innych regionów. Jeżeli tej zawodności polityki samorządów nie można naprawić za pomocą wyrównawczych transferów w stylu Pigou (1920), będzie stanowiła ona, podobnie jak możliwość różnicowania polityki regionalnej przez rząd, argument za centralizacją. Besley i Coate zwracają ponadto uwagę na to, że jeżeli rząd jest wyłaniany jako większościowa koalicja przedstawicieli regionów, może to powodować dyskryminację regionów, których przedstawiciele nie wejdą do koalicji. Z drugiej strony, rząd kooperujący, uwzględniający interesy wszystkich regionów ma tendencję do zawyżania wydatków publicznych. Dzieje się tak, ponieważ mieszkańcy danego regionu wolą paradoksalnie wybrać polityka o silniejszych poglądach etatystycznych niż poglądy mieszkańców. Taki polityk, w ramach koalicji rządzącej, wpłynie bowiem na zwiększenie wydatków publicznych także w pozostałych regionach, co za sprawą efektów zewnętrznych i braku konieczności finansowania tych wydatków, przyniesie wyższą użyteczność mieszkańcom regionu, z którego został wybrany.

W przeciwieństwie do wyżej cytowanych artykułów poświęconych polityce lokalnej, w teoriach wyboru publicznego politycy mają własne preferencje - inne niż reszta społeczeństwa. Politykom, w tym władzom samorządowym, może np. zależeć na maksymalizacji wydatków budżetowych, aby poszerzyć swoje wpływy. Zdaniem Brennana i Buchananego (1980), rywalizacja o wyborców

zachodząca pomiędzy jednostkami samorządowymi mogłaby przyczynić się do ograniczenia nadmiernego udziału państwa w gospodarce. Jednak Rodden (2003) zauważał, że ten pozytywny wpływ decentralizacji może zajść tylko wtedy, gdy wydatki lokalne są finansowane z lokalnych podatków, a nie dotacji z budżetu centralnego.

4.3 Współczesne teorie fiskalnego federalizmu

Współczesne teorie fiskalnego federalizmu, mimo że różnorodne, mają przeważnie dwie cechy wspólne. Po pierwsze, podobnie jak teorie nawiązujące do wyboru publicznego, zakładają różne funkcje celu u polityków i wyborców. Przykładowo, Prud'homme (1995) pokazał, że większa decentralizacja zmniejsza możliwość prowadzenia przez rząd centralny aktywnej, antycyklicznej polityki fiskalnej. Rząd centralny dysponuje bowiem mniejszą kwotą wydatków. Ponadto, władze samorządowe zwykły wydawać więcej pieniędzy w okresie przedwyborczym, wywołując w ten sposób cykle polityczne - niekoniecznie zbieżne z cyklem koniunkturalnym w kraju.

Po drugie, współczesne teorie (drugiej generacji) akcentują problematykę niepełnej informacji. Przykład stanowią prace wykorzystujące model pryncypała i agenta, przy czym pryncypałem są władze centralne (np. Levaggi, 2002) lub wyborcy (np. Tommasi i Weinschelbaum, 2007), a agentem - władze lokalne. Z kolei wybory rządzących podyktowane m.in. obietnicami składanymi w trakcie kampanii wyborczej, zostały przeanalizowane przez Seabrighta (1996) w oparciu o model niepełnych kontraktów.

Kolejna grupa współczesnych artykułów porusza zagadnienie twardych i miękkich ograniczeń budżetowych - pojęć spopularyzowanych przez Kornaia (1979, 1980). Kornai odnosił te pojęcia do firm, odpowiednio, kapitalistycznych i socjalistycznych. Wskazywał na nieefektywne zachowania przedsiębiorstw, podlegających miękkim ograniczeniom budżetowym, w szczególności na ich nigdy niezaspokajany popyt, wynikający z niewrażliwości na koszty. Podobnie, samorządy przekraczają swoje ograniczenia budżetowe, nadmiernie się zadłużając i licząc na pomoc ze strony budżetu centralnego. Władze centralne starają się przekonać samorządy, aby zacieśniły swoją politykę wydatkową, ponieważ w przeciwnym razie nie uzyskają wsparcia. Takie zachowania są analizowane przy użyciu narzędzi teorii gier. Przykładowo, praca Goodspeeda (2002) odwołuje się do modelu Stackelberga; natomiast Inman (2003) wykorzystuje grę w „dylemat więźnia”, której wynikiem może być albo bankructwo albo ratunek finansowy dla samorządu. Warto dodać, że aby uczynić ograniczenie budżetowe jednostek samorządowych twardszym, należy odpowiednio zaprojektować system podatków i dotacji, prawo upadłościowe, a także reguły fiskalne.

4.4 Badania poświęcone polityce samorządowej w Polsce

Rzadziej można spotkać w literaturze badania empiryczne poświęcone polityce polskich samorządów. Przykładowo, rozbudowany model opisujący politykę finansową jednostek samorządu terytorialnego w latach, w których dużą rolę odgrywa finansowanie unijne, znajduje się w pracy Sieraka i in. (2013). Celem budowy tego modelu było „oszacowanie środków niezbędnych do zapewnienia krajowego wkładu publicznego do projektów realizowanych w ramach 2014-2020”. Dokładniej mówiąc, chodziło o „określenie możliwej do sfinansowania - zgodnie z ograniczeniami prawnymi - kwoty wydatków inwestycyjnych, zarówno tych, które podlegają refundacji ze środków UE (wraz z koniecznym współfinansowaniem), jak i tych, które nie są ponoszone w związku z realizacją projektów unijnych”.

W przeciwieństwie do modelu omawianego w niniejszej pracy, model Sieraka i in. (2013) miał charakter prognostyczny. Dochody bieżące (bez środków UE) były prognozowane w oparciu

o wykonanie z 2011 r. powiększone o wzrost PKB i inflację. Z kolei dochody bieżące z UE dla poszczególnych samorządów prognozowano jako iloczyn łącznej kwoty tej kategorii oraz wskaźnika średniego udziału danej JST w latach 2007-2011. Założono, że wydatki bieżące (bez odsetek i wydatków bieżących refundowanych ze środków UE ze współfinansowaniem) będą rosły podobnie jak dochody bieżące, w tempie PKB i inflacji, przy czym tempo PKB zostało skorygowane w dół o 10%. Wydatki bieżące refundowane ze środków UE ze współfinansowaniem obliczono jako iloczyn dochodów bieżących z UE i założonego wskaźnika współfinansowania. Przyjęto różne wskaźniki dla gmin, powiatów, województw oraz projektów „twardych” (inwestycyjnych) i „miękkich”. Przyjęto, że środki (dochody) z UE na inwestycje kształtują się w ten sam sposób, co dochody bieżące z UE. Wydatki inwestycyjne refundowane ze środków UE ze współfinansowaniem obliczono podobnie jak refundowane wydatki bieżące, tj. za pomocą iloczynu środków z UE na inwestycje ogółem oraz założonego wskaźnika współfinansowania. Pozostałe dochody majątkowe obliczano przy założeniu stałej relacji do dochodów bieżących poszczególnych JST, przy czym współczynnik tej relacji różnił się dla gmin, miast na prawach powiatu, powiatów i województw.

Model Sieraka i in., podobnie jak model w niniejszej pracy, uwzględnia także nadwyżkę operacyjną, przyrost długu (potrzebnego do zrównoważenia sumy wydatków i rozchodów), dług na początku roku budżetowego, spłatę długu oraz dopuszczalny i rzeczywisty wskaźnik obsługi zadłużenia. Odsetki zostały skalkulowane jako iloczyn stopy procentowej (półtorakrotności stopy inflacji powiększonej o 1 p.p.) i dłużu z roku poprzedniego. Dług jest spłacany zgodnie ze stałą roczną stopą umorzenia dłużu.

W kontekście zadłużenia polskich samorządów, warto też przytoczyć obserwacje poczynione przez Kamińskiego (2012). Stwierdził on, że system finansowania wydatków JST „został skonfrontowany w ostatnim dziesięcioleciu z dwoma istotnymi wyzwaniami”: 1) odejściem od zrównoważonego budżetu bieżącego na rzecz finansowania dłużnego wynikającego z chęci wykorzystania środków unijnych i 2) kryzysem finansowym, który miał wpływać na zmniejszenie się dochodów JST i w konsekwencji wydatków inwestycyjnych.

Inne godne uwagi badanie oparte na danych jednostkowych polskich samorządów stanowi praca Fałkowskiego i Bukowskiej (2016). Porównano w nim gminy wiejskie, w których rządził ten sam wójt przez sześć kadencji z rzędu (od wyborów w 1990 do 2010 r.) z pozostałymi gminami wiejskimi. Wysnuło wniosek, że monopolizacja władzy nie przekłada się na wyniki gospodarcze gmin, tj. poziom inwestycji na mieszkańca, stopę bezrobocia i wysokość nadwyżki operacyjnej. Istotny okazał się natomiast wpływ monopolizacji władzy na poziom frekwencji w wyborach samorządowych.

Pozostała literatura poświęcona polskim samorządom skupia się na ogół na aspektach prawnych (Skuza, 2003a i 2003b; Wiewióra, 2007), finansowych (Karpiński, 2001; Jastrzębska, 2002; Gonet, 2004) lub teoretycznych (Guziejewska 2007 i 2008).

Reasumując, polityka fiskalna zazwyczaj jest prezentowana z perspektywy podsektora centralnego. Niniejsza praca doktorska powinna zatem wypełnić lukę w literaturze naukowej, polegającą na braku badań opisujących polską jednostkę samorządową jako podmiot maksymalizujący swoją funkcję celu, mający możliwość decydowania o poziomach wybranych zmiennych oraz podlegający określonym warunkom ograniczającym.

5 Model decyzyjny władz samorządowych

Przedstawiony w niniejszej pracy doktorskiej model opisuje problem, przed którym stoją decydenci jednostki samorządu terytorialnego (wójt, burmistrz gminy lub prezydent miasta) w okre-

sie, w którym istotną rolę w finansowaniu inwestycji odgrywają środki unijne⁶. Jednostka samorządu terytorialnego jest w niniejszej pracy rozumiana jako gmina lub miasto na prawach powiatu, w tym Warszawa.

Województwa i powiaty ziemskie nie są więc brane pod uwagę. Wynika to z „silnego zróżnicowania potencjału finansowego pomiędzy rodzajami JST” (Sierak i in., 2013). Przykładowo, udział wydatków majątkowych w wydatkach ogółem jest wyraźnie mniejszy w powiatach ziemskich niż w gminach, natomiast odwrotna sytuacja ma miejsce w województwach. W niniejszej pracy wykorzystywane są dane empiryczne dotyczące gmin i miast na prawach powiatu, dla tego zdecydowano się zawieźć obszar badań do najniższego szczebla jednostek samorządowych. Należy zarazem podkreślić, że samorządy wojewódzkie i powiatowe ziemskie mają stosunkowo małe znaczenie - łącznie ich wydatki ogółem w każdym roku z okresu 2005-2014 były około cztery razy mniejsze niż łącznie wydatki gmin i miast powiatowych. W 2015 r. łączne wydatki samorządów województw i powiatów wyniosły 40,6 mld zł, natomiast gmin, Warszawy i miast na prawach powiatów wyniosły 155,8 mld zł (RIO, 2015).

5.1 Preferencje

Problem decyzyjny samorządowców można zinterpretować następująco. Po wygranych wyborach, które odbywają się na koniec roku zerowego, nowe władze samorządowe mają przed sobą cztery lata kadencji. Decydenci owi zastanawiają się, ile środków przeznaczyć na wydatki bieżące i inwestycje w roku pierwszym, drugim, trzecim i czwartym.⁷ W pierwszym dniu roku piątego odbywają się kolejne wybory, podczas których mieszkańcy danej gminy lub miasta oceniają dotychczasowe władze pod kątem strumienia wydatków bieżących z czterech ostatnich lat i zasobu infrastruktury na moment bieżący, a także w trzech zeszłych latach.

Mieszkańcy obszaru zarządzanego przez daną JST czerpią użyteczność z wydatków bieżących w roku t oznaczonych jako c_t (tj. przeznaczonych na bieżącą działalność, świadczenia społeczne, zasiłki i stypendia oraz inne podmioty, m.in. uczelnie, szkoły, przedszkola, instytucje kultury, zakłady opieki zdrowotnej, Izby Rolnicze i inne JST; w tej kategorii nie uwzględnia się natomiast odsetek od kredytów i pożyczek, gdyż zostały one zdefiniowane oddziennie) oraz z zasobu szeroko rozumianej infrastruktury z roku $t+1$, tj. k_{t+1} (m.in. dróg, szkół, przedszkoli, domów kultury, obiektów sportowych, oczyszczalni ścieków, pojazdów transportu zbiorowego). Maksymalizowana jest suma zdyskontowanych rocznych strumieni użyteczności z c_t i k_{t+1} wyrażonych za pomocą kombinacji liniowej logarytmów tych zmiennych.

Zakłada się tutaj tożsamość preferencji (z wyjątkiem horyzontu czasowego) władz i mieszkańców. Politycy starają się maksymalizować dokładnie znaną, logarytmiczną funkcję użyteczności mieszkańców po to, aby wygrać następne wybory.

Optymalizacji podlega więc następująca funkcja:

$$\max_{\{c_t\}, \{u_t\}, \{i_t\}, \{z_t\}} \sum_{t=1}^4 \beta^t (\alpha \ln c_t + (1 - \alpha) \ln k_{t+1}). \quad (6)$$

Założenie logarytmicznej, separowalnej względem c_t i k_{t+1} funkcji użyteczności jest zgodne z postulatem dodatniej, malejącej krańcowej użyteczności czerpanej z wydatków bieżących i infrastruktury. Spośród wielu funkcji o dodatniej pierwszej pochodnej i ujemnej drugiej pochodnej,

⁶Model można jednak uogólnić na okres, w którym środki unijne przestaną być istotne.

⁷W wyżej opisany sposób można zinterpretować problem optymalizacyjny z rozdziału 8.2. Nieco inaczej należy opisać problem z rozdziału 8.1. Władze samorządowe dokonują tam decyzji po zakończeniu drugiego roku - planują wydatki jedynie na rok trzeci i czwarty.

wybrano logarytm ze względu na możliwość uzyskania prostych rachunków (pochodną logarytmu zmiennej jest odwrotność zmiennej, a separowalność sprawia, że pochodne mieszane drugiego rzędu są równe zero). Co więcej, logarytmy są często używane przez ekonomistów w funkcjach użyteczności⁸.

Czasowy horyzont planowania został ograniczony z tradycyjnie przyjmowanej w ekonomii nieskończoności do czterech lat kadencji władz samorządowych z dwóch powodów.

Po pierwsze, zakłada się krótkowzroczność polityków - ich głównym celem jest zwycięstwo w kolejnych wyborach i dlatego zależy im na maksymalizacji użyteczności w ciągu bieżącej kadencji, a nie w długim okresie. W tym celu decydenci np. wolą zrealizować maksymalne wydatki dopuszczalne przez reguły fiskalne niż wziąć pod uwagę obciążenie długiem przyszłych pokoleń. Słabością przyjętego założenia jest abstrahowanie od możliwości reelekcji. Oznacza to, że wyborcy, mimo że zależy im na użyteczności w długim okresie, nie są w stanie dobrze prognozować wydatków w przyszłości, więc oceniąją polityków wyłącznie przez pryzmat ostatniej kadencji. Ponadto odróżnienie funkcji celu wyborców od polityków oraz uwzględnienie niepełnej informacji, co zostało wspomniane w poprzednim rozdziale, należy do cech współczesnych teorii fiskalnego federalizmu.

Po drugie, model zawiera kilka warunków ograniczających oraz zmiennych decyzyjnych, przez co rozwiązania optymalne mają złożoną postać i różnią się w zależności od przyjętego wariantu stanów początkowych. Skrócenie horyzontu czasowego do jednej kadencji umożliwia stosunkowo czytelny zapis i analizę rozwiązań.⁹

Warto wyjaśnić także występowanie w funkcji użyteczności zmiennej k_{t+1} zamiast k_t . Przede wszystkim, gdyby użyto k_t , to optymalne inwestycje w ostatnim roku kadencji byłyby zerowe, gdyż zgodnie z równaniem (7) na poziom infrastruktury w przeszłym roku wpływają inwestycje z poprzedniego roku. W praktyce inwestycje samorządowe w ostatnim roku kadencji odgrywają istotną rolę w pozyskaniu głosów wyborców. Można nawet postawić hipotezę, że obywatele wynagradzają władze samorządowe bardziej za przyrost infrastruktury niż za jej poziom, który odziedziczyli po swoich poprzednikach. Jednak krańcowa użyteczność z infrastruktury - jak z każdego dobra - maleje, więc w funkcji użyteczności występuje poziom k_{t+1} , a nie zmiana.

5.2 Ograniczenia budżetowe

JST podlegają w każdym roku ograniczeniu budżetowemu (wg terminologii Kornaia - twardemu). Założono, że suma wydatków i rozchodów równa się sumie dochodów i przychodów z zaciągniętych pożyczek i wyemitowanych obligacji. Jednak, zgodnie z art. 217 ust. 2 pkt 5-6 ustawy o finansach publicznych, deficyt budżetu JST może być dodatkowo sfinansowany przychodami pochodząymi m.in. z: nadwyżki budżetu JST z lat ubiegłych lub wolnych środków jako nadwyżki środków pieniężnych na rachunku bieżącym budżetu JST, wynikających z rozliczeń wyemitowanych papierów wartościowych, kredytów i pożyczek z lat ubiegłych.

Z dwóch powodów abstrahowano od nadwyżki zgromadzonej w latach ubiegłych. Po pierwsze, zakładając, że oprocentowanie dłużu jest większe niż depozytów, samorządom korzystniej byłoby zredukować wolne środki do zera oraz spłacić w tej samej kwocie dług. Po drugie, w rzeczywistości nadwyżka z lat ubiegłych stanowi średnio tylko 7% przychodów gmin i miast powiatowych. W 57% są to kredyty, pożyczki i wyemitowane papiery wartościowe, a w 33% - wolne

⁸O logarytmicznie modelowanej użyteczności pisał już w XVIII wieku matematyk Bernoulli, jego praca została przedrukowana w *Econometrica* (1954). Założył on, że „jakikolwiek wzrost majątku (...) będzie zawsze skutkował wzrostem użyteczności odwrotnie proporcjonalnym do ilości dóbr już posiadanych”, a funkcją spełniającą powyższy warunek jest właśnie logarytm.

⁹Co więcej, dopiero potraktowanie dwóch pierwszych lat jako danych, czyli skrócenie horyzontu do roku trzeciego i czwartego umożliwia rozwiązywanie analityczne modelu.

środki wynikające z rozliczeń kredytów, pożyczek i wyemitowanych papierów wartościowych z lat ubiegłych. Ta ostatnia kategoria występuje, jeżeli samorządy zaciągną kredyt w jednym roku (np. w grudniu) w celu wydania tych środków w roku następnym (np. w styczniu). W modelu zaciąganie pożyczek zachodzi dokładnie raz na rok, a popyt zgłoszany przez samorządy jest całkowicie zaspokajany po z góry określonej stopie procentowej. Dlatego modelowym decydentem nie opłacałoby się zadłużanie się z rocznym wyprzedzeniem. Wszystkie rozliczenia kredytów, pożyczek i papierów wartościowych odbywają się w roku bieżącym. W rezultacie, 90% przychodów JST jest odwzorowane w modelu bez nadwyżki z lat ubiegłych.

Założono dwa źródła dochodów: bieżące i kapitałowe unijne (dalej, w skrócie: unijne). Przyjęto, że dochody bieżące, y_t (dotacje i subwencje z budżetu państwa i środków unijnych, wpływy z podatków - PIT i CIT - opłaty i kary oraz dochody z majątku¹⁰) rosną w stałym tempie γ . W modelu szereg $y_t = y_0(1 + \gamma)^t$ jest więc góry ustalony, dlatego równanie na y nie zostało podane jako jedno z ograniczeń w dalszej części rozdziału. W rzeczywistości dostęp do środków unijnych jest ograniczony, zatem w modelu zakłada się, że dochody unijne w relacji do dochodów bieżących $\frac{u_t}{y_t}$ nie mogą przekroczyć limitu przeznaczonego dla danego JST - v :

$$0 \leq \frac{u_t}{y_t} \leq \frac{U_t}{y_t} = v.$$

Źródłem przychodu netto z_t jest zaciągnięta pożyczka albo kredyt w roku t lub też, zgodnie z inną interpretacją, wpływ z wyemitowanych obligacji. Zmienna z_t może przyjmować wartości ujemne, co należy interpretować jako spłatę netto części zadłużenia. Początkowy stan zadłużenia b_0 powiększony o skumulowane pożyczki z kolejnych lat stanowi zadłużenie w roku t :

$$b_{t+1} = b_0 + \sum_{\tau=0}^t z_\tau.$$

Wydatki mogą być przeznaczone na cztery cele. Z góry ustalone są odsetki od zadłużenia w wysokości iloczynu stałej stopy procentowej i dłużu rb_t . Decyzji podlega kwota przeznaczona na wydatki bieżące c_t (wszystkie oprócz odsetek i wydatków majątkowych), a także inwestycje zwykłe i_t oraz unijne $(1 + \theta)u_t$. Współczynnik $\theta > 0$ reprezentuje część finansowania inwestycji ze środków własnych JST (tzw. współfinansowanie).

Wydatki mogą być finansowane z dochodów bieżących, unijnych lub zaciągniętych pożyczek. Podsumowując, ograniczenie budżetowe JST przedstawia się następująco:

$$(1 + \theta)u_t + i_t + c_t + rb_t = u_t + y_t + z_t.$$

Inwestycje powodują przyrost infrastruktury k_t , która ulega coroczej deprecjacji o frakcję δ . Parametr ten obejmuje także wpływ inflacji, tj. opisuje zmianę nominalnej wartości infrastruktury wynikającą m.in. ze zmian cen. Warto zauważać, że w pierwszej kolejności optymalną decyzję wydaje się realizowanie inwestycji unijnych, gdyż są one częściowo finansowane ze środków zewnętrznych¹¹. Nie jest jednak wykluczone, że optymalny łączny poziom inwestycji powinien przekroczyć $(1 + \theta)u_t$ i wówczas jedynym wyjściem jest realizowanie również bardziej kosztownych inwestycji zwykłych:

$$k_t = k_{t-1}(1 - \delta) + (1 + \theta)u_t + i_{t-1}.$$

¹⁰Nie zdecydowano się na wprowadzenie równania objaśniającego dochody z majątku za pomocą infrastruktury k_t ze względu na możliwe nadmierne skomplikowanie modelu.

¹¹W większości przypadków rzeczywiście tak powinno być, ale nie jest to pewne ze względu na występowanie dochodów unijnych w mianownikach indywidualnego wskaźnika zadłużenia (IWZ, szczególnie kilka akapitów niżej). Nie można wykluczyć, że w pewnych wyjątkowych sytuacjach korzystne mogłoby być zmniejszenie w danym roku (inne rozłożenie w czasie) inwestycji unijnych, a w konsekwencji: zmniejszenie dochodów unijnych, zmniejszenie mianownika IWZ i wreszcie - zwiększenie przestrzeni fiskalnej.

Zmiennymi decyzyjnymi w tym modelu są szeregi czasowe: wydatków bieżących, inwestycji unijnych i zwykłych, a także kwoty zaciągniętego dłużu. Wszystkie te zmienne, oprócz ostatniej, mogą przyjmować tylko wartości nieujemne:

$$\begin{aligned} c_t &\geq 0; \\ u_t &\geq 0; \\ i_t &\geq 0. \end{aligned}$$

5.3 Reguły fiskalne zapobiegające eksplozji dłużu

Tak wyspecyfikowany model nie miałby rozwiązania optymalnego. W ostatnim roku warto byłoby bowiem zaciągać jak największy (teoretycznie - nieskończenie wielki) dług z_4^* . Jego część (rz_4^*) przeznaczono by na odsetki, natomiast pozostała część $((1 - r) z_4^*)$ zwiększałaby wydatki bieżące c_4 , które w sposób nieograniczony zwiększałyby użyteczność. Wprawdzie odsetki ponoszone z tytułu takiego dłużu stanowiłyby wielkie obciążenie budżetu w przyszłych latach, ale z uwagi na czteroletni horyzont planowania, użyteczność z tych lat nie byłaby w ogóle brana pod uwagę. W rzeczywistości politycy również stoją przed pokusą prowadzenia nadmiernie eksplansywnej polityki budżetowej. Warto tu ponownie przywołać ustalenia Besleya i Coate'a (2003) o zawyżaniu wydatków publicznych przez rządy uwzględniające interesy wszystkich regionów.

Dlatego samorządy podlegają regułom fiskalnym zapisanym w ustawie o finansach publicznych. Włączenie tych reguł do modelu sprawia, że eksplodujące zadłużenie przestaje być rozwiązaniem dopuszczalnym. Istnieją dwie reguły fiskalne nałożone na budżety samorządów zarówno *ex ante*, jak i *ex post*: reguła nadwyżki operacyjnej oraz indywidualny limit zadłużenia.

Pierwsza reguła nałożona na jednostki samorządu terytorialnego została zapisana w art. 242 ustawy o finansach publicznych. Głosi ona, że zarówno planowane, jak i wykonane wydatki bieżące nie mogą być wyższe niż dochody bieżące powiększone o nadwyżkę budżetową z lat ubiegłych i wolne środki. Artykuł jest interpretowany tak, że jeśli skumulowany wynik za ubiegłe lata był ujemny, to dochody bieżące nie są pomniejszane, a jeśli dodatnie, to są powiększane. Dokładne wytłumaczenie sposobu obliczenia tej kategorii podał Bitner (2014). W niniejszym modelu nadwyżka z lat ubiegłych nie jest modelowana, zatem opisywaną tu regułę można zapisać w następujący sposób:

$$c_t + rb_t \leq y_t.$$

Od 2014 r., zgodnie z art. 243 ustawy o finansach publicznych, samorządy obowiązuje także przestrzeganie indywidualnych wskaźników zadłużenia, wyrażonych wzorem:

$$\frac{\chi'_t b_t + r_t b_t}{y_t + k'_t + u_t} \leq \frac{1}{3} \sum_{\tau=t-3}^{t-1} \frac{y_\tau + k'_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + k'_\tau + u_\tau},$$

gdzie: χ' - planowana na rok budżetowy łączna kwota z tytułu spłat rat kredytów i pożyczek¹²; k' - dochody ze sprzedaży majątku. W powyższej nierówności występują także zmienne, których definicje z niniejszego modelu są bardzo zbliżone do definicji ustawowych. W celu zachowania przejrzystości - pozostawiono ich oznaczenia bez zmian. Niemniej jednak należy zaznaczyć, że rb

¹²(...) oraz wykupów papierów wartościowych przeznaczonych na finansowanie planowanego deficytu budżetu, spłatę wcześniej zaciągniętych zobowiązań, wyprzedzające finansowanie działań finansowanych ze środków pochodzących z budżetu UE, a także na finansowanie przedsięwzięć inwestycyjnych.

w ustawie zdefiniowano jako planowane na rok budżetowy odsetki od kredytów i pożyczek¹³; $y+k'+u$ - dochody ogółem budżetu w danym roku budżetowym; y - dochody bieżące; c - wydatki bieżące.

W rozważanym tutaj modelu uwzględniono uproszczony wzór na limit zadłużenia, rezygnując ze zmiennej k' - dochodów ze sprzedaży majątku. Uznano bowiem, że sprzedaż majątku należy traktować jako działanie wyjątkowe - jednorazowe, zatem nie może stanowić stałego źródła finansowania wydatków. Ponadto możliwość sprzedaży majątku wymagałaby podziału tej zmiennej na poszczególne (niejednorodne) typy, gdyż w przeciwnym razie, zakładając inwestycje (czyli zwiększenie jednorodnego majątku) jednocześnie sprzedaż (zmniejszenie jednorodnego majątku) nie miałaby sensu. Co więcej, z danych JST wynika, że udział tej kategorii dochodów jest niski.

Uściślenia wymaga też kwestia dochodów. W statystyce samorządów, dochody ogółem składają się z dochodów bieżących: krajowych i unijnych (nazwanych tak dla uproszczenia, w prawie zostały one określone w art. 5 ust. 1 pkt 2 i 3 ustawy o finansach publicznych, w szczególności mogą pochodzić z Norweskiego Mechanizmu Finansowego lub Szwajcarsko-Polskiego Programu Współpracy) oraz majątkowych: ze sprzedaży majątku i pozostałych majątkowych - krajowych i unijnych. W modelu występuje tylko jedna kategoria dochodów unijnych - należy je traktować jako tylko majątkowe, gdyż w przeciwnym razie musiałaby wystąpić w liczniku nierówności (7). Wobec tego, dochody bieżące modelowanej gminy, y_t , zawierają w sobie kształtowane egzogenicznie dochody bieżące: krajowe i unijne. W modelu nie występują też pozostałe dochody majątkowe, które mają dość niski udział w dochodach ogółem, oraz dochody ze sprzedaży majątku, co zostało wyjaśnione w poprzednim akapicie. Jedyne zatem dochody majątkowe to u_t .

Ponadto, zastąpiono spłatę rat kredytów z' stałym odsetkiem zadłużenia, które zapada w danym roku $\chi \cdot b_t$. Należy zaznaczyć, że modelowany jest przyrost netto wartości zadłużenia (podobnie jak majątku), a nie poszczególne transakcje. Stała jest również stopa procentowa r . Poniższa nierówność uniemożliwia nieograniczone zaciąganie długu w ostatnim roku:

$$\frac{(\chi + r)b_t}{y_t + u_t} \leqslant \frac{1}{3} \sum_{\tau=t-3}^{t-1} \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau}. \quad (7)$$

6 Rozwiążanie modelu

6.1 Zapis rozwiązania modelu za pomocą warunków Karusha-Kuhna-Tuckera

Warunki konieczne, które musi spełniać rozwiązanie optymalne modelu, wynikają z twierdzenia Karusha, Kuhna i Tuckera (KKT), które brzmi następująco (Chong, Źak, 2001, s. 397-398):

Rozważmy problem optymalizacyjny:

$$\min f(\mathbf{x})$$

p.w.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0},$$

¹³(...) zaciągniętych na pokrycie występującego w ciągu roku przejściowego deficytu budżetu, finansowanie planowanego deficytu budżetu, spłatę wcześniej zaciągniętych zobowiązań, wyprzedzające finansowanie działań finansowanych ze środków pochodzących z budżetu UE oraz na finansowanie przedsięwzięć inwestycyjnych, a także odsetki i dyskonto od papierów wartościowych emitowanych na te cele oraz spłaty kwot wynikających z udzielonych poręczeń i gwarancji.

gdzie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ i $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Niech: $J(\mathbf{x}^*) = \{j : g_j(\mathbf{x}^*) = 0\}$. Niech \mathbf{x}^* będzie punktem regularnym, tzn. takim, że wektory:

$$\nabla h_i(\mathbf{x}^*), \nabla g_j(\mathbf{x}^*), 1 \leq i \leq m, j \in J(\mathbf{x}^*)$$

są liniowo niezależne. C^1 oznacza zbiór funkcji ciągłych i różniczkowalnych w sposób ciągły¹⁴.

Niech $f, \mathbf{h}, \mathbf{g} \in C^1$. Niech \mathbf{x}^* będzie punktem regularnym, stanowiącym ekstremum lokalne f , pod warunkiem że $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$. Wtedy istnieje $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$ (tzw. wektor mnożników Lagrange'a) i $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^p$ (tzw. wektor mnożników KKT), takie że:

1. $\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}$;
2. $Df(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} D\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\mu}^{*T} D\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^T$;
3. $\boldsymbol{\mu}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$.

Dowód można znaleźć np. we wspomnianym podręczniku do optymalizacji autorstwa Chonga i Źaka (2001, s. 399-401).

Model decyzyjny władz samorządowych z warunkami w postaci KKT należy zapisać w następujący sposób:

$$\max_{\{c_t\}, \{u_t\}, \{i_t\}, \{z_t\}} f(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^4 \beta^t (\alpha \ln c_t + (1 - \alpha) \ln k_{t+1}) \quad (8)$$

p.w. $\forall t \in 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} h_{1t}(\mathbf{x}) : \theta u_t + i_t + c_t + r b_t - y_t - z_t &= 0 \\ h_{2t}(\mathbf{x}) : b_{t+1} - b_1 - \sum_{\tau=1}^t z_\tau &= 0 \\ h_{3t}(\mathbf{x}) : k_{t+1} - (1 - \delta)k_t - i_t - (1 + \theta)u_t &= 0 \\ g_{1t}(\mathbf{x}) : -u_t &\leq 0 \\ g_{2t}(\mathbf{x}) : u_t - U_t &\leq 0 \\ g_{3t}(\mathbf{x}) : -c_t &\leq 0 \\ g_{4t}(\mathbf{x}) : -i_t &\leq 0 \\ g_{5t}(\mathbf{x}) : \frac{(\chi + r)b_{t+1}}{y_{t+1} + u_{t+1}} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=t-2}^t \frac{y_\tau - c_\tau - r b_\tau}{y_\tau + u_\tau} &\leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$g_{6t}(\mathbf{x}) : c_t + r b_t - y_t \leq 0 \quad (10)$$

dane: $b_{-1}, b_0, b_1, k_1, c_{-1}, c_0, u_{-1}, u_0, u_5$.

Rozwiązań modelu polega na znalezieniu wartości składowych wektora:

$$\mathbf{x}^* = [c_1^* \ c_2^* \ c_3^* \ c_4^* \ u_1^* \ u_2^* \ u_3^* \ u_4^* \ i_1^* \ i_2^* \ i_3^* \ i_4^* \ z_1^* \ z_2^* \ z_3^* \ z_4^*]^T,$$

spełniających warunki z twierdzenia KKT. Wymaga to policzenia pochodnych funkcji $f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu} \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Jednocześnie, w przypadku każdego warunku g_j : jeżeli $g_j(x) < 0$, to $\mu_j = 0$ i analogicznie: jeżeli $\mu_j > 0$, to $g_j(x) = 0$. Wynika to z faktu, że oba czynniki $g_j(x)$ i μ_j nie mogą być jednocześnie niezerowe, gdyż taki iloczyn mógłby być tylko ujemny (co wynika z pierwszego warunku KKT i tego, że $g_j \leq 0$), a wówczas suma ujemnych i ewentualnie zerowych iloczynów musiałaby liczbę ujemną, a nie zerową, co wymaga trzeci warunek KKT.

¹⁴Założenia twierdzenia KKT można nieco osłabić, ale dla funkcji wykorzystanych w niniejszym modelu nie ma to znaczenia (Palczewski, 2014, s. 57-58)

Warunki Kuhna-Tuckera są warunkami koniecznymi tylko wtedy, gdy spełnione są warunki tzw. kwalifikowalności¹⁵. Mogą istnieć bowiem rozwiązania optymalne, które nie spełniają warunków KKT, ale musiałyby one znajdować się w specyficznie określonych punktach brzegowych. W przykładzie z podrozdziału 6.3 pokazano, że rozwiązanie analityczne modelu może sprowadzać się do znalezienia, przy ustalonej strukturze warunków ograniczających, optymalnego poziomu inwestycji zwykłych (i_t^*). O poziomie tym założono w omawianym przykładzie, że nie jest zerowy, a zatem z góry przyjęto, że nie może znaleźć się w punkcie brzegowym.

Teoretycznie ekstremów lokalnych spełniających warunki KKT mogłyby być więcej niż jeden i wówczas należałoby wybrać spośród nich ekstremum (ewentualnie ekstrema) globalne. Jednak „żaden punkt wewnętrzny zbioru rozwiązań dopuszczalnych, nie spełniający warunków KKT, nie może być rozwiązaniem optymalnym” (Chiang, 1994). Oznacza to, że jeżeli ekstremum globalne istnieje w punkcie wewnętrznym oraz jeżeli zbiór punktów spełniających warunki KKT jest jednoelementowy, to punkt należący do tego zbioru jest ekstremum globalnym. W dalszej części pracy (w szczególności w porozdziale 6.3 oraz części B i C aneksu) pokazano, że punkty spełniające warunki KKT dla pewnego podzbioru zbioru rozwiązań dopuszczalnych stanowią rozwiązanie równania sześciennego. Spośród trzech takich rozwiązań, dwa stanowią liczby zespolone, a tylko jeden należy do zbioru liczb rzeczywistych. Oznacza to, że punkt ten musi być globalnym rozwiązaniem optymalnym w ramach omawianego podzbioru.

Wyznaczenie pełnego rozwiązania analitycznego takiego modelu jest niewykonalne ze względu na ogromną złożoność zagadnienia. Już nawet rozwiązanie dla trzeciego i czwartego roku (patrz podrozdział 6.3) wymaga bardzo żmudnych i czasochłonnych rachunków, które prowadzą do rozwiązania sześciennego. Dlatego w kolejnych podrozdziałach zostaną wyznaczone, metodą analityczną, fragmentaryczne rozwiązanie modelu, dla $t = 3, 4$ (dla z góry ustalonych wartości zmiennych decyzyjnych z lat $t = 1, 2$), a następnie, metodą numeryczną, pełne rozwiązanie modelu, dla $t = 1, 2, 3, 4$. Innymi słowy, w kolejnych podrozdziałach przedstawione zostaną rozwiązania analityczne problemu (8) na pewnych podzbiorach pełnego zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Rozwiązania takie co do zasady nie będą stanowiły globalnego maksimum problemu (8), jednak pozwalają zbudować cenną intuicję odnośnie do funkcjonowania modelu. Pełne rozwiązanie modelu zostanie wyznaczone metodą numeryczną w rozdziale 8, po kalibracji modelu w rozdziale 7. Jak się okaże, struktura warunków ograniczających w rozwiązaniu optymalnym z dużym prawdopodobieństwem będzie zgodna z tą, którą założono na potrzeby rozwiązania analitycznego w rozdziale 6. Pozwala to potwierdzić praktyczną użyteczność przedstawionych tu analiz.

6.2 Analityczne rozwiązanie dla czwartego roku z napiętym warunkiem IWZ

Uprośćmy teraz problem, znajdując „na skróty” optymalne wartości dla zmiennych z roku czwartego. W tym celu warunek $h_{14}(\mathbf{x})$ należy przekształcić do postaci:

$$\theta u_4 + i_4 + c_4 = z_4 + y_4 - rb_4.$$

Zmienne y_4, b_4 są z góry ustalone w roku czwartym. Widać zatem, że suma wydatków bieżących i inwestycyjnych zależy dodatnio od wielkości zaciągniętego dłużu w czwartym roku. Optymalnie byłoby zatem powiększyć dług jak najbardziej to możliwe, czyli na tyle, na ile pozwalają reguły fiskalne. Z analizy rozwiązań optymalnych uzyskanych za pomocą metod numerycznych (rozdz. 6.4) wynika, że prawie zawsze napięty jest warunek indywidualnego wskaźnika zadłużenia (IWZ,

¹⁵Szczegółową dyskusję na ten temat można znaleźć np. w podręczniku do ekonomii matematycznej Chiang (1994).

patrz równanie (9)), a bardzo rzadko - zrównoważonego wyniku bieżącego (ZWB, patrz równanie (10)). Dlatego dalej założono, że IWZ jest warunkiem napiętym, a ZWB - luźnym.

Z napiętego warunku IWZ można wyprowadzić wzór na optymalny deficyt w roku czwartym:

$$\begin{aligned} \frac{(\chi + r)b_5^*}{y_5 + u_5^*} &= \frac{1}{3} \sum_{\tau=2}^4 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} \Rightarrow \\ \Rightarrow z_4^* &= \frac{y_5 + u_5^*}{\chi + r} \left(\frac{1}{3} \sum_{\tau=2}^4 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} \right) - b_4. \end{aligned}$$

Następnie można przekształcić ograniczenie budżetowe tak, aby po lewej stronie występowały tylko zmienne decyzyjne (ponieważ powinny przyjąć optymalne wartości, to zostały oznaczone gwiazdkami), a po prawej stronie - zmienne z góry ustalone w roku czwartym (ich suma to $\phi = \text{const}|_{t=4}$). Wyjątek stanowi zmienna $u_5 \leq U_5$, której wartość jest określana dopiero przez następujące władze samorządowe, co wykracza poza omawiane tu zagadnienie optymalizacyjne. Na potrzeby rozwiązania można założyć, że w roku piątym kwota inwestycji unijnych opiera się na maksymalny limit, tj. $u_5^* = U_5$.

$$\begin{aligned} \theta u_4^* + i_4^* + c_4^* + rb_4 &= z_4^* + y_4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta u_4^* + i_4^* + c_4^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4^*} &= \phi \end{aligned} \quad (11)$$

Czynnik dyskontujący β^4 można w funkcji celu pominać, gdyż w tym rozdziale brany pod uwagę jest tylko jeden rok. Model optymalizacyjny można zapisać zatem w następujący sposób:

$$\max_{c_4, u_4, i_4} (\alpha \ln c_4 + (1 - \alpha) \ln k_5)$$

p.w.

$$\begin{aligned} \theta u_4 + i_4 + c_4 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4} - \phi &= 0 \\ -c_4 &\leq 0 \\ -i_4 &\leq 0 \\ -u_4 &\leq 0 \\ u_4 - U_4 &\leq 0 \\ c_4 + rb_4 &= y_4. \end{aligned}$$

Funkcja Lagrange'a i warunki konieczne (pierwszego rzędu) przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_4, u_4, i_4) &= \alpha \ln c_4 + (1 - \alpha) \ln ((1 - \delta)k_4 + (1 + \theta)u_4 + i_4) + \\ &+ \lambda \left[\theta u_4 + i_4 + c_4 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4} - \phi \right] \\ &- \mu_1 c_4 - \mu_2 i_4 - \mu_3 u_4 + \mu_4 (u_4 - U_4) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_4} = \frac{\alpha}{c_4^*} + \lambda \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) - \mu_1^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_4} = \frac{1 - \alpha}{(1 - \delta)k_4 + (1 + \theta)u_4^* + i_4^*} + \lambda^* - \mu_2^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} = \frac{(1-\alpha)(1+\theta)}{(1-\delta)k_4 + (1+\theta)u_4^* + i_4^*} + \lambda^* \left(\theta + (y_4 - rb_4 - c_4^*) \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{(y_4 + u_4^*)^2} \right) - \mu_3^* + \mu_4^* = 0.$$

Teoretycznie należałoby rozważyć szesnaście (2⁴) zestawów potencjalnych rozwiązań optymalnych, gdyż każdy z czterech parametrów μ_i może przyjąć wartość zerową lub dodatnią. Poniżej przeanalizowano jednak tylko cztery wybrane warianty. Przede wszystkim założono, że $c_4^* > 0$, co implikuje $\mu_1 = 0$, a jednocześnie pozwala uniknąć rozpatrywania ośmiu wariantów. Trudno bowiem wyobrazić sobie samorząd, nawet o bardzo złym stanie infrastruktury, w którym nie poniesiono by żadnych wydatków bieżących. Zrezygnowano także z dwóch nierealistycznych scenariuszy: zerowych inwestycji zwykłych i unijnych dokładnie równych limitowi oraz dodatnich inwestycji zwykłych i zerowych unijnych, a także dwóch sprzecznych scenariuszy, które zakładałyby zerowe i zarazem równe limitowi inwestycje unijne (przy zerowych lub dodatnich inwestycjach zwykłych). Poniżej wyróżniono zatem cztery rodzaje rozwiązań, z których ostatnie zasługuje na szczególną uwagę.

Zbieżność poniższych rozwiązań, uzyskanych metodą analityczną, z rozwiązaniami otrzymanymi dzięki numerycznym metodom optymalizacyjnym, zaprezentowano szczegółowo w aneksie A. Wyjątek stanowi wariant trzeci, który nie został uwzględniony w aneksie (jest mało realny), lecz metoda postępowania w jego przypadku byłaby analogiczna do wariantu drugiego.

Wariant I

Jeżeli wartość $(1-\delta)k_4$ jest odpowiednio wysoka, to największą użyteczność przynosi przeznaczenie całych dostępnych funduszy na wydatki bieżące. Warunek (12) oznacza, że krańcowa użyteczność z wydatków bieżących sfinansowanych z całego dostępnego budżetu jest wyższa niż z dowolnie małego powiększenia infrastruktury:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c_4} &> \frac{\partial f}{\partial k_5} \text{ dla } k_5 = (1-\delta)k_4 \\ \frac{\alpha \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4} \right)}{\phi + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r}} &> \frac{1 - \alpha}{(1 - \delta)k_4}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_4^* &= 0 \\ i_4^* &= 0 \\ c_4^* &= \frac{\phi + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{y_4 - rb_4}{y_4}}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Wariant II

Jeżeli wartość $(1-\delta)k_4$ jest niższa, tzn. gdy warunek (12) nie zachodzi, to optymalnie jest przeznaczyć pewną część budżetu na inwestycje. Poniżej zakłada się, że optymalne inwestycje unijne nie przekroczą maksymalnej kwoty U_4 . W pierwszej kolejności zazwyczaj (przeciwny przypadek został omówiony w dalszej części pracy) powinny być realizowane inwestycje unijne, gdyż są tańsze. Jeśli więc ich wysokość nie przekracza ustalonej granicy, wówczas realizacja jakichkolwiek inwestycji ze środków własnych może nie mieć uzasadnienia.

$$\begin{aligned} U_4 &> u_4^* > 0 \\ i_4^* &= 0 \\ c_4^* &> 0 \\ \mu_2^* &> 0 \\ \mu_3^* &= 0 \\ \mu_4^* &= 0. \end{aligned}$$

Wartości trzech niewiadomych: u_4^* , c_4^* i λ^* można otrzymać, rozwiązuając układ trzech równań złożonych z niżej zapisanych warunków I rzędu oraz ograniczenia budżetowego (11). Warto nadmienić, iż μ_2^* nie znajduje się w tych równaniach, ponieważ parametr ten pełni rolę pomocniczą - może on zostać obliczony z warunku I rzędu dla i_4^* .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_4} = \frac{\alpha}{c_4^*} + \lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} = \frac{(1-\alpha)(1+\theta)}{(1-\delta)k_4 + (1+\theta)u_4^*} + \lambda^* \left(\theta + (y_4 - rb_4 - c_4^*) \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{(y_4 + u_4^*)^2} \right) = 0 \quad (15)$$

$$\theta u_4^* + c_4^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4^*} = \phi. \quad (16)$$

Próba analitycznego rozwiązania powyższego układu równań prowadzi do na tyle skomplikowanych rachunków, że nie zostały przedstawione. Co więcej, należy uznać całkowity brak inwestycji własnych samorządu za mało prawdopodobną sytuację. Niemniej jednak, optymalne rozwiązanie można uzyskać za pomocą numerycznych metod optymalizacji, o ile otrzymane rozwiązania spełnia powyższe równania.

Wariant III

Jednocześnie mogą być wykonywane inwestycje własne oraz unijne w wysokości poniżej limitu. Wynika to z faktu, iż wysoki poziom inwestycji unijnych utrudnia spełnianie reguły IWZ w czwartym roku. Powoduje bowiem wzrost dochodów JST, przez co zmniejsza przestrzeń na odsetki i spłatę rat zadłużenia. Dlatego, wbrew intuicji, inwestowanie ze środków własnych może być optymalne mimo możliwości tańsze finansowania unijnego. Podobnie jak w wariantie drugim, także w tym przypadku podanie optymalnego rozwiązania w postaci analitycznej było niemożliwe z uwagi na stopień złożoności rachunków.

$$U_4 > u_4^* > 0$$

$$i_4^* > 0$$

$$c_4^* > 0$$

$$\mu_2^* = 0$$

$$\mu_3^* = 0$$

$$\mu_4^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_4} = \frac{\alpha}{c_4^*} + \lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_4} = \frac{1-\alpha}{(1-\delta)k_4 + (1+\theta)u_4^* + i_4^*} + \lambda^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} = \frac{(1-\alpha)(1+\theta)}{(1-\delta)k_4 + (1+\theta)u_4^* + i_4^*} + \lambda^* \left(\theta + (y_4 - rb_4 - c_4^*) \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{(y_4 + u_4^*)^2} \right) = 0$$

$$\theta u_4^* + i_4^* + c_4^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + u_4^*} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + u_4^*} = \phi.$$

Wariant IV

Jeżeli wartość $(1 - \delta)k_4$ jest odpowiednio niska, może opłacać się zrealizować inwestycje unijne na możliwie największą skalę, a dodatkowo zrealizować inwestycje zwykłe. Jest to najbardziej prawdopodobny wariant:

$$\begin{aligned} u_4^* &= U_4 \\ i_4^* &> 0 \\ c_4^* &> 0 \\ \mu_2^* &= 0 \\ \mu_3^* &= 0 \\ \mu_4^* &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_4} &= \frac{\alpha}{c_4^*} + \lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4} \right) = 0 \Rightarrow c_4 = -\frac{\alpha}{\lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4} \right)} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_4} &= \frac{1 - \alpha}{(1 - \delta)k_4 + (1 + \theta)U_4 + i_4^*} + \lambda^* = 0 \Rightarrow i_4^* = -\frac{1 - \alpha}{\lambda^*} - (1 - \delta)k_4 - (1 + \theta)U_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\theta U_4 - \frac{1 - \alpha}{\lambda^*} - (1 - \delta)k_4 - (1 + \theta)U_4 - \\ &- \frac{\alpha}{\lambda^* \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4} \right)} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4} \right) - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} = \phi \\ &\theta U_4 - \frac{1 - \alpha}{\lambda^*} - (1 - \delta)k_4 - (1 + \theta)U_4 - \frac{\alpha}{\lambda^*} - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} = \phi \\ &-U_4 - \frac{1}{\lambda^*} - (1 - \delta)k_4 - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} = \phi \\ &\lambda^* = -\frac{1}{\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} + u_4^* + (1 - \delta)k_4} \end{aligned}$$

$$c_4^* = \frac{\alpha(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} + (1 - \delta)k_4 + U_4)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4}} \quad (17)$$

$$i_4^* = (1 - \alpha) \left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) - \alpha(1 - \delta)k_4 - (\theta + \alpha)U_4. \quad (18)$$

Optymalny poziom wydatków bieżących zależy dodatnio od: parametru α opisującego preferencje samorządów w odniesieniu do c , stałej ϕ_0 oraz dochodów y_4 , które wyznaczają przestrzeń fiskalną, infrastruktury k_4 (im większa, tym mniej potrzebne są inwestycje) oraz limitu U_4 (im większy, tym wystarczy realizować mniej inwestycji zwykłych). Z kolei optymalny poziom inwestycji zwykłych również zależy dodatnio od ϕ_0 i y_4 , a ujemnie od: α , k_4 , U_4 , a także θ .

6.3 Analityczne rozwiązań dla trzeciego roku z napiętym warunkiem IWZ

Po znalezieniu optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych z roku czwartego, można przejść do poszukiwania rozwiązań dla roku trzeciego. W tym celu problem decyzyjny został najpierw

przeformułowany w warunkach roku trzeciego, a następnie rozwiązyany za pomocą warunków KKT. Funkcja celu tego problemu ma następującą postać:

$$\max_{c_3, u_3, i_3, z_3} f(\mathbf{x}_3) = \beta^3 (\alpha \ln c_3 + (1 - \alpha) \ln k_4) + \beta^4 (\alpha \ln c_4^* + (1 - \alpha) \ln k_5^*).$$

Zakłada się, że w czwartym roku realizowany jest wariant czwarty z podrozdziału 6.2, t.j. z inwestycjami unijnymi na maksymalnym poziomie. Wariant ten wydaje się być najbardziej realistyczny, gdyż z symulacji opisanych w podrozdziale 7.2 wynika, że w zdecydowanej większości przypadków taki wariant jest optymalny. Ponadto, można domniemywać, że inwestycje w czwartym roku mogą być wyjątkowo wysokie z uwagi na ignorowanie przez decydentów przyszłego zadłużenia oraz IWZ dotyczących przyszłych lat. Wartość funkcji można dla uproszczenia podzielić przez β^3 :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_3) &= \alpha \ln c_3 + (1 - \alpha) \ln((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)u_3 + i_3) + \\ &+ \beta \alpha \ln \left(\frac{\alpha \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_{\tau} - c_{\tau} - rb_{\tau}}{y_{\tau} + u_{\tau}} + \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)b_4 + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)u_3 + i_3) + U_4 \right)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{y_4 + U_4}} \right) + \\ &+ \beta(1 - \alpha) \ln((1 - \alpha)(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)u_3 + i_3) + (1 + \theta)U_4) + \\ &+ (1 - \alpha) \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_{\tau} - c_{\tau} - rb_{\tau}}{y_{\tau} + u_{\tau}} + \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)b_4 + y_4 \right) - (\theta + \alpha)U_4 \end{aligned}$$

p.w.

$$h_{13}(\mathbf{x}_3) : \theta u_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3 - z_3 = 0 \quad (19)$$

$$h_{23}(\mathbf{x}_3) : b_4 - b_3 - z_3 = 0 \quad (20)$$

$$g_{13}(\mathbf{x}_3) : -u_3 \leqslant 0$$

$$g_{23}(\mathbf{x}_3) : u_3 - U_3 \leqslant 0$$

$$g_{33}(\mathbf{x}_3) : -c_3 \leqslant 0$$

$$g_{43}(\mathbf{x}_3) : -i_3 \leqslant 0$$

$$g_{53}(\mathbf{x}_3) : \frac{(\chi + r)b_4}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 - c_1 - rb_1}{y_1 + u_1} + \frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + u_3} \right) \leqslant 0 \quad (21)$$

$$g_{63}(\mathbf{x}_3) : c_3 + rb_3 - y_3 \leqslant 0. \quad (22)$$

Powyzszy problem można uprościć poprzez wyeliminowanie zmiennych b_4 i z_3 , których wartości mogą zostać obliczone rezydualnie, po znalezieniu optymalnych wartości pozostałych zmiennych decyzyjnych u_3 , i_3 i c_3 :

$$z_3 = \theta u_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3, \quad (23)$$

$$b_4 = b_3 + \theta u_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3. \quad (24)$$

Dzięki powyzszym przekształceniom, problem ogranicza się do trzech zmiennych decyzyjnych: u_3 , i_3 i c_3 . Wyeliminowane zostają też warunki ograniczające (19) i (20), które zostaną wykorzystane dopiero w celu obliczenia b_4 i z_3 . Modyfikacji ulegnie także warunek (21):

$$g_{53}(\mathbf{x}) : \frac{(\chi + r)(b_3 + \theta u_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 - c_1 - rb_1}{y_1 + u_1} + \frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + u_3} \right) \leqslant 0.$$

Wydatki bieżące wynikają z napiętego warunku IWZ.

Poniżej założono także, że warunek (21) jest bardziej rygorystyczny od warunku (22). Z analizy zaprezentowanej w podrozdziale 7.2 wynika, że warunek IWZ jest napięty prawie zawsze, a reguła zrównoważonego wyniku bieżącego - rzadko. Co więcej, JST występują przeciwko regule IWZ¹⁶, a nie zrównoważonego wyniku bieżącego, z czego można wnioskować, że mają większe problemy z wypełnieniem IWZ. W związku z tym założono, że w rozwiązaniu optymalnym $c_3 + rb_3 < y_3$.

Dodatkowo można założyć, że $c_3 > 0$, ponieważ dla $c_3 = 0$ użyteczność z krańcowego przyrostu wydatków bieżących byłaby nieskończona wielka. Podobnie, jak w roku czwartym, dla roku trzeciego można także założyć maksymalne możliwe finansowanie inwestycji ze środków unijnych (patrz podrozdział 7.1). W związku z tym mnożniki KKT $\mu_{13} = 0$, $\mu_{33} = 0$, natomiast $u_3 = U_3$, zatem u_3 przestaje być zmienną decyzyjną. Pozostają zatem niewiadome wartości dwóch zmiennych decyzyjnych: c_3 oraz i_3 , a także jednego mnożnika KKT: μ_{53} . Tym trzem niewiadomym odpowiadają trzy równania. Dwa równania stanowią warunki pierwszego rzędu, a jedno - związane jest ze spełnieniem reguły IWZ z równością.

W następstwie poczynienia powyższych założeń utworzono funkcję Lagrange'a w postaci:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{j=1}^5 \mu_{j3} g_{j3}(x) = \\ &= \alpha \ln c_3 + (1-\alpha) \ln((1-\delta)k_3 + (1+\theta)U_3 + i_3) + \\ &\quad + \beta \alpha \ln\left(\frac{\alpha \left(\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4}\right) - (1+r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + rb_3 - y_3)\right)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{y_4+U_4}} + \right. \\ &\quad + \frac{\alpha(y_4 + (1-\delta)((1-\delta)k_3 + (1+\theta)U_3 + i_3) + U_4)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{y_4+U_4}} + \\ &\quad + \beta(1-\alpha) \ln((1-\alpha)(1-\delta)((1-\delta)k_3 + (1+\theta)U_3 + i_3) + (1-\alpha)U_4 + \\ &\quad + (1-\alpha)\left(\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4}\right) - (1+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3) + y_4\right)) + \\ &\quad \left. + \mu_{53} \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 - c_1 - rb_1}{y_1 + u_1} + \frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + U_3}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Następnie wyprowadzono dwa warunki pierwszego rzędu, czyli obliczono pochodne funkcji Lagrange'a po c_3 i i_3 oraz przyrównano je do zera. Połączenie dwóch równań w jedno umożliwiło wyeliminowanie mnożnika μ_{53} o nieznanej wartości. Po pewnych przekształceniach wykorzystano równanie na napięty warunek IWZ. Dzięki niemu można było wyznaczyć c_3 jako funkcję i_3 . Ostatecznie zatem w rachunkach pozostało jedna zmienna decyzyjna - i_3 i jedno (skomplikowane) równanie. W celu łatwiejszego wykonania obliczeń, zastąpiono długie i złożone wyrazy (niezależne od zmiennej decyzyjnej i_3) w poszczególnych ułamkach tego równania, pojedynczymi symbolami pomocniczymi i uzyskano w ten sposób proste równanie. Dalsze przekształcenia prostego równania doprowadziły do uzyskania równania sześciennego. Istnieją trzy możliwe rozwiązania równania sześciennego w dziedzinie liczb zespolonych. Szczegółowe obliczenia zaprezentowano w części B aneksu.

Ze wszystkich symulacji wynika, że spośród trzech wyżej wymienionych rozwiązań równania sześciennego, tylko jedno (31) należy do zbioru liczb rzeczywistych. Pozostałe należą do zbioru liczb

¹⁶ „Wprowadzony w 2014 r. indywidualny wskaźnik zadłużenia samorządów wymaga zmiany lub wręcz likwidacji, bo dusi inwestycje i nie pozwoli wykorzystać środków unijnych - przekonywali uczestnicy piątkowej debaty zorganizowanej przez Serwis Samorządowy PAP.” (PAP, 2015) „Samorządowcy wskazują, że gorset, który wskaźnik nakłada na JST, jest zbyt ciasny.” (Portal Samorządowy, 2016)

zespolonych i nie mają interpretacji ekonomicznej. Poprawność wyniku została zweryfikowana dzięki zgodności rozwiązań numerycznego z rozwiązaniem (31) wyprowadzonym analitycznie. Numeryczny algorytm optymalizacyjny startujący z arbitralnych (dowolnych) wartości zmiennych wielokrotnie odnajdywał bowiem te same rozwiązania optymalne, co wynikające ze wzoru (31). Z drugiej strony, algorytmy numeryczne mogą znajdować ekstrema lokalne, a nie globalne. Jeśli jednak rozwiązanie analityczne jest takie samo, to dowodzi to globalności danego ekstremum (przy założeniu danej struktury warunków ograniczających). Porównanie wyników osiąganych za pomocą metody analitycznej i numerycznej znajduje się w części B aneksu.

6.4 Numeryczna metoda rozwiązań modelu

Analityczna metoda rozwiązań modelu, zaprezentowana w podrozdziałach 6.2 - 6.3 gwarantuje uzyskanie optymalnego wyniku jedynie w pewnym podzbiorze zbioru rozwiązań dopuszczalnych, który cechuje z góry ustalona struktura warunków ograniczających (czyli określony *ex ante* podział na warunki luźne i napięte). Metoda numeryczna, opisana w niniejszym podrozdziale, jest komplementarna względem analitycznej. Po pierwsze, wykonana tylko dla trzeciego i czwartego roku, pozwala sprawdzić, czy rozwiązuając model bez zakładania struktury warunków ograniczających, rozwiązanie wskazywane jako optymalne jest takie samo, co w rozwiązańiu analitycznym. Wprawdzie taka kontrolna weryfikacja nie zapewnia całkowitej pewności, ale jednak gwarantuje bardzo wysokie prawdopodobieństwo otrzymania optymalnego rezultatu. Po drugie, metoda numeryczna umożliwia, w przeciwieństwie do analitycznej, znalezienie rozwiązania dla całej czteroletniej kadencji władz samorządowych.

Wiarygodność zaproponowanej tu numerycznej metody wynika z tego, że stanowi ona meta-algorytm wykorzystujący jednocześnie dwanaście metod optymalizacji zawartych w pakiecie *optimx* (Nash i Varadhan, 2011 i Nash, 2014) systemu R. W pierwszym kroku tego meta-algorytmu, wykonywane są niezależnie, przy założeniu losowych wartości startowych, algorytmy dwunastu numerycznych metod optymalizacji. Każdy z tych dwunastu algorytmów składa się z od kilku do nawet kilkuset kroków, w zależności od tego, jak szybko uzyskiwana jest zbieżność. Część z tych metod w ogóle nie znajduje dopuszczalnego rozwiązania, ale zazwyczaj przynajmniej jedna z nich jest w stanie uzyskać pewne rozwiązanie. Jednak taki wynik jest przeważnie tylko ekstremum lokalnym. Numeryczne metody optymalizacji są bowiem wrażliwe na wartości startowe i jeżeli algorytm rozpoczęcie swoje działanie na obszarze odległym od optimum globalnego, to możliwe jest jego „utknięcie” w punkcie stanowiącym ekstremum lokalne. Co więcej, w podsumowaniu pierwszego kroku meta-algorytmu, różne metody wskazują często na różne rozwiązania optymalne, o różnych wartościach funkcji celu, a przecież tylko co najwyżej jedno z nich, tj. generujące najwyższą użyteczność, może być ekstremum globalnym. Dlatego w drugim kroku meta-algorytmu, ponownie wykonuje się dwanaście algorytmów, tym razem z wartością startową będącą rozwiązaniem o najwyższej użyteczności spośród uzyskanych w kroku pierwszym. Kolejne iteracje są wykonywane, dopóki wartość najlepszego rozwiązania, z dwunastu wskazywanych jako optymalne, nie stabilizuje się.

Dwanaście stosowanych w meta-algorytmie numerycznych metod optymalizacji można podzielić na: niewykorzystujące pochodnych (*nelder-mead*, *newuo*, *bobyqa*, *nmkb*, *hjk*), newtonowskie (*nlm*, *nlminb*), quasi-newtonowskie (*BFGS*, *L-BFGS-B*, *ucminf*) i gradientowe (*CG*, *spg*). Należy zaznaczyć, że terminologia ta pochodzi z opracowania Nasha i Varadhana (2011, s. 5) i nie jest całkowicie precyzyjna. Wynika to z faktu, że zazwyczaj algorytm optymalizacyjny można uruchomić z podaniem w roli argumentu funkcji gradientu i/lub hesjanu albo bez podawania tych funkcji. W zależności od tego konieczna będzie aproksymacja gradientu i/lub hesjanu lub też nie będzie ona wymagana. W efekcie, metodę można określić mianem quasi-newtonowskiej albo newtonowskiej.

Metody niewykorzystujące pochodnych są rozwinięciem popularnej metody Neldera - Meada (1965). W uproszczeniu, polega ona na stopniowym przekształcaniu sympleksu (w przestrzeni dwuwymiarowej jest to trójkąt, w trójwymiarowej - czworościan itd.) - tak, aby w kolejnej iteracji najgorszy (tj. o najgorszej wartości funkcji celu) punkt zastąpić nowym, specjalnie utworzonym punktem. Dzięki temu sympleks przesuwa się w stronę przeciwną niż najgorszy punkt. Krok przesunięcia wydłuża się, jeżeli nowy punkt staje się najlepszym spośród wierzchołków sympleksu lub skraca, gdy nowy punkt jest lepszy jedynie od dotychczas najgorszego wierzchołka.

Bardziej złożonym algorytmem nie wymagającym pochodnych jest *newuo*a (Powell, 2007), którego nazwa prawdopodobnie pochodzi od akronimu: „NEW Unconstrained Optimization Algorithm” (nowy algorytm optymalizacji bez ograniczeń). Polega on na utworzeniu, w każdej, k -tej iteracji, funkcji q_k za pomocą kwadratowej interpolacji funkcji celu f o n zmiennych, a następnie minimalizacji q_k w obrębie dopuszczalnego obszaru (ang. trust region), który stopniowo ulega zawężeniu. Interpolacja nie zakłada jednak styczności funkcji q z funkcją f w n punktach, tylko w $m < n$, a dodatkowymi warunkami niezbędnymi do wyznaczenia współczynników funkcji Q są warunki na to, aby macierze drugich pochodnych q w kolejnych iteracjach były możliwie zbliżone (w sensie normy Frobeniusa, czyli pierwiastka z sumy kwadratów wszystkich elementów macierzy).

Na bazie algorytmu *newuo*a, Powell (2007) utworzył algorytm *bobyqa* („Bound Optimization BY Quadratic Approximation” - optymalizacja z ograniczeniami poprzez aproksymację kwadratową), który różni się od poprzedniego wprowadzonymi do modelu optymalizacyjnego ograniczeniami nałożonymi na zmienne decyzyjne. Uwzględnienie ograniczeń pozwala na uproszczenie i skrócenie pewnych obliczeń. Autorzy pakietu *optimx* zastrzegli (Nash i Varadhan, 2011, s. 4), że dopiero testują, czy *bobyqa* rozwiązuje problemy bez ograniczeń tak skutecznie jak *newuo*a. Dlatego na razie obie metody zostały zawarte w pakiecie.

Kelley (1999, s. 141) zauważył, że algorytm Neldera-Meada ma tendencję do utykania w ekstremum lokalnym. Kryterium detekcji utknięcia, jakie przyjął, polegało na sprawdzeniu, czy wartość funkcji celu w najlepszym wierzchołku poprawia się wystarczająco silnie w kolejnej iteracji. Postęp ów jest porównywany z kwadratową normą gradientu sympleksu pomnożoną przez niewielką stałą. Jeżeli postęp występuje, ale jest niewystarczający, algorytm ulega ukierunkowanemu restartowi (ang. oriented restart). Wszystkie wierzchołki, poza najlepszym, zostają przesunięte o połowę odległości między najlepszym wierzchołkiem a jego najbliższym sąsiadem. Taki zabieg zapewnia też korzystną właściwość sympleksu, tj. ograniczenie wzrostu współczynnika uwarunkowania (ilorazu norm macierzy i jej odwrotności). W pakiecie *optimx* metoda *nmkb* została zaimplementowana za zgodą Kelleya przez Varadhana, który dokonał „pewnych nietrywialnych modyfikacji” (szczegóły w dokumentacji pakietu *dfoptim*).

Ostatnim algorymem niewymagającym obliczania pochodnych jest algorytm Hooka-Jeevesa (1961), wprowadzony do pakietu *dfoptim* przez Borchersa również na podstawie algorytmu z książki Kelleya (1999), a następnie wykorzystany w pakiecie *optimx*. Metoda Hooka-Jeevesa wymaga określenia ex ante punktu startowego i macierzy bazy ortogonalnej (może być nią np. macierz jednostkowa). Najpierw sprawdzane są wartości funkcji celu w kolejnych punktach położonych w ustalonej odległości, w kierunkach wyznaczonych przez wektory ww. macierzy oraz w kierunkach im przeciwnych (czyli w wybranych punktach „naokoło” punktu centralnego). Gdy tylko w pewnym punkcie nastąpi poprawa wartości funkcji, to staje się on nowym punktem bazowym. Jednak, wbrew intuicji, nie staje się on nowym centralnym punktem w drugiej rundzie eksploracji punktów. Algorytm Hooka-Jeevesa określa się mianem „agresywnego” (Kelley, 1999, s. 146), gdyż nowym centrum staje się punkt położony w tym samym kierunku, co nowy punkt bazowy, ale dwa razy dalej od poprzedniego punktu centralnego. Dzięki temu ogranicza się częstość ponownego sprawdzania tych samych punktów. Jeżeli w nowej iteracji nie uda się uzyskać poprawy, to nowym centrum staje się dotychczasowy punkt bazowy. Jeżeli powtórnie

obniżenie wartości funkcji celu nie będzie możliwe, to skracana jest odległość, zgodnie z którą wyznaczane są punkty „naokoło” punktu centralnego. Algorytm kończy działanie, gdy odległość ta obniży się poniżej ustalonego progu.

Celem lepszego przybliżenia metod newtonowskich i quasi-newtonowskich, wykorzystujących nie tylko wektor pierwszych, ale także macierz drugich pochodnych zwaną hesjanem, warto zacząć od przedstawienia klasycznej metody Newtona. Zgodnie z twierdzeniem Taylor'a, funkcję nielinową $f(x)$ można aproksymować w otoczeniu punktu x_c za pomocą następującej funkcji kwadratowej (por. Kelley, 1999, s. 15):

$$f(x) \approx m_c(x) = f(x_c) + \nabla f(x_c)^T(x - x_c) + \frac{1}{2}(x - x_c)^T \nabla^2 f(x_c)(x - x_c).$$

Jeżeli $\nabla^2 f(x_c)$ jest macierzą dodatnio określona, to x_+ stanowi minimum lokalne $f(x)$, gdy $\nabla m_c(x_+) = 0$.

$$0 = \nabla m_c(x_+) = \nabla f(x_c) + \nabla^2 f(x_c)(x_+ - x_c)$$

Stąd:

$$x_+ = x_c - (\nabla^2 f(x_c))^{-1} \nabla f(x_c)$$

$$\nabla^2 f(x_c)(x_+ - x_c) = -\nabla f(x_c).$$

Podstawowym algorytmem służącym do poszukiwania minimum lokalnego jest metoda Newtona:

1. Oblicz $\|\nabla f(x)\|$
2. (a) Dopóki $\|\nabla f(x)\| > \varepsilon$
 - (b) Oblicz $\nabla^2 f(x)$
 - (c) Rozwiąż $\nabla^2 f(x)d = -\nabla f(x)$
 - (d) Zastąp x przez $x + d$
 - (e) Oblicz $\nabla f(x)$.

Istnieje wiele odmian metody Newtona. Wektor g przybliżający gradient ∇f może być obliczany w kroku (e) ze wzoru analitycznego albo aproksymowany za pomocą skończonych różnic, macierz H przybliżająca hesjan $\nabla^2 f$ może być kalkulowana w kroku (b) jeszcze na trzeci sposób - metodą BFGS - od nazwisk autorów: Broydena, Fletchera, Goldfarba i Shano (Head, Zerner, 1985). W niektórych algorytmach, w celu zaoszczędzenia czasu, kalkulacja gradientu i hesjanu nie odbywa się w każdej iteracji. W pewnych algorytmach nowy x powstaje w kroku (d) z kolei poprzez dodanie do starego x pewnej modyfikacji d , tj. λd , gdzie λ określa długość kroku w kierunku gradientu za pomocą jednej z metod: wyszukiwania liniowego (Kelley, 1999, s. 39-50), dogleg (Dennis, Mei, 1979) lub hookstep (Moré, 1978). Więcej na temat różnych odmian metody Newtona można przeczytać w artykule Schnabela, Koontza i Weissa (1985). Inną ważną kwestię stanowi sposób rozwiązywania układu równań (c). Zazwyczaj stosowana jest w tym celu metoda dekompozycji macierzy Choleskiego, lecz wymaga ona dodatniej określoności macierzy współczynników układu równań. Powstały zatem metody odporne na brak dodatniej określoności $\nabla^2 f$ - wykorzystują one inne macierze współczynników - należą do nich m.in. dogleg i hookstep. Generalnie, metody polegające na aproksymacji, a nie obliczaniu wprost hesjanu nazywają się quasi-newtonowskimi.

W pakiecie *optimx* zostały zaimplementowane dwa algorytmy newtonowskie (Nash i Varadhan, 2011, s. 5). Oznacza to, że dopuszczają one podanie funkcji obliczającej hesjan, co umożliwia zastosowanie wprost metody Newtona. Jednak w niniejszej pracy nie skorzystano z tej opcji. Zamiast niej, we wszystkich algorytmach newtonowskich i quasi-newtonowskich zastosowano numeryczne przybliżenia gradientu i hesjanu, czyli w praktyce posługiwano się algorytmami quasi-newtonowskimi.

Pierwszy algorytm, *nlm* (ang. nonlinear minimization) został opracowany na podstawie algorytmu stworzonego przez Dennisa i Schnabela (1983), opisanego także w pracy Schnabela, Koontza i Weissa (1985). Procedura *nlm* wykorzystuje przeszukiwanie liniowe w etapie (d) wyżej przytoczonego algorytmu - „z kwadratową interpolacją dla pierwszego nawrotu oraz sześcienną interpolacją dla każdego następnego nawrotu w każdej iteracji” (Schnabel, Koontz, Weiss, 1985, s. 8). W artykule tym można także poznać szczegóły techniczne algorytmu, dotyczące m.in.: kryteriów stopu; długości kroku potrzebnego do numerycznej aproksymacji pochodnych, a także sposobu ich obliczania (w początkowych iteracjach następnikowe, następnie centralne); aproksymacji hesjanu w sytuacji, gdy nie jest on macierzą dodatnio określona; skalowania zmiennych niezależnych (co sprowadza się np. do podzielenia przez milion wartości tych zmiennych, których rząd wielkości jest bliski miliona, itd.).

Metoda *BFGS* należy do klasy metod opartych na równaniu siecznej:

$$H_+(x_+ - x_c) = \nabla f(x_+) - \nabla f(x_c). \quad (25)$$

Wszystkie metody siecznych, w tym *BFGS*, dla optymalizacji jednowymiarowej sprowadzają się do równania (26). Na jego podstawie można stwierdzić, że metoda siecznych przybliża drugą pochodną za pomocą względnego przyrostu $f'(x)$ na odcinku wyznaczonym przez x z poprzednich iteracji (x_0 i x_1):

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)(x_1 - x_0)}{f'(x_1) - f'(x_0)} = x_1 - \frac{f'(x_1)}{\frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0}} \approx x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}. \quad (26)$$

Równanie dla funkcji wielu zmiennych przedstawia się następująco (Davidon, 1959; Fletcher i Powell, 1963):

$$H_+ = H_c + \frac{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T}{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T(x_+ - x_c)} - \frac{(H_c(x_+ - x_c))(H_c(x_+ - x_c))^T}{(x_+ - x_c)^T H_c(x_+ - x_c)}. \quad (27)$$

W celu zbudowania intuicji można zauważyć, że gdyby móc poskracać w równaniu (27) te same wyrażenia w liczniku i mianowniku (co nie jest dopuszczalne w rachunku macierzowym), to uzyskalibyśmy równanie (25).

W pakiecie *optimx* metoda *BFGS* została zmodyfikowana w oparciu o poprawki (m.in. dotyczące eliminacji wyszukiwania liniowego, które wyznacza x_+) autorstwa Fletchera (1970) i Nasha (1979).

Z kolei pakiet *nlminb* wykorzystuje tzw. procedury (ang. routines) PORT zakodowane i opisane przez Gaya (1990), który z kolei opierał się m.in. na metodzie Davidona zmodyfikowanej przez Stewarta (1967).

Następny algorytm, *L-BFGS-B*, został opisany przez Byrda i in. (1995). Dodane w jego nazwie litery to skróty od „limited-memory” (L) i „bounded” (B). Jest to bowiem algorytm zaprojektowany w celu zmniejszenia wymogów pamięciowych służących do obliczania i przechowywania dodatnio-określonej aproksymacji hesjanu. Ponadto, algorytm ten jest przeznaczony do problemów z warunkami ograniczającymi argumenty funkcji celu. Szkic tej metody można przedstawić następująco:

1. Zatrzymaj, jeżeli test zbieżności jest spełniony.
2. Oblicz punkt Cauchy'ego. Punkt ten stanowi minimum kwadratowego modelu minimalizowanej funkcji, wzdłuż gradientu, ale przy założeniu, że x mieści się na odcinku wyznaczonym przez warunki ograniczające.
3. Oblicz kierunek przeszukiwania np. metodą gradientu sprzężonego.
4. Wykonaj przeszukiwanie liniowe, przy zadanym warunku wymaganego spadku oraz wyznacz długość kroku.
5. Oblicz gradient w znalezionej punkcie.
6. Jeżeli zmiana gradientu spełnia warunek krzywizny, to zaktualizuj listę par korekty - zastępując najstarszą przez najnowszą. Przez listę par korekty należy rozumieć m ostatnich par w postaci: $(s_i, y_i) = (x_{k+1} - x_k, \nabla_{k+1} - \nabla_k)$
7. Wyznacz aproksymację hesjanu przy użyciu aktualnej listy par korekty. Można to osiągnąć względnie szybko w sensie złożoności obliczeniowej, z wykorzystaniem odpowiednich wzorów.
8. Zwięksź numer iteracji o 1 i wróć do punktu 1.

Ostatni quasi-newtonowski algorytm użyty w optymalizacji numerycznej, *ucminf* (Nielsen, 2000), również wykorzystuje metodę BFGS, a także miękkie wyszukiwanie liniowe¹⁷ z wykorzystaniem metody zaufanego obszaru. W przeciwieństwie do wcześniej opisanej metody *BFGS*, *ucminf* aproksymuje odwrotność hesjanu za pomocą wzoru będącego odpowiednikiem równania (27):

$$H_+^{-1} = \left(I - \frac{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))(x_+ - x_c)^T}{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T(x_+ - x_c)} \right)^T H_c^{-1} \left(I - \frac{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))(x_+ - x_c)^T}{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T(x_+ - x_c)} \right)^T + \frac{(x_+ - x_c)(x_+ - x_c)^T}{(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))^T(x_+ - x_c)}.$$

Kolejne metody wymagają obliczania pochodnych funkcji celu, ale nie wymagają kalkulacji macierzy przybliżonego hesjanu. W pierwszym kroku algorytmu *cg* (ang. conjugate gradient - gradient sprzężony) oblicza się gradient funkcji celu w punkcie startowym. W ten sposób wyznacza się kierunek najszybszego spadku wartości funkcji. Za pomocą metody optymalizacji jednowymiarowej funkcji celu (np. ww. metody Newtona), określa się minimum na odcinku położonym wzdłuż owego kierunku. Punkt ten staje się punktem startowym w drugiej iteracji. Ponownie obliczany jest kierunek najszybszego spadku. Jednak począwszy od drugiej iteracji, kierunek, wzdłuż którego wyszukuje się kolejny punkt, stanowi sumę bieżącego kierunku najszybszego spadku oraz pomnożonego przez parametr β kierunku z poprzedniej iteracji. Domyślna formuła na β , w pakiecie *optimx* pochodzi z artykułu Fletchera i Reevesa (1964) i stanowi iloraz kwadratów norm gradientów z następujących po sobie iteracji. Im większy postęp w optymalizacji, tj. norma gradientu z bieżącej iteracji mniejsza co do modułu od normy z poprzedniej iteracji, tym mniejsza korekta kierunku najszybszego spadku.

Algorytm *spg* (ang. spectral projected gradient) pochodzi z artykułu Birgina, Martíneza i Raydana (2001). Punktem wyjścia tej metody stanowi równanie siecznej (25) (por. Birgin, Martínez,

¹⁷Wyszukiwanie liniowe może być dokładne lub miękkie. Pierwsza metoda polega na dokładnym poszukiwaniu minimum funkcji w zadanym kierunku. Druga metoda polega na odnalezieniu w zadanym kierunku punktu, dla którego wartość funkcji wystarczająco obniża się, a następnie na aktualizacji kierunku. Wyszukiwanie miękkie jest częściej stosowane w praktyce, gdyż wymaga mniejszej liczby operacji, a przy tym zadany kierunek przeszukiwania przeważnie jest tylko kierunkiem w przybliżeniu prowadzącym do ekstremum funkcji.

Raydan i in., 2014). W *spg* zakłada się bardzo prostą postać macierzy $H_+ = \sigma I$. Równanie siecznej można więc zapisać następująco:

$$\sigma(x_+ - x_c) \approx \nabla f(x_+) - \nabla f(x_c).$$

Dokładne rozwiążanie tego równania nie istnieje, ale istnieje rozwiązanie minimalizujące sumę kwadratów reszt¹⁸:

$$\sigma = \frac{(x_+ - x_c)^T(\nabla f(x_+) - \nabla f(x_c))}{(x_+ - x_c)^T(x_+ - x_c)}.$$

Dodatkowo nakłada się ograniczenie: $\sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}$. Jednocześnie σ stanowi tzw. iloraz Rayleigha w odniesieniu do macierzy uśrednionego hesjanu na przedziale (x_c, x_+) . Składniad wiadomo, że iloraz Rayleigha należy do przedziału pomiędzy minimalną a maksymalną wartością własną uśrednionego hesjanu. Zbiór wszystkich wartości własnych danej macierzy nazywa się spektrum macierzy, co tłumaczy genezę nazwy metody. Ostatecznie zatem w metodzie *spg*, macierz $\nabla^2 f(x)$ zostaje zastąpiona przeskalowaną macierzą jednostkową σI w punkcie c) algorytmu Newtona. Zmodyfikowany jest także punkt d), gdzie stosuje się przeszukiwanie liniowe.

Niektóre z metod optymalizacji omawianych w niniejszym podrozdziale umożliwiają wprowadzenie wprost warunków ograniczających. Mimo to, wszystkie metody optymalizacji stosowanego tutaj metaalgorytmu zastosowano dla funkcji celu bez ograniczeń. Warunki ograniczające wymienione w podrozdziale 6.1 zostały bowiem uwzględnione w funkcji celu w postaci tzw. składnika kary pomnożonego przez największą co do modułu wartość zmiennej decyzyjnej. Kara przyjmuje wartość zerową, jeżeli żaden z 24 warunków ograniczających (dwanaście na ujemność zmiennych decyzyjnych: $c_t, i_t, u_t, t \in \{1, 2, 3, 4\}$, cztery w postaci $u_t > U_t$, cztery na reguły nadwyżki bieżącej i cztery na reguły IWZ) nie jest spełniony. Za każdy niespełniony warunek wartość kary rośnie o 9999 (czyli bardzo dużą liczbę w porównaniu z typowymi wartościami funkcji celu). Pomnożenie kary przez największą co do modułu wartość zmiennej decyzyjnej zabezpiecza przed sytuacją, gdy kara wprawdzie nie byłaby zerowa, ale mimo to algorytm wybierałby takie rozwiązanie jako optymalne, gdyż zmienne decyzyjne przyjmowałyby wartości o ogromnym rzędzie wielkości (nie mające interpretacji ekonomicznej). W części aneksu (C.1), w sekcji „deklaracja funkcji użyteczności” zaprezentowano funkcję celu ze składnikiem kary dla algorytmu szukającego optymalnego rozwiązania dla trzeciego roku. W tym przypadku kara składa się z dziewięciu warunków ograniczających (m.in. bez ograniczeń na zmienne z pierwszego i drugiego roku).

7 Dobór wartości parametrów strukturalnych modelu

Aby rozwiązać problem optymalizacyjny, przed którym stoi samorząd, należy podstawić wartości liczbowe pod parametry strukturalne: $\alpha, \beta, v, \theta, r, \chi, \gamma, \delta$ oraz wartości startowe pod zmienne: b_t, c_t i k_t . W niniejszym rozdziale opisano sposób, w jaki określono wartości średnie parametrów oraz zdefiniowano ich rozkłady, które posłużyły następnie do analizy wrażliwości wyników bazowych na zmiany parametryzacji.

¹⁸Jest to równanie odpowiadające ekonometrycznemu estymatorowi klasycznej metody najmniejszych kwadratów: $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1}(X^T y)$.

7.1 Kalibracja parametrów i wartości startowych modelu w oparciu o dane empiryczne dla Polski

7.1.1 Limit dochodów unijnych

Przeciętny poziom limitu dochodów pochodzących z funduszy unijnych w relacji do dochodów bieżących, v i przedział, z którego limit ten może przyjmować wartości w analizie wrażliwości, zostały oszacowane na podstawie szeregu czasowego z Banku Danych Lokalnych (BDL). Szereg nosi nazwę „finansowanie i współfinansowanie programów i projektów unijnych: dochody razem”, odnosi się do gmin i miast powiatowych i obejmuje lata 2010-2015. Do 2009 r. Główny Urząd Statystyczny opracowywał szereg o nazwie „środki gmin i miast powiatowych z budżetu UE przeznaczone na inwestycje w latach 2006-2009”. Jednak, z uwagi na różnice metodologiczne, zrezygnowano z uwzględniania tego archiwalnego szeregu.

Tabela 10 zawiera trzy statystyki podsumowujące każdy rok objęty obserwacją - średnią i medianę dochodów unijnych w relacji do dochodów bieżących powiększone o dwa odchylenia standardowe oraz wartość 95 percentyla. Ostatecznie przyjęto domyślną wartość parametru v w wysokości 25%, a na potrzeby analizy wrażliwości losowano v z rozkładu trójkątnego o wierzchołkach w punktach: 20%, 25% i 35%. Szerokość przedziału odzwierciedla niepewność towarzyszącą definicji zmiennej oraz zróżnicowanie tej zmiennej w różnych gminach oraz latach.

Tabela 10: Dochody przeznaczone na inwestycje unijne w relacji do dochodów ogółem gmin i miast powiatowych

rok	2010	2011	2012	2013	2014	2015
średnia + 2σ	28,8%	35,0%	27,7%	22,2%	23,1%	23,4%
medianą + 2σ	25,3%	31,5%	25,0%	19,9%	20,8%	20,7%
95 perc.	27,7%	31,7%	26,2%	20,6%	20,2%	23,6%

Źródło: Bank Danych Lokalnych GUS

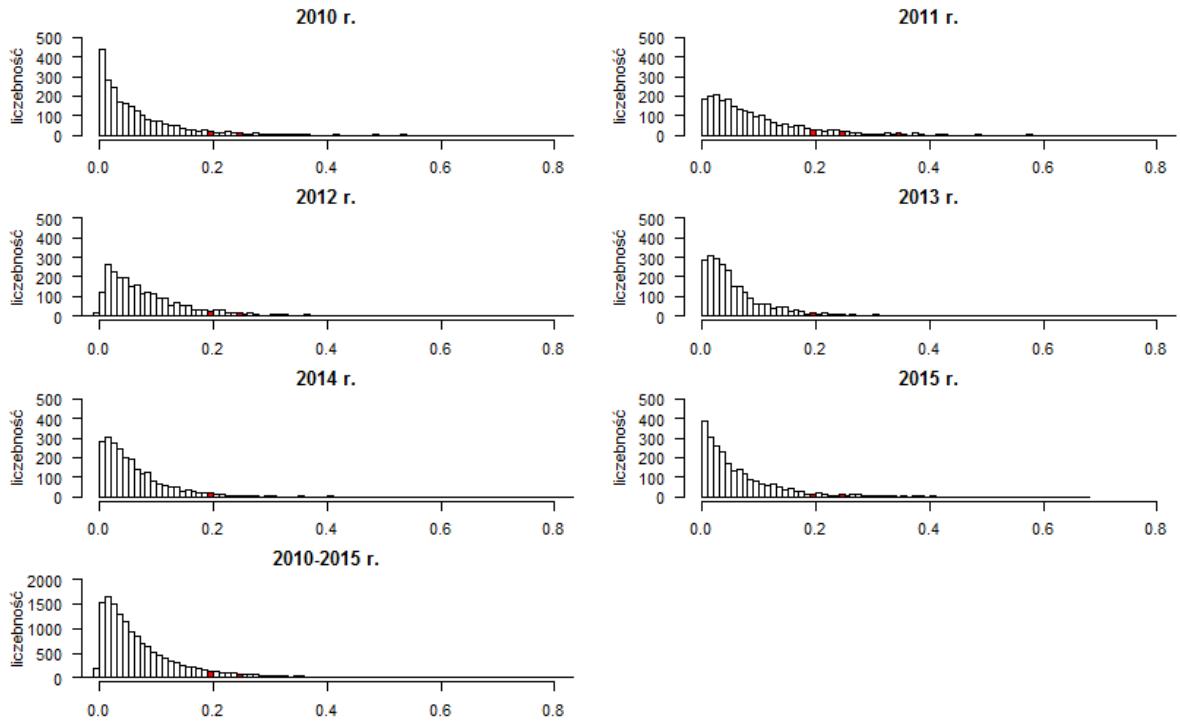
7.1.2 Udział finansowania własnego inwestycji unijnych

Wartość parametru θ , oznaczającego kwotę finansowania własnego na każdego złotego przypadającego z finansowania unijnego, została określona na podstawie danych przytoczonych przez Sieraka (2015), według którego „analiza projektów zamieszczonych w bazie SIMIK wykazała w obecnej perspektywie następujący faktyczny poziom dofinansowania środkami unijnymi:

- dla gmin - 58,35%;
- dla powiatów - 64,68%;
- dla województw - 70,26%;
- średnio dla jednostek samorządu terytorialnego - 62,05%”.

Oznacza to, że jako wartość bazową należy przyjąć $\theta = 0,62$. Wtedy bowiem $\frac{1}{\theta+1} \approx 0,62$ (zbieżność liczb przypadkowa), czyli dla tak określonej wartości θ poziom dofinansowania środkami unijnymi w modelu jest spójny z poziomem przeciętnym dla JST oraz zwykłą średnią dla gmin i powiatów (województwa wyłączono, gdyż nie są rozpatrywane w niniejszej pracy). Zakładając, że udział finansowania unijnego może się ważyć od 50% do 70%, to $0,43 < \theta < 1$ - krańce niniejszego przedziału oraz 0,62 stanowią wierzchołki opisujące rozkład trójkątny, wykorzystywany w analizie wrażliwości.

Rysunek 10: Rozkłady: dochodów unijnych w relacji do dochodów bieżących w gminach i miastach powiatowych w latach 2010-2015



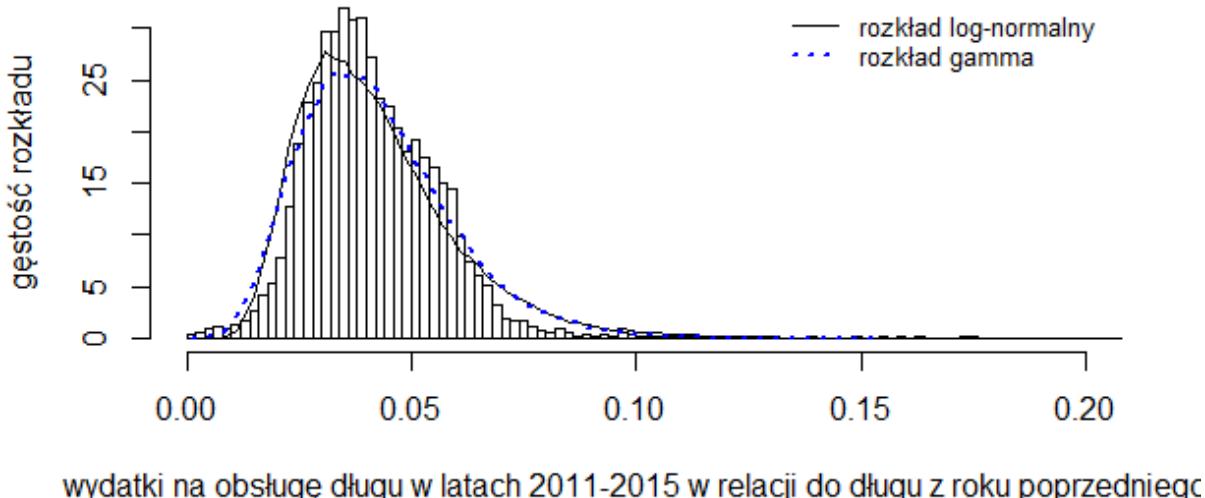
Źródło: Bank Danych Lokalnych GUS

Wszystkie następnie omawiane w tym rozdziale parametry, z wyjątkiem δ i k , zostały skalibrowane w oparciu o dane pochodzące z wieloletnich prognoz finansowych jednostek samorządu terytorialnego. Dane te są zamieszczone na stronie Ministerstwa Finansów (www.mf.gov.pl / Działalność / Finanse publiczne / Budżety JST / Sprawozdania budżetowe / Wieloletnia prognoza finansowa JST). Najwcześniejsze pliki pochodzą z 2013 r. i zawierają informacje o wykonaniu budżetów począwszy od roku 2010. Dane za poszczególne lata były pozyskiwane z możliwie najnowszych plików, maksymalnie z pliku pochodzącego z 5 sierpnia 2016 r. Szeregi czasowe za lata 2010-2015 obejmują 2477 gmin i miast powiatowych. Nie zostały uwzględnione jedynie: gmina wiejska Zielona Góra (funkcjonująca do 2014 r.) i gmina Choszczno (brak w danych z 2013 r.), gdyż w przeciwnym razie próba byłaby niezbilansowana.

7.1.3 Stopa procentowa i stopa zapadalności dłużu

Rozkłady empiryczne parametrów związanych z dłużem: stopy procentowej r i odsetka zapadającego dłużu χ , cechowały się wyraźną asymetrią, więc w celu dopasowania rozkładu teoretycznego wzięto pod uwagę rozkłady: logarytmiczno-normalny i gamma. Rozkłady teoretyczne parametru r szacowano na podstawie rozkładu empirycznego ilorazu wydatków na obsługę dłużu i kwoty dłużu z roku poprzedniego, przy czym spośród 11890 historycznie zaobserwowanych wartości, pozostały 11735 pochodzących z przedziału $(0, 1)$. Za wartość domyślną r do symulacji przyjęto medianę z ww. przedziału, tj. 0,039. Z wykresu 11 wynika, że oba rozkłady teoretyczne charakteryzują się podobnym stopniem dopasowania. Ostatecznie wybrano rozkład gamma ze względu na nieco niższą statystykę testu Kołmogorowa-Smirnowa (KS) (0,047) w porównaniu z rozkładem log-normalnym (0,050).

Rysunek 11: Histogram wydatków na obsługę dłużu w relacji do poziomu dłużu z roku poprzedniego gmin i miast powiatowych - tj. stopy procentowej r - w latach 2011-2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami log-normalnym i gamma



wydatki na obsługę dłużu w latach 2011-2015 w relacji do dłużu z roku poprzedniego

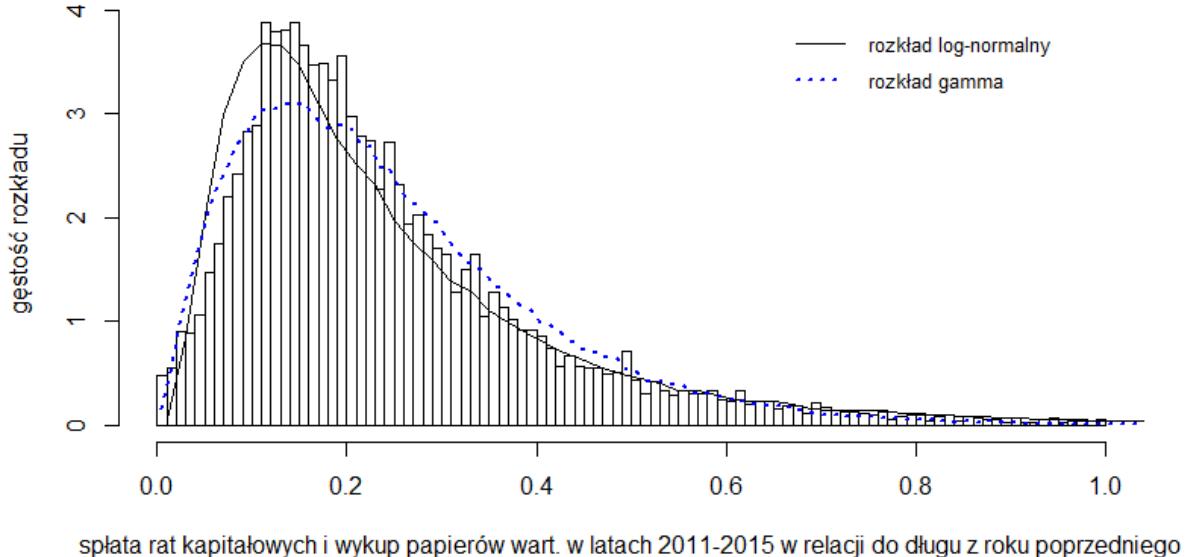
Źródło: MF i obliczenia własne

Wartość p statystyki KS w obu przypadkach była bardzo bliska零. Przy każdym konwencjonalnym poziomie istotności należy zatem odrzucić hipotezę, że wartości empiryczne pochodzą z któregoś z powyższych rozkładów teoretycznych.¹⁹ Uznano jednak, że rozkład gamma jest wystarczająco podobny dla celów symulacji.

Rozkłady teoretyczne parametru χ estymowano w oparciu o rozkład empiryczny spłaty rat kapitałowych kredytów i pożyczek oraz wykupu papierów wartościowych w relacji do kwoty dłużu z roku poprzedniego. Z 11890 obserwacji (niemal pełna populacja gmin w latach 2011-15) wyeliminowano te, które wykraczały poza przedział $(0, 1)$, po czym zostało 11520 liczb. Mediana, 0,2, stanowi wartość bazową dla χ w symulacjach. Ponownie zdecydowano się na wybór rozkładu gamma (statystyka KS równa 0,033), a nie log-normalnego (0,053), patrz wykres 12. Ponownie również bootstrapowe wartości p testu KS wyniosły 0.

¹⁹ Klasyczny test KS zakłada, że rozkład teoretyczny jest z góry ustalony. W wyżej omawianym przypadku założenie to nie zostało spełnione, ponieważ parametry rozkładu teoretycznego były szacowane w oparciu o rozkład empiryczny. W takich sytuacjach wartości p są zawyżone, co sprzyja nieodrzucaniu hipotezy zerowej. Aby uzyskać nieobciążone wartości p , należy przeprowadzić tzw. „bootstrapowy” test KS. Polega on na losowaniu z rozkładu teoretycznego z oszacowanymi parametrami wielu (tutaj przyjęto liczbę 1 tysiąca) prób, o liczności równej liczności próby empirycznej. Dla każdej próby losowej wylicza się statystykę testu KS. Następnie oblicza się, ile procent statystyk przyjęto większą wartość niż statystyka odpowiadająca próbie empirycznej. Ów procent stanowi nieobciążone oszacowanie wartości p testu KS. W przypadku parametru r , bootstrapowe wartości p dla rozkładu gamma i log-normalnego wyniosły 0.

Rysunek 12: Histogram spłaty rat kapitałowych kredytów i pożyczek oraz wykupu papierów wartościowych w relacji do poziomu dłużu z roku poprzedniego gmin i miast powiatowych, χ , w latach 2011-2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami log-normalnym i gamma



Źródło: MF i obliczenia własne

Dla porównania, w tabeli 11 można zaobserwować odpowiedniki parametrów r i χ we wszystkich JST ogółem - zaprezentowane tam wartości nie odbiegają silnie od oszacowanych.

Tabela 11: Dane dotyczące zadłużenia JST ogółem w mln zł

rok	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
spłata rat	7349	6452	6132	7164	9615	10105	11839	8001	8292
obsługa dłużu	994	1316	1400	1852	2711	3490	2820	2424	2021
zadłużenie	25876	28775	40294	55094	65756	67835	69159	72110	71635
χ (rok)	28,4%	22,4%	15,2%	13,0%	14,6%	14,9%	17,1%	11,1%	11,6%
r (rok)	3,8%	4,6%	3,5%	3,4%	4,1%	5,1%	4,1%	3,4%	2,8%

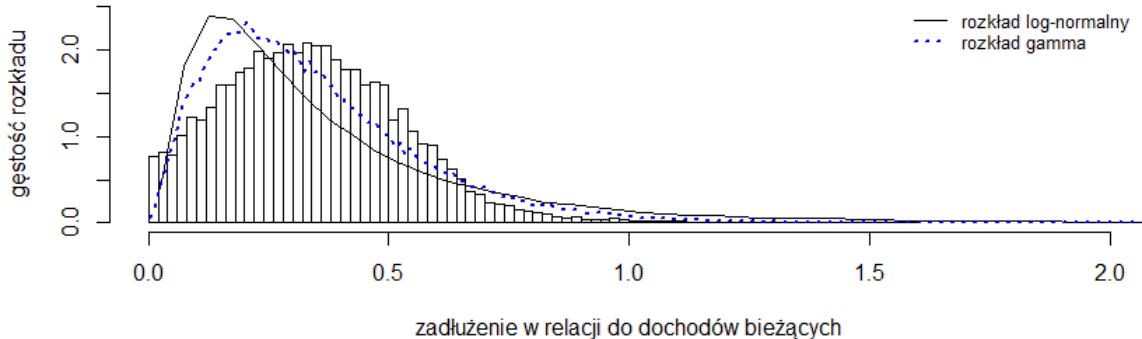
Źródło: Sprawozdanie z działalności regionalnych izb obrachunkowych i wykonania budżetu przez jednostki samorządu terytorialnego w 2015 roku (oraz sprawozdania z lat poprzednich) i obliczenia własne

7.1.4 Wskaźnik zadłużenia

Medianowy wskaźnik zadłużenia w całej populacji wyniósł 0,32 i wartość ta została przyjęta jako bazowa dla parametru $b = \frac{b_t}{y_t}$. Co ciekawe, w ilości 2477 gmin i miast powiatowych i 6 lat (2010-2015), zanotowano aż 3,8% przypadków, dla których dług był zerowy. Uznamo zatem, że rozkład teoretyczny powinien stanowić mieszankę rozkładu atomowego (0 z prawdopodobieństwem 0,038) i rozkładu ciągłego, który opisze 14280 obserwacji, dla których dług mieści się w przedziale (0, 2) dochodów bieżących. Ozym rozkładem ciągłym okazał się gamma, którego odległość z testu KS była mniejsza (0,07) niż rozkładu log-normalnego (0,12). Nieco

lepsze dopasowanie rozkładu gamma obrazuje także wykres 13. Niestety, wartości p wszystkich testów KS były zerowe lub bardzo zbliżone do zera.

Rysunek 13: Histogram wskaźnika zadłużenia w relacji do dochodów bieżących gmin i miast powiatowych, b , w latach 2010-2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami gamma i log-normalnym



Źródło: MF i obliczenia własne

Powyższe rezultaty można porównać ze statystykami opartymi na corocznych „Sprawozdaniach z działalności regionalnych izb obrachunkowych i wykonania budżetu przez jednostki samorządu terytorialnego”. Znajdują się tam statystyki łącznego zadłużenia (zobowiązań zaliczanych do dlułu publicznego) gmin, miasta Warszawy oraz innych miast powiatowych za lata 2010-2015 (tabela 12). Wynika z nich, że średnie zadłużenie ogółem (43% – 49%) jest nieco wyższe niż domyślana wartość parametru (32%). Zjawisko to można tłumaczyć wpływem wyższych wskaźników zadłużenia w większych miastach na średnią ważoną i brakiem tego wpływu na medianę.

Tabela 12: Dane dotyczące zadłużenia gmin i miast powiatowych w mln zł

zadłużenie JST	2010	2011	2012	2013	2014	2015
gminy	21.930	25.990	26.168	25.772	26.463	25.429
Warszawa	5.291	5.966	5.696	5.925	6.038	5.858
miasta powiaty	18.146	22.108	23.883	24.959	26.409	27.352
razem	45.367	54.065	55.747	56.656	58.910	58.639
dochody	105.555	109.885	115.370	118.806	124.723	128.392
wskaźnik b	0,43	0,49	0,48	0,48	0,47	0,46

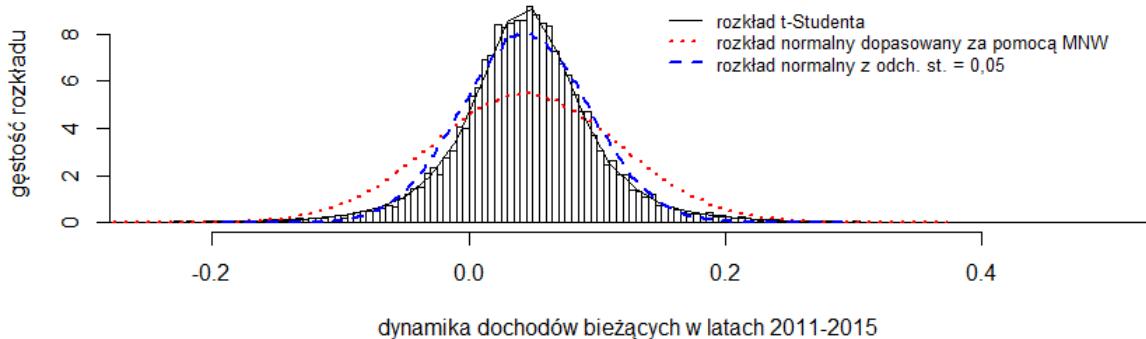
Źródło: Sprawozdania z działalności RIO i wykonania budżetu przez JST 2011-2015 oraz Bank Danych Lokalnych GUS

7.1.5 Dynamika dochodów bieżących

Następnym parametrem wykorzystywany w symulacjach jest parametr γ - dynamika dochodów bieżących. Mediana rozkładu empirycznego wyniosła 0,044, co stanowi wartość domyślną w symulacjach.

Na powyższym histogramie można zaobserwować, że rozkład normalny dopasowany za pomocą metody największej wiarygodności znaczco różni się od rozkładu empirycznego. Efektywność

Rysunek 14: Histogram dynamiki dochodów bieżących gmin i miast powiatowych w latach 2011–2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami t-Studenta i normalnego



dynamika dochodów bieżących w latach 2011–2015

Źródło: MF i obliczenia własne

MNW została obniżona na skutek występowania obserwacji odstających. Dlatego pod uwagę wzięto także inny rozkład normalny - o tej samej wartości oczekiwanej, co pierwotny, ale o mniejszym odchyleniu standardowym (0,05 zamiast 0,07). Wprawdzie wartości p zarówno z klasycznego i bootstrapowego testu KS dla obu rozkładów normalnych wynoszą odpowiednio prawie zero i zero, ale odległość KS jest 4-krotnie mniejsza w przypadku rozkładu z ekspercko dobranym odchyleniem standardowym. Tak czy inaczej, z histogramu parametru γ wynika, że nawet ów drugi rozkład normalny gorzej od t-Studenta opisuje ogony rozkładu empirycznego. Tę obserwację potwierdzają wyniki testu KS: wartości p dla rozkładu t-Studenta wynoszą odpowiednio 0,346 i 0,338. W związku z tym w symulacjach użyto właśnie rozkładu t-Studenta.

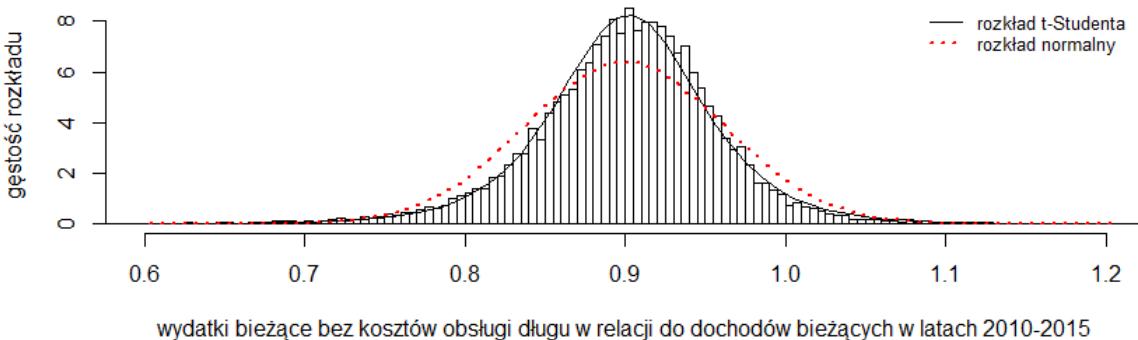
7.1.6 Wskaźnik wydatków bieżących

Mimo, że wydatki bieżące stanowią zmienną decyzyjną, w celu uzyskania rozwiązania analitycznego dla roku trzeciego, potrzebne są ich wartości dla roku pierwszego i drugiego. Dlatego także ta kategoria musi być - przynajmniej w części symulacji - generowana z rozkładu. Rozkład empiryczny c został otrzymany poprzez odjęcie kosztów obsługi dłużu od wydatków bieżących i podzielenie przez dochody bieżące ($\frac{c_t}{y_t}$). Test KS i wizualna ocena histogramu z nałożonymi wykresami rozkładów teoretycznych ponownie wskazują na rozkład t-Studenta. Wartość p klasycznego testu KS wyniosła bowiem dla tego rozkładu 0,0002 (blisko 0 dla rozkładu normalnego), a bootstrapowego - 0,001 (0 dla normalnego). Wartość medianowa wyniosła 0,90.

7.1.7 Wskaźnik wartości infrastruktury

Następnym analizowanym parametrem jest $k = \frac{k_t}{y_t}$, czyli wartość brutto środków trwałych w relacji do dochodów bieżących. Podstawowy problem związany z tą kategorią stanowi niejednorodność danych udostępnianych przez Bank Danych Lokalnych. Obecnie publikowana jest wartość brutto środków trwałych w gospodarce narodowej (zawierającej także sektor prywatny), tylko na szczeblu województw, w przeliczeniu na jednego mieszkańca. Tak zdefiniowana kategoria nie odpowiada zatem zmiennej wykorzystywanej w modelu opisywanym w niniejszej pracy. Wykorzystano więc o wiele bardziej odpowiedni szereg czasowy, tj. środki trwałe jednostek i zakładów budżetowych gmin, pogrupowanych w powiaty. Jednak był on opracowywany przez BDL jedynie do 2011 r. Ze względu na to, że mianownikiem parametru k stanowią dochody bieżące,

Rysunek 15: Histogram wydatków bieżących bez kosztów obsługi dłużu gmin i miast powiatowych w relacji do dochodów bieżących, c , w latach 2010-2015 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami t-Studenta i normalnym



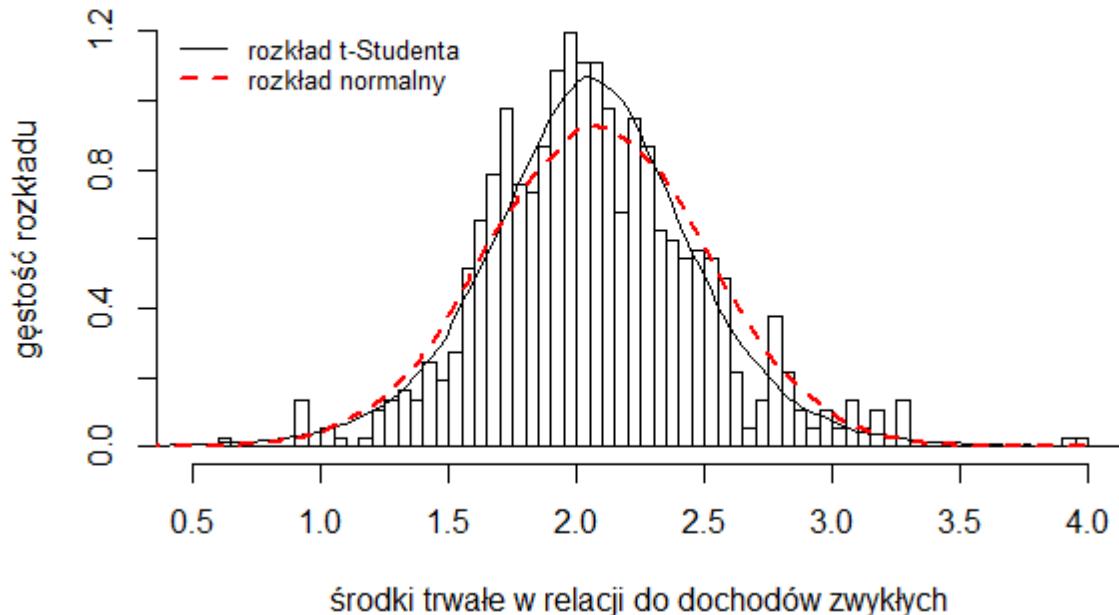
Źródło: MF i obliczenia własne

do jego obliczenia niezbędne są dochody unijne. Niestety, szereg „finansowanie i współfinansowanie programów i projektów unijnych” jest publikowany w BDL dopiero od 2010 r. Oznacza to, że dysponowano szeregiem jednocześnie licznika i mianownika na szczeblu gmin wyłącznie za lata 2010-2011.

Na podstawie różnych kategorii z Banku Danych Lokalnych można pośrednio wnioskować o wzrostowym trendzie zmiennej k . Po pierwsze, w latach 2005-2008 średnia wartość środków trwałych jednostek i zakładów budżetowych gmin pogrupowanych w powiaty, w relacji do dochodów ogółem (czyli zawierających dochody unijne) oscylowała wokół 1,7, a następnie szybko wzrosła do 1,97 w 2011 r. Po drugie, średnia omawianego tutaj parametru k (czyli tym razem mianownik stanowiły dochody bieżące) wzrosła z 2,00 w 2010 r. do 2,15 w 2011 r. W 85% powiatów wskaźnik ten był wyższy w 2011 r. niż w roku poprzednim. Po trzecie, dynamika środków trwałych w województwach w gospodarce narodowej, w latach 2008-2014 była wyższa od dynamiki dochodów własnych JST, a także od nominalnego tempa wzrostu PKB. Przy założeniu względnie stabilnej liczby ludności, implikuje to, że relacja środków trwałych do dochodów publicznych i prywatnych także rosła. Wnioskowanie na podstawie powyższych obserwacji nie jest ścisłe (obserwacja 1. ignoruje wahania dochodów unijnych, obserwacja 2. dotyczy tylko dwóch lat, obserwacja 3. - województw, sektora prywatnego oraz centralnego podsektora publicznego). Powyższe obserwacje mogą jednak stanowić podstawę do wysunięcia hipotezy o stopniowym wzroście k . Ów wzrostowy trend środków trwałych w relacji do dochodów bieżących sprawia, że rozkład parametru k nie jest stały w czasie. Pomimo tego, w dalszej części pracy wykorzystano rozkład z lat 2010-2011, gdyż ma on na tyle dużą wariancję (obserwacje odstające pochodzą spoza przedziału 1,0–3,0, patrz wykres 16), że powinien obejmować także większość hipotetycznego rozkładu szacowanego dla lat po 2011 r.

Do rozkładu empirycznego k rozważano dopasowanie dwóch teoretycznych rozkładów: t-Studenta i normalnego. Empiryczne poziomy istotności wynikające ze zwykłego testu KS wyniosły odpowiednio: 0,614 i 0,078 i tylko nieznacznie różniły się od otrzymanych w bootstrapowym teście KS, tj. 0,606 i 0,072. Wyniki te przesądziły o wykorzystaniu rozkładu t-Studenta w analizie wrażliwości oraz przyjęciu 2,06 jako wartości bazowej dla k . Dopasowanie obu wykresów do rozkładu empirycznego można zaobserwować na wykresach histogramu oraz kwantylowych.

Rysunek 16: Histogram wartości średków trwałych w relacji do dochodów bieżących jednostek i zakładów budżetowych gmin i miast powiatowych pogrupowanych w powiaty, k , w latach 2010-2011 w porównaniu z dopasowanymi rozkładami t-Studenta oraz normalnym



Źródło: Bank Danych Lokalnych GUS

7.1.8 Stopa deprecjacji infrastruktury

Najtrudniejszym do skalibrowania rozkładem, ze względu na brak odpowiednich danych, był rozkład parametru δ . W celu uzyskania rozkładu teoretycznego, poczyniono silne założenie, że wartości parametrów i (wydatków majątkowych w relacji do dochodów bieżących), k i γ są równe wartościami długookresowym z modelu o nieskończonym horyzoncie czasowym opisany w części D aneksu. Wykorzystano także wyprowadzone w aneksie równanie (32): $\delta = \frac{i}{k} - \gamma$.

Rozkład parametru δ uzyskano, stosując podobną procedurę, co w wypadku parametrów: r , χ , b , γ , c , k . Do tego parametru dopasowano rozkład gamma(ksztalt: 2.218; skala: 9.709) oraz wartość bazową równą wartości medianowej 0,19. Następnie wylosowano 100 tysięcy trójkę i , k i γ z rozkładów teoretycznych i każdej z trójkę przypisano odpowiednią wartość δ , zgodnie z ww. wzorem (32). Medianą z tak uzyskanego rozkładu δ była liczba 0,059. Ponieważ parametr δ często przyjmował wartości ujemne, w celu dopasowania rozkładu gamma, który przypisuje zerowe prawdopodobieństwo liczbom ujemnym, każdą wartość δ powiększono o 0,15. Ostatecznie, rozkład δ stanowi rozkład gamma (ksztalt: 4,760; skala: 21,213) pomniejszony o wspomniane 0,15 - tak, aby wartości ujemne miały niezerowe prawdopodobieństwo wystąpienia.

7.2 Analiza struktury warunków ograniczających

Po skalibrowaniu rozkładów teoretycznych dla wszystkich parametrów modelu, z wyjątkiem α i β , wygenerowano 7200 symulacji modelu ograniczonego do lat 3-4 w celu zbadania struktur

warunków ograniczających (czyli zbadania, które warunki były luźne, a które napięte) w rozwiązańach optymalnych. Wartości większości parametrów (tj. niebehawioralnych) losowano z rozkładów teoretycznych. W zakresie parametrów behawioralnych przyjęto na tym etapie podejście agnostyczne - losowano α z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1; 0, 9]$, zaś β - z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0; 1]$. W związku z tak dowolnym określeniem wartości parametrów behawioralnych, należy traktować owe symulacje jako wstępne.

Każdy z 200 zestawów wylosowanych parametrów zreplikowano 36-krotnie (stąd łączna liczba 7200) - tak, aby uzyskać wszystkie kombinacje: u_3 równe zero, równe limitowi lub równe innej kwocie pomiędzy ww. skrajnymi liczbami, i_3 równe zero lub liczbie dodatniej oraz te same opcje dla ww. zmiennych z roku czwartego (łącznie: $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ kombinacji). Następnie obliczono użyteczność dla każdego z 36 scenariuszy i wybrano ten o najwyższej użyteczności. Ostatecznie uzyskano wartości optymalne zmiennych decyzyjnych, optymalną strukturę warunków ograniczających i użyteczność dla 200 zestawów wylosowanych parametrów. Do tych wyników odnoszą się wszystkie zaprezentowane w tym podrozdziale statystyki opisowe.

Tabela 13: Częstość występowania różnych optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych

zmienna	częstość	zmienna	częstość	zmienna	częstość
$i_3^* = 0$	32,5%	$i_3^* > 0$	67,5%		
$u_3^* = 0$	32,5%	$0 < u_3^* < U_3$	19,5%	$u_3^* = U_3$	48%
$i_4^* = 0$	51,5%	$i_4^* > 0$	48,5%		
$u_4^* = 0$	5%	$0 < u_4^* < U_4$	23,5%	$u_4^* = U_4$	71,5%

Źródło: obliczenia własne

Z tabeli 13 wynika, że inwestycje unijne przeważnie powinny być realizowane na maksymalnym poziomie, natomiast inwestycje zwykłe - niespodziewanie często powinny być zerowe. Należy jednak mieć na uwadze, że wyniki te były podyktowane specyficznymi wartościami α bliskimi 0,9 i/lub β bliskimi 0, co wpływało na niską użyteczność z infrastruktury i w efekcie - zaniżanie inwestycji.

Tabela 14: Zestawy najpopularniejszych wartości optymalnych zmiennych decyzyjnych

poz.	u_3^*	i_3^*	u_4^*	i_4^*	częstość
1	= 0	> 0	= U_4	> 0	19,5%
2	= U_3	> 0	= U_4	> 0	17,5%
3	= U_3	> 0	= U_4	= 0	10,5%
4	= U_3	= 0	> 0	= 0	7%
5	> 0	= 0	= U_4	= 0	6,5%
6	= U_3	= 0	= U_4	= 0	5%
7	= 0	> 0	= U_4	= 0	4%
8	= 0	= 0	> 0	= 0	3%
9	> 0	= 0	> 0	= 0	3%
10	= U_3	> 0	> 0	= 0	3%

Źródło: obliczenia własne

Tabela 14 prezentuje 10 najpopularniejszych kombinacji optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych. Łącznie odpowiadają one za 79% przypadków. Warto wspomnieć, że drugi najczęściej występujący wariant (z niewielką stratą do najczęściej występującego) został rozwiązany w sposób analityczny w niniejszej pracy.

Warunek IWZ jest prawie zawsze napięty. W 3,5% przypadków dla roku trzeciego, luz w warunku wynosi między 0,07 a 0,0001. Wtedy α przyjmuje wysokie wartości, około 0,8. Mowa

tu jednak o implikacji, a nie równoważności, gdyż często dla wysokich α warunek IWZ także bywa napięty. W pozostałych przypadkach luz nie przekracza 0,0001, co jest w praktyce niedrożnalne od zera. Warunek IWZ dla roku czwartego jest napięty zawsze. Z kolei warunek na zrównoważony wynik bieżący (ZWB) jest napięty rzadko. W trzecim roku zdarza się to w 9% przypadków, wówczas α jest wysoka, wydatki bieżące - wysokie, a inwestycje, zwłaszcza zwykłe - niskie. ZWB w czwartym roku napięty jest w 6% przypadków, wtedy α jest bardzo wysoka, a inwestycje przeważnie zerowe. Podsumowując, założenie o napiętości IWZ i braku napiętości ZWB ma potwierdzenie w wynikach wstępnych symulacji.

W 19% przypadków odchylenie między wartościami użyteczności z rozwiązań numerycznego i analitycznego nie przekraczało 0,0001. Podobnie często, w 17% przypadków, optymalna wartość żadnej z sześciu zmiennych decyzyjnych (oprócz podanych w tabelach - dodatkowo c_3^* i c_4^*) nie odchyla się od optymalnej wartości uzyskanej w rozwiązaniu analitycznym o więcej niż 0,02 (jednostkę stanowią dochody bieżące samorządu z danego roku). W 14% przypadków odchylenie to nie przekracza 0,01. Odnotowane odstępstwa są przede wszystkim konsekwencją niespełnienia ograniczeń przyjętych jakodane w rozwiązaniu analitycznym dla dużego odsetka wariantów parametryzacji.

Jeżeli jednak założyć strukturę warunków ograniczających odpowiadającą strukturze rozwiązań analitycznych, czyli inwestycje unijne w trzecim i czwartym roku na maksymalnym poziomie oraz dodatnie inwestycje zwykłe w obu tych latach (17,5% przypadków), to zbieżność rozwiązań uzyskanych metodami numeryczną i analityczną staje się dużo większa. W 86% odchylenie między użytecznościami z obu metod nie przekracza 0,0001. W 75% optymalna wartość żadnej z 6 zmiennych nie odchyla się o bardziej od optymalnej wartości uzyskanej w rozwiązaniu analitycznym niż 0,02, natomiast w 64% - o bardziej niż 0,01. Generalnie oznacza to dużą zbieżność wyników osiąganych za pomocą obu metod. Odnotowane odstępstwa są konsekwencją niedoskonałości meta-algorytmu numerycznego, który nie odnajduje ekstremów globalnych, a jedynie ekstrema lokalne. Warto w tym miejscu podkreślić, że na meta-algorytm składają się niedoskonałe metody optymalizacji, których wyniki mogą być poprawne bądź nie w zależności od startowych wartości zmiennych (patrz części A i C.2 aneksu). Ta obserwacja pokazuje ponadto, jaka korzyść płynie z uzyskania rozwiązania analitycznego.

7.3 Kalibracja wartości parametrów behawioralnych α i β

Parametry: α , opisujący preferencje względem wydatków bieżących w porównaniu z infrastrukturą, i β , dyskontujący przyszłą użyteczność, różnią się od pozostałych parametrów modelu. Są one bowiem parametrami behawioralnymi, nieobserwownymi i dlatego nie można odczytać ich rozkładów empirycznych z danych. Teoretycznie każdy wójt, burmistrz czy prezydent mógłby ustalić dowolne wartości $\alpha \in (0, 1)$ oraz $\beta > 0$, a następnie uzyskać z modelu optymalne wartości wydatków bieżących i inwestycyjnych. W podrozdziale 8.1 ograniczono się jednak do takich α i β , zgodnie z którymi struktura warunków ograniczających w optimum jest taka jak założona w rozdziale 6, czyli przede wszystkim: w 3 i 4 roku wykorzystuje się całą dopuszczalną kwotę środków unijnych, napięta jest reguła IWZ oraz realizuje się niezerowe wydatki bieżące i inwestycyjne. Aby ograniczyć możliwość, że rozwiązanie uzyskane metodą KKT stanowi tylko ekstremum lokalne, a nie globalne, model rozwiązywano także za pomocą metod numerycznych. Jeżeli rozwiązania uzyskane za pomocą tych metod różniły się, tj. użyteczność mogła być wyższa przy innej strukturze warunków ograniczających niż założona, wówczas (α, β) prowadzące do takich rozwiązań były wyłączane ze zbioru rozważanych wartości.

Zadanie optymalizacyjne rozwiązywano dla wszystkich możliwych par $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, gdzie $\alpha \in \{0, 1; 0, 2, \dots, 0, 9\}$, zaś $\beta \in \{0, 1; 0, 2; \dots; 1, 0\}$. Pozostałym parametrom przypisano natomiast wartości bazowe podane w poprzednim podrozdziale. Z iloczynu kartezjańskiego $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

wyodrębniono następnie podzbior, który prowadził do rozwiązań optymalnych o strukturze ograniczeń zgodnej z założeniami (punkty 2, 3, 6 i 7 spośród wymienionych poniżej). Z owego podzbioru, jedynie wartości parametrów podane w punktach 6 i 7 prowadziły do rozwiązań optymalnych zbliżonych do empirycznych, tj. istotnie wyższych wydatków bieżących niż inwestycyjnych. Ostatecznie zatem zawęzono poszukiwania do obszaru zaprezentowanego w tabelach 17 i 18 i wybrano domyślną wartość α równą 0,4 oraz β w wysokości 0,1. Wartości te wykorzystywano w symulacjach o z góry ustalonych wartościach α i β .

- 1) $\alpha = 0,1, \beta \neq 0,2 \Rightarrow u_3^* = 0 \Rightarrow$ zła struktura rozwiązania
- 2) $\alpha = 0,1, \beta = 0,2 \Rightarrow c_3^*, i_3^*, c_4^*, i_4^* > 0; u_3^* = U_3; u_4^* = U_4$
 \Rightarrow dobra struktura rozwiązania, nierealistyczne wyniki
- 3) $\alpha = 0,2, \beta \in \{0,1; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6\} \Rightarrow c_3^*, i_3^*, c_4^*, i_4^* > 0; u_3^* = U_3; u_4^* = U_4$
 \Rightarrow dobra struktura rozwiązania, nierealistyczne wyniki
- 4) $\alpha = 0,2, \beta = 0,2 \Rightarrow u_3^* < U_3 \Rightarrow$ zła struktura rozwiązania
- 5) $\alpha = 0,2, \beta \in [0,7,1,0] \Rightarrow u_3^* = 0 \Rightarrow$ zła struktura rozwiązania
- 6) $\alpha = 0,3 \Rightarrow c_3^*, i_3^*, c_4^*, i_4^* > 0; u_3^* = U_3; u_4^* = U_4 \Rightarrow$ dobra struktura rozwiązania
- 7) $\alpha = 0,4, \beta \in [0,1,0,4] \Rightarrow c_3^*, i_3^*, c_4^*, i_4^* > 0; u_3^* = U_3^*; u_4^* = u_4^*; c_3^* > i_3^*; c_4^* > i_4^*$
 \Rightarrow dobra struktura rozwiązania, wyniki zbliżone do wartości występujących w danych
- 8) $\alpha = 0,4, \beta \in [0,5,1] \Rightarrow i_4^* < 0$
 \Rightarrow jeden warunek niespełniony, brak interpretacji ekonomicznej
- 9) $\alpha \geq 0,5 \Rightarrow i_4^* < 0 \Rightarrow$ jeden warunek niespełniony, brak interpretacji ekonomicznej

Rysunek 17: Rozwiązania optymalne dla trzeciego roku w zależności od α i β

c3 / y3		beta									
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
alfa		0,3	0,54	0,53	0,52	0,50	0,49	0,48	0,47	0,46	0,45
0,32		0,58	0,56	0,55	0,54	0,52	0,51	0,50	0,49	0,48	0,47
0,34		0,61	0,60	0,59	0,57	0,56	0,55	0,53	0,52	0,51	0,50
0,36		0,65	0,64	0,62	0,61	0,59	0,58	0,57	0,55	0,54	0,53
0,38		0,69	0,67	0,66	0,64	0,63	0,61	0,60	0,58	0,57	0,56
0,4		0,72	0,71	0,69	0,67	0,66	0,64	0,63	0,62	0,60	0,59
0,42		0,76	0,74	0,73	0,71						

i3 / y3		beta									
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
alfa		0,3	0,88	0,91	0,94	0,97	1,00	1,03	1,05	1,08	1,10
0,32		0,79	0,82	0,85	0,89	0,92	0,95	0,98	1,00	1,03	1,05
0,34		0,70	0,73	0,77	0,80	0,83	0,87	0,90	0,93	0,95	0,98
0,36		0,61	0,65	0,68	0,72	0,75	0,78	0,82	0,85	0,88	0,90
0,38		0,52	0,56	0,60	0,63	0,67	0,70	0,74	0,77	0,80	0,83
0,4		0,43	0,47	0,51	0,55	0,59	0,62	0,66	0,69	0,72	0,75
0,42		0,34	0,38	0,42	0,46						

Źródło: obliczenia własne

Rysunek 18: Rozwiązań optymalne dla czwartego roku w zależności od α i β

c4 / y4		beta									
alfa	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	
0,3	0,66	0,67	0,67	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69	
0,32	0,70	0,70	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	
0,34	0,73	0,74	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,77	
0,36	0,76	0,77	0,77	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	
0,38	0,79	0,80	0,80	0,81	0,81	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	
0,4	0,82	0,83	0,83	0,84	0,84	0,85	0,85	0,86	0,86	0,87	
0,42	0,85	0,86	0,86	0,87							

i4 / y4		beta									
alfa	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	
0,3	0,50	0,49	0,48	0,47	0,46	0,45	0,45	0,44	0,43	0,42	
0,32	0,42	0,41	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,34	0,33	
0,34	0,34	0,33	0,32	0,30	0,29	0,28	0,27	0,26	0,26	0,25	
0,36	0,26	0,25	0,24	0,23	0,21	0,20	0,19	0,18	0,17	0,16	
0,38	0,19	0,18	0,16	0,15	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	
0,4	0,12	0,11	0,09	0,08	0,06	0,05	0,04	0,02	0,01	0,00	
0,42	0,06	0,04	0,03	0,01							

Źródło: obliczenia własne

Wartości α i β były ostatnimi potrzebnymi do numerycznego rozwiązania modelu. Wszystkie wartości domyślne oraz rozkłady służące do analizy wrażliwości zostały zawarte w tabeli 15.

Tabela 15: Rozkłady wartości parametrów modelu

parametr	domyśl.	rozkład do analizy wrażliwości	źródło
α	0,4	brak	własne
β	0,1	brak	własne
v	0,25	trójkątny (0,2; 0,25; 0,35)	BDL
θ	0,62	trójkątny (0,43; 0,62; 1)	Sierak
r	0,039	gamma (ksztalt: 6,417 ; skala: 152,5)	MF
χ	0,2	gamma (ksztalt: 2,325 ; skala: 9,608)	MF
γ	0,044	t-Studenta (położenie: 0,044; skala: 0,039; st. sw.: 2,919)	MF
δ	0,059	-0,15 + gamma(ksztalt: 4,760; skala: 21,213)	$\delta = \frac{i}{k} - \gamma$

Tabela 16: Rozkłady wartości startowych zmiennych modelu

zmienna	domyślnie	rozkład do analizy wrażliwości	źródło
b	0,32	0 (3,8%) lub gamma (ksztalt: 2,405; skala: 6,984)	MF
c	0,90	t-Studenta (położenie: 0,90; skala: 0,045; st. sw.: 4,52)	MF
k	2,06	t-Studenta (położenie: 2,06; skala: 0,36; st. sw.: 6,58)	BDL

Podsumowując rozdział siódmy, należy stwierdzić, że niektóre omawiane w nim wyniki nie były zgodne z oczekiwaniemi. Niespodziewanie często, w symulacjach z losowymi wartościami parametru preferencji α i czynnika dyskontowego β , optymalny poziom inwestycji okazywał się zerowy. Ponieważ rozkładów nieobserwowalnych parametrów α i β nie da się oszacować na pod-

stawie danych empirycznych, można założyć takie ich wartości, które implikują optymalne wartości zmiennych decyzyjnych zbliżone do empirycznych. Co więcej, można przyjąć wartości, które implikują strukturę warunków ograniczających zgodną z założoną w rozwiązaniu analitycznym. Tak skalibrowana wartość β okazała się jednak na tyle niska, że oznacza niespotykaną w literaturze krótkowzroczność modelowanego decydenta.

Ostatecznie, w kolejnym rozdziale, wykorzystywano skalibrowane rozkłady parametrów strukturalnych i wartości startowych, zaprezentowane w tabelach 15 i 16. Z kolei w odniesieniu do parametrów behawioralnych, postępowano na dwa sposoby - losowano je z rozkładów jednostajnych („agnostycznych”) albo przyjmowano stałe wartości uzyskane w podrozdziale 7.3.

8 Rozwiązanie numeryczne modelu oraz analiza wrażliwości optymalnych poziomów wydatków bieżących i inwestycyjnych

Niniejszy rozdział przedstawia rozwiązanie numeryczne pełnej, czterookresowej wersji modelu oraz opisuje wpływ wartości parametrów strukturalnych i behawioralnych modelu na optymalne wartości zmiennych decyzyjnych: wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$ oraz inwestycyjnych zwykłych $\frac{i_t^*}{y_t}$. Konsepcja obu podrozdziałów jest taka sama: polega na wylosowaniu wielu zestawów wartości parametrów i znalezieniu dla każdego zestawu optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych. Następnie oszacowano liniowe metamodel²⁰ ekonometryczne, w których zmienną objaśniającą była jedna ze zmiennych decyzyjnych, z konkretnego roku, a objaśniającymi - wartości parametrów.

Należy zastrzec, że przyjęto liniową specyfikację modeli, mimo że w rzeczywistości efekty mogą być nieliniowe (a czasem wręcz niemonotoniczne), co widać w rozwiązaniach analitycznych modelu. Oszacowanie modeli liniowych pozwala znaleźć efekty przeciętne w całej przestrzeni parametrów (nie tylko lokalne wokół bazowych wartości parametrów), ale nie wychwyci nieliniowości. Przeanalizowanie pełnego wpływu ewentualnych zmian wartości wybranych parametrów w przypadku konkretnej gminy jest możliwe w oparciu o wykorzystywane tutaj narzędzia, ale wykracza poza zakres niniejszej rozprawy.

Warto też zaznaczyć, iż zrezygnowano z podawania statystycznej istotności zmiennych objaśniających w modelach. Wynika to z faktu, że w praktyce możliwe jest wygenerowanie tak dużej liczby obserwacji, aby uczynić każdy parametr istotnym (wszak każdy parametr znajdował się w rozwiązaniu analitycznym). Dlatego w niniejszym rozdziale uwagę skupiono na sile i kierunku wpływu poszczególnych parametrów. W rezultacie, pod uwagę brano oszacowania standaryzowanych współczynników regresji (równych zwykłym współczynnikom pomnożonym przez odchylenie standardowe danej zmiennej objaśniającej), a nie zwykłych współczynników. Łatwiej bowiem porównywać wpływ różnych parametrów, zakładając ich wzrost o jedno odchylenie standardowe, a nie o jednostkę.

Pierwszy podrozdział ogranicza się do modelu dwóch ostatnich lat kadencji władz samorządowych oraz do założonych wartości parametrów behawioralnych i struktury warunków ograniczających w rozwiązaniu optymalnym. Dzięki temu rozwiązanie metodą numeryczną mogło zostać sprawdzone za pomocą metody analitycznej. Drugi podrozdział nie zawiera powyższych ograniczeń. Dotyczy on pełnego modelu czteroletniego, nie zakłada ani określonych wartości parametrów behawioralnych, ani struktury warunków ograniczających. Jednak w tym przypadku rozwiązanie można uzyskać jedynie metodą numeryczną. W celach porównawczych, przeprowa-

²⁰Przez metamodel rozumie się tu model, którego parametry estymowane są w oparciu o dane wygenerowane w procesie symulacji, a nie rzeczywiste dane empiryczne. Nie służy on więc weryfikacji zależności obserwowanych w danych, lecz wychwyceniu cech symulowanego procesu, trudnych do bezpośredniego dostrzeżenia ze względu na jego dużą złożoność.

dzono też symulacje w oparciu o model czteroletni o z góry ustalonych wartościach parametrów behawioralnych.

8.1 Wyniki analizy wrażliwości dla scenariusza rozwiązanego analitycznie z ustalonymi: strukturą warunków ograniczających oraz α i β

W celu wykonania analizy wrażliwości dla modelu dwuletniego, wylosowano 2247 zestawy wartości parametrów z rozkładów teoretycznych zaprezentowanych w tabeli 16, przyjmując wartość parametru preferencji $\alpha = 0,4$ i czynnika dyskontowego $\beta = 0,1$. Następnie pozostawiono dokładnie tysiąc zestawów, w których optymalne wartości zmiennych decyzyjnych były takie same według metody analitycznej (warunków KKT) oraz metody numerycznej (meta-algorytmu optymalizacyjnego). W kolejnym kroku, klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, oszacowano liniowe modele ekonometryczne w oparciu o tysiąc zestawów liczb. W modelach tych zmiennymi objaśniającymi były wartości parametrów strukturalnych, a objaśnianymi - optymalne wartości kolejno: $\frac{c_3^*}{y_3}, \frac{c_4^*}{y_4}, \frac{i_3^*}{y_3}, \frac{i_4^*}{y_4}$, czyli optymalnych wydatki bieżących albo optymalnych inwestycji zwykłych w relacji do dochodów bieżących w roku odpowiednio trzecim i czwartym.

Oszacowania standaryzowanych współczynników stojących przy zmiennych objaśniających ze wszystkich modeli zostały zebrane w tabeli 17.

Tabela 17: Oszacowania standaryzowanych współczynników modeli opisujących optymalne wartości zmiennych decyzyjnych dla modelu dwuletniego z określona strukturą warunków ograniczających oraz α i β

	$\frac{c_3^*}{y_3}$	$\frac{c_4^*}{y_4}$	$\frac{i_3^*}{y_3}$	$\frac{i_4^*}{y_4}$
γ	-0,004	-0,015	0,044	0,099
δ	-0,026	-0,057	0,057	0,153
θ	0,000	-0,001	-0,034	-0,034
r	0,004	0,000	-0,091	-0,034
χ	0,045	0,039	-0,385	-0,152
b	-0,033	-0,016	-0,185	0,052
c	-0,022	0,002	-0,131	0,094
k	0,048	0,026	-0,102	-0,063
v	0,004	0,006	-0,030	-0,039
R^2	0,887	0,771	0,912	0,817

Źródło: obliczenia własne

Z wyżej przedstawionych modeli płynie wiele istotnych wniosków dla polityki gmin i miast powiatowych.

Wydatki bieżące w relacji do dochodów bieżących w pierwszym i drugim roku ($c = \frac{c_1}{y_1} = \frac{c_2}{y_2}$) wpływają: umiarkowanie negatywnie na $\frac{c_3^*}{y_3}$, nieznacznie na $\frac{c_4^*}{y_4}$, silnie negatywnie na $\frac{i_3^*}{y_3}$ oraz silnie pozytywnie na $\frac{i_4^*}{y_4}$. Najprawdopodobniej wyższe wydatki bieżące w przeszłości, poprzez małą przestrzeń w IWZ, ograniczają wydatki ogółem w 3 roku, ale oszczędności te mogą zostać, przynajmniej częściowo, wykorzystane na wzrost wydatków w 4 roku.

Dynamika dochodów bieżących (γ) wpływa ujemnie na wydatki bieżące $\frac{c_3^*}{y_3}$ oraz $\frac{c_4^*}{y_4}$, natomiast dodatnio - na wydatki inwestycyjne $\frac{i_3^*}{y_3}$ oraz $\frac{i_4^*}{y_4}$. Być może działa tu zasada zapobiegliwości. Ponadprzeciętnie wysoki wzrost dochodów należy przeznaczyć na inwestycje, które zwiększą użyteczność także w przyszłości, natomiast wydatki bieżące działają antycyklicznie, jako automatyczny stabilizator - w dobrych czasach rosną wolniej niż baza dochodowa, a w złych -

szybciej. Należy podkreślić, że zmienne objaśniane stanowią kategorie w relacji do dochodów bieżących, zatem szybsza dynamika dochodów w roku t , γ_t powinna pośrednio zwiększyć optymalne wartości liczników (c_t^* , i_t^*) oraz bezpośrednio - mianowników (y_t), więc końcowy efekt nie był oczywisty ex ante.

Zgodnie z rozwiązaniami analitycznymi (17) i (18), wpływ stopy procentowej r i poziomu zadłużenia b na obie kategorie wydatków optymalnych c_4^* i i_4^* jest ujemny. Wnioski z analizy wrażliwości są jednak nieco inne. Wpływ stopy procentowej r na $\frac{c_4^*}{y_4}$ jest neutralny, a długu b na $\frac{i_4^*}{y_4}$ - dodatni. Tę ostatnią, nieoczekiwana zależność można wytłumaczyć tym, że początkowy stan zadłużenia b ujemnie oddziałuje na c_3^* oraz i_3^* , co obniża poziom długu b_4 i stwarza przestrzeń na inwestycje w ostatnim roku i_4^* . Poza tym, w rozwiąaniu analitycznym uwzględniony jest wpływ $\frac{b_4}{y_4+U_4} \approx \frac{b_4}{y_4} \approx b$, zaś w metamodelach opisywanych w niniejszym podrozdziale - $\frac{b_3}{y_3}$.

Jako zastanawiający należy ocenić również wpływ stopy zapadalności długu χ . Jest on dodatni w odniesieniu do wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$, a ujemny - do inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$. Biorąc pod uwagę IWZ, wydawać by się mogło, że wyższa stopa zapadalności χ powoduje wyższe koszty obsługi długu (lewa strona nierówności (7)), więc wymagawiększej przestrzeni fiskalnej (prawa strona), którą mogą zapewnić niższe wydatki bieżące. Widocznie mechanizm wpływu parametru χ jest jednak bardziej złożony. Wyższa stopa zapadalności długu implikuje niższe wydatki ogółem (potwierdzają to wielokrotnie większe co do modułu oszacowania w modelach opisujących inwestycje niż wydatki bieżące), aby maksymalnie zredukować deficyt, a w konsekwencji dług i dzięki temu ograniczyć w przyszłych latach wydatki na spłatę długu, które z perspektywy funkcji użyteczności są czystą stratą. Krótko mówiąc, wysoka stopa zapadalności długu premiuje niskie zadłużenie. Efekt ten zadziałałby niezależnie od obowiązywania IWZ. Z kolei niski poziom długu wpływa na zmniejszenie wielkości lewej strony nierówności w regule fiskalnej, co pozwala na odpowiedni wzrost wydatków bieżących do momentu spełnienia reguły.

Poziom infrastruktury $k = \frac{k_3}{y_3}$ i limit dochodów unijnych v oddziałują dodatnio na wydatki bieżące $\frac{c_t^*}{y_t}$ oraz ujemnie na inwestycyjne $\frac{i_t^*}{y_t}$. Ta konkluzja wysnuta z rozwiązania analitycznego została potwierdzona przez oszacowania metamodeli. Zgadza się ona także z intuicją - potrzeba mniej inwestycji zwykłych i , jeżeli infrastruktura k jest już rozwinięta lub jeżeli można uzyskać większe finansowanie ze środków unijnych v . Zgodny z oczekiwaniami jest również wpływ wysokości stopy deprecjacji infrastruktury δ . Im jest ona większa, tym należy więcej inwestować, aby odbudować poziom infrastruktury k_t , a przez to - trzeba realizować niższe wydatki bieżące c_t^* . Z kolei konieczność ponoszenia większego wkładu własnego w finansowanie inwestycji unijnych θ implikuje niższe kwoty inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$, ale nie ma wpływu na kwoty wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$.

Ostatnią wartą rozważenia kwestią jest siła wpływu poszczególnych parametrów na wartości zmiennych decyzyjnych, tzn. na który parametr szczególną uwagę powinni zwrócić decydenci.

Na inwestycje zwykłe $\frac{i_t^*}{y_t}$, szczególnie w 3 roku, najsilniej oddziałuje stopa zapadalności długu χ . W 3 roku dużą rolę odgrywającą także startowe wartości zadłużenia b i wydatków bieżących c , które mają, zgodnie z intuicją, mniejsze znaczenie w kontekście roku 4. W ostatnim roku znaczenia nabiera natomiast stopa deprecjacji infrastruktury δ .

W odniesieniu do wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$, miary przeciętnego wpływu są co do modułu niższe i mniej zróżnicowane. Największe znaczenie ma również stopa zapadalności długu χ . Podobnie jak w przypadku inwestycji, w trzecim (lecz nie czwartym) roku istotną rolę odgrywały wartości startowe parametrów: b , c i k . Natomiast w czwartym roku stosunkowo silny wpływ wywarła stopa deprecjacji infrastruktury δ .

Parametry związane z inwestycjami unijnymi (θ i v) mają bardzo małe znaczenie w przypadku

wszystkich czterech zmiennych objaśnianych. Nie dziwi to, gdyż w założonej strukturze warunków ograniczających, inwestycje unijne opiewają na maksymalną kwotę $u_3^* = U_3$ i $u_4^* = U_4$.

8.2 Rozwiążanie numeryczne pełnego modelu oraz wyniki analizy wrażliwości

Z analizy przeprowadzonej w podrozdziale 7.2 wynikało, że struktura warunków ograniczających przyjęta w rozwiążaniu analitycznym i założona w podrozdziale 8.1 niekoniecznie musi być optymalna - będzie tak tylko przy pewnych, dość szczególnych założeniach co do wartości parametru preferencji α i czynnika dyskontowego β . Dlatego w niniejszej części pracy zrezygnowano z narzucania struktury warunków ograniczających oraz przyjmowania określonych wartości α i β . Takie podejście ma swoją cenę - niemożność zweryfikowania wyników metody numerycznej za pomocą metody analitycznej.

Przy założeniu domyślnych wartości parametrów, tj. zamieszczonych w tabeli 15 i 16, optymalne wartości zmiennych decyzyjnych są następujące:

Tabela 18: Optymalne wartości zmiennych decyzyjnych w modelu czteroletnim, dla domyślnych wartości parametrów

rok	c^*	u^*	i^*
1	0,71	0,25	0,46
2	0,80	0,26	0,26
3	0,71	0,25	0,50
4	0,83	0,16	0,14

Źródło: obliczenia własne

W trzech pierwszych latach inwestycje unijne kształtują się na poziomie bliskim limitowi $u_t^* \approx U_t$. Można również zauważać, że na przemian występują lata z wyższymi i niższymi inwestycjami zwykłymi i_t^* . W ostatnim roku inwestycje są najniższe - dlatego, że mają wpływ na użyteczność czerpaną z infrastruktury k_t tylko w jednym roku, a nie rozkładają się na odpowiednio dłuższy okres, jak w przypadku inwestycji z lat poprzednich.

W celu oszacowania wpływu parametrów strukturalnych i behawioralnych na wartości optymalne zmiennych decyzyjnych w latach 1-4, wylosowano tysiąc zestawów parametrów strukturalnych i, w przeciwieństwie do poprzedniego podrozdziału, także behawioralnych: α z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 1; 0, 9]$ i β z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 1]$. Następnie oszacowano klasyczną metodą najmniejszych kwadratów osiem metamodeli ekonometrycznych - dla zmiennych objaśnianych: $\frac{c_t^*}{y_t}$ oraz $\frac{i_t^*}{y_t}$, gdzie $t \in \{1, 2, 3, 4\}$. Oszacowania współczynników stojących przy zmiennych objaśniających ze wszystkich modeli zostały zebrane w tabeli 19.

Z modeli objaśniających optymalne wartości wydatków bieżących w kolejnych czterech latach kadencji władz samorządowych $\frac{c_t^*}{y_t}$ można wyciągnąć następujące wnioski.

Zmienne objaśniane zależą dodatnio od parametru preferencji α , co było do przewidzenia na podstawie samej definicji tego parametru. Parametr ten cechuje ponadto największa siła wpływu. Równie oczywista jest zaobserwowana dodatnia zależność między startowym poziomem infrastruktury k a poziomem wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$ - bogata infrastruktura nie wymaga wysokich nakładów inwestycyjnych. Odwrotnie przedstawia się sytuacja w związku ze stopą depresji infrastruktury δ - im wyższa, tym potrzeba większych inwestycji (odtworzeniowych), co ogranicza fundusze na $\frac{c_t^*}{y_t}$.

Zgodnie z oczekiwaniemi, wyższy dług b i stopa procentowa r prowadziły przeważnie do zmniejszenia $\frac{c_t^*}{y_t}$. To samo dotyczyło stopy zapadalności dłużu χ , co stanowi odwrotną obserwację niż w poprzednim podrozdziale. Warto jednak zaznaczyć, że wpływ χ był zasadniczo słaby.

Tabela 19: Oszacowania standaryzowanych współczynników metamodeli opisujących optymalne wartości zmiennych decyzyjnych dla modelu czteroletniego z endogeniczną strukturą warunków ograniczających oraz losowymi α i β

	$\frac{c_1^*}{y_1}$	$\frac{c_2^*}{y_2}$	$\frac{c_3^*}{y_3}$	$\frac{c_4^*}{y_4}$	$\frac{i_1^*}{y_1}$	$\frac{i_2^*}{y_2}$	$\frac{i_3^*}{y_3}$	$\frac{i_4^*}{y_4}$
α	0,230	0,154	0,115	0,137	-0,648	-0,336	-0,165	-0,026
β	-0,036	-0,028	0,011	0,055	0,008	0,073	0,014	-0,047
γ	-0,008	0,000	0,010	0,001	0,108	0,081	0,044	0,020
δ	-0,005	-0,015	-0,017	-0,020	0,050	0,037	0,038	0,030
θ	-0,003	-0,007	-0,009	-0,007	-0,005	-0,010	0,004	-0,008
r	-0,005	-0,013	-0,014	-0,010	-0,094	-0,023	-0,005	-0,009
χ	-0,014	-0,006	-0,006	-0,001	-0,397	-0,104	-0,053	-0,036
b	-0,060	-0,014	-0,003	-0,027	-0,079	0,009	0,013	-0,007
c	-0,026	0,022	0,021	-0,009	-0,077	0,029	0,016	-0,002
k	0,032	0,017	0,012	0,023	-0,086	-0,031	-0,014	-0,011
v	0,003	0,006	0,006	0,000	-0,021	-0,035	-0,029	-0,009
R^2	0,873	0,713	0,508	0,540	0,605	0,540	0,222	0,067

Źródło: obliczenia własne

Czynnik dyskontowy β z kolei wpływa na $\frac{c_t^*}{y_t}$ ujemnie w dwóch pierwszych latach, następnie zależność ta staje się dodatnia. Jest to najbardziej wpływowy parametr, po parametrze preferencji α , w odniesieniu do wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$. Im większa wielkość β , tym decydenta cechuje większa dalekowzroczność. W pierwszym i drugim roku, dalekowzroczny decydent może wpływać na użyteczność z przyszłych lat jedynie za pomocą inwestycji i_1^* i i_2^* , a więc zwiększa je, co wypiera aktualne wydatki bieżące c_1^* i c_2^* . W ostatnim roku β nie różnicuje już stosunku do c_4^* i i_4^* , gdyż inwestycje i_4^* mogą wpływać na poziom infrastruktury k_5 , czyli tylko z jednego roku wchodzącego w zakres funkcji użyteczności. Pod tym względem inwestycje z 4 roku i_4^* przypominają wydatki bieżące c_t^* z każdego roku.

Oszacowanie stojące przy parametrze c także zmienia znak - z ujemnego na dodatni, a w czwartym roku wynosi prawie zero. Najpierw wyższe wydatki bieżące c poniesione w latach poprzedzających modelowaną kadencję zacieśniają przestrzeń fiskalną, czyli wymuszają oszczędności, które w późniejszych latach można wykorzystać na zwiększone wydatki bieżące $\frac{c_t^*}{y_t}$. Podobna obserwacja została zresztą poczyniona także w poprzednim podrozdziale.

W odniesieniu do dynamiki dochodów bieżących γ , wpływ tej zmiennej na $\frac{c_t^*}{y_t}$ okazał się być bardzo niewielki, co trochę osłabia obserwacje poczynione w poprzednim podrozdziale (acykliczność zamiast antycykliczności w odniesieniu do $\frac{c_t}{y_t}$)

Ponownie parametry dotyczące inwestycji unijnych: θ i v uzyskały oszacowania niewiele odbiegające od zera. Oszacowania parametrów w przypadku v były zawsze ujemne, co można解释ować efektem substytucji - większe wydatki na inwestycje unijne u_t^* są rekompensowane spadkiem kwot przeznaczanych na inwestycje zwykłe i_t^* .

Część obserwacji poczynionych w oparciu o oszacowania modeli opisujących inwestycje zwykłe $\frac{i_t^*}{y_t}$ pokrywa się z obserwacjami odnoszącymi się do modeli wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$. Parametr preferencji α wpływa ujemnie na wielkość zmiennych objaśnianych, gdyż bezpośrednio premiuje wydatki bieżące $\frac{c_t^*}{y_t}$, zwiększone kosztem inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$.

Wysokość stopy deprecjacji δ wywiera dodatni wpływ na poziom inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$, ponieważ szybsza deprecjacja wymaga zwiększeniowych nakładów inwestycyjnych na odtworzenie infrastruktury. Zgodnie z oczekiwaniemi, wystąpiło również ujemne oddziaływanie stopy procentowej r i stopy zapadalności dłużu χ na inwestycje $\frac{i_t^*}{y_t}$. Zwiększone wydatki związane z długiem powodują bo-

wiem zawężenie przestrzeni finansowej. Warto zauważyć, że χ jest drugim w kolejności najbardziej wpływowym parametrem w odniesieniu do inwestycji $\frac{i_t^*}{y_t}$.

Trzy parametry: k , b i c dotyczą wartości startowych modelu. W związku z tym ich wpływ na zmienne objaśniane maleje w czasie. Początkowy poziom infrastruktury k wpływa ujemnie na inwestycje $\frac{i_t^*}{y_t}$. Wartość zadłużenia b również wpływa na spadek inwestycji, ale już jedynie w pierwszym i czwartym roku. Wpływ wydatków bieżących w okresie przed modelowaną kadencją c kształtuje się podobnie jak b .

Zależności związane z dwoma parametrami: γ i β zasługują na szczególną uwagę. Po pierwsze, oszacowania przy dynamice dochodów bieżących γ okazały się dość wysokie (trzeci najbardziej wpływowy parametr w modelach opisujących inwestycje) i dodatnie. Oznacza to, że poziom inwestycji i_t^* powinien rosnąć szybciej niż dochody bieżące y_t , co potwierdza zaobserwowany już efekt zapobiegliwości. Z kolei β wpływa na dodatnio, z wyjątkiem ostatniego roku, na wysokość inwestycji, co zostało już objaśnione wcześniej w niniejszym podrozdziale na przykładzie dalekowzrocznego decydenta.

Poniżej zaprezentowano oszacowania z modeli opartych na tysiącu zestawów wylosowanych parametrów strukturalnych, przy założeniu, że $\alpha = 0,4$, a $\beta = 0,1$ (co, należy podkreślić, jest bardzo niską wartością w porównaniu do występujących zwykle w literaturze). Z jednej strony, określenie stałych wartości parametrów behawioralnych mogło przyczynić się do zawężenia analizy do bardziej realistycznych, wiarygodnych scenariuszy. Z drugiej strony, taka analiza mogła pominąć część istotnych przypadków. Liczby z tabeli 20 mogą zatem posłużyć do oceny wrażliwości wyników analizy na poczynione założenia odnośnie do α i β .

Tabela 20: Oszacowania standaryzowanych współczynników modeli opisujących optymalne wartości zmiennych decyzyjnych dla modelu czteroletniego z endogeniczną strukturą warunków ograniczających oraz ustalonimi $\alpha = 0,4$ i $\beta = 0,1$

	$\frac{c_1^*}{y_1}$	$\frac{c_2^*}{y_2}$	$\frac{c_3^*}{y_3}$	$\frac{c_4^*}{y_4}$	$\frac{i_1^*}{y_1}$	$\frac{i_2^*}{y_2}$	$\frac{i_3^*}{y_3}$	$\frac{i_4^*}{y_4}$
γ	-0,009	0,012	0,036	0,017	0,025	0,032	-0,017	-0,026
δ	-0,023	-0,013	-0,007	-0,023	0,011	0,039	0,012	0,010
θ	-0,007	-0,012	-0,010	-0,017	0,015	-0,004	-0,004	0,013
r	0,002	-0,008	-0,007	-0,011	-0,016	-0,020	-0,014	-0,014
χ	0,028	-0,010	-0,004	0,012	-0,009	-0,060	-0,035	-0,008
b	-0,064	-0,012	0,005	-0,022	-0,018	0,030	-0,010	-0,017
c	-0,031	0,029	0,033	-0,016	-0,012	0,023	0,007	-0,011
k	0,045	0,004	0,010	0,028	-0,005	-0,010	-0,009	-0,004
v	0,001	-0,011	-0,021	-0,008	-0,010	0,001	0,016	-0,004
R^2	0,731	0,178	0,188	0,161	0,019	0,136	0,037	0,022

Źródło: obliczenia własne

Z tabeli 20 wynika, iż zawężenie się do domyślnych wartości parametrów behawioralnych może skutkować innymi wnioskami formułowanymi w odniesieniu do parametrów strukturalnych. Warto zauważyć, że w dwóch ostatnich latach inwestycje i_t^* nie rosną szybciej niż dochody bieżące y_t . Można domniemywać, że bardzo niski poziom β spowodował, że szczególnie na koniec kadencji inwestycje i_t^* nie odgrywają istotnego znaczenia. Szybsza dynamika dochodów γ zwiększa zatem wydatki bieżące c_t^* . Osłabił także dodatni wpływ poziomu infrastruktury k na $\frac{c_t^*}{y_t}$. Ponownie niewielką rolę odgrywają parametry związane z finansowaniem inwestycji unijnych θ i v .

Siły wpływu poszczególnych parametrów w modelach pozbawionych α i β wśród regresorów charakteryzują się mniejszym zróżnicowaniem. W przypadku wydatków bieżących $\frac{c_t^*}{y_t}$ nieznacz-

nie największy wpływ wywierają wartości startowe: b , c i k . W odniesieniu zaś do inwestycji zwykłych $\frac{i_t^*}{y_t}$, zróżnicowanie jest nieco większe, ale niższe w porównaniu z modelem o zmiennych wartościach parametrów behawioralnych. Najbardziej wpływowe parametry to χ i γ .

Podsumowanie części II

W pracy postawiono hipotezę, że optymalna polityka finansowa gmin i miast powiatowych uwzględnia wiele czynników:

- (a) Dodatni wpływ na optymalny poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: wskaźnika wartości infrastruktury oraz limitu dofinansowania unijnego.
- (b) Ujemny wpływ na optymalny poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: czynnika dyskontowego, współczynnika deprecjacji infrastruktury, udziału dochodów własnych w inwestycjach unijnych, stopy procentowej, stopy zapadalności dłużu, wskaźnika zadłużenia oraz wskaźnika wydatków bieżących z lat poprzednich.
- (c) Dodatni wpływ na optymalny poziom zwykłych (tj. nie współfinansowanych ze środków UE) wydatków inwestycyjnych w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: czynnika dyskontowego, współczynnika deprecjacji infrastruktury oraz udziału dochodów własnych w inwestycjach unijnych.
- (d) Ujemny wpływ na optymalny poziom zwykłych wydatków inwestycyjnych w relacji do dochodów bieżących samorządów ma wzrost: stopy procentowej, stopy zapadalności dłużu, wskaźnika zadłużenia, wskaźnika wydatków bieżących z lat poprzednich, wskaźnika wartości infrastruktury oraz limitu dofinansowania unijnego.

Potwierdzono hipotezę (2a) w zakresie tego, że większa wartość infrastruktury powoduje zwiększenie wydatków bieżących (gdyż inwestycje stają się wówczas mniej potrzebne). Nie można było natomiast potwierdzić takiej hipotezy w odniesieniu do maksymalnego limitu środków unijnych.

Odnośnie do hipotezy (2b) pokazano, iż wzrost: stopy deprecjacji infrastruktury, zadłużenia w relacji do dochodów bieżących i, w mniejszym stopniu, udziału współfinansowania inwestycji unijnych wpływa negatywnie na poziom wydatków bieżących w relacji do dochodów bieżących. Oddziaływanie stopy procentowej zaś okazało się być, w zależności od modelu, ujemne lub neutralne. Zwiększenie czynnika dyskontowego wywiera różny efekt na wydatki bieżące w zależności od okresu. Na początku, im bardziej dalekowzroczny decydent, tym bardziej troszczy się o użyteczność z przyszłości, a może ją poprawić w bieżącym momencie tylko za pomocą inwestycji, które ograniczają przestrzeń na wydatki bieżące. W ostatnim roku modelowanego okresu, użyteczność z infrastruktury wliczana jest do użyteczności tylko raz, podobnie jak wydatki bieżące, dlatego inwestycje przestają być tak istotne.

Nie można uogólnić obserwacji na temat oddziaływania wzrostu stopy zapadalności dłużu, gdyż w zależności od przyjętych założeń i roku kadencji, wpływ tego parametru może być dodatni, ujemny lub zerowy. To samo dotyczy dynamiki dochodów bieżących (przy czym tutaj trudno było postawić hipotezę na temat wpływu tej zmiennej z uwagi na jednokrotnie oddziaływanie jej na licznik i mianownik zmiennej objaśnianej). Zasadniczo ten ostatni parametr nie ma silnego wpływu na optymalne wartości zmiennych decyzyjnych. Nieoczekiwany efekt zaobserwowano w odniesieniu do wskaźnika wydatków bieżących poniesionych w okresie poprzedzającym modelowany zakres czasowy kadencji. Wyższe przeszłe wydatki ograniczają przestrzeń na wydatki na początek badanego okresu, ale w kolejnym roku następuje efekt kompensacji, tj. uprzednie oszczędności umożliwiają większe wydatki w porównaniu ze scenariuszem bez oszczędności.

Stwierdzono także, że zgodnie z hipotezą (2c), dodatni wpływ na inwestycje zwykłe w relacji do dochodów bieżących ma wzrost stopy deprecjacji infrastruktury oraz czynnika dyskontowego (z wyjątkiem ostatniego roku). Wpływ parametru współfinansowania inwestycji unijnych jest zaś w przybliżeniu neutralny.

Potwierdzona została też hipoteza (2d) w zakresie ujemnego wpływu na inwestycje zwykłe w relacji do dochodów bieżących wzrostu: stopy procentowej, stopy zapadalności zadłużenia i wskaźnika infrastruktury. Pozytywnie zweryfikowano też hipotezę o ujemnym wpływie wzrostu limitu dochodów unijnych.

W przypadku wskaźnika zadłużenia można ponownie doszukać się efektu kompensacji. Ujemny wpływ występuje na początku okresu (w trzecim roku w modelu dwuletnim oraz w pierwszym roku w modelu czteroletnim), następnie wpływ staje się dodatni, a w przypadku modelu czteroletniego - na koniec okresu - ponownie ujemny, ale bliski neutralnemu. Efekt kompensacji, podobny jak opisany powyżej, dla wskaźnika wydatków bieżących z lat przeszłych jako zmiennej objaśniającej i optymalnych inwestycji zwykłych w roli zmiennej objaśnianej okazał się silniejszy niż w przypadku optymalnych wydatków bieżących w roli zmiennej objaśnianej. Po początkowym ujemnym oddziaływaniu na wielkość inwestycji zwykłych, następowało silne odbicie.

Wyższa dynamika dochodów bieżących wpływa generalnie na wzrost wskaźnika inwestycji, przy czym zależność ta jest silniejsza na początku okresu, co wynika z tzw. efektu zapobiegliwości. Optymalny poziom wydatków inwestycyjnych w relacji do dochodów bieżących w czasie co do zasady maleje, co jest konsekwencją przyjętej funkcji użyteczności, która premiuje inwestycje poczynione we wcześniejszym okresie, gdyż poprawiona w ten sposób infrastruktura jest uwzględniana wielokrotnie w użyteczności.

Uwagi końcowe i wnioski

Na zakończenie niniejszej rozprawy, w poniższych akapitach wskazano możliwe kierunki rozbudowy wykorzystywanych tu modeli polityki fiskalnej w Polsce oraz sformułowano refleksje na temat stosowania tychże modeli przez decydentów.

Model służący do oceny skutków funkcjonowania stabilizującej reguły wydatkowej w Polsce można rozbudować w pierwszej kolejności poprzez dezagregację wydatków na kategorie, nad którymi politycy sprawują bezpośrednią kontrolę (tzw. „elastyczne”) i na te, których poziom kształtuje się, przynajmniej w krótkim okresie, niezależnie od działań rządu (tzw. „sztywne”). Przykładowo, można by wyróżnić, analogicznie jak to uczyniono w modelu opisującym politykę samorządów, egzogeniczne wydatki na obsługę dłużu, a także wydatki na świadczenia socjalne, w tym emerytury, których obniżenie byłoby trudne do wykonania w praktyce. Z drugiej strony, można by wyróżnić kategorie elastyczne, takie jak inwestycje bądź wynagrodzenia w administracji publicznej. Ponadto, wydzielenie wydatków samorządowych, NFZ, BFG i innych jednostek niezależnych od rządu umożliwiłoby określenie limitu wydatkowego, czyli tej części kwoty stabilizującej reguły wydatkowej, która zgodnie z prawem nie może zostać przekroczona. Taka dekompozycja pozwoliłaby np. na wskazanie, że mimo ogólnego wzrostu kwoty SRW, część kategorii wydatków musiałaby zostać obniżona. Dodatkowo, dezagregacja ułatwiałaby modelowanie wpływu polityki fiskalnej na PKB. W szczególności, przy założeniu wyodrębnienia inwestycji publicznych, należałoby rozważyć endogenizację potencjalnego PKB.

W podobny sposób można by dokonać dalszej dezagregacji wydatków i dochodów w modelu opisującym politykę finansową samorządów. Warto tu zaznaczyć, że część zadań JST stanowią zadania zlecone - finansowane z dotacji i subwencji. W takim rozbudowanym modelu kwoty przeznaczone na owe zadania powinny być zatem kształtowane egzogenicznie. Model można by również rozszerzyć o równanie opisujące wpływ inwestycji na poziom infrastruktury. Uwzględniając to, że wielu spośród prezydentów i burmistrzów miast, a także wójtów gmin jest wybieranych na kolejne kadencje, należałoby również rozważyć wydłużenie horyzontu decyzyjnego do np. 8 lub 12 lat, a nawet – celem uzyskania interesującego punktu odniesienia – do nieskończoności.

Wyniki symulacji wykonywanych w oparciu o oba modele polityki fiskalnej - prowadzonej na szczeblu centralnym i lokalnym - warto byłoby także zweryfikować empirycznie. Przykładowo, jako że symulacje rządowej polityki fiskalnej zakładają ustalone wielkości zmiennych do 2015 r., potencjalnie użyteczne wydawałoby się porównanie symulowanych od 2016 r. ścieżek zmiennych makroekonomicznych i fiskalnych z wielkościami zaobserwowanymi w rzeczywistości. Oczywiście, porównanie takie będzie bardziej miarodajne za kilka lat, kiedy będziemy dysponować dłuższymi szeregami czasowymi – przy założeniu, że SRW nie zostanie zlikwidowana ani zmodyfikowana. W przypadku modelu samorządowej polityki fiskalnej, należałoby dokonać oceny, jak często implikowana przez ten model optymalna polityka jest faktycznie prowadzona, oraz czy rzeczywiście sprzyja ona reelekcji władz.

Myśląc o możliwości wykorzystania wniosków ze sformułowanych w niniejszej rozprawie modeli w praktyce, należy mieć na uwadze, iż niektóre założenia modelowe mogą w mniejszym lub większym stopniu odbiegać od rzeczywistości. Decydenci nie powinni więc korzystać z tych modeli lub posiłkować się implikacjami z nich wypływającymi bezkrytycznie. Jednak już samo sformułowanie problemu decyzyjnego z uwzględnieniem zmiennych decyzyjnych, warunków ograniczających i funkcji celu – tak, jak to uczyniono w niniejszej pracy – mogłoby wnieść wartość dodaną do procesu formułowania polityk publicznych. Zachęcałoby bowiem do określenia prognozowanych na kilka lat wprzód limitów wydatkowych zarówno na szczeblu rządowym jak i samorządowym, wynikających z reguł fiskalnych - odpowiednio SRW i IWZ. To, w połączeniu z planowanymi wydatkami „sztywnymi”, wyznaczyłoby przestrzeń na ewentualne nowe wydatki publiczne. Każda propozycja zmian generujących nowe wydatki, czy to w budżecie

centralnym czy samorządowym, musiałaby wtedy zostać zestawiona z ową przestrzenią finansową, co pozwoliłoby na korzystną zmianę w debacie publicznej. Wyborcy i decydenci nabraliby większej świadomości ograniczeń finansowych, przez co ich wybór stałby się bardziej racjonalny.

Literatura

- Akitoby, B., N. Arnold, M. D. Broeck, G. Palomba, J. Woo, L. Eyraud, A. Schaechter, A. Weber, J. Harris, R. Hughes, J. Seiwald, S. Ylaoutinen, A. Zaman, D. Leigh, S. Basu, M. Fouad, S. A. Abbas i E. Hanedar (2013): "Reassessing the Role and Modalities of Fiscal Policy in Advanced Economies," Policy Paper, International Monetary Fund, Washington, DC.
- Arellano, M. (1987): "Computing Robust Standard Errors for Within-Groups Estimators," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 49, 431–434.
- Arellano, M. i S. Bond (1991): "Some Tests of Specification for Panel data: Monte Carlo Evidence and an Application to Employment Equations," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 58(2), 277–297.
- Ayuso-i-Casals, J. (2012): "National Expenditure Rules—Why, How and When," Tech. Rep., Directorate General Economic and Financial Affairs (DG ECFIN), European Commission.
- Bernoulli, D. (1954): "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 22(1), 23–36.
- Besley, T. i S. Coate (2003): "Centralized Versus Decentralized Provision of Local Public Goods: A Political Economy Approach," *Journal of Public Economics*, 87, 2611–2637.
- Bewley, T. F. (1981): "A Critique of Tiebout's Theory of Local Public Expenditures," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 49(3), 713–740.
- Birgin, E. G., J. M. Martínez i M. Raydan (2001): "Algorithm 813: SPG—Software for Convex-Constrained Optimization," *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 27, 340–349.
- (2014): "Spectral Projected Gradient Methods: Review and Perspectives," *J. Stat. Softw.*, 60, 539–559.
- Bitner, M. (2014): "Granice długu JST," Fragment wykładu dr. Michała Bitnera w ramach Samorządowej Akademii Finansów.
- Bohn, H. (1998): "The Behavior of US Public Debt and Deficits," *the Quarterly Journal of Economics*, 113, 949–963.
- (2005): "The Sustainability of Fiscal Policy in the United States," *CESifo Working Papers*, 1446.
- Brennan, G. i J. M. Buchanan (1980): *The Power to Tax: Analytic Foundations of a Fiscal Constitution*, Cambridge University Press.
- Burnside, C. (2005): *Fiscal Sustainability in Theory and Practice: a Handbook*, vol. 396, World Bank Publications.
- Byrd, R. H., P. Lu, J. Nocedal i C. Zhu (1995): "A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization," *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16, 1190–1208.
- Carnot, N. (2014): "Evaluating Fiscal Policy: A Rule of Thumb," *Economic Papers*, 526, 1–48.
- Celasun, O., X. Debrun i J. D. Ostry (2007): "Primary Surplus Behavior and Risks to Fiscal Sustainability in Emerging Market Countries: A 'Fan-Chart' Approach," *IMF Staff Papers*, 53(3), 401–425.

- Chiang, A. (1994): "Podstawy Ekonomii Matematycznej", Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
- Choi, I. (2001): "Unit Root Tests for Panel Data," *Journal of International Money and Finance*, 20, 249–272.
- Chong, E. K. i S. H. Żak (2001): "An Introduction to Optimization", John Wiley and Sons.
- Clarke, E. (1971): "Multipart Pricing of Public Goods," *Public Choice*, 11, 17–33.
- CRAN - pakiet dfoptim: <https://CRAN.R-project.org/package=dfoptim>, dostęp: 3.03.2017.
- Davidon, W. (1959): "AEC Research and Development Report," *ANL-5990*.
- Debrun, X., N. P. Epstein i S. A. Symansky (2008): "A New Fiscal Rule: Should Israel Go Swiss?" *IMF Working Papers*.
- Dennis, J. E. i R. B. Schnabel (1989): "Chapter IA View of Unconstrained optimization," *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 1, 1–72.
- Dennis Jr, J. i H. Mei (1979): "Two New Unconstrained Optimization Algorithms which Use Function and Gradient Values," *Journal of Optimization Theory and Applications*, 28, 453–482.
- Eyraud, L. i T. Wu (2015): "Playing by the Rules: Reforming Fiscal Governance in Europe," *IMF Working Papers*.
- Fałkowski, J. i G. Bukowska (2016): "Monopolizacja władzy a wyniki gospodarcze na poziomie Polski lokalnej," *Gospodarka Narodowa*, 2, 91–120.
- Fletcher, R. (1970): "A New Approach to Variable Metric Algorithms," *The Computer Journal*, 13, 317–322.
- Fletcher, R. i M. J. Powell (1963): "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization," *The Computer Journal*, 6, 163–168.
- Fletcher, R. i C. M. Reeves (1964): "Function Minimization by Conjugate Gradients," *The Computer Journal*, 7, 149–154.
- Frayne, C. i S. Riso (2013): "Vade mecum on the Stability and Growth Pact," *European Economy Occasional Paper*.
- Galí, J. i R. Perotti (2003): "Fiscal Policy and Monetary Integration in Europe," *Economic Policy*, 18, 533–572.
- Gay, D. M. (1990): "Usage Summary for Selected Optimization Routines," *Computing Science Technical Report*, 153, 1–21.
- Geier, A. i in. (2012): "Application of the Swiss Fiscal Rule to Artificial Data: A Monte Carlo Simulation," *Swiss Journal of Economics and Statistics (SJES)*, 148, 37–55.
- Ghosh, A. R., J. I. Kim, E. G. Mendoza, J. D. Ostry i M. S. Qureshi (2013): "Fiscal Fatigue, Fiscal Space and Debt Sustainability in Advanced Economies," *Economic Journal*, 123(566), F4–F30.
- Gonet, W. (2004): "Ocena zdolności kredytowej samorządów," *Bank i Kredyt*, 7, 76–87.
- Goodspeed, T. J. (2002): "Bailouts in a Federation," *International Tax and Public Finance*, 9, 409–421.

- Gordon, D. B. i E. M. Leeper (2005): "Are Countercyclical Fiscal Policies Counterproductive?" Tech. rep., National Bureau of Economic Research.
- Gradzewicz, M., J. Growiec, J. Hagemejer i P. Popowski (2010): "Cykl koniunkturalny w Polsce – wnioski z analizy spektralnej," *Bank i Kredyt*, 41, 41–76.
- Groves, T. (1973): "Incentives in Teams," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 41(4), 617–31.
- Guziejewska, B. (2007): "Subwencje i dotacje dla samorządu terytorialnego w polityce finansowej państwa," *Gospodarka Narodowa*, 4, 71–89.
- (2008): "Efektywność finansów samorządu terytorialnego," *Gospodarka Narodowa*, 5-6, 71–89.
- Hadri, K. (2000): "Testing for Stationarity in Heterogeneous Panel Data," *Econometric Journal*, 3, 148–161.
- Hamilton, J. D. i M. Flavin (1985): "On the Limitations of Government Borrowing: A Framework for Empirical Testing," National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA.
- Hamilton, J. D. i C. H. Whiteman (1985): "The Observable Implications of Self-fulfilling Expectations," *Journal of Monetary Economics*, 16, 353–373.
- Head, J. D. i M. C. Zerner (1985): "A Broyden—Fletcher—Goldfarb—Shanno Optimization Procedure for Molecular Geometries," *Chemical Physics Letters*, 122, 264–270.
- Holm-Hadulla, F., S. Hauptmeier i P. Rother (2012): "The Impact of Expenditure Rules on Budgetary Discipline over the Cycle," *Applied Economics*, 44, 3287–3296.
- Hooke, R. i T. A. Jeeves (1961): "»Direct Search« Solution of Numerical and Statistical Problems," *Journal of the ACM (JACM)*, 8, 212–229.
- Im, K. S., M. H. Pesaran i Y. Shin (2003): "Testing for Unit Roots in Heterogeneous Panels," *Journal of Econometrics*, 115, 53–74.
- Inman, R. P. (2003): "Transfers and Bailouts: Enforcing Local Fiscal Discipline with Lessons from US Federalism," *Fiscal Decentralization and the Challenge of Hard Budget Constraints*, 35, 45–47.
- Jajko, B. (2008): *Dług publiczny a równowaga fiskalna: Czy i kiedy rząd powinien emitować dług publiczny?*, CeDeWu.
- Jastrzębska, M. (2002): "Polityka dłużu jednostki samorządu terytorialnego," *Bank i Kredyt*, 9, 24–35.
- Jędrzejowicz, T., M. Kitala i A. Wronka (2008): "Polityka fiskalna w kraju należącym do strefy euro. Wnioski dla Polski," *Projekty badawcze część III, Raport NBP na temat pełnego uczestnictwa Rzeczypospolitej Polskiej w trzecim etapie Unii Gospodarczej i Walutowej*.
- Kamiński, A. (2012): *Finansowanie dłużne w jednostkach samorządu terytorialnego*, Wolters Kluwer.
- Kancelaria Prezesa Rady Ministrów (2010): "Plan Rozwoju i Konsolidacji Finansów 2010-2011 (Propozycje)".
- Karpiński, P. (2001): "Gminy na rynku usług bankowych-tendencje i oczekiwania," *Bank i Kredyt*, 1–2, 69–77.

- Kawakami, K. i R. Romeu (2011): "Identifying Fiscal Policy Transmission in Stochastic Debt Forecasts," *IMF Working Papers*, 1–35.
- Kelley, C. T. (1999): *Iterative Methods for Optimization*, SIAM.
- Komisja Europejska (2012): "Wspólne zasady dotyczące krajowych mechanizmów korekty fiskalnej".
- Kornai, J. (1979): "Resource-Constrained versus Demand-Constrained Systems," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 47(4), 801–819.
- (1980): *Economics of Shortage*, vol. 2, North Holland.
- Korniluk, D. (2016): "The Stabilizing Expenditure Rule in Poland—Simulations for 2014-2040," *Eastern European Economics*, 54(4), 351–375.
- Krzyżanowski, P. i L. Plaskota (2014): "Matematyka Obliczeniowa II," <http://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/mo2/wyklad.pdf>, dostęp: 2017-10-01.
- Levaggi, R. (2002): "Decentralized Budgeting Procedures for Public Expenditure," *Public Finance Review*, 30, 273–295.
- Lockwood, B. (2002): "Distributive Politics and the Costs of Centralization," *The Review of Economic Studies*, 69, 313–337.
- Lu, B. Y., F. Vazquez i G. Ho (2013): "An Assessment of Public Expenditure Rules for Poland." In Republic of Poland: Selected Issues," IMF Country Report 220(13), International Monetary Fund, Washington, DC.
- Lucas, R. (1976): "Econometric Policy Evaluation: A Critique," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1, 19–46.
- Mackiewicz, M. (2010): *Stabilizacyjna polityka fiskalna w krajach OECD*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
- Maddala, G. S. i S. Wu (1999): "A Comparative Study of Unit Root Tests with Panel Data and a New Simple Test," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 61, 631–652.
- Ministerstwo Finansów (2012): "Aktualizacja Programu Konwergencji," <http://www.mf.gov.pl/documents/764034/1002171/Program+Konwergencji+-+Aktualizacja+2012>.
- Ministerstwo Finansów (2015): "Wytyczne dotyczące założeń makroekonomicznych na potrzeby wieloletnich prognoz finansowych jednostek samorządu terytorialnego. Aktualizacja - październik 2014."
- Ministerstwo Finansów (2015): "Wieloletni Plan Finansowy Państwa na lata 2015-2018 zawierający Program konwergencji. Aktualizacja 2015," <http://www.mf.gov.pl/documents/764034/1002171/Wieloletni+Plan+Finansowy+Państwa+na+lata+2015-2018>.
- Moré, J. J. (1978): "The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory," w: *Numerical Analysis*, Springer, 105–116.
- Nash, J. C. (1979): "Compact Numerical Methods for Computers: Linear Algebra and Function Minimisation," Bristol: Adam Hilger.
- (2014): "On Best Practice Optimization Methods in R," *Journal of Statistical Software*, 60, 1–14.

- Nash, J. C., R. Varadhan i in. (2011): "Unifying Optimization Algorithms to Aid Software System Users: optimx for R," *Journal of Statistical Software*, 43, 1–14.
- Nelder, J. A. i R. Mead (1965): "A Simplex Method for Function Minimization," *The Computer Journal*, 7, 308–313.
- Nielsen, H. B. (2000): "Ucminf - an Algorithm for Unconstrained, Nonlinear Optimization," Tech. rep., Informatics and Mathematical Modelling (IMM), Technical University of Denmark.
- Oates, W. E. (2005): "Toward a Second-Generation Theory of Fiscal Federalism," *International Tax and Public Finance*, 12, 349–373.
- Olson, M. (1969): "The Principle of 'Fiscal Equivalence': the Division of Responsibilities among Different Levels of Government," *American Economic Review*, 59, 479–487.
- Palczewski, J. (2014): "Matematyka Stosowana. Optymalizacja II," <http://mst.mimuw.edu.pl/wykłady/op2/wykład.pdf>, dostęp: 2017-10-01.
- Petrova, I. (2012): "Iceland's Policy Objectives Under a New Fiscal Rule," *Selected Issues Paper, IMF Country Report*, 12.
- Pigoń, A. i M. Ramsza (2014): "Ocena polskiej reguły fiskalnej. Analiza symulacyjna," *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania* 35 T. 2 *Problemy współczesnej ekonomii*, 491–502.
- Pigou, A. C. (1932): "The Economics of Welfare, 1920," *McMillan&Co., London*.
- Polska Agencja Prasowa i Narodowy Bank Polski (2015): "Samorządowa Akademia Finansów III edycja. Program Edukacji Ekonomicznej," http://samorzad.pap.pl/depesze/Kategorieredakcyjne_BibliotekaSAF/153012/Tepe-narzedzie--Debata-o-przyszlosci-indywidualnego-wskaznika-zadluzenia-, dostęp: 2017-10-01.
- Portal Samorządowy (2016): "Indywidualny wskaźnik zadłużenia - JST liczą, że Ministerstwo Rozwoju zgodzi się na zmianę," <http://www.portalsamorzadowy.pl/prawo-i-finanse/indywidualny-wskaznika-zadluzenia-jst-licza-ze-ministerstwo-rozwoju-zgodzi-\sie-na-zmiane,87369.html>, dostęp: 2017-10-01.
- Powell, M. J. (2007): "Developments of NEWUOA for Unconstrained Minimization Without Derivatives," *Dept. Appl. Math. Theoretical Phys., Univ. Cambridge, Cambridge, UK, Tech. Rep. DAMTP*.
- Prud'Homme, R. (1995): "The Dangers of Decentralization," *The World Bank Research Observer*, 10, 201–220.
- Rada Unii Europejskiej (2011): "Rozporządzenie Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) nr 1173/2011 z dnia 16 listopada 2011 r. w sprawie skutecznego egzekwowania nadzoru budżetowego w strefie euro".
- Regionalna Izba Obrachunkowa (2015): "Sprawozdanie z działalności regionalnych izb obrachunkowych i wykonania budżetu przez jednostki samorządu terytorialnego w 2015 roku".
- Rodden, J. (2003): "Reviving Leviathan: Fiscal Federalism and the Growth of Government," *International Organization*, 57, 695–729.
- Samuelson, P. A. (1955): "The Pure Theory of Public Expenditures," *Review of Economics and Statistics*, XXXVI, 387–89.

- Schnabel, R. B., J. E. Koontz i B. E. Weiss (1985): “A Modular System of Algorithms for Unconstrained Minimization,” *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 11, 419–440.
- Seabright, P. (1996): “Accountability and Decentralisation in Government: An Incomplete Contracts Model,” *European Economic Review*, 40, 61–89.
- Sierak, J. (2015): “Finansowanie inwestycji komunalnych w nowej perspektywie funduszy UE 2014-2020,” Fragment wykładu dr. Jacka Sieraka Finansowanie inwestycji komunalnych w nowej perspektywie funduszy UE 2014-2020 przygotowanego w ramach Samorządowej Akademii Finansów III edycja.
- Sierak, J., M. Bitner, A. Gałazka i R. Górnjak (2013): “Oszacowanie środków niezbędnych do zapewnienia krajowego wkładu publicznego do projektów realizowanych w ramach średniookresowych ram finansowych,” Raport z przeprowadzonych badań, Projekt zrealizowany na zlecenie Ministerstwa Rozwoju Regionalnego, Warszawa.
- Skrzypczyński, P. (2010): *Metody spektralne w analizie cyklu koniunkturalnego gospodarki polskiej*, Narodowy Bank Polski. Departament Edukacji i Wydawnictw.
- Skuza, S. (2003a): “Bariery w zaciąganiu kredytów i pożyczek przez jednostki samorządu terytorialnego. Część I,” *Bank i Kredyt*, 2, 35–47.
- (2003b): “Bariery w zaciąganiu kredytów i pożyczek przez jednostki samorządu terytorialnego. Część II,” *Bank i Kredyt*, 3, 55–69.
- Stewart III, G. (1967): “A Modification of Davidon’s Minimization Method to Accept Difference Approximations of Derivatives,” *Journal of the ACM (JACM)*, 14, 72–83.
- Tiebout, C. M. (1956): “A Pure Theory of Local Expenditures,” *Journal of Political Economy*, 64, 416–424.
- Tommasi, M. i F. Weinschelbaum (2007): “Centralization vs. Decentralization: A Principal-Agent Analysis,” *Journal of Public Economic Theory*, 9, 369–389.
- Ustawa z dnia 8 listopada 2013 r. o zmianie ustawy o finansach publicznych oraz niektórych innych ustaw (Dz. U. z 2013 r., poz. 1646.)
- Ustawa z dnia 9 maja 2014 r. o zmianie ustawy o finansach publicznych oraz ustawy o zmianie ustawy o finansach publicznych oraz niektórych innych ustaw (Dz. U. z 2014 r., poz. 911.)
- Ustawa z dnia 22 lipca 2015 r. o zmianie ustawy o finansach publicznych (Dz. U. z 2015 r., poz. 1190.)
- Ustawa z dnia 10 grudnia 2015 r. o zmianie ustawy o finansach publicznych (Dz. U. z 2015 r., poz. 2150.)
- Weingast, B. R. (2009): “Second Generation Fiscal Federalism: The Implications of Fiscal Incentives,” *Journal of Urban Economics*, 65, 279–293.
- Wiewióra, M. (2007): “Prawne ograniczenia w zaciąganiu kredytów i pożyczek przez jednostki samorządu terytorialnego: stan obecny a perspektywy,” *Bank i Kredyt*, 8–9, 106–115.
- Woolridge, J. M. (2003): “Introductory Econometrics: A Modern Approach,” *Thomson, Mason*.
- Varian, H. R. (2002): *Mikroekonomia. Kurs średni - ujęcie nowoczesne*, 17, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Wierts, P. (2008): “Fiscal Rules and Fiscal Outcomes in EMU: Theory and evidence,” rozprawa doktorska, University of Reading.

Aneks

A Rozwiążanie dla czwartego roku

W niniejszym aneksie zaprezentowano alternatywną, numeryczną metodę rozwiązywania problemu opisanego w podrozdziale 6.2, w wariantach pierwszym, drugim i czwartym. Jest to problem polegający na maksymalizacji użyteczności samorządu w czwartym roku, przy założeniu napiętej reguły IWZ. Wyniki metody numerycznej, zaimplementowanej w języku R, porównano z rozwiązaniem analitycznym, otrzymanym dzięki zastosowaniu metody Karusha-Kuhna-Tuckera.

Kod rozpoczyna się od wyczyszczenia pamięci podręcznej i załadowania biblioteki `optimx`, która zawiera algorytmy czternastu metod numerycznych służących optymalizacji nieliniowych funkcji wielu zmiennych, z czego poniżej wykorzystanych będzie dwanaście. Ładowana jest także biblioteka `nleqslv` służąca do rozwiązywania układu równań nieliniowych. Później określany jest zbiór dwunastu numerycznych metod optymalizacyjnych. Potem następują deklaracje parametrów i zmiennych o z góry ustalonych wartościach. Wszystkie zmienne, co do zasad, mają wartości wynikające z analizy przeprowadzonej w rozdziale 7. Dochód y_1 wynosi 1 jednostkę, pełni zatem funkcję tzw. „numéraire”.

```
rm(list=ls())
library(optimx)
library(nleqslv)

metody<-c("BFGS", "CG", "Nelder-Mead", "L-BFGS-B", "nlm", "nlminb",
"spg", "ucminf", "newuoa", "bobyqa", "nmkb", "hjkb")

alpha<-0.4
beta<-0.1
upsilon<-0.25
theta<-0.62
r<-0.039
chi<-0.2
gamma<-0.044
delta<-0.059
y1<-1
y2<-y1*(1+gamma)
y3<-y2*(1+gamma)
y4<-y3*(1+gamma)
y5<-y4*(1+gamma)
b1<-0.32*y1
b2<-0.32*y2
b3<-0.32*y3
b4<-0.32*y4
c1<-0.9*y1
c2<-0.9*y2
c3<-0.9*y3
k3<-2.06*y3
k4<-2.06*y4

u1<-upsilon*y1
```

```

U1<-upsilon*y1
u2<-upsilon*y2
U2<-upsilon*y2
u3<-upsilon*y3
U3<-upsilon*y3
# celowy brak u4
U4<-upsilon*y4
u5<-upsilon*y5
U5<-upsilon*y5

```

Poniżej zapisano wzór na funkcję użyteczności. Należy zauważać, że nadwyżka budżetowa (z_4) w roku czwartym jest równa dokładnie tyle, aby napięty był warunek ograniczający wynikający z reguły IWZ. Warto także zwrócić uwagę na sposób zapisania warunków ograniczających dotyczących: ograniczenia budżetowego (1), nieprzekraczania progu przez inwestycje unijne (2), nieujemności zmiennych (3, 4, 5) oraz reguły zrównoważonego wyniku bieżącego (6). Zostały one zapisane w postaci „kar”, co oznacza, że jeżeli dany warunek nie zostałby spełniony, to funkcja użyteczności zostałaby powiększona o tak dużą liczbę (tutaj 999), że nie mogłaby zostać wybrana jako optymalna albo rozwiązań przyjętoły na tyle duże wartości, że niespełnienie warunków byłoby ewidentne. Metody z biblioteki optimx mają na celu minimalizację funkcji, więc wartość użyteczności pomnożono przez -1, a kary mogą przyjmować tylko wartości nieujemne.

```

uzyt<-function(p){
  c4<-p[1]
  u4<-p[2]
  i4<-p[3]
  z4<-(y5+u5)/(chi+r)*(1/3*((y4-c4-r*b4)/(y4+u4))+((y3-c3-r*b3)/(y3+u3))+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2)))-b4
  b5<-b4+z4
  k5<-((1-delta)*k4+(1+theta)*u4+i4)

  kara<-0*c(1:6)
  kara[1]<-((1+theta)*u4 + i4 + c4 + r*b4) > (u4 + y4 + z4))*999
  kara[2]<-(u4>U4)*999
  kara[3]<-(c4<0)*999
  kara[4]<-(u4<0)*999
  kara[5]<-(i4<0)*999
  kara[6]<-(c4+r*b4>y4)*999
  return(-(abs(sum(kara))*which.max(abs(c(c4,u4,i4))))+
         + alpha*log(c4) + (1-alpha)*log(k5)))
}

```

Celem pomocniczej funkcji `roz` jest zastosowanie dwunastu metod dla zadanego startowego wektora parametrów (c_4, u_4, i_4), a następnie wybór parametrów, dla którego funkcja celu była minimalna (co odpowiada maksymalizacji użyteczności i spełnieniu warunków ograniczających). Ów nowy najlepszy wektor parametrów jest następnie wykorzystywany jako startowy w kolejnej iteracji - do momentu, aż wszystkie metody zbiegną do bardzo zbliżonego rozwiązania.

```

uz<-0*c(1:12)

roz<-function(rozw){
  wsp<-as.matrix(coef(optimx(rozw, uz, method=metody)))

```

```

uz<-apply(wsp, 1, uzyt)
rozw2<-wsp[which.min(uz),]
print(summary(optimx(rozw, uzyt, method=metody)))
return(as.vector(rozw2))
}

```

A.1 Przykładowe rozwiązanie wariantu I

W wariantie pierwszym z podrozdziału 6.2, optymalnie jest przeznaczyć całość budżetu na c_4 . Do takiego rozwiązania można doprowadzić, ustalając dużą wartość infrastruktury, np. $k_4 = 5y_4$. W celu uniknięcia ograniczenia regułą nadwyżki operacyjnej, należy też zmniejszyć przestrzeń na nowe wydatki, np. określając wysoki poziom długu oraz jego zapadalności, co implikuje wysokie koszty obsługi długu, np. $b_4 = y_4$ oraz $\chi = 0,3$. Zgodnie z równaniem (13) opisującym optymalną wartość wydatków bieżących, przy założeniu ww. wartości parametrów, c_4^* powinna równać się 0,6847, co daje użyteczność 0,85517.

```

b4<-y4
chi<-0.3
k4<-5*y4

phi<-((y5+u5)/(chi+r))*1/3*((y3-c3-r*b3)/(y3+u3))+
      ((y2-c2-r*b2)/(y2+u2)) - ((1+r)*b4)+y4
c4<-(phi + 1/3*(y5+u5)/(chi+r)*(y4-r*b4)/y4)/(1+((y5+u5)/(3*(chi+r)*y4)))
c4
[1] 0.6846881
uzyt(c(c4,0,0))
[1] -0.8551658

```

Niżej stosowane metody optymalizacji wymagały podania wektora startowego rozwiązań dopuszczalnych. Celowo podawane były rozwiązania odległe od optymalnych, aby ograniczyć ryzyko wpływu wektora startowego na ewentualne utknięcie w ekstremum lokalnym.

Spośród wybranych metod numerycznych, za pierwszym razem najlepszy wynik przyniosła metoda `nmkb`. W drugim kroku, najskuteczniejszy okazał się algorytm Neldera-Meeda, a osiągnięty na tym etapie wynik nie został już poprawiony w kroku trzecim. Rekomendowane c_4 w nieznacznym stopniu odbiegało od c_4^* .

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	4.342974e-01	2.837601e-01	2.094110e-01	-0.7437300	94
CG	3.267592e+09	9.041155e+08	5.580960e+08	2975.3804341	29
Nelder–Mead	5.433095e-02	1.507600e-10	1.404295e-10	0.1583819	244
L-BFGS-B	5.615198e-01	1.491199e-01	9.587649e-02	-0.8125134	62
nlm	6.507736e-01	4.283142e-02	3.026631e-02	-0.8459106	NA
nlminb	5.465958e-01	1.758196e-01	1.123577e-01	-0.8080031	86
spg	6.478063e-01	4.673108e-02	3.267351e-02	-0.8450417	225
ucminf	1.250257e-01	2.844731e-01	1.794278e-01	-0.2427673	55
newuoaa	5.283620e-01	1.319694e-01	1.997353e-01	-0.7961343	159
bobyqa	5.075304e-01	1.886673e-01	1.805691e-01	-0.7875587	202

nmkb	6.822232e-01	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	227
hjkb	1.000000e-02	1.000000e-02	1.000000e-02	0.8324565	1

`rozw<-roz(rozw)`

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.6822232	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	33
CG	0.6822232	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	33
Nelder-Mead	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-0.8551641	232
L-BFGS-B	0.6822232	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	21
nlm	0.6838727	1.102048e-03	6.699616e-04	-0.8549642	NA
nlminb	0.6842194	6.361163e-04	3.823492e-04	-0.8550502	63
spg	0.6842196	6.357486e-04	3.821222e-04	-0.8550502	133
ucminf	0.6841698	7.027289e-04	4.233601e-04	-0.8550379	31
newuoaa	0.6840563	9.740146e-04	3.888976e-04	-0.8550169	98
bobyqa	0.6839232	1.176246e-03	4.641879e-04	-0.8549842	50
nmkb	0.6845984	2.516880e-06	2.022294e-04	-0.8551365	184
hjkb	0.6822232	1.751770e-05	4.982474e-07	-0.8537264	1

`rozw<-roz(rozw)`

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	31
CG	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	31
Nelder-Mead	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	228
L-BFGS-B	NA	NA	NA	8.988466e+307	NA
nlm	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	NA
nlminb	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	47
spg	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	1
ucminf	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	1
newuoaa	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	44
bobyqa	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	32
nmkb	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	202
hjkb	0.6846797	1.746831e-05	4.672007e-07	-8.551641e-01	1

A.2 Przykładowe rozwiązanie wariantu II

W drugim wariantie z podrozdziału 6.2, część budżetu przeznacza się na c_4 , a resztę - na $u_4 < U_4$. Aby uzyskać takie rozwiązanie optymalne, można wybrać np. następujące parametry: $\theta = 0,4; b_4 = y_4; \chi = 0,3$ oraz $k_4 = 3,2y_4$. Obniżenie θ z 0,62 powoduje, że inwestycje unijne stają się jeszcze tańsze w porównaniu do inwestycji finansowanych ze środków własnych.

Funkcja `spr` wskazuje, w jakim stopniu c_4 i u_4 są odległe od wypełniania warunków I rzędu. Jeżeli wektor wartości funkcji `spr` jest bliski wektorowi zerowemu, oznacza to, że proponowane rozwiązania są optymalne.

```
spr<-function(arg){
  c4<-arg[1]
  u4<-arg[2]
  wyn1<-phi-(theta*u4)-(c4*(1+((y5+U5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))))+  

    (((y5+U5)/(chi+r))*1/3*((y4-r*b4)/(y4+u4)))
  wyn2<-(-alpha/c4)/(1+ (y5+u5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))-
```

```

    (((1-alpha)*(1+theta))/(((1-delta)*k4)+(1+theta)*u4))/
    (theta+(y4-r*b4-c4)*(1/3)*(y5+U5)/(chi+r)/((y4+u4)^2))
  return(c(wyn1, wyn2))
}

```

W pierwszym kroku, najwyższą użyteczność uzyskano za pomocą metody Neldera-Meada, w drugim - najskuteczniejsza okazała się metoda **nmkb**. W trzecim kroku nie udało się istotnie poprawić rozwiązań.

theta<-0.4

b4<-y4

chi<-0.3

k4<-3.2*y4

rozw<-c(0.01, 0.01, 0.01)

rozw<-roz(rozw)

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	4.445973e-01	2.835915e-01	2.452655e-01	-0.5177622	106
CG	8.824725e+08	3.211441e+08	2.293887e+08	2976.5590342	27
Nelder-Mead	6.309422e-01	1.105637e-01	2.592008e-02	-0.5855316	476
L-BFGS-B	5.480271e-01	1.808719e-01	1.320513e-01	-0.5622723	65
nlm	6.458900e-01	5.369438e-02	4.121027e-02	-0.5841010	NA
nlminb	3.868893e-01	2.844733e-01	2.060523e-01	-0.4565231	105
spg	6.432706e-01	5.740136e-02	4.385811e-02	-0.5838015	171
ucminf	1.551657e-01	2.844731e-01	8.543928e-01	-0.1805561	97
newuoa	5.087967e-01	1.370882e-01	2.660835e-01	-0.5439032	305
bobyqa	5.321465e-01	7.720664e-02	2.716282e-01	-0.5496350	153
nmkb	6.049490e-01	1.428279e-06	1.820574e-01	-0.5689281	169
hjkb	1.000000e-02	1.000000e-02	1.000000e-02	1.0989698	
1					

rozw<-roz(rozw)

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	31
CG	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	31
Nelder-Mead	0.6309422	0.1105636	2.592008e-02	-0.5855316	134
L-BFGS-B	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	21
nlm	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	NA
nlminb	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	47
spg	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	1
ucminf	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	1
newuoa	0.6321337	0.1188981	1.642245e-02	-0.5866472	78
bobyqa	0.6311731	0.1127103	2.362842e-02	-0.5857966	40
nmkb	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-0.5886383	248
hjkb	0.6309422	0.1105637	2.592008e-02	-0.5855316	1

rozw<-roz(rozw)

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	32
CG	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	32
Nelder-Mead	0.6355420	0.1299400	4.126409e-06	-5.886385e-01	133
L-BFGS-B	NA	NA	NA	8.988466e+307	NA

nlm	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	NA
nlminb	0.6355418	0.1299404	4.128838e-06	-5.886385e-01	55
spg	0.6355418	0.1299404	4.128423e-06	-5.886385e-01	47
ucminf	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	1
newuoa	0.6355422	0.1299408	2.947567e-06	-5.886386e-01	49
bobyqa	0.6355411	0.1299410	5.144485e-06	-5.886384e-01	33
nmkb	0.6355442	0.1299352	2.202026e-06	-5.886385e-01	172
hjk	0.6355416	0.1299403	4.065434e-06	-5.886383e-01	1

Skoro wszystkie metody zbiegły do zbliżonych rozwiązań, przy czym $i_4 = 0$, a $u_4 < U_4 = 0, 2844733$, to wydawać by się mogło, że otrzymano rozwiązanie optymalne. Poniższy fragment kodu świadczy o tym, że warunek (16) został spełniony.

```
c4<-rozw [1]
u4<-rozw [2]
i4<-rozw [3]

phi<-((y5+U5)/(chi+r))*1/3*((y3-c3-r*b3)/(y3+u3))+
      ((y2-c2-r*b2)/(y2+u2)))-((1+r)*b4)+y4

phi-(theta*u4)-(c4*(1+((y5+U5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))))+
  (((y5+U5)/(chi+r))*1/3*((y4-r*b4)/(y4+u4)))
[1] 3.056757e-06
```

Pojawił się jednak problem z warunkami (14) oraz (15). Implikowane przez te warunki I rzędu, wartości parametrów λ różnią się na drugim miejscu po przecinku.

```
(-alpha/c4)/(1+ (y5+u5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))
[1] -0.2925093

(-((1-alpha)*(1+theta))/(((1-delta)*k4)+(1+theta)*u4))/(
  (theta+(y4-r*b4-c4)*(1/3)*(y5+U5)/(chi+r)/((y4+u4)^2))
[1] -0.2852824
```

Przyjęcie innych wartości startowych nie przyczyniło się do poprawy rozwiązania. Niezbędne stało się więc numeryczne rozwiązanie, za pomocą biblioteki nleqslv układu równań (14), (15) i (16). Rozwiązanie optymalne pozwoliło na osiągnięcie użyteczności w wysokości zbliżonej do uzyskanej w metodzie numerycznej (różnica na trzecim miejscu po przecinku). Wartości optymalne zmiennych decyzyjnych również okazały się stosunkowo podobne: $c_4^* = 0,645$ w porównaniu do $c_4 = 0,636$ oraz $u_4^* = 0,105$ w porównaniu do $u_4 = 0,130$.

```
nleqslv(c(0.01, 0.01), spr)
\$x
[1] 0.6448150 0.1054819
\$fvec
[1] -2.860121e-09 -4.772498e-09
\$message
[1] "Function criterion near zero"

rozw<-c(nleqslv(c(0.01, 0.01), spr)\$x,0)
rozw[1]<-rozw[1]-0.0000001
uzyt(rozw)
```

```

[1] -0.588711

c4<-rozw[1]
u4<-rozw[2]
i4<-rozw[3]

(-alpha/c4)/(1+ (y5+u5)/(3*(chi+r)*(y4+u4)))
[1] -0.2852989

(-(1-alpha)*(1+theta))/(((1-delta)*k4)+(1+theta)*u4))/(
+ (theta+(y4-r*b4-c4)*(1/3)*(y5+U5)/(chi+r)/((y4+u4)^2))
[1] -0.2852989

```

A.3 Przykładowe rozwiązywanie wariantu IV

W wariantie IV inwestycje unijne realizowane są w maksymalnym stopniu, a pozostała część budżetu przeznaczana jest na wydatki bieżące oraz inwestycje zwykłe. Założono domyślne wartości parametrów, tj. zaprezentowane w tabeli 15 i przytoczone na początku aneksu.

Wartości c_4^* oraz i_4^* można obliczyć wprost z równań 17 i 18.

```

phi<-((y5+U5)/(chi+r))*1/3*((y3-c3-r*b3)/(y3+u3))+
((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))-(1+r)*b4)+y4
lambda<-(-1/(phi+(1/3*(y5+u5)*(y4-r*b4)/(chi+r)/(y4+U4)))+
(1-delta)*k4+U4))
c4<-(-alpha/(lambda*(1+(y5+U5)/(3*(chi+r)*(y4+U4)))))

c4
[1] 0.8429715

i4<-(-(1-alpha)/lambda-(1-delta)*k4-(1+theta)*U4)
i4
[1] 0.4389845

> uzyt(c(c4, U4, i4)-0.0000000001)
[1] -0.6115937

```

Zastosowanie numerycznych metod optymalizacyjnych pozwoliło na uzyskanie zbliżonych rozwiązań do uzyskanych metodą analityczną.

	p1	p2	p3	value
BFGS	9.324062e-01	2.835457e-01	2.132998e-01	-6.063469e-01
CG	5.558534e+08	4.738556e+08	2.925034e+08	2.976477e+03
Nelder-Mead	1.095784e+00	2.880704e-03	2.679361e-03	-5.132262e-01
L-BFGS-B	NA	NA	NA	8.988466e+307
nlm	8.854126e-01	2.844731e-01	3.346731e-01	-6.107427e-01
nlminb	6.908261e-01	2.844733e-01	2.138724e-01	-4.868272e-01
spg	8.223586e-01	2.844733e-01	2.138724e-01	-5.565426e-01
ucminf	2.380302e-01	2.844732e-01	2.138723e-01	-6.063101e-02
newuoia	7.135990e-01	2.844732e-01	2.833031e-01	-5.140912e-01

bobyqa	7.964228e-01	2.844731e-01	2.386150e-01	-5.488558e-01	
nmkb	8.375894e-01	2.844579e-01	4.522142e-01	-6.115774e-01	
hjk b	1.000000e-01	1.000000e-01	1.000000e-01	3.790474e-01	

rozw<-roz(rozw)

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	31
CG	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	31
Nelder–Mead	0.8375904	0.2844581	0.4522147	-0.6115780	139
L–BFGS–B	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	21
nlm	0.8375899	0.2844582	0.4522144	-0.6115777	NA
nlminb	0.8375903	0.2844585	0.4522145	-0.6115781	52
spg	0.8375903	0.2844585	0.4522145	-0.6115781	114
ucminf	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	1
newuo a	0.8375865	0.2844614	0.4522211	-0.6115784	52
bobyqa	0.8375898	0.2844584	0.4522140	-0.6115777	33
nmkb	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	157
hjk b	0.8375894	0.2844579	0.4522142	-0.6115774	1

rozw<-roz(rozw)

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	32
CG	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	32
Nelder–Mead	0.8377103	0.2844701	0.4519094	-0.6115803	138
L–BFGS–B	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	21
nlm	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	NA
nlminb	0.8377098	0.2844704	0.4519102	-0.6115803	49
spg	0.8377098	0.2844704	0.4519102	-0.6115803	68
ucminf	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	1
newuo a	0.8377092	0.2844701	0.4519116	-0.6115802	48
bobyqa	0.8377099	0.2844700	0.4519103	-0.6115802	35
nmkb	0.8377362	0.2844729	0.4518425	-0.6115806	161
hjk b	0.8377093	0.2844701	0.4519099	-0.6115799	1

B Analityczne rozwiązywanie dla trzeciego roku z napiętym warunkiem IWZ - szczegółowe obliczenia

W tej części aneksu zaprezentowano szczegółowe obliczenia streszczone w podrozdziale 6.3. Wyjściowy punkt obliczeń stanowi funkcja Lagrange'a w postaci:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{j=1}^5 \mu_j g_{j3}(x) = \\
&= \alpha \ln c_3 + (1-\alpha) \ln((1-\delta)k_3 + (1+\theta)U_3 + i_3) + \\
&\quad + \beta \alpha \ln \left(\frac{\alpha \left(\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_{\tau}-c_{\tau}-rb_{\tau}}{y_{\tau}+u_{\tau}} + \frac{y_4-r(b_3+\theta U_3+c_3+i_3+rb_3-y_3)}{y_4+U_4} \right) - (1+r)(b_3+\theta U_3+c_3+i_3+rb_3-y_3) \right)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{y_4+U_4}} + \right. \\
&\quad + \frac{\alpha(y_4+(1-\delta)((1-\delta)k_3+(1+\theta)U_3+i_3)+U_4)}{1 + \frac{1}{3} \frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{y_4+U_4}} + \\
&\quad + \beta(1-\alpha) \ln((1-\alpha)(1-\delta)((1-\delta)k_3+(1+\theta)U_3+i_3)+(1-\alpha)U_4 + \\
&\quad + (1-\alpha) \left(\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2-c_2-rb_2}{y_2+u_2} + \frac{y_3-c_3-rb_3}{y_3+U_3} + \frac{y_4-r(b_3+\theta U_3+c_3+i_3+rb_3-y_3)}{y_4+U_4} \right) - (1+r)(b_3+\theta U_3+i_3+c_3+rb_3-y_3) + y_4 \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-\delta)((1-\delta)k_3+(1+\theta)U_3+i_3)+U_4 \right) + \right. \\
&\quad + \mu_{53} \left(\frac{(\chi+r)(b_3+\theta U_3+i_3+c_3+rb_3-y_3)}{y_4+U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1-c_1-rb_1}{y_1+u_1} + \frac{y_2-c_2-rb_2}{y_2+u_2} + \frac{y_3-c_3-rb_3}{y_3+U_3} \right) \right).
\end{aligned}$$

Następnie wyprowadzono dwa warunki pierwszego rzędu, czyli obliczono pochodne funkcji Lagrange'a po c_3 i i_3 oraz przyrównano je do zera. Trzecie równanie - napięta reguła IWZ - zostało użyte dopiero w dalszej części obliczeń. W dalszych obliczeniach zrezygnowano z oznaczania wartości optymalnych zmiennych decyzyjnych za pomocą gwiazdek.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_3} &= \frac{\alpha}{c_3} \\
&+ \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3+U_3} + \frac{r}{y_4+U_4} \right) - (1+r) \right)}{\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_{\tau}-c_{\tau}-rb_{\tau}}{y_{\tau}+u_{\tau}} + \frac{y_4-rb_4}{y_4+U_4} \right) - (1+r)(b_3+\theta U_3+c_3+i_3+rb_3-y_3) + y_4 + (1-\delta)((1-\delta)k_3+(1+\theta)U_3+i_3)+U_4} \\
&+ \frac{\beta(1-\alpha)(1-\alpha) \left(-\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3+U_3} + \frac{r}{y_4+U_4} \right) - (1+r) \right)}{k_5} \\
&+ \mu_{53} \left(\frac{\chi+r}{y_4+U_4} + \frac{1}{3(y_3+U_3)} \right) = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_3} &= \frac{1-\alpha}{k_4} \\
&+ \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4+U_4} - (1+r) + 1-\delta \right)}{\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_{\tau}-c_{\tau}-rb_{\tau}}{y_{\tau}+u_{\tau}} + \frac{y_4-rb_4}{y_4+U_4} \right) - (1+r)(b_3+\theta U_3+c_3+i_3+rb_3-y_3) + y_4 + (1-\delta)((1-\delta)k_3+(1+\theta)U_3+i_3)+U_4} \\
&+ \frac{\beta(1-\alpha)(1-\alpha) \left(-\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4+U_4} - (1+r) + 1-\delta \right)}{k_5} \\
&+ \mu_{53} \frac{\chi+r}{y_4+U_4} = 0.
\end{aligned}$$

Poniższe przekształcenia mają na celu rozpisanie zmiennej k_5 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_3} &= \frac{\alpha}{c_3} \\
&+ \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3+U_3} + \frac{r}{y_4+U_4} \right) - (1+r) \right)}{\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_{\tau}-c_{\tau}-rb_{\tau}}{y_{\tau}+u_{\tau}} + \frac{y_4-rb_4}{y_4+U_4} \right) - (1+r)(b_3+\theta U_3+c_3+i_3+rb_3-y_3) + y_4 + (1-\delta)((1-\delta)k_3+(1+\theta)U_3+i_3)+U_4} \\
&+ \frac{\beta(1-\alpha)(1-\alpha) \left(-\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3+U_3} + \frac{r}{y_4+U_4} \right) - (1+r) \right)}{(1-\delta)((1-\delta)k_3+i_3+(1+\theta)U_3)+((1-\alpha)\left(\phi+\frac{y_5+U_5}{\chi+r}\frac{1}{3}\frac{y_4-rb_4}{y_4+U_4}\right)-\alpha(1-\delta)((1-\delta)k_3+i_3+(1+\theta)U_3)-(\theta+\alpha)U_4)+(1+\theta)U_4} \\
&+ \mu_{53} \left(\frac{\chi+r}{y_4+U_4} + \frac{1}{3(y_3+U_3)} \right) = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_3} &= \frac{1-\alpha}{(1-\delta)k_3+i_3+(1+\theta)U_3} \\
&+ \frac{\beta \alpha \left(-\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4+U_4} - \delta - r \right)}{\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_{\tau}-c_{\tau}-rb_{\tau}}{y_{\tau}+u_{\tau}} + \frac{y_4-rb_4}{y_4+U_4} \right) - (1+r)(b_3+\theta U_3+c_3+i_3+rb_3-y_3) + y_4 + (1-\delta)((1-\delta)k_3+(1+\theta)U_3+i_3)+U_4} \\
&+ \frac{\beta(1-\alpha)(1-\alpha) \left(-\frac{y_5+U_5}{\chi+r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4+U_4} - \delta - r \right)}{(1-\delta)((1-\delta)k_3+i_3+(1+\theta)U_3)+((1-\alpha)\left(\phi+\frac{y_5+U_5}{\chi+r}\frac{1}{3}\frac{y_4-rb_4}{y_4+U_4}\right)-\alpha(1-\delta)((1-\delta)k_3+i_3+(1+\theta)U_3)-(\theta+\alpha)U_4)+(1+\theta)U_4} \\
&+ \mu_{53} \frac{\chi+r}{y_4+U_4} = 0.
\end{aligned}$$

Połączenie dwóch równań w jedno umożliwia wyeliminowanie mnożnika μ_{53} o nieznanej wartości.

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{c_3} \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) \\
& + \frac{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) - (1+r)}{\beta(1-\alpha)(1-\alpha)(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1+r)) \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right)} \\
& + \frac{\beta(1-\alpha)(1-\alpha)(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1+r)) \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right)}{(1-\delta)((1-\delta)k_3 + i_3 + (1+\theta)U_3) + ((1-\alpha)\left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4}\right) - \alpha(1-\delta)((1-\delta)k_3 + i_3 + (1+\theta)U_3) - (\theta+\alpha)U_4) + (1+\theta)U_4} \\
& = \frac{1-\alpha}{(1-\delta)k_3 + i_3 + (1+\theta)U_3} \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \\
& + \frac{\beta\alpha(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right)}{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) - (1+r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1-\delta)((1-\delta)k_3 + (1+\theta)U_3 + i_3) + U_4} \\
& + \frac{\beta(1-\alpha)(1-\alpha)(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right)}{(1-\delta)((1-\delta)k_3 + i_3 + (1+\theta)U_3) + ((1-\alpha)\left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4}\right) - \alpha(1-\delta)((1-\delta)k_3 + i_3 + (1+\theta)U_3) - (\theta+\alpha)U_4) + (1+\theta)U_4}.
\end{aligned}$$

Następnie warto połączyć liczniki ułamków o tych samych mianownikach:

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{c_3} \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) \\
& + \frac{\beta\alpha \left(\left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1+r) \right) \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) - \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \right)}{\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} + \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) - (1+r)(b_3 + \theta U_3 + c_3 + i_3 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1-\delta)((1-\delta)k_3 + (1+\theta)U_3 + i_3) + U_4} \\
& + \frac{\beta(1-\alpha)(1-\alpha) \left(\left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1+r) \right) \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) - \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \right)}{(1-\delta)((1-\delta)k_3 + i_3 + (1+\theta)U_3) + ((1-\alpha)\left(\phi + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4}\right) - \alpha(1-\delta)((1-\delta)k_3 + i_3 + (1+\theta)U_3) - (\theta+\alpha)U_4) + (1+\theta)U_4} \\
& - \frac{1-\alpha}{(1-\delta)k_3 + i_3 + (1+\theta)U_3} \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) = 0. \tag{28}
\end{aligned}$$

W równaniu (28) występuje, pochodząca ze wzoru na k_5 zmienna ϕ , która zależy m.in. od i_3 oraz c_3 . W poniższych obliczeniach rozpisano zatem ϕ z uwzględnieniem współczynników stojących przy i_3 i c_3 . Warto podkreślić, że pochodne zostały wcześniej wyprowadzone prawidłowo, zgodnie z formułą na pochodną logarytmu $\frac{\partial \log(k_5)}{\partial c_3} = \frac{k'_5(c_3)}{k_5(c_3)}$. W funkcji Lagrange'a k_5 i ϕ zostały bowiem szczegółowo rozpisane. Umożliwiło to poprawne obliczenie k'_5 z licznika pochodnej.

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \sum_{\tau=2}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - (1+r)b_4 + y_4 \\
\phi &= c_3 \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{-1}{y_3 + U_3} \right) + \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) - (1+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3) + y_4 \right) \\
\phi &= i_3(-1-r) + c_3 \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{-1}{y_3 + U_3} - (1+r) \right) \\
& + \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) - (1+r)(b_3 + \theta U_3 + rb_3 - y_3) + y_4 \right) \\
\phi &= i_3\phi_0 + c_3\phi_1 + \phi_2.
\end{aligned}$$

Poniżej wykorzystuje się równanie na napięty warunek IWZ. Dzięki niemu można wyznaczyć c_3 jako funkcję i_3 . Ostatecznie zatem w rachunkach pozostało jedna zmienna decyzyjna - i_3 .

$$\begin{aligned}
\frac{(\chi+r)b_4}{y_4+U_4} &= \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^3 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} \\
\frac{(\chi+r)b_4}{y_4+U_4} - \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 - c_1 - rb_1}{y_1 + u_1} + \frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} \right) &= \frac{1}{3} \frac{y_3 - c_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \\
c_3 &= -3(y_3 + U_3) \left(\frac{(\chi+r)b_4}{y_4+U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 &= -3(y_3 + U_3) \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\
c_3 \left(1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4+U_4} \right) &= -3(y_3 + U_3) \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\
c_3 &= \frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4+U_4}} \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\
c_3 &= i_3 \left(\frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4+U_4}} \frac{\chi+r}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad + \frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4+U_4}} \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\
\phi_3 &= \left(\frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4+U_4}} \frac{\chi+r}{y_4 + U_4} \right) \\
\phi_4 &= \frac{-3(y_3 + U_3)}{1 + 3(y_3 + U_3) \frac{\chi+r}{y_4+U_4}} \left(\frac{(\chi+r)(b_3 + \theta U_3 + i_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} - \frac{1}{3} \sum_{\tau=1}^2 \frac{y_\tau - c_\tau - rb_\tau}{y_\tau + u_\tau} - \frac{1}{3} \frac{y_3 - rb_3}{y_3 + U_3} \right) \\
c_3 &= i_3 \phi_3 + \phi_4 \\
\phi &= i_3 \phi_0 + (i_3 \phi_3 + \phi_4) \phi_1 + \phi_2 \\
\phi &= i_3 (\phi_0 + \phi_3 \phi_1) + \phi_4 \phi_1 + \phi_2.
\end{aligned}$$

W celu łatwiejszego wykonania obliczeń, zastąpiono długie i złożone wyrazy w poszczególnych ułamkach równania (28), kolejnymi oznaczeniami ϕ_i i uzyskano w ten sposób proste równanie (29).

$$\begin{aligned}
\phi_5 &= \alpha \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) \\
\phi_6 &= \beta \alpha \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) - \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \right) \\
\phi_8^{\text{bis}} &= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - \phi_4 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + U_4 \\
&= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - \phi_4 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + U_4 \\
&= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - \phi_4 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + i_3 + i_3 \phi_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + U_4 \\
\phi_8 &= \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{y_2 - c_2 - rb_2}{y_2 + u_2} + \frac{y_3 - \phi_4 - rb_3}{y_3 + U_3} + \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - (1 + r)(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3) + y_4 + (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + U_4 \\
\phi_7 &= -\delta - r - \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{\phi_3}{y_3 + U_3} + r \frac{1 + \phi_3}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r)\phi_3 \\
\phi_9 &= \beta(1 - \alpha)(1 - \alpha) \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y_3 + U_3} + \frac{r}{y_4 + U_4} \right) - (1 + r) \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{(y_4 + U_4)(3(y_3 + U_3))}{(\chi + r)(3(y_3 + U_3)) + y_4 + U_4} \right) - \left(-\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{r}{y_4 + U_4} - \delta - r \right) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{11}^{\text{bis}} &= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - rb_4}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 \\
&= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + i_3 + c_3 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 \\
&= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + i_3 + i_3 \phi_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 \\
&= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 - i_3 r(1 + \phi_3)(1 - \alpha) \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \right) \frac{1}{y_4 + U_4} \\
\phi_{11} &= (1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) + ((1 - \alpha) \left(\phi_4 \phi_1 + \phi_2 + \frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \frac{y_4 - r(b_3 + \theta U_3 + \phi_4 + rb_3 - y_3)}{y_4 + U_4} \right) \\
&\quad - \alpha(1 - \delta)((1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3) - (\theta + \alpha)U_4) + (1 + \theta)U_4 \\
\phi_{10} &= (1 - \delta)(1 - \alpha) + (1 - \alpha)(\phi_0 + \phi_3 \phi_1) - r(1 + \phi_3)(1 - \alpha) \left(\frac{y_5 + U_5}{\chi + r} \frac{1}{3} \right) \frac{1}{y_4 + U_4} \\
\phi_{12} &= (1 - \alpha) \left(\frac{y_4 + U_4}{\chi + r} \right) \\
\phi_{13} &= (1 - \delta)k_3 + (1 + \theta)U_3
\end{aligned}$$

$$\frac{\phi_5}{i_3 \phi_3 + \phi_4} + \frac{\phi_6}{i_3 \phi_7 + \phi_8} = -\frac{\phi_9}{i_3 \phi_{10} + \phi_{11}} + \frac{\phi_{12}}{i_3 + \phi_{13}}$$

$$\frac{\phi_5(i_3 \phi_7 + \phi_8) + \phi_6(i_3 \phi_3 + \phi_4)}{(i_3 \phi_3 + \phi_4)(i_3 \phi_7 + \phi_8)} = -\frac{\phi_9(i_3 + \phi_{13}) - \phi_{12}(i_3 \phi_{10} + \phi_{11})}{(i_3 \phi_{10} + \phi_{11})(i_3 + \phi_{13})}. \quad (29)$$

Dalsze przekształcenia równania (29) doprowadziły do uzyskania równania sześciennego.

$$\begin{aligned}
& (\phi_5(i_3\phi_7 + \phi_8) + \phi_6(i_3\phi_3 + \phi_4))((i_3\phi_{10} + \phi_{11})(i_3 + \phi_{13})) \\
& + (\phi_9(i_3 + \phi_{13}) - \phi_{12}(i_3\phi_{10} + \phi_{11}))((i_3\phi_3 + \phi_4)(i_3\phi_7 + \phi_8)) = 0 \\
& (i_3(\phi_5\phi_7 + \phi_3\phi_6) + \phi_5\phi_8 + \phi_4\phi_6)(i_3^2\phi_{10} + i_3(\phi_{10}\phi_{13} + \phi_{11}) + \phi_{11}\phi_{13}) + \\
& + (i_3(\phi_9 - \phi_{10}\phi_{12}) + \phi_9\phi_{13} - \phi_{11}\phi_{12})(i_3^2\phi_3\phi_7 + i_3(\phi_3\phi_8 + \phi_4\phi_7) + \phi_4\phi_8) = 0 \\
& i_3^3(\phi_{10}(\phi_5\phi_7 + \phi_3\phi_6) + \phi_3\phi_7(\phi_9 - \phi_{10}\phi_{12})) + \\
& i_3^2(\phi_{10}(\phi_5\phi_8 + \phi_4\phi_6) + (\phi_5\phi_7 + \phi_3\phi_6)(\phi_{10}\phi_{13} + \phi_{11}) + \phi_3\phi_7(\phi_9\phi_{13} - \phi_{11}\phi_{12}) + (\phi_9 - \phi_{10}\phi_{12})(\phi_3\phi_8 + \phi_4\phi_7)) + \\
& i_3((\phi_5\phi_7 + \phi_3\phi_6)\phi_{11}\phi_{13} + (\phi_{10}\phi_{13} + \phi_{11})(\phi_5\phi_8 + \phi_4\phi_6) + (\phi_9 - \phi_{10}\phi_{12})\phi_4\phi_8 + (\phi_3\phi_8 + \phi_4\phi_7)(\phi_9\phi_{13} - \phi_{11}\phi_{12})) + \\
& (\phi_5\phi_8 + \phi_4\phi_6)\phi_{11}\phi_{13} + (\phi_9\phi_{13} - \phi_{11}\phi_{12})\phi_4\phi_8 \\
& = 0 \tag{30}
\end{aligned}$$

$$ai^3 + bi^2 + ci + d = 0.$$

Istnieją trzy możliwe rozwiązania sześciennego:

$$\begin{aligned}
i_3^* &= \left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) (3ac - b^2)}{9a^2 \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{3a} \\
&\text{lub} \\
i_3^* &= \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad - \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) (3ac - b^2)}{9a^2 \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{3a} \\
&\text{lub} \\
i_3^* &= \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad - \frac{3ac - b^2}{9a^2 \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{3a}. \tag{31}
\end{aligned}$$

C Rozwiązań dla trzeciego roku

C.1 Przykładowe rozwiązanie metodą analityczną

Kod R służący do znalezienia rozwiązań dla trzeciego i czwartego roku rozpoczyna się od załadowania bibliotek opisanych w części A aneksu. Następnie deklarowane są wartości parametrów i startowych poziomów zmiennych.

```
library(nleqslv)
```

```

library(optimx)

#####
#Deklaracje wartości parametrów i startowych poziomów zmiennych#
#####

alpha<-0.4
beta<-0.1
gamma<-0.044
delta<-0.059
theta<-0.62
r<-0.039
chi<-0.2
y1<-1
y2<-y1*(1+gamma)
y3<-y2*(1+gamma)
y4<-y3*(1+gamma)
y5<-y4*(1+gamma)
b1<-0.32*y1
b2<-0.32*y2
b3<-0.32*y3
c1<-0.9*y1
c2<-0.9*y2
k3<-2.06*y4
upsilon<-0.25

u1<-upsilon*y1
U1<-upsilon*y1
u2<-upsilon*y2
U2<-upsilon*y2
u3<-upsilon*y3
U3<-upsilon*y3
u4<-upsilon*y4
U4<-upsilon*y4
u5<-upsilon*y5
U5<-upsilon*y5

```

Poniżej znajdują się równania na pomocnicze zmienne ϕ_i , które są używane do zdefiniowania współczynników równania sześciennego (patrz 30).

```

#####
# Rozwiążanie metodą Karusha-Kuhna-Tuckera #
#####

phi0<-(-1-r)
phi1<-(-(y5+u5)/((chi+r)*3*(y3+u3)) -(1+r))
phi2<-((y5+u5)/(chi+r)/3*((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-r*b3)/(y3+u3)) -
          (1+r)*(b3+ theta*u3+r*b3-y3) + y4)
phi3<-(-3*(y3+u3)*(chi+r)/(1+3*(y3+u3)*(chi+r)/(y4+u4))/(y4+u4))
phi4<-
          -3*(y3+u3)/(1+3*(y3+u3)*(chi+r)/(y4+u4))
```

```

*(((chi+r)*(b3+theta*u3+r*b3-y3))/(y4+u4)
 - 1/3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1)+(y2-c2-r*b2)/(y2+u2))-
 1/3*(y3-r*b3)/(y3+u3))
)
phi5<-alpha*((y4+u4)*(3*(y3+u3))/((chi+r)*(3*(y3+u3))+y4+u4)))
phi6<-(alpha*beta*
 ((((-y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3)+r/(y4+u4)))- (1+r)*(((y4+u4)*(3*(y3+u3))/((chi+r)*
 (3*(y3+u3))+y4+u4)))- (-y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4))-delta-r)*
 ((y4+u4)/(chi+r))))
phi7<-((-delta-r)-((y5+u5)/(chi+r)/3*(phi3/(y3+u3)+ r*(1+phi3)/(y4+U4)))-(1+r)*phi3)
phi8<-
 (((y5+u5)/(chi+r)/3)* ((y3-phi4-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+ ((y4-r*(b3+theta*u3+phi4+r*b3-y3))/(y4+u4))-
 (((1+r)*(b3+theta*u3+phi4+r*b3-y3)))+ (y4+(1-delta)*(1-delta)*k3+(1+theta)*u3)+ u4)
)
phi9<-
 beta*(1-alpha)*(1-alpha)*((( - (y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3)+ r/(y4+u4))-(1+r))*(((y4+u4)*(3*(y3+u3))/((chi+r)*(3*(y3+u3))+y4+u4))-
 (-y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4))-delta-r)*((y4+u4)/(chi+r)))
)
phi10<-((1-delta)*(1-alpha)+(1-alpha)*(phi0+phi3*phi1)- r*(1+phi3)*(1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3)/(y4+u4)
phi11<-
 (1-delta)*((1-delta)*k3+(1+theta)*u3)+((1-alpha)*(phi4*phi1+phi2+(y5+u5)*
 (y4-r*(b3+theta*u3+phi4+r*b3-y3))/(chi+r)/3/(y4+u4))- alpha*(1-delta)*((1-delta)*k3+
 (1+theta)*u3)-(theta+alpha)*u4)+ (1+theta)*u4)
)
phi12<-((1-alpha)*((y4+u4)/(chi+r)))
phi13<-((1-delta)*k3+(1+theta)*u3)

par_a<-
 (phi5*phi7+phi3*phi6)*phi10+
 (phi9-phi10*phi12)*phi3*phi7
)
par_b<-
 (phi5*phi8+phi4*phi6)*phi10+
 (phi5*phi7+phi3*phi6)*(phi10*phi13+phi11)+ (phi9*phi13-phi11*phi12)*phi3*phi7+
 (phi9-phi10*phi12)*(phi3*phi8+phi4*phi7)
)
par_c<-
 (phi5*phi8+phi4*phi6)*(phi10*phi13+phi11)+
```

```

(phi9*phi13 - phi11*phi12)*(phi3*phi8 + phi4*phi7) +
(phi9 - phi10*phi12)*phi4*phi8 +
(phi5*phi7+phi3*phi6)*phi11*phi13
)
par_d<-
(phi5*phi8 + phi4*phi6)*phi11*phi13 +
(phi9*phi13 - phi11*phi12)*phi4*phi8
)

```

Dwa pierwsze rozwiązania są nieprawidłowe. Wydatki inwestycyjne nie mogą bowiem być ujemne. Warto zauważyć, że część poniższych obliczeń wymagało rachunków na liczbach zespolonych.

```
#####
# Rozwiązania niedopuszczalne #
#####

szescienne1<-function(a,b,c,d){
  f<-(3*a*c - b^2)
  h<-as.complex(as.complex(27*(a^2)*(d^2) + (4*(b^3) -
    (18*a*b*c))*d + (4*a*(c^3)) - (b^2 * c^2))^(1/2))
  i<-(2*3^(3/2))*a^2
  j<-27*(a^2)*d - (9*a*b*c) + 2*(b^3)
  k<-54*a^3
  g<-(9*a^2)*((h/i - j/k)^(1/3))
  l<-complex(imaginary = -(3^0.5)/2, real = -1/2)
  m<-complex(imaginary = +(3^0.5)/2, real = -1/2)
  e<-as.complex(h/i - j/k)
  return(1*e^(1/3) - (m*f)/g - b/(3*a))
}

x<-szescienne1(par_a, par_b, par_c, par_d)
x
[1] -5.452163-0i

szescienne2<-function(a,b,c,d){
  f<-(3*a*c - b^2)
  h<-as.complex(as.complex(27*(a^2)*(d^2) + (4*(b^3) -
    (18*a*b*c))*d + (4*a*(c^3)) - (b^2 * c^2))^(1/2))
  i<-(2*3^(3/2))*a^2
  j<-27*(a^2)*d - (9*a*b*c) + 2*(b^3)
  k<-54*a^3
  g<-(9*a^2)*((h/i - j/k)^(1/3))
  l<-complex(imaginary = -(3^0.5)/2, real = -1/2)
  m<-complex(imaginary = +(3^0.5)/2, real = -1/2)
  e<-as.complex(h/i - j/k)
  return(m*e^(1/3) - (l*f)/g - b/(3*a))
}

x<-szescienne2(par_a, par_b, par_c, par_d)
x
[1] -5.839818+0i
```

Rozwiązań dopuszczalne i optymalne wyniosło 0,512.

```
#####
#   Rozwiązań dopuszczalne
#####

szescienne3<-function(a,b,c,d){
  h<-as.complex(as.complex(27*(a^2)*(d^2) + (4*(b^3) -
    (18*a*b*c))*d + (4*a*(c^3)) - (b^2 * c^2))^(1/2))
  i<-(2*3^(3/2))*a^2
  j<-27*(a^2)*d - (9*a*b*c) + 2*(b^3)
  k<-54*a^3
  e<-as.complex(h/i - j/k)
  f<-(3*a*c - b^2)
  g<-(9*a^2)*((h/i - j/k)^(1/3))
  return( e^(1/3) - f/g - b/(3*a) )
}

x<-szescienne3(par_a, par_b, par_c, par_d)
x
[1] 0.5118041+0i

i3<-as.numeric(x)
u3<-U3
u4<-U4
```

Znając i_3^* , $u_3^* = U_3$, $u_4^* = U_4$ oraz zakładając napięty warunek IWZ, można przystąpić do obliczania c_3^* , a następnie c_4^* , k_4^* , k_5^* i i_4^* .

```
rozw_c<-function(rozw2){
  return( ((y4+u4)/(chi+r) /
    3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1) + (y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
    (y3-rozw2-r*b3)/(y3+u3)))
  - b3 - (1+theta)*u3 - i3 - r*b3 + u3 + y3 - rozw2)
}

c3<-c(nleqslv(c(0.5), rozw_c)$x)
z3<-(1+theta)*u3 + i3 + c3 + r*b3 - u3 - y3
b4<-b3+z3

c4<-
  (((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  *(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3))
  +(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  *((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+
  ((y4 - r*(b3 + theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3))/(y4+u4)))
  -(alpha*((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
  /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  +(alpha*(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
```

```

        /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
)
k4<-(1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3
k5<-
  (1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3 )
+ (1-alpha)*u4 +
  (1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
  (y3-c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4-r*b4)/(y4+u4)))
- (1+r)*(b3+theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
)
i4<-k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4

```

Dla pewności warto sprawdzić, czy rozwiązanie optymalne i_3^* jest miejscem zerowym równania sześciennego, a także miejscem zerowym warunków I rzędu.

```

#####
# Sprawdzenie
#####
phi5/(i3*phi3 + phi4) + phi6/(i3*phi7 + phi8) +
phi9/(i3*phi10 + phi11) - phi12/(i3 + phi13)
[1] -2.220446e-16

#####
# Sprawdzenie z warunkami I rzędu
#####

lewa<-
  +(alpha/c3)
  +(alpha*beta*
    (((-y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3) + r/(y4+u4))) - (1+r))
  /
    ((y5+u5)/(chi+r)/3)
    * ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+((y4-r*b4)/(y4+u4)))
    -(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
    +(y4 + (1-delta)*(1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
  )
)
+
  +beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*((1/(y3+u3)) +
  (r/(y4+u4))-(1+r))/k5
)

prawa<-
  +(1-alpha)/k4
  +(beta*alpha*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) - delta - r))
  /
    ((y5+u5)/(chi+r)/3)
    * ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+((y4-r*b4)/(y4+u4)))
    -(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
```

```

        +(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
    )
    +beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) - delta - r)/k5
)
pomo<-
  -lewa/((chi+r)/(y4+u4) + 1/(3*(y3+u3)))
  +prawa/((chi+r)/(y4+u4))
)

pomo
[1] -1.073213e-10

```

Oba testy sprawdzające przyniosły pozytywne wyniki. Zdefiniowanie funkcji użyteczności pozwala na ocenę ilościową rozwiązania uzyskanego metodą analityczną, ale przede wszystkim jest niezbędnym elementem metody numerycznej.

```

#####
# Deklaracja funkcji użyteczności
#####
uzyt<-function(p){
  c3<-p[1]
  u3<-p[2]
  i3<-p[3]

  z3<-(1+theta)*u3 + i3 + c3 + r*b3 - u3 - y3
  b4<-b3+z3
  k4<-(1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3

  u4<-U4
  c4<-
    (((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
     *(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3))
    +(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
     *((((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+((y4 - r*b4)/(y4+u4))))
    -(alpha*((1+r)*b4)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
    +(alpha*(y4 + (1-delta)*k4 + u4)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
    )
  k5<-
    (1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) +
      (1-alpha)*u4 + (1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*
        ((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
         (y3- c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4 -r*b4)/(y4+u4)))
    - (1+r)*(b3+ theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
  )
  i4<-k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4
}

```

```

kara<-0*c(1:6)
kara[1]<-(c3<0)*9999 + (c4<0)*9999
kara[2]<-(i3<0)*9999 + (i4<0)*9999
kara[3]<-(u3<0)*9999 + (u3>U3)*9999
kara[4]<-((c3+r*b3)>y3)*9999
kara[5]<-(((chi+r)*b4)/(y4+u4) > 1/3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1) +
(y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-c3-r*b3)/(y3+u3)))*9999
kara[6]<-((c4+r*b4)>y4)*9999
return(-(abs(sum(kara))*which.max(abs(c(c3,c4,u3,i3,i4))))
+ alpha*log(c3) + (1-alpha)*log(k4) + beta*alpha*log(c4)
+ beta*(1-alpha)*log(k5)))
}

#####
# Podsumowanie rozwiązania z równania sześciennego #
#####

> cat(c3, u3, i3)
0.7702622 0.272484 0.5118041
> cat(c4, u4, i4)
0.9416474 0.2844733 0.1231468
> uzyt(c(c3,u3,i3))
[1] -0.6400487

```

C.2 Przykładowe rozwiązywanie metodą numeryczną

Po rozwiązaniu zadania metodą analityczną, można przejść do poszukiwania rozwiązań optymalnych metodą numeryczną (metodami iteracyjnymi).

```

#####
# Rozwiążanie metodami iteracyjnymi      #
#####

metody<-c("BFGS", "CG", "Nelder-Mead", "L-BFGS-B", "nlm",
"nlminb", "spg", "ucminf", "newuoa", "bobyqa", "nmkb", "hjkb")

uz<-0*c(1:12)

roz<-function(rozw){
  wsp<-as.matrix(coef(optimx(rozw, uzyt, method=metody)))
  uz<-apply(wsp, 1, uzyt)
  rozw2<-wsp[which.min(uz),]
  print(summary(optimx(rozw, uzyt, method=metody)))
  return(as.vector(rozw2))
}

konw<-function(rozw){
  maks<-uzyt(rozw)
  rozw2<-rozw
  while(maks>0.001)
    rozw2<-roz
    maks<-uzyt(rozw2)
}
```

```

zatrzymaj<-0
while ( zatrzymaj==0){
  rozw2<-roz( rozw2)
  if (( uzyt( rozw2) - maks)>-0.0001){
    zatrzymaj<-1
    print(summary(optimx ( rozw2 , uzyt , method=metody)))
  }
  maks<-uzyt( rozw2)
}
return( roz( rozw2))
}

p<-0*c (1:3)
rozw<-c (0.6 , 0.1 , 0.1)
p<-konw(rozw)

```

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.7893635	0.2717942	0.2005781	-0.5853439	72
CG	0.8445378	0.2723592	0.2040818	-0.6107976	85
Nelder-Mead	0.8778351	0.2724840	0.2475980	-0.6340233	238
L-BFGS-B	0.8272034	0.2505469	0.1914889	-0.5926036	48
nlm	0.8528296	0.2724831	0.3089528	-0.6364645	NA
nlminb	0.8380437	0.2724840	0.2038965	-0.6080164	81
spg	0.8579274	0.2724840	0.2047116	-0.6166466	170
ucminf	0.8430340	0.2724839	0.3330707	-0.6372671	79
newuoa	0.9281488	0.2295716	0.1576467	-0.6184747	148
bobyqa	0.9062702	0.2349570	0.2080398	-0.6232044	87
nmkb	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	240
hjkb	0.6000000	0.1000000	0.1000000	-0.3946349	1

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	34
CG	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	34
Nelder-Mead	0.7706362	0.2724815	0.5108881	-0.6400483	149
L-BFGS-B	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	21
nlm	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	NA
nlminb	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	54
spg	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	50
ucminf	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	1
newuoa	0.7706357	0.2724818	0.5108882	-0.6400482	49
bobyqa	0.7706354	0.2724819	0.5108889	-0.6400482	32
nmkb	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	174
hjkb	0.7706357	0.2724815	0.5108883	-0.6400481	1

	p1	p2	p3	value	fevals
BFGS	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	35
CG	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	35
Nelder-Mead	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	218
L-BFGS-B	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	21
nlm	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	NA
nlminb	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	46

spg	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	1
ucminf	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	1
newuoa	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	48
bobyqa	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	30
nmkb	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	175
hjkb	0.7706359	0.2724817	0.5108884	-0.6400483	1

p[1] -> c3
 p[2] -> u3
 p[3] -> i3

u4 <- U4
 c4 <- (
 (((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
 /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
 *(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3))
 +(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
 /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
 *(((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+
 ((y4 - r*(b3 + theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3))/(y4+u4))))
 -(alpha*((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3))
 /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
 +(alpha*(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
 /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
)
 k4 <- (1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3
 k5 <- (
 (1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) +
 (1-alpha)*u4 + (1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*
 ((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4-r*b4)/(y4+u4))
 - (1+r)*(b3+theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
)
 i4 <- k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4
 z3 <- (1+theta)*u3 + i3 + c3 + r*b3 - u3 - y3
 b4 <- b3+z3

Sprawdzenie z warunkami I rzędu

lew <- (
 +(alpha/c3)
 +(alpha***beta***
 ((- (y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3)+r/(y4+u4))) - (1+r))
 /((
 ((y5+u5)/(chi+r)/3)
 * ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+
 ((y4-r*b4)/(y4+u4)))
 -(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
 +(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
)

```

)
+beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*((1/(y3+u3))+
(r/(y4+u4)))-(1+r))/k5
)

praw<-
+(1-alpha)/k4
+(beta*alpha*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4))-delta - r))
/(
((y5+u5)/(chi+r)/3)
*((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+((y4-r*b4)/(y4+u4)))
-(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
+(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
)
+beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4))-delta - r)/k5
)

spr<-
-lew/((chi+r)/(y4+u4) + 1/(3*(y3+u3)))
+praw/((chi+r)/(y4+u4))
)
spr
[1] 0.0009746467

#####
# Podsumowanie rozwiązań metodami iteracyjnymi #
#####

> cat(c3, u3, i3)
0.7706359 0.2724817 0.5108884
> cat(c4, u4, i4)
0.9415111 0.2844733 0.1234912
> uzyt(c(c3, u3, i3))
[1] -0.6400483

```

Wartość funkcji użyteczności różni się nieznacznie, tylko na siódmym miejscu po przecinku. Jednak nie oznacza to, że metoda numeryczna jest zawsze tak skuteczna. W zależności od określonych parametrów i wartości startowych, różnice mogą być dużo większe (patrz część A aneksu).

C.3 Przykładowe rozwiązanie za pomocą warunków I rzędu

Ostatnim etapem jest zastosowanie metody opierającej się na warunkach I rzędu. Polega na znalezieniu ich miejsc zerowych za pomocą pakietu **optimx**. Wynik okazał się taki sam jak w przypadku metody analitycznej.

```

#####
# Rozwiązanie bazujące na warunkach I rzędu #
#####
```

```

spr3<-function(pomoc){
  c3<-pomoc
  u3<-U3
  u4<-U4
  b4<-(y4+u4)/(chi+r)/3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1) +
    (y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-c3-r*b3)/(y3+u3))
  z3<-b4-b3
  i3<- z3 - (1+theta)*u3 - c3 - r*b3 + u3 + y3
  c4<-
    (((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
     *(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3))
    +(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
     *((((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+
       ((y4 - r*(b3 + theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3))/(y4+u4)))))
    -(alpha*((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3))
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
    +(alpha*(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
      /(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
  )
  k4<-(1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3
  k5<-
    (1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) +
    (1-alpha)*u4 + (1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*
      ((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
       (y3- c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4 -r*b4)/(y4+u4)))
    - (1+r)*(b3+ theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
  )
  i4<-k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4

  lewa<-
    +(alpha/c3)
    +(alpha*beta*
      (((-(y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3)+r/(y4+u4))) - (1+r))
        /
        ((y5+u5)/(chi+r)/3)
        * ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+
          ((y4-r*b4)/(y4+u4)))
        -(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
        +(y4 + (1-delta)*((1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
      )
    )
    +beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*
      ((1/(y3+u3))+(r/(y4+u4)))-(1+r))/k5
  )

  prawa<-
    +(1-alpha)/k4
    +(beta*alpha*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) - delta - r))
    /

```

```

((y5+u5)/(chi+r)/3)
* ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+((y4-r*b4)/(y4+u4)))
-(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
+(y4 + (1-delta)*(1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
)
+b*alpha*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*
(r/(y4+u4)) -delta -r)/k5
)
pomo<-
-lewa/((chi+r)/(y4+u4) + 1/(3*(y3+u3)))
+prawa/((chi+r)/(y4+u4))
)
return(c(pomo))
}

```

```

rozwn<-c(nleqslv(c(0.5), spr3)$x)
rozwn[]<-rozwn[]
b4<-(y4+u4)/(chi+r)/3*((y1-c1-r*b1)/(y1+u1) +
(y2-c2-r*b2)/(y2+u2) + (y3-rozwn-r*b3)/(y3+u3))

z3<-b4-b3
i3<-( z3 - (1+theta)*u3 - rozwn - r*b3 + u3 + y3)
p<-c(rozwn-0.000001, u3, i3)

c3<-p[1]
u3<-p[2]
i3<-p[3]

u4<-U4
c4<-
(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
/(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
*(y3-c3 - r*b3)/(y3+u3))
+(((alpha*(y5+u5)/(chi+r)*1/3)
/(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
*((y2-c2 - r*b2)/(y2+u2))+
((y4 - r*(b3 + theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3))/(y4+u4)))
-(alpha*((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3))
/(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
+(alpha*(y4 + (1-delta)*(1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
/(1+ 1/3*((y5+u5)/(chi+r))/(y4+u4)))
)
k4<-(1-delta)*k3+(1+theta)*u3+i3
k5<-
(1-alpha)*(1-delta)*((1-delta)*k3 +
(1+theta)*u3 + i3) + (1-alpha)*u4 +
(1-alpha)*((y5+u5)/(chi+r)/3*((y2-c2-r*b2)/(y2+u2) +
(y3- c3-r*b3)/(y3+u3) + (y4 -r*b4)/(y4+u4)))

```

```

        -      (1+r)*(b3+ theta*u3 + i3 + c3 + r*b3 - y3) + y4)
)
i4<-k5-(1-delta)*k4-(1+theta)*u4

#####
# Sprawdzenie
#
#####

lewa<-
+(alpha/c3)
+(alpha*beta*
  ((-(y5+u5)/(chi+r)/3*(1/(y3+u3)+r/(y4+u4))) - (1+r))
 /(
  ((y5+u5)/(chi+r)/3)
 * ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+((y4-r*b4)/(y4+u4)))
 -(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
 +(y4 + (1-delta)*(1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
 )
)
+
beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*
  ((1/(y3+u3))+(r/(y4+u4)))-(1+r))/k5
)

prawa<-
+(1-alpha)/k4
+(beta*alpha*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*(r/(y4+u4)) -delta - r))
 /(
  ((y5+u5)/(chi+r)/3)
 * ((y3-c3-r*b3)/(y3+u3)+((y2-c2-r*b2)/(y2+u2))+((y4-r*b4)/(y4+u4)))
 -(((1+r)*(b3+theta*u3 + c3 + i3 + r*b3 - y3)))
 +(y4 + (1-delta)*(1-delta)*k3 + (1+theta)*u3 + i3) + u4)
 )
+
beta*(1-alpha)*(1-alpha)*(-(y5+u5)/(chi+r)/3*
  (r/(y4+u4)) -delta - r)/k5
)
pomo<-
-lewa/((chi+r)/(y4+u4) + 1/(3*(y3+u3)))
+prawa/((chi+r)/(y4+u4)))
pomo
[1] 1.55792e-07

#####
# Podsumowanie rozwiązania z warunków I rzędu
#
#####

> cat(c3, u3, i3)
0.7702612 0.2724817 0.5118063
> cat(c4, u4, i4)

```

```

0.9416476 0.2844733 0.1231489
> uzyt( c( c3 , u3 , i3 ) )
[1] -0.6400479

```

D Model o nieskończonym horyzoncie czasowym

W tej części aneksu opisano model polityki finansowej JST, który stanowi uproszczenie głównego modelu omawianego w niniejszej pracy. Nie uwzględnia się w nim zadłużenia ani finansowania ze środków unijnych (inwestycje stanowią jeden agregat). Ponadto zakłada się w nim tę samą postać funkcji użyteczności, co w równaniu (6), ale o nieskończonym horyzoncie czasowym:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\alpha \ln c_t + (1-\alpha) \ln k_{t+1})$$

p.w.

$$\begin{aligned} c_t + i_t &= y_t \\ y_t &= (1+\gamma)y_{t-1} \\ k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + i_t \\ \forall c_t, k_t &\geq 0. \end{aligned}$$

Nie będziemy tu poszukiwać pełnego rozwiązania tego modelu, a jedynie wyprowadzimy długookresowe zależności, które będą pożyteczne w procesie kalibracji modelu czterookresowego w rozdziale 7.1. W modelu takim w długim okresie optymalne wielkości: c^* , i^* i k^* stanowią stały odsetek y , co oznacza występowanie ścieżki zrównoważonego wzrostu: wszystkie wspomniane zmienne rosną w długim okresie w tym samym tempie γ :

$$\begin{aligned} k^* &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k_t^*}{y_t} \\ i^* &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i_t^*}{y_t} \\ c^* &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_t^*}{y_t} = 1 - \frac{i_t^*}{y_t}. \end{aligned}$$

W dalszej części aneksu pominięto oznaczenia *. Ani c_t , ani i_t nie mogą rosnąć szybciej niż y_t , ponieważ $c_t \leq y_t$ oraz $i_t \leq y_t$. Podobnie k_t nie może rosnąć szybciej niż γ , ponieważ wiązałoby się to ze wzrostem i_t szybszym niż γ . Nie byłoby również optymalne, gdyby tylko jedna zmienna c_t lub k_t rosła w tempie γ , ponieważ wówczas $c_t + i_t < y_t$, czyli część budżetu pozostawałaby niewykorzystana.

Można zaobserwować, że w długim okresie ($t \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} ky_t(1+\gamma) &= ky_{t+1} = k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t = (1-\delta)ky_t + iy_t \\ k(1+\gamma-1+\delta) &= i \\ k = \frac{i}{\gamma+\delta} &= \frac{1-c}{\gamma+\delta}. \end{aligned} \tag{32}$$

Wartość parametru δ na potrzeby kalibracji można więc uzyskać przy założeniu wartości dobrej parametrów modelu otrzymanych w podrozdziale 7.1: $i = 0,19$ (lub, jeżeli chcecie

spełnić warunek $c + i = 1$, to: $i = 1 - c = 1 - 0,9 = 0,1$, $k = 2,06$, $\gamma = 0,044$ i korzystając z tego, że równanie (32) można przekształcić do postaci:

$$\delta = \frac{i}{k} - \gamma, \quad (33)$$

można przyjąć, że $\delta = \frac{0,19}{2,06} - 0,044 = 0,048$ (lub $\delta = \frac{0,1}{2,06} - 0,0044 = 0,005$). Jak zatem widać, w zależności od założonej wartości parametru i , δ jest bliska wartości oszacowanej w podroziale 7.1 lub bliska零.