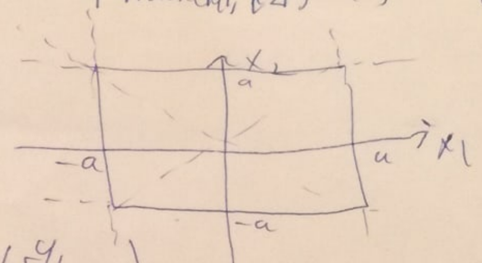
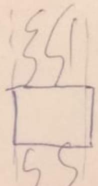
$\boxed{\text{N1}}$ $y \in \mathbb{R}^2$ $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x_1|, |x_2|) = a\}$ $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

$\Pi p_S(y) = \arg\min_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$



- if $|y_1| \leq a$, $|y_2| \geq a$

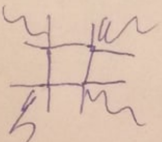


$\Pi p = \begin{pmatrix} y_1 \\ a\,\mathrm{sgn}\, y_2 \end{pmatrix}$

if $|y_1| \geq a$, $|y_2| \leq a$

$\Pi p = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{sgn}\, y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

if $|y_1| \geq a$, $|y_2| \geq a$



$\Pi p = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{sgn}\, y_1 \\ a\,\mathrm{sgn}\, y_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} y_1 \theta(a - |y_1|) + a\,\mathrm{sgn}\, y_1 \cdot \theta(|y_1| - a) \\ y_2 \theta(a - |y_2|) + a\,\mathrm{sgn}\, y_2 \cdot \theta(|y_2| - a) \end{pmatrix}$

при ~~строгих~~ ~~нер-х~~ нерав-вах

! может быть две проекции, когда $y_1 = y_2$, $|y_1| < a$, $|y_2| < a$

- if $|y_1| < a$, $|y_2| < a$, $|y_1| \neq |y_2|$, $y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Pi p = \arg\min \left(\min \left\{ \left\| \begin{matrix} y_1 - a \\ y_2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} y_1 + a \\ y_2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 - a \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 + a \end{matrix} \right\| \right\} \right)$

$= \arg\min_{x = \left\{ \binom{a}{0}, \binom{-a}{0}, \binom{0}{a}, \binom{0}{-a} \right\}} \|y - x\|_2^2$

$= \begin{pmatrix} y_1 \cdot \theta(|y_2| - |y_1|) + a\,\mathrm{sgn}(y_1)\, \theta(|y_1| - |y_2|) \\ y_2\, \theta(|y_1| - |y_2|) + a\,\mathrm{sgn}(y_2)\, \theta(|y_2| - |y_1|) \end{pmatrix}$

if $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — четыре на выбор $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$

Ответ: 1) $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Pi p = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \right\}$

2) $|y_1| < a$, $|y_2| < a$, $|y_1| = |y_2|$ $\Pi p = \left\{ \begin{pmatrix} a\,\mathrm{sgn}\, y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ a\,\mathrm{sgn}\, y_2 \end{pmatrix} \right\}$

3) $y \in \partial S \Rightarrow \Pi p = y$

4) $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \{ y_1, y_2 : |y_1| < a, |y_2| < a, |y_1| = |y_2| \}, \partial S \right\} \Rightarrow \Pi p = \begin{pmatrix} y_1 \theta(a - |y_1|) + a\,\mathrm{sgn}(y_1)\, \theta(\\ y_2 \theta(a - |y_2|) + a\,\mathrm{sgn}\, y_2 \cdot \theta \end{pmatrix}$

$\Pi p = \begin{pmatrix} y_1\, \theta(|y_2| - |y_1|) + a\,\mathrm{sgn}(y_1)\, \theta(|y_1| - |y_2|) \\ y_2\, \theta(|y_1| - |y_2|) + a\,\mathrm{sgn}(y_2)\, \theta(|y_2| - |y_1|) \end{pmatrix}$ при $|y_1| < a$, $|y_2| < a$, $|y_1| \neq |y_2|$

Нужно проверить предельные случаи

$\boxed{№3}$. $f(x_{k+1}) \le f(x_k)$ для МПГ, если $f(x)$ – L-гл.

$\langle \pi_Q(a) - a, x - \pi_Q(a) \rangle \ge 0$

$x_{k+1} = /L\text{-гладкая}/ = \min_{y \in Q} \|y - (x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k))\|_2^2$

$f(x)$ – опр, непр dif и огр снизу на ! выпуклом, замкнутом мн-ве X, ее градиент удов. $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \le L\|x-y\|$
$\{x^k\}$ – построена методом проекции градиента с $\forall x^0 \in X$ с шагом $\alpha_k = \bar{\alpha}$: $0 < \bar{\alpha} \le \frac{2}{L}$
тогда наступ релаксация
$\& \lim_{k\to\infty} \underbrace{\|\pi_X(x - \alpha\nabla f(x)) - x\|}_{\Theta(x)} = \lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$

Д-во
if $\exists k$: $\Theta(x^k) = 0$, то $x^k \in S$ // $x^k = x^* \in X^* \Rightarrow$ итер. прус заканчивается

поэтому считаем, что $\Theta(x^k) = \|x^{k+1} - x^k\| > 0$ $\forall k \ge 0$ с

Минимизация по другому: $f(x^{k+1}) - f(x^k) \le \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2$

Из геометрии св-ва
$\langle x^{k+1} - x^k + \alpha_k \nabla f(x_k), x - x^{k+1} \rangle \ge 0$
$x = x^k$
$\Rightarrow \langle \alpha_k \nabla f(x_k), x^k - x^{k+1} \rangle \ge \|x^{k+1} - x^k\|^2$

усилим
$\Rightarrow$
$f(x^{k+1}) - f(x^k) \le -\frac{1}{\alpha_k}\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2$

т.е. $f(x^k) - f(x^{k+1}) \ge \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{L}{2}\right)}\|x^{k+1} - x^k\|^2$

т.к. $\alpha_k = \bar{\alpha}$: $0 < \bar{\alpha} \le \frac{2}{L} \Rightarrow \quad > 0$

$\Rightarrow \boxed{f(x^k) - f(x^{k+1}) \ge 0}$

$\Rightarrow$ монотонно убывает $\Rightarrow$
+ огр величина $\Rightarrow$ сходится
$\Rightarrow \lim f(x_k) - f(x_{k+1}) = 0$
и по Th о 2х милиц.
$0 \ge const \underbrace{\|x^{k+1} - x^k\|^2}_{\to 0} \ge 0$

$y_2 \circ \theta(|y|-y_2)+\alpha y_3 y^2)_2$

$\boxed{N2}$ $\min (x+1)^2+(y-3)^2$ $\quad$ МПГ $(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}=\bar{x}_0$

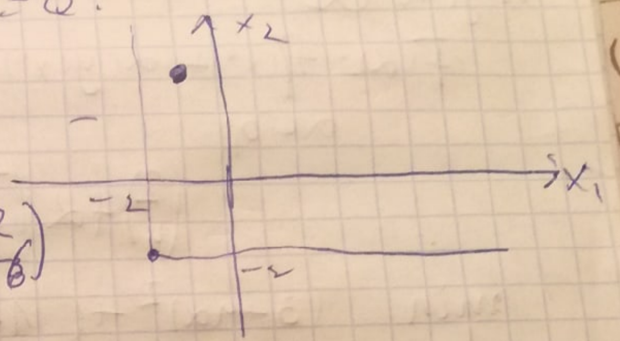
$\boxed{\min_{\text{елозы}} \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}}$ $\quad$ s.t $\max(-x,-y)=2$ $\quad$ МЧГ $(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\bar{x}_0$

$\Updownarrow$

$x_1^2+2x_1+$
$+x_2^2-6x_2+9$ $\quad$ $\min (x_1+1)^2+(x_2-3)^2=f(x)$

$f=x^TAx+b^Tx+c$ $\quad$ s.t $\max(-x_1,-x_2)=2 = Q?$

s.t



$\boxed{МПГ}$ $\quad x_{k+1}=\Pi p_Q(x_k-\alpha_k \nabla f(x_k))$

$\nabla f(x)=2(x_1+1)+2(x_2-3)=2\bar{x}+\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$

$\alpha_k=\underset{\alpha>0}{\arg\min} f(x_k-\alpha\nabla f(x_k))$

$$\alpha_k=\frac{2x_k^T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\left(2\bar{x}_k+\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}\right)+(2,-6)\cdot\left(2\bar{x}_k+\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}\right)}{2\left(2\bar{x}_k+\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}\right)\cdot\left(2\bar{x}_k\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}\right)}$$

$$\alpha_0=\frac{\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix}+(2,-6)\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix}}{2\cdot\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix}^2}=\left|\frac{24+72-8+72}{320}=\frac{1}{2}\right.$$

$y_0=x_0-\alpha_0\nabla f(x_0)=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+4\\+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$\nabla f(y_0)=0$

$x_1=\Pi p_Q(y_0)=\underset{y\in Q}{\arg\min}\left\|y-\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot 0\right\|_2^2=\underset{y\in Q}{\arg\min}\|y-(3$

$x_1=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ //

//

МУГ

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1+2 \\ 2x_2-6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \to \min \\ \max(-x_1, -x_2) = 2 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 6x_1 - 12 + 2x_2 - 8$$

$$6x_1 + 2x_2 - 20 \to \min$$

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$ очев. идея

$$\boxed{y(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Ищем α

$$F(\alpha) = f\big(x^k + \alpha(y(x^k) - x^k)\big) \to \min$$

$\alpha \in [0,1]$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4\alpha \\ 4-6\alpha \end{pmatrix}$$

$$\min \quad (3-4\alpha)^2 + (1-6\alpha)^2$$

$$6 - 8\alpha + 2 - 12\alpha = 0$$

$$8 = 20\alpha$$

$$\boxed{\alpha_0 = 0{,}4}$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0(y(x^0) - x^0)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 8/5 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 14/5 \\ -14/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{14}{5}x_1 - \frac{28}{25} - \frac{14}{5}x_2 + \frac{112}{25}$$

$$= \frac{14}{5}x_1 - \frac{14}{5}x_2 + \frac{84}{25}$$

— не имеет конечного (огр) min на Q, т.к. Q — неогр

№3