Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
09 января 2020 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Физическая кинетика**
по направлению:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФФПФ**

кафедра: **теоретической физики**
курс: 4
семестр: 8

Трудоемкость:
теор. курс: вариативная часть – 3 зачет. ед.
Лекции – 30 часов Экзамен – 8 семестр
Практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы -— 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60 Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задание составили
д.ф.-м.н., доц. С. Н. Бурмистров и к.ф.-м.н., доц. Н. М. Щелкачев

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
21 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой Ю. М. Белоусов
д.ф.-м.н., профессор

ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

А. Математический аппарат

Случайные процессы. Марковские цепи. Пропагатор. Уравнения Эйнштейна-Колмогорова. Численные алгоритмы Монте-Карло.

Б. Классическая теория

I. Броуновское движение. Уравнение Ланжевена броуновской частицы. Случайные силы. Корреляторы. Среднеквадратичное смещение в классическом и квантовом пределе. Соотношение Эйнштейна.

II. Кинетика электронов. Кинетическое уравнение Больцмана в тау-приближении. Интеграл столкновений при рассеянии электронов на примесях в металле. Вычисление остаточного сопротивления. Термоэлектрические явления в металле и полупроводнике, диссипативная функция Рэлея, симметрия кинетических коэффициентов. Электрон-электронные столкновения и их вклад в сопротивление металла. Интеграл столкновений при рассеянии электронов в металле на фононах в приближении Блоха и зависимость электросопротивления и теплопроводности от температуры. Тензор электропроводности металла в магнитном поле. Эффект Холла.

III. Кинетика газов и жидкости. Кинетическое уравнение Больцмана для одноатомных газов. Свойства интеграла столкновений. Вывод уравнений гидродинамики. Законы сохранения и потоки энергии, энтропии. Тензор плотности потока импульса. Равновесное и локально-равновесное распределение. Условие применимости гидродинамики. Теплопроводность и вязкость. Поглощение звука.

IV. Кинетика фононов. Кинетическое уравнение для фононов. Теплопроводность диэлектрика в тау-приближении. Процессы переброса. Рассеяние фононов на дефектах решетки. Рассеяние фононов на границах диэлектрика. Температурное поведение теплопроводности ы диэлектрике.

V. Плазма. Уравнения Власова. Бесстолкновительная плазма. Диэлектрическая проницаемость. Затухание Ландау. Спектр плазмонов.

С. Квантовая кинетика

Неравновесная матрица плотности. Квантовое уравнение Лиувилля. Уравнения Линдблада. Теория линейного отклика Кубо. Запаздывающая, причинная и опережающая функции Грина. Вывод кинетического уравнения для электронов, рассеивающихся на примесях.

Д. Кинетика зародышеобразования

Фазовые переходы первого рода. Метастабильные состояния и зародыши новой фазы. Классическая и квантовая кинетика образования зародышей.

Е. Неупорядоченные среды

Прыжковая проводимость Мотта в полупроводниках. Кулоновская щель и закон Шкловского–Эфроса. Слабая локализация. Теория протекания. Критерий локализации Андерсона.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. – М.: Наука, 2001.

2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Ч. 2. – М.: Наука, 1978.

3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. – М.: Наука, 1995.

4. *Максимов Л.А., Полищук И.Я.* Лекции по физической кинетике: учеб. пособие. М.: МФТИ, 2007.

5. *Колоколов И.В., Образовский Е.Г., Подивилов Е.Б.* Физическая кинетика. М.: МФТИ-НГУ, 2010.

6. *Бурмистров С.Н.* Задачи по физической кинетике. – М.: Долгопрудный: ИД Интеллект, 2016.

7. *Биккин Х.М., Ляпилин И.И.* Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. Екатеринбург, 2009.

8. *Петруччионе Ф., Бройер Х.-П.* Теория открытых квантовых систем. – М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2010.

9. *Зайцев Р.О.* Введение в современную кинетическую теорию. М.: УРСС, 2017.

10. *Максимов Л.А., Ильин А.В.* Лекции по физической кинетике: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1973.

11. *Горелкин В.Н., Минеев В.П.* Введение в физическую кинетику: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1989.

12. *Горелкин В.Н., Минеев В.П.* Дополнительные главы физической кинетики: учеб. пособие.– М.: МФТИ, 1990.

Дополнительная

1. *Максимов Л.А., Полищук И.Я.* Введение в термодинамику и кинетику диэлектрических стекол: учебно-метод. пособие. — М.: МФТИ, 2005.

2. *Максимов Л.А., Полищук И.Я.* Введение в теорию фазовых переходов первого рода: учебно-метод. пособие. — М.: МФТИ, 2005.

3. *Максимов Л.А., Полищук И.Я.* Элементы теории кинетики твердых тел.: учебно-метод. пособие. — М.: МФТИ, 2005.

4. *Щелкачев Н.М., Лесовик Г.Б..* Одномерное рассеяние в квантовой механике и его приложения: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2010.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ

1. Кинетика газа

Функция распределения $f(t, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})$:

$$\int f(t, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{v} = n(t, \boldsymbol{r}) \equiv n, \quad \int \boldsymbol{v} f(t, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{v} = n\langle \boldsymbol{v} \rangle = n\boldsymbol{V} = \boldsymbol{j}.$$

Среднее любой одночастичной величины $a(t, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})$:

$$\langle a \rangle = \frac{\int a(t, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) f(t, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{v}}{f(t, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) d\boldsymbol{v}}.$$

Тепловая скорость $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$.
Плотность внутренней энергии: $\epsilon = nm\langle u^2/2 \rangle$.
Плотность потока тепла: $\boldsymbol{Q} = nm\langle u^2 \boldsymbol{u}/2 \rangle$.
Тензор плотности потока импульса: $\Pi_{ik} = nm\langle u_i u_k \rangle$.
Кинетическое уравнение Больцмана:

$$\hat{L}f = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{f}{\partial v_i} = \hat{I}_{st} f,$$

$$\hat{I}_{st} = \iiint W(1,2;1',2')\big[f(1')f(2') - f(1)f(2)\big]d\boldsymbol{v}_2 d\boldsymbol{v}'_1 d\boldsymbol{v}'_2\,;$$

$$\frac{\partial\langle na\rangle}{\partial t} + \frac{\partial\langle nv_i a\rangle}{\partial x_i} = n\langle\hat{L}\rangle + \int a\hat{I}_{st}f\,d\boldsymbol{v}.$$

Субстанциональная производная:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + V_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,.$$

Гидродинамическая форма законов сохранения:

$$\frac{dn}{dt} = -\operatorname{div}\boldsymbol{V},$$

$$\frac{dV_i}{dt} = -\frac{1}{mn}\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k} + \frac{F_i}{m}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{mnu^2}{2} = -\operatorname{div}\boldsymbol{Q} - \Pi_{ik}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}\,.$$

Локально-равновесная функция распределения:

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V})^2}{2T}\right],$$

$$\frac{n\langle u^2\rangle_0}{2} = \frac{3}{2}T, \quad \Pi^0_{ik} = nT\delta_{ik}\,.$$

Линеаризованное уравнение Больцмана: $f = f_0(1+\chi)$,

$$\hat{L}\ln f_0 = \iint\left[\chi(1') + \chi(2') - \chi(1) - \chi(2)\right]f_0(2)|\boldsymbol{v}_{12}|d\sigma d\boldsymbol{v}_2\,,$$

$$\hat{L}\ln f_0 = \frac{m}{T}\left[u_iu_k - \delta_{ik}\frac{u^2}{3}\right]\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \left[\frac{mu^2}{2} - \frac{5}{2}\right]\frac{u_i}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\,.$$

2. В тау-приближении для однокомпонентного газа:

$$\hat{I}_{st}f = -\frac{f-f_0}{\tau}\,, \quad f = f_0 - \tau\hat{L}f_0\,,$$

$$\Pi_{ik} = nT\delta_{ik}\delta_{ik} - \eta\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}\right],$$

$$\boldsymbol{Q} = -\varkappa\nabla T, \quad \eta = nT\tau, \quad \varkappa = \frac{5}{2}\frac{nT\tau}{m}\,.$$

3. Тау-приближение для легких частиц в тяжелом газе:

$$\tau_{\mathrm{tr}}^{-1} = nv\sigma_{tr} = nv\pi\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\vartheta)\sigma(\vartheta)d\vartheta.$$

Фононный вклад в электропроводность металлов:

$$\sigma = \frac{Ne^2\tau_{tr}}{m} \sim \begin{cases} 1/T, & T \gg \Theta_D\,, \\ 1/T^5, & T \ll \Theta_D\,. \end{cases}$$

Число Лоренца и закон Видемана–Франца:

$$L = \frac{\varkappa}{\sigma T} = \frac{\mathrm{const}}{e^2}\,.$$

4. Общий вид потоков в гидродинамике

$$\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{V} \quad \boldsymbol{Q} = -\varkappa\nabla T,$$

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} - \eta\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{x_L}\right) - \zeta\delta_{ik}\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}.$$

Скорость диссипации энергии в вязкой жидкости:

$$R = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right)^2 + \zeta(\mathrm{div}\,\boldsymbol{V})^2 + \varkappa\frac{(\nabla T)^2}{T}\,.$$

Скорость звука и коэффициент поглощения звука в жидкости (газе):

$$u^2 = \left(\partial P/\partial\rho\right)_S\,, \quad \alpha = \left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right)\right]\frac{\omega^2}{2\rho u^3}$$

Квантовое кинетическое уравнение

$$G = \begin{pmatrix} G^{--} & G^{-+} \\ G^{+-} & G^{++} \end{pmatrix}.$$

$$G^{-+}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = i\langle\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}',t')\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)\rangle,$$

$$G^{+-}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = -i\langle\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)\psi^+_\beta(\boldsymbol{r}',t')\rangle,$$

$$G^{--}_{\alpha\beta}\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \theta(t-t')G^{+-}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') + \theta(t'-t)G^{-+}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'),$$

$$G^{++}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \theta(t-t')G^{-+}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') + \theta(t'-t)G^{+-}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$$

Функция распределения:

$$n(t,\boldsymbol{R},\boldsymbol{p}) = -i\int G^{-+}_{\omega,\boldsymbol{p}}(t,\boldsymbol{R})\frac{d\omega}{2\pi}\,,$$

$$G^{-+}_{\omega,\boldsymbol{p}}(t,\boldsymbol{R}) = \int e^{i\omega t - i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}} G^{-+}_{\omega,\boldsymbol{p}}\left(t+\frac{\tau}{2}, \boldsymbol{R}+\frac{\boldsymbol{r}}{2};\, t-\frac{\tau}{2}, \boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right) d\boldsymbol{r}\, d\tau.$$

$$\left[\hat{G}_0(0,1)\right]^{-1}\hat{G}(1,2) = \hat{\tau}_3\delta(X_1-X_2) + \int \hat{\tau}_3\hat{\Sigma}(1,3)\hat{G}(3,2)d^4X_3\,.$$

Функция Грина для свободных и равновесных фермионов:

$$\hat{G}^{(0)}(\omega,\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \frac{1-n_F(\xi_{\boldsymbol{p}})}{\omega-\xi_{\boldsymbol{p}}+i\delta} + \frac{n_F(\xi_{\boldsymbol{p}})}{\omega-\xi_{\boldsymbol{p}}-i\delta} & 2\pi n_F(\xi_{\boldsymbol{p}})\delta(\omega-\xi_{\boldsymbol{p}}) \\ -2\pi i\big(1-n_F(\xi_{\boldsymbol{p}})\big)\delta(\omega-\xi_{\boldsymbol{p}}) & -\frac{1-n_F(\xi_{\boldsymbol{p}})}{\omega-\xi_{\boldsymbol{p}}-i\delta} - \frac{n_F(\xi_{\boldsymbol{p}})}{\omega-\xi_{\boldsymbol{p}}+i\delta} \end{pmatrix}.$$

Функция распределения Ферми: $n_F^{-1}(\xi_{\boldsymbol{p}}) = \exp(-\xi_{\boldsymbol{p}}/T) + 1$.

Формулы, предполагающиеся известными из предшествующих курсов

«Золотое» правило Ферми:

$$dW_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}|F_{fi}|^2\delta(E_i - E_f).$$

Формула Сохоцкого:

$$\frac{1}{x-i\delta} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$$

Уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}.$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} + 4\pi\boldsymbol{M}.$$

ЗАДАНИЕ 1

1. (C) Мезоскопическая система с квантовым микроконтактом представляет собой два резервуара электронов, соединенных тонким проводящим каналом с поперечным размером и продольной длиной, много меньшими длины свободного пробега. К резервуарам приложено напряжение. а) Используя представление вторичного квантования и подход Ландауэра, определить кондактанс микроконтакта в случае одного открытого канала. б)* Учесть, что в проводящем канале имеется рассеивающий центр с матрицей рассеяния S. [см. Н.М. Щелкачев, Г.Б. Лесовик, МФТИ, 2010].

2. (C) а) Используя подход Ландауэра и результаты задачи (1), выразить поток тепла через функции распределения электронов в электродах. Определить величину кванта теплового кондактанса [http://arXiv.org/abs/cond-mat/0512609v1]. б) Найти тепловой кондактанс, вычисляя поток энтропии и используя общую связь между потоком энтропии и потоком тепла в приближении линейного отклика [см. U. Sivan and Y. Imry, Phys. Rev. B **33**, 551 (1985)]. в) В квантовой механике можно ввести определение оператора плотности тока; существует ли квантовый оператор потока тепла. (Указание: вспомнить теорему Нетер)?

3. (C) Электроны рассеиваются на кулоновских центрах; потенциал взаимодействия $U(r) = -e^{-r/\lambda}\frac{Ze^2}{r}$, соответственно, $U(q) = \frac{4\pi Z^2 e^2}{q^2+\lambda^{-2}}$. Показать, что транспортное сечение рассеяния равно

$$\sigma_{\rm tr}(\theta) = \left(\frac{Ze^2}{4E_F} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta + (2k_F\lambda)^{-2}} \right)^2$$

и удельное сопротивление $\rho = \frac{m}{ne^2\tau_{\rm tr}} = Z^2 R_q a_B \frac{n_{\rm imp}}{n} F(\zeta)$, $R_q = \frac{(2\pi\hbar)^2}{e^2} \approx 25.813$ kOм, $a_B = \hbar^2/me^2 \approx 0.529$Å, $\zeta = \frac{4}{\pi}k_F^2\lambda^2$, $F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^3}\left\{ \ln(1+\pi\zeta) - \frac{\pi\zeta}{1+\pi\zeta} \right\}$. Сравнить $\sigma(\theta)$ и $\sigma_{\rm tr}(\theta)$. [Д.Ю. Протасов и др., Физика и техника полупроводников, том 47(1), 36 (2013); D. Arovas, Lecture Notes on Condensed Matter Physics (University of California, San Diego), Sec.(1.5.2).]

4. (C) а) Найти электрон-фононный вклад в проводимость металла. Линеаризовать соответствующий интеграл столкновения. Использовать метод моментов. Рассмотреть не только предел низких и высоких температур по сравнению с температурой Дебая, но и получить общую интегральную формулу. б) Обсудить эффекты Иоффе–Регеля.

5. (C) Вычислить тензор проводимости $\sigma_{\alpha\beta}(\omega, B)$ вырожденного электронного газа в магнитном поле в τ-приближении, предполагая произвольную временную зависимость электрического поля. Проверить выполнение принципа Онзагера для $\sigma_{\alpha\beta}(\omega, B)$. Найти выражение для $\sigma_{\alpha\beta}(t, B)$, где t – время, и показать, что $j_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma_{\alpha\beta}(t-t', B) E_\beta(t') dt'$. Показать, что $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} \otimes E_\beta$, где символ “$\otimes$” обозначает свертку. [D. Arovas, Lecture Notes on Condensed Matter Physics (University of California, San Diego), Sec.(1.7.3).]

6. (С) Модель Лоренца. Показать, что в отсутствии внешних сил в τ – приближении распределение по скоростям $\delta n(\mathbf{v},t) = \int \delta f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) d\mathbf{r}$ релаксирует экспоненциально, а не диффузионным образом. Модифицируем τ – приближение: $\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\tau}\left(f - \langle f\rangle\right)$, где $\langle\ldots\rangle$ – усреднение по направлениям скорости. Показать, что в этом случае на больших временах решение уравнения Больцмана имеет диффузионный вид: $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = (4\pi Dt)^{-3/2} e^{-r^2/4Dt}\frac{\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)}{4\pi v_0^2}\theta(t)$. Начальное условие: $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \delta(\mathbf{r})\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)$, где $D = \frac{1}{3}v_0^2\tau$. [D. Arovas, Lecture Notes on Nonequilibrium Statistical Physics (University of California, San Diego), Sec.(5.6.1).]

7. (Л) Найти электрический ток и поток тепла в электронном газе в линейном приближении по электрическому полю и градиенту температуры. Найти все кинетические коэффициенты в τ – приближении, предполагая, что газ вырожден. Вывести выражения для сопряженных сил, исходя из уравнения для производства энтропии. Убедиться в справедливости принципа Онсагера для матрицы кинетических коэффициентов. Получить соотношение Видемана–Франца. [см. Биккин Х.М., Ляпилин И.И., Екатеринбург, 2009].

8. (Л) а) Получить из кинетического уравнения Больцмана выражение для потока импульса и найти тензор плотности потока импульса. Как изменится уравнение для потока импульса, если в τ-приближении учесть упругие столкновения на вмороженном беспорядке, как это делалось для электронного газа? Получить в гидродинамическом подходе проводимость Друде для металла. б) Определить, какая часть тензора плотности потока импульса, который был найден в (а) и выражен через функцию распределения, отвечает за вязкость. Найти коэффициент вязкости и температуропроводности одноатомного газа в τ-приближении. Сравнить коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости в τ-приближении. Вывести уравнение Навье–Стокса, учесть слагаемые, отвечающие за проводимость Друде.

9. (С,Л) Численные методы Монте-Карло. а) Детально обсудить происхождение условия детального баланса и алгоритм Метрополиса. Рассмотреть одномерную модель Изинга. Как численно найти свободную энергию методом Монте-Карло? *Сделать численный расчёт и сравнить результат с точным решением этой модели (+1 балл за работу в семестре). б) Пропагатор пуассоновского случайного процесса удовлетворяет уравнению: $\partial_t T(n,t|n',t') =$

$\gamma T(n-1,t|n',t') - \gamma T(n,t|n',t')$. В качестве n может выступать, например, число излученных фотонов при эмиссии. Решить уравнение. Найти корреляционные функции. Обсудить метод динамического Монте-Карло. Как численно построить соответствующий случайный процесс $N(t)$? *Проверить, что дисперсии и временные корреляторы n, найденные с помощью ансамбля случайных траекторий и с помощью $T(n,t|n',t')$, найденного выше, совпадают (+1 балл за работу в семестре).

ЗАДАНИЕ 2

10. (Л) а) Вычислить коэффициент диффузии тяжелого газа в легком. Получить соотношение Эйнштейна между подвижностью и коэффициентом диффузии. б) С помощью уравнения Фоккера–Планка определить подвижность тяжелой частицы в легком газе. с) Свести кинетическое уравнение со столкновительным членом типа Фоккера–Планка в импульсном пространстве к уравнению диффузии (Смолуховского) в реальном пространстве и обсудить соотношения Эйнштейна [параграф 6.2, Колоколов И.В., Образовский Е.Г., Подивилов Е.Б., МФТИ-НГУ, 2010].

11. (С) Имеется плоская стенка, которая с небольшой скоростью движется через равновесный газ фермионов. Столкновения фермионов со стенкой носят зеркальный характер. Найти силу сопротивления, испытываемою стенкой. Тоже самое сделать для бозонов. Рекомендуется перед решением этих задач вспомнить определение тензора плотности потока импульса и обсудить его физический смысл. Как изменится решение задачи, если стенка является полупроницаемой мембраной, т.е., с вероятностью $D < 1$ частица может проходить сквозь стенку? Обсудить случай диффузного отражения от стенки.

12. (С) а) Найти среднеквадратичное отклонение броуновской частицы, исходя из уравнения Ланжевена. Найти временной коррелятор скоростей броуновской частицы. Получить соответствующее уравнение Фоккера–Планка. б) Показать, что в жидкости коэффициент самодиффузии в общем случае интегрально выражается через временной коррелятор скорости частиц. с) Исходя из качественного анализа решений уравнения Навье–Стокса, показать, что временной коррелятор скорости частиц в жидкости или плотном газе имеет неэкспоненциальную, как в модельной задаче

(a), а универсальную степенную асимптотику на больших временах: $\propto 1/t^{d/2}$, где d – это размерность пространства. Можно ли определить коэффициент самодиффузии в двумерной однокомпонентной жидкости?

13. (C) В моделе Калдейры–Леггетта частица массой M находится в потенциале $U_0(q)$ и взаимодействует с внешней средой–термостатом, который представляет собой бесконечный набор $\{\alpha\}$ фононов с частотами ω_α. Гамильтониан среды:

$$H_m = \sum_\alpha \left(\frac{m\dot{x}_\alpha^2}{2} + \frac{m\omega_\alpha^2 x_\alpha^2}{2} \right).$$

Сила, действующая на частицу со стороны каждого фонона, пропорциональна отклонению от равновесия, и потенциал взаимодействия равен

$$U = \sum_\alpha qC_\alpha x_\alpha \,.$$

Спектральная плотность фононных колебаний определяется как

$$J(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_\alpha \frac{C_\alpha^2}{m\omega_\alpha} \delta(\Omega - \omega_\alpha)$$

Предполагая $J(\Omega) = \eta\Omega$, исключить переменные среды и найти эффективное уравнение движения частицы в среде, коэффициент трения, случайную силу и коррелятор случайной силы. Проверить, что спектральная плотность коррелятора случайной силы соответствует флуктуационно-диссипационной теореме. [Бурмистров С.Н. Задачи по физической кинетике. – М.: Долгопрудный: ИД Интеллект, 2016.]

14. (C) Используя модель Калдейры–Леггетта вывести уравнение Линдблада. Гамильтониан системы $\hat{H}_S = \hbar\Omega_s \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Гамильтониан резервуара $\hat{H}_R = \sum_k \hbar\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$. Гамильтониан взаимодействия $\hat{H}_I = \sum_k \hbar\gamma_k (\hat{b}_k^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{b}_k)$.

15. (C) Неравновесные состояния ферми-жидкости описываются функцией распределения квазичастиц, зависящей от координат, импульсов и времени. При нулевой или достаточно низкой температуре столкновения квазичастиц настолько редки, что ими можно полностью пренебречь. Пользуясь кинетическим уравнением для функции распределения, определить условие, когда возможно распространение волн бесстолкновительного нуль-звука,

и его скорость. Считать, что функция Ландау для взаимодействия квазичастиц не зависит от импульсов квазичастиц. [Бурмистров С.Н. Задачи по физической кинетике. – М.: Долгопрудный: ИД Интеллект, 2016.].

16. (Л) а) Вычислить тензор диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы. Найти закон дисперсии поперечных колебаний в плазме. Описать затухание Ландау. б) (С) В графене, представляющий собой монослой графита, найти продольную диэлектрическую проницаемость и дисперсию продольных плазменных колебаний–плазмонов. [Бурмистров С.Н. Задачи по физической кинетике. – М.: Долгопрудный: ИД Интеллект, 2016.] с)* Найти закон дисперсии поперечных колебаний в плазме, используя метод функций Грина, вычисляя соответствующий поляризационный оператор и исследуя полюса экранированного взаимодействия. Сравнить ответ с пунктом (а) [Л.С. Левитов, А.В. Шитов, Физматлит, 2002]. (+1 балл за работу в семестре)

17. (С) Частица массой M в метастабильном состоянии отделена потенциальным барьером, который удовлетворяет условию квазиклассичности, и вероятность распада настолька мала, что частица все время находится в термодинамическом равновесии с температурой T. Найти зависимость скорости распада метастабильного состояния с экспоненциальной точностью. Выразить ответ в терминах эффективного (евклидова) действия, определенного для движения частицы в инвертированном потенциале. Определить температуру, при которой термоактивационный механизм распада сменяется квантовым режимом распада. [Бурмистров С.Н. Задачи по физической кинетике. – М.: Долгопрудный: ИД Интеллект, 2016.]

18. (Л) а) Вывести выражение для друдевской проводимости металла, используя формулу Кубо. Найти также проводимость в пределе высоких частот. б)* Выразить (аномальную) холловскую проводимость через кривизну Берри, используя формулы Кубо (+1 балл за работу в семестре).

19. (С) а) Решить уравнение Линдблада для эволюции матрицы плотности двухуровневой системы, когда релаксационный член описывает потери на спонтанную эмиссию (естественная ширина спектральной линии). б) Пусть релаксационный член описывает дефазировку. Что измениться в решении, какая фаза сбивается?

с) Рассмотреть некогерентную накачку в качестве линдбладиана. д) Рассмотреть задачу (а), но с дополнительными членами в уравнении Линдблада, соответствующими когерентной накачке. Вывести уравнения Блоха. (*) Найти форму спектральной линии. Что такое молловский триплет? е)* Вывести уравнение Максвелла-Блоха для одномодового лазера из уравнений Линдблада. Обсудить условия лазерной генерации. (+1 балл за работу в семестре)

Упражнения

1. Простейшей модели погоды соответствует дискретный марковский процесс, показанный на рисунке 1. Найти матрицу переходов, предельное распределение. Смоделировать на компьютере соответствующий случайный процесс.

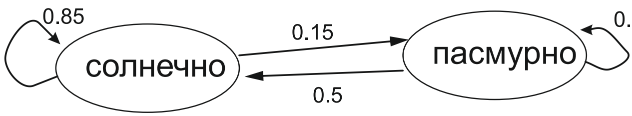

Рис. 1

2. Дискретный марковсковский процесс (случайное блуждание) соответствует графику, показанному на рис. 2. Исследовать, возможен ли возврат в какое-нибудь состояние за конечное время, если а) p $<$ 0.5, б) p $>$ 0.5, с) p $=$ 0.5.

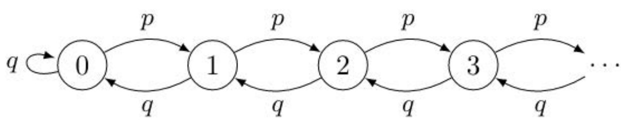

Рис. 2

3. На рис. 3 показана схема последовательных химических реакций. Написать соответствующую систему дифференциальных уравнений, описывающую кинетику реакции компонент X и Y. Расходом компоненты A пренебрегать. Проинтегрировать в общем виде дифференциальные уравнения. Найти частоту колебаний.

(В химии данная модель соответствует реакциям горения углеводородов – модель Франка–Каменецкого. В биологии эта модель известна, как "хищник-жертва" Лотки–Вольтерра.) [Ромашев Ю.А. и Скоробогатов Г.А. Экологическая химия – 2011, 20(3): 129–149].

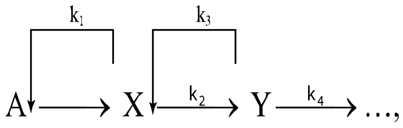

Рис. 3

4. Гамильтониан, описывающий взаимодействующие волны имеет вид: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где $\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}^+_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}$, и
$\hat{V} = \frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{l},\mathbf{m}} (V_{\mathbf{q};\mathbf{l},\mathbf{m}} \hat{a}^+_{\mathbf{l}} \hat{a}^+_{\mathbf{m}} \hat{a}_{\mathbf{q}} + V^*_{\mathbf{q};\mathbf{l},\mathbf{m}} \hat{a}^+_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{m}} \hat{a}_{\mathbf{l}}) \Delta(\mathbf{q} - \mathbf{l} - \mathbf{m})$.
Используя уравнение Паули (основное кинетическое уравнение) и золотое правило Ферми, получить интеграл столкновений в формализме кинетического уравнения. [Колоколов И.В., Образовский Е.Г., Подивилов Е.Б. МФТИ-НГУ. 2010.]

5. Доказать, что локально-равновесное распределение Максвелла обращает в нуль интеграл столкновений. Проверить это утверждение для электрон-электронного и электрон-фононного интегралов столкновений.

6. Доказать H-теорему Больцмана для газа сталкивающихся молекул. Проверить, что H-теорема Больцмана справедлива в τ-приближении.

7. Доказать, что при локально-равновесном распределении отсутствует теплопроводность.

8. Вычислить коэффициент диффузии легкого газа в тяжелом. Получить соотношение Эйнштейна между подвижностью и коэффициентом диффузии.

9. Доказать, что уравнение кинетического баланса Паули сохраняет нормировку вероятности. Доказать, что уравнение Паули приводит к возрастанию энтропии. Решить уравнение Паули для двухуровневой системы.

10. * Вычислить коэффициент теплопроводности диэлектрика в различных областях температуры. Качественно исследовать температурную зависимость коэффициентов переноса в металлах (рассмотреть электрон-электронные, электрон-примесные и электрон-фононное рассеяния).

Срок проведения 1-й контрольной работы и сдачи 1-го задания
16.03–23.03.2020 г.

Срок проведения 2-й контрольной работы и сдачи 2-го задания
12.05–18.05.2020 г.

Подписано в печать 09.01.2020. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 0,8. Тираж 110 экз. Заказ № .
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru