

Министерство образования Российской Федерации

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ В ПЕЧАТЬ

Проректор по учебной работе

_____ Ю. А. Самарский

" ____ " _____ 2010 год

Одномерное рассеяние в квантовой механике и его
приложения

Учебное пособие

Заведующий кафедрой
теоретической физики

Ю. М. Белоусов

Составители:

Н. М. Щелкачев
Г. Б. Лесовик

МОСКВА 2010

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра теоретической физики

Одномерное рассеяние в квантовой механике и его приложения

Учебное пособие

МОСКВА 2010

Составители: Н. М. Щелкачев, Г. Б. Лесовик
УДК 530.145

Рецензент
??? академик РАН Л.Б. Окунь

Одномерное рассеяние в квантовой механике и его приложения:

Учебное пособие/ Сост. Н.М. Щелкачев, Г.Б. Лесовик. – М.: МФТИ, 2010. – ?? с.

В пособии рассмотрены основы теории одномерного рассеяния в квантовой механике и его приложения к теории электронного транспорта в наноструктурах. Пособие предназначено для студентов, изучающих курс ФИЗИКА КВАНТОВЫХ НИЗКОРАЗМЕРНЫХ СТРУКТУР, и аспирантов, специальность которых связана с указанными вопросами теории конденсированного состояния.

УДК 530.145

©Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2010

Оглавление

1. Введение	5
2. Одномерная квантовая механика и матрицы распространения	9
2.1. Волновые функции непрерывного спектра	9
2.1.1. Матрицы распространения.	9
2.1.2. Унитарность матрицы рассеяния	14
2.2. Симметрии гамильтониана и матриц распространения	15
2.2.1. Симметрия по отношению к обращению времени	15
2.2.2. Симметрия по отношению к инверсии	18
2.3. Фейнмановский подход к теории рассеяния	19
2.4. Рассеяние с учетом спина	20
3. Точно решаемые задачи одномерного рассеяния.	24
3.1. δ -барьер.	24
3.2. Прямоугольный барьер	27
3.3. Двойной барьер – интерферометр Фабри-Перо	29
3.4. Рассеяние на “ферромагнитном” барьере	35
3.5. Решение задачи рассеяния методом трансформатриц	37
3.5.1. Интегральное произведение трансформатриц .	37
3.5.2. Интерферометр Фабри-Перо, решение задачи рассеяния методом трансформатриц	40
3.5.3. Модель Кронига-Пени — спектр	41
3.5.4. Прямоугольный барьер, решение задачи рассеяния методом трансформатриц	42
3.5.5. Туннелирование через потенциальную гребенку	44

4. Квантовые контакты	47
4.1. Ток через квантовый точечный контакт	47
4.2. Квантование кондактанса	53
4.3. Размытие ступеней кондактанса за счет туннелирования через эффективный потенциал.	55
4.4. Транспортные свойства контактов с резонансным потенциалом.	56
4.5. Эффект Ааронова-Бома	58
5. Метод вторичного квантования и матрицы рассеяния	62
5.1. Оператор тока	62
5.2. Средний ток	68
5.3. Дробовой шум	69
6. Приложение	73
6.1. Нормировки плоских волн	73
6.2. Среднее от произведения четырех операторов рождения и уничтожения.	75
6.3. Вторичное квантование в «повернутом» базисе операторов рождения и уничтожения	76

Глава 1

Введение

По мере развития мезоскопии — физики объектов, промежуточных по своим свойствам между микроскопическими и макроскопическими, и нанофизики — с еще меньшими масштабами, вплоть до атомных, появляются новые задачи, которые ранее либо не привлекали особого внимания, либо для изучавшихся ранее систем представлялись нереалистичными. Одной из таких задач является описание не только среднего тока, но и флуктуаций, и, в целом, статистики переноса заряда в квантовых мезо- нано- проводниках.¹ Полное описание статистики флуктуаций является задачей, интересной не только с чисто научной точки зрения, но и с практической, так как применение микроэлектронных устройств на мезо- и нано- масштабах ставит реальную проблему минимизации шумов и создание максимально предсказуемых квантовых устройств. С другой стороны, можно рассматривать флуктуации не просто как нечто, от чего следует по возможности избавиться, но как объект, позволяющий чрезвычайно детально изучить квантовые проводники.

В свою очередь, для описания электронного квантового транс-

¹ Термин мезоскопика в буквальном переводе с греческого означает «мезодускопика». Квантовая мезоскопика изучает явления, которые проявляются на масштабах, промежуточных между микро- и макроскопическими. Иными словами, это масштабы больше атомных, но меньше характерного масштаба длины, на котором уже можно пренебречь квантовыми корреляциями. Для точечных контактов этот верхний масштаб — порядка длины сбоя фазы или длины энергетической релаксации. В системах с кулоновской блокадой этот масштаб определяется емкостью.

порта в последнее время чрезвычайно широко и успешно применяется подход, опирающийся на матрицу рассеяния (хорошо известный пример – формула Ландауэра). Этот подход особенно хорошо применим для описания когерентных мезоскопических проводников, в которых характерный размер области падения напряжения L много меньше всех неупругих длин. Для таких проводников практически бессмысленно говорить о величинах типа локальной проводимости и задача ставится именно о транспорте - переносе электронов из пункта А (левый резервуар) в пункт Б (правый резервуар). В этом случае перенос электронов через проводник есть чисто квантовомеханическая задача. Отличие данного подхода от более традиционных, например с использованием кинетического уравнения, формулы Кубо, функций Грина, диаграммной техники и т.д., состоит главным образом в следующем. Полная проводимость системы (или полный ток), как оказывается, может быть выражена через квантовомеханическую прозрачность проводника (в общем случае – через матрицу рассеяния) и числа заполнения точных электронных состояний рассеяния, которые определяются параметрами в берегах (резервуарах). На первый взгляд такой способ описания транспорта всего лишь переносит проблему вычисления локальной или нелокальной проводимости на вычисление прозрачности, а эта задача ничуть не менее сложна. Это однако не совсем так. Во-первых, для многих случаев с простой геометрией образца и простым потенциалом рассеяния прозрачности можно вычислить аналитически, и это вычисление проще и нагляднее, чем, скажем, вычисление функции Грина. Во вторых, часто удается сделать разумное предположение о матрице рассеяния и получить удовлетворительное описание эксперимента. Для неупорядоченных (грязных) проводников со сложным потенциалом рассеяния вероятности прохождения удастся эффективно описать статистически. Наконец, даже если матрица рассеяния не известна (т.е. не вычислена для конкретного потенциала рассеяния), формально удастся описать всю статистику переноса заряда за большие времена, так же как и средний ток. Таким образом, если известна прозрачность, то известен не только кондактанс G (т.е. обратное сопротивление $G = 1/R$), но и спектральная плотность флуктуаций тока $S(\omega)$ на малых частотах, функция распределения заряда $P(Q)$, перенесенного за некоторое фиксированное время и т.д. При этом для некоторых ситуаций удастся вывести общие соотношения, типа Флуктуационно-

диссипационной теоремы, связывающие, например, средний ток и неравновесные флуктуации. В традиционном подходе потребовалось бы всякий раз производить новое вычисление для S , P и других величин, отличных от среднего тока.

Процессы распространения и рассеяния волн на препятствиях, в частности, интерференция и дифракция, не описываются в терминах классической механики. Для описания этих процессов используется язык амплитуд рассеяния. Модуль амплитуды рассеяния характеризует вероятность распространения волны в заданном направлении. Фаза амплитуды рассеяния несет информацию о эффективной “длине” пути, который прошла волна; классический аналог фазы – действие классической механики. Состояние волны описывается волновой функцией. Чтобы найти амплитуду рассеяния в волновой механике, нужно найти асимптотики волновой функции вдали от рассеивателя. Аналитическое решение этой задачи известно в ограниченном числе случаев, и некоторые из этих случаев мы рассмотрим. Численное решение задачи рассеяния обычно нетрудно найти в случае рассеяния на барьерах, внутри которых нет «полостей», где волна может распространяться свободно. В противном случае в амплитуде рассеяния возникают резонансы, точное описание которых требует значительных вычислительных ресурсов. Существует стандартная аппроксимация Брейта-Вигнера для амплитуды рассеяния вблизи резонансов. Однако, это приближение работает не для всех резонансов и параметры аппроксимации Брейта-Вигнера далеко не всегда легко вычислить. Вычисления становятся особенно громоздкими при наличии нескольких центров рассеяния, так как в этом случае возникает сложная структура резонансов. Существует удобный способ нахождения амплитуд рассеяния, позволяющий обходить эти трудности: рассеивающий потенциал разбивают на простые составные части, амплитуды рассеяния на которых легко найти. Из амплитуд рассеяния составляется так называемая трансфер-матрица. Можно показать, что трансферматрица рассеивающего потенциала равна произведению трансфер-матриц отдельных его частей. Численное решение задачи рассеяния обычно нетрудно найти в случае рассеяния на барьерах, внутри которых нет “полостей”, где волна может распространяться свободно. В противном случае в амплитуде рассеяния возникают резонансы, точное описание которых требует значительных вычислительных ресур-

сов.² Существует удобный способ нахождения амплитуд рассеяния, позволяющий обходить эту трудность: рассеивающий центр разбивают на простые составные части амплитуды рассеяния на которых легко найти. Из амплитуд рассеяния составляется так называемая трансфер-матрица. Можно показать, что трансферматрица рассеивающего центра равна произведению трансфер-матриц отдельных его частей. Например, таким способом обычно находят амплитуды прохождения света через линзы с просветляющими пленочными покрытиями [1].

Амплитуды рассеяния зависят от направлений падающей и отраженных волн и их можно считать матрицами с индексами, однозначно связанными с падающей и отраженной волнами. Матрицу составленную из амплитуд рассеяния обычно называют матрицей рассеяния. Формализм матрицы рассеяния играют ключевую роль, например, в квантовой механике при построении теории рассеяния элементарных частиц [2], в теории рассеяния электромагнитных волн [1] и в теории электронного транспорта в мезоскопических (нано)структурах [3, 5, 4]. Ниже будут изложены основы этого формализма и проиллюстрированы соответствующими примерами.

Обычно в курсах квантовой механики рассматривают теорию рассеяния очень формально, особенно одномерное рассеяние, и после изучения этих курсов часто остается ощущение, что, во первых, теории трехмерного и одномерного рассеяния практически не связаны друг с другом, и, во вторых, одномерное рассеяние — это академическое упражнение не имеющее особого отношения к реальной жизни. Одна из целей данного пособия — показать актуальность теории одномерного движения и также продемонстрировать, что теория рассеяния едина [т.е., нет отдельных теорий многомерного и одномерного рассеяния], если ее сформулировать на языке матриц рассеяния.

²Вообще говоря, существует аппроксимация Брейта-Вигнера амплитуды рассеяния вблизи резонансов. Однако, это приближение работает далеко не для всех резонансов и параметры аппроксимации Брейта-Вигнера далеко не всегда легко вычислить.

Глава 2

Одномерная квантовая механика и матрицы распространения

2.1 Волновые функции непрерывного спектра

2.1.1 Матрицы распространения.

Изложение теории матриц прохождения мы начнем с рассмотрения самого простого случая – одномерного рассеяния в квантовой механике. Пусть движение частиц происходит вдоль оси x . Известно, что если области $x \rightarrow \pm\infty$ являются классически разрешенными, т.е., энергия частиц E в этих областях больше потенциальной энергии $U(x)$, то состояния непрерывного спектра будут двухкратно вырождены, см. [2]. Физически это вырождение связано с тем, что при фиксированной энергии имеется как бы два независимых типа рассеивающихся частиц: частицы приходящие из области $x \rightarrow -\infty$ и из области $x \rightarrow \infty$. Ниже мы убедимся в том, что волновые функции, описывающие рассеяние частиц, являются ортонормированным базисом в пространстве волновых функций непрерывного спектра. Это свойство сохраняется в случае многомерного рассеяния. Часто волновые функции из этого базиса называют *состоя-*

ниями рассеяния. Существует и другой эквивалентный термин — состояния Липмана-Швингера. Для удобства мы будем нормировать состояния рассеяния на дельта-функцию от энергии, $\delta(E - E')$ (см. приложение 6.1). Волновая функция, описывающая состояние одномерного рассеяния, должна вдали¹ от барьера иметь вид суперпозиции плоских волн, представляющих падающую и рассеянную волны. На рисунке 2.1 схематично показано рассеяния частицы в одномерной квантовой механике на потенциальном барьере. Здесь r и t (рис.2.1а) — амплитуды отражения и прохождения через барьер частицы, падающей на барьер слева, и r' и t' (рис.2.1б) — амплитуды отражения и прохождения через барьер частицы, падающей на барьер справа.

В общем случае волновая функция непрерывного спектра удовлетворяет уравнению Шредингера,

$$\hat{H}\psi_E(x) = E\psi_E(x), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x), \quad (2.1)$$

где $U(x)$ — потенциал рассеивателя. Волновая функция имеет следующий асимптотический вид вдали от барьера:²

$$\psi_E(x) = \begin{cases} a_1 \frac{e^{ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} + b_1 \frac{e^{-ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}}, & \text{если } x \rightarrow -\infty; \\ a_2 \frac{e^{ik_2 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} + b_2 \frac{e^{-ik_2 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}}, & \text{если } x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\hbar k_1(E) = \sqrt{2\pi(E - U_{-\infty})}$, $\hbar k_2(E) = \sqrt{2\pi(E - U_{+\infty})}$ и $U_{\pm\infty} = U(x \rightarrow \pm\infty)$; $v_{1(2)} = \hbar k_{1(2)}/m$ и $a_{1(2)}$, $b_{1(2)}$ — функции от энергии (ниже мы их выразим через амплитуды рассеяния).

Плотность потока вероятности частицы с волновой функцией ψ_E равна³

$$j_E = \frac{1}{2m} [\psi_E^*(\hat{p}\psi_E) + \psi_E(\hat{p}\psi_E)^*], \quad (2.3)$$

где $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ — оператор импульса. Известно, что вектор j сохраняется, так что в произвольной точке x , $\frac{\partial}{\partial x}j = 0$ [2]. Поэтому,

¹Терминология “вдали” от барьера формально означает, что в этой области уже с хорошей точностью применимо квазиклассическое приближение.

²Здесь мы не предполагаем, что ψ обязательно состояние рассеяния. Произвольная волновая функция непрерывного спектра имеет, вообще говоря, асимптотический вид (2.2), если нет магнитного поля.

³Полный поток вероятности равен $\int j(E)dE$.

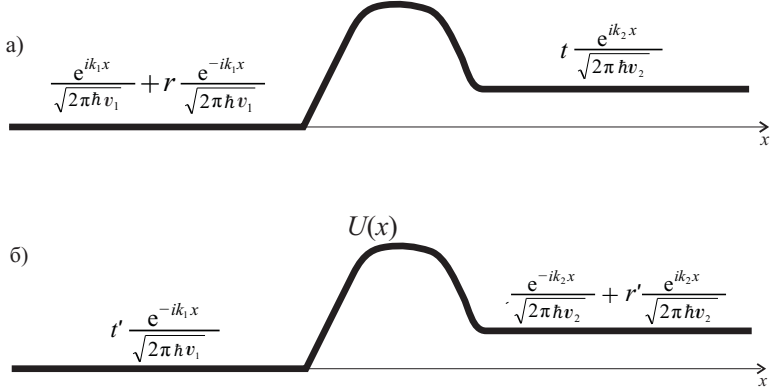


Рис. 2.1. На рисунке схематично показано рассеяния частицы в одномерной квантовой механике на потенциальном барьере. Здесь r и t (рис.2.1а) — амплитуды отражения и прохождения через барьер частицы, падающей на барьер слева, и r' и t' (рис.2.1б) — амплитуды отражения и прохождения через барьер частицы, падающей на барьер справа.

вычислив j_E слева и справа от барьера найдем следующее соотношение между абсолютными значениями коэффициентов a_i и b_i , $i = 1, 2$:

$$j_E = \frac{1}{2\pi\hbar}(|a_1|^2 - |b_1|^2) = \frac{1}{2\pi\hbar}(|a_2|^2 - |b_2|^2). \quad (2.4)$$

Равенство (2.4) играет очень важную роль, ибо именно оно определяет унитарность матрицы рассеяния, как будет показано ниже.

Между коэффициентами a_i, b_i , $i = 1, 2$ имеется линейная зависимость. В частном случае вещественного гамильтониана см. доказательство в [2].⁴ В общем случае линейную связь можно записать с помощью комплексной матрицы M , которую принято называть

⁴Доказательство этого утверждения в общем случае основано на аналитическом продолжении $\psi(x)$ в комплексную плоскость по x [аналогично тому, как это делалось в квазиклассике [2] при доказательстве граничных условий для волновых функций в точках поворота] и “сшивки” асимптотик волновой функции “далеко” от U в комплексной плоскости; при этом аналитическое продолжение имеет особенности на так-называемых стоксовских (антистоксовских) линиях, приводящее к “линейному перемешиванию” асимптотик, см., например, [6, 7].

трансфер-матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Можно записать условие линейной зависимости (2.5) эквивалентным способом с помощью матрицы S :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Матрица S называется матрицей рассеяния и параметризуется следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Элементы S -матрицы: r, r', t, t' , называются амплитудами рассеяния (отражения и прохождения, соответственно). Их значения однозначно задаются потенциалом рассеяния. Можно также восстановить потенциал рассеяния по амплитудам рассеяния (обратная задача рассеяния [8]).

Известно, что в одномерном случае, когда $E > U(x \rightarrow \pm\infty)$, стационарные состояния непрерывного спектра двукратно вырождены [2]. Это значит, что существует две линейно независимые (базисные) волновые функции, отвечающие заданной энергии. Один из удобных способов выбора таких базисных функций – состояния рассеяния (их иногда называют состояниями Липмана-Швингера), см. рис. 2.1:

$$\psi_E^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{e^{ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} + r \frac{e^{-ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}}, & \text{если } x \rightarrow -\infty; \\ t \frac{e^{ik_2 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}}, & \text{если } x \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\psi_E^{(2)}(x) = \begin{cases} t' \frac{e^{-ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}}, & \text{если } x \rightarrow -\infty; \\ r' \frac{e^{ik_2 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} + \frac{e^{-ik_2 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}}, & \text{если } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.9)$$

Наличие таких асимптотик у волновой функции непрерывного спектра нужно считать математическим определением состояния рассеяния. Волновая функция $\psi_E^{(1)}(x)$ описывает рассеяние частицы, падающей на потенциал слева: $\frac{e^{ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}}$ – падающая волна,

$r \frac{e^{-ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}}$ – отраженная волна и $t \frac{e^{ik_2 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}}$ – прошедшая волна; $\mathcal{T} = |t|^2$ – вероятность прохождения, а $\mathcal{R} = |r|^2$ – вероятность отражения частицы, падающей на потенциальный барьер слева.⁵ Аналогично, $\psi_E^{(2)}(x)$ описывает рассеяние квантовой частицы, падающей на потенциал справа. Пользуясь законом сохранения тока вероятности (2.4) можно доказать (см. приложение 6.1), что состояния рассеяния (2.8)-(2.9) ортонормированы: $\langle \psi_E^{(i)} | \psi_{E'}^{(j)} \rangle = \delta_{ij} \delta(E - E')$, где $i, j = 1, 2$.

Состояния $\psi_{1,\text{in(out)}}$ = $\frac{e^{\pm ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}}$ слева от рассеивателя составляют базис падающей “in” и отраженной “out” волн, а коэффициенты a_1 и b_1 – “координаты” волновой функции в этом базисе. Тогда состояния слева и справа от барьера в этом базисе⁶ имеют вид столбцов:

$$\langle x | L \rangle = a_1 \frac{e^{ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} + b_1 \frac{e^{-ik_1 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \equiv |L\rangle, \quad (2.10a)$$

$$\langle x | R \rangle = a_2 \frac{e^{ik_2 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} + b_2 \frac{e^{-ik_2 x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \equiv |R\rangle. \quad (2.10b)$$

Таким образом, физическая интерпретация матриц S и M следующая: трансформатрица M переводит “правые” состояния в “левые”:

$$|L\rangle = M |R\rangle, \quad (2.11)$$

а матрица рассеяния S переводит падающие на барьер состояния в состояния, отраженные от барьера:

$$|\text{out}\rangle = S |\text{in}\rangle, \quad (2.12)$$

$$|\text{in}\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad |\text{out}\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Общий термин, объединяющий понятия трансформатрицы и матрицы рассеяния – матрица распространения.

⁵Вероятности прохождения и отражения определяются как отношения потоков прошедшей и отраженной волн к потоку вероятности переносимому падающей волной [2]. Мы выбрали удобную нормировку базисных плоских волн $\frac{\exp(\pm ikx)}{\sqrt{2\pi\hbar v}}$ так, чтобы соответствующий им поток вероятности j равнялся универсальной константе $1/2\pi\hbar$.

⁶Или, лучше сказать, в этом представлении, по аналогии, например, с импульсным представлением в квантовой механике.

2.1.2 Унитарность матрицы рассеяния

Закон сохранения тока вероятности (2.4) в дираковских обозначениях будет иметь компактный вид:

$$2\pi\hbar j = \langle \text{in} | \text{in} \rangle = \langle \text{out} | \text{out} \rangle, \quad (2.14)$$

или

$$\langle L | \Sigma_z | L \rangle = \langle R | \Sigma_z | R \rangle, \quad \Sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Из соотношения (2.14) следует унитарность матрицы рассеяния:

$$S S^\dagger = 1. \quad (2.16)$$

Действительно, воспользовавшись определением (2.12), получим, $\langle \text{out} | \text{out} \rangle = \langle \text{in} | S^\dagger S | \text{in} \rangle$. Это равенство совместимо с (2.14), если матрица рассеяния унитарна.

Аналогично, из закона сохранения тока вероятности (2.14) следует важное тождество для трансферматриц:

$$M^\dagger \Sigma_z M \Sigma_z = 1. \quad (2.17)$$

Действительно, воспользовавшись определением (2.11), получим, $\langle L | \Sigma_z | L \rangle = \langle R | M^\dagger \Sigma_z M | R \rangle$. Это равенство совместимо с (2.15), если трансферматрица удовлетворяет (2.17).

Из унитарности матрицы рассеяния следует, что амплитуды t , t' , r и r' не являются независимыми величинами:

$$r^\dagger r + t'^\dagger t' = t^\dagger t + r'^\dagger r' = 1, \quad (2.18)$$

$$tr^\dagger + r't'^\dagger = 0, \quad rt^\dagger + t'r'^\dagger = 0, \quad (2.19)$$

где символ эрмитова сопряжения “ \dagger ” поставлен вместо символа комплексного сопряжения “ $*$ ”, чтобы подчеркнуть, что амплитуды рассеяния могут быть матрицами в многоканальном случае.⁷ Таким

⁷Если бы мы учли спин рассеивающейся частиц, то амплитуды рассеяния стали бы матрицами в спиновом пространстве. Например, рассматривая рассеяние частицы со спином $1/2$ (для определенности электрона), получим:

$$t = \begin{pmatrix} t_{\uparrow\uparrow} & t_{\uparrow\downarrow} \\ t_{\downarrow\uparrow} & t_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

образом, например, если известны t , t' и r можно найти r' , пользуясь (2.19):

$$r' = -tr^\dagger[t'^\dagger]^{-1}. \quad (2.21)$$

Элементы матрицы рассеяния S взаимно-однозначно связаны с элементами трансфер-матрицы M . Из (2.5)-(2.7) и из свойства унитарности матрицы рассеяния следует, что

$$M = \begin{pmatrix} t^{-1} & -t^{-1}r' \\ rt^{-1} & t' - rt^{-1}r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1} & -t^{-1}r' \\ rt^{-1} & (t'^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Последнее выражение для m_{22} элемента M -матрицы было получено с помощью подстановки (2.21) и использования соотношения $rr^\dagger + t'(t')^\dagger = 1$.

Аналогично можно получить выражение для обратной трансферматрицы, переводящей левые состояния в правые ($M^{-1}|L\rangle = |R\rangle$):

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} t - r'(t')^{-1}r & r'(t')^{-1} \\ -(t')^{-1}r & (t')^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

2.2 Симметрии гамильтониана и матриц распространения

2.2.1 Симметрия по отношению к обращению времени

Когда гамильтониан системы инвариантен по отношению к преобразованию симметрии, то эта инвариантность гамильтониана распространяется особым образом также на трансферматрицу и мат-

где $t_{\downarrow\uparrow}$ – амплитуда прохождения электрона, падающего на барьер слева с проекцией спина “вверх”, в электрон с проекцией спина вниз. Рассеяние с переворотом спина может иметь место, например, благодаря спин-орбитальному взаимодействию в барьере или, если на спин электрона в барьере действует обменное поле (ферромагнитный барьер). Матричная структура амплитуд рассеяния может возникать также из-за межканального рассеяния, которое мы будем ниже рассматривать. Совершенно не обязательно, чтобы амплитуды рассеяния были квадратными матрицами, как в ур. (2.20). Например, слева и справа от барьера может быть разное число каналов. Кроме того, частицы слева от барьера могут отличаться по типу от частиц справа от барьера.

рицу рассеяния. Ниже мы докажем, что если гамильтониан инвариантен по отношению к обращению времени, то матрица рассеяния и трансферматрица удовлетворяют соотношениям:

$$\Sigma_x M \Sigma_x = M^*, \quad \Sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$S = S^\tau. \quad (2.25)$$

Из любого из этих соотношений немедленно следует, что $t = t'$. Отсюда можно найти, пользуясь соотношениями (2.18)-(2.19), что $|r| = |r'|$ и имеется обычная связь между вероятностями прохождения $\mathcal{R} = |r|^2 = |r'|^2$ и отражения $\mathcal{T} = |t|^2 = |t'|^2$:

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1. \quad (2.26)$$

В классическом случае операции обращения времени соответствует изменение знака всех импульсов и обращение направления магнитного поля на противоположное. В квантовой механике одной (бесспиновой) частицы этой операции эквивалентно комплексное сопряжения уравнения Шредингера и одновременное изменение направления магнитного поля на противоположное. Действительно, при такой операции оператор обобщенного импульса изменяет знак на противоположный как в классической механике, $\hat{p}^* = -\hat{p} = i\hbar\nabla$. Например, плоские волны e^{ikx} , описывающие движение частицы направо, после операции обращения времени (комплексное сопряжение в нашем случае) переходят в e^{-ikx} , что соответствует частице, движущейся в противоположном направлении, налево.

В ур. (2.1) нет магнитного поля и гамильтониан инвариантен по отношению к обращению времени, так что волновая функция $\hat{T}\psi_E(x) = \psi_E^*(x)$, соответствующая обращенной по времени частице, где оператор \hat{T} осуществляет операцию обращения по времени, тоже удовлетворяет ур. (2.1) с той же самой матрицей рассеяния (трансферматрицей). Но теперь, новые левые и правые состояния

имеют вид,

$$\langle x|L\rangle' = \hat{T}|L\rangle = a_1^* \frac{e^{-ik_1x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} + b_1^* \frac{e^{ik_1x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1^* \\ a_1^* \end{pmatrix} = \Sigma_x |L\rangle^*, \quad (2.27)$$

$$\langle x|R\rangle' = \hat{T}|R\rangle = a_2^* \frac{e^{-ik_2x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} + b_2^* \frac{e^{ik_2x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_2^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \Sigma_x |R\rangle^*. \quad (2.28)$$

Трансформатрица по-прежнему переводит правые состояния в левые:

$$|L\rangle' = M|R\rangle' \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma_x |L\rangle^* = M \Sigma_x |R\rangle^*. \quad (2.29)$$

С другой стороны, после комплексного сопряжения ур.(2.11), которое тоже остается справедливым, получаем:

$$|L\rangle^* = M^* |R\rangle^*. \quad (2.30)$$

Соотношения (2.29) и (2.30) совместны только тогда, когда выполнено тождество (2.24). При доказательстве мы использовали инвариантность гамильтониана по отношению к симметрии, когда использовали одновременно (2.29) и (2.11). Напомним, что трансформатрица (матрица рассеяния) определяется однозначно гамильтонианом системы: $M = M[\hat{H}]$.

Аналогичным образом доказывается свойство (2.25). Из определения матрицы рассеяния (2.12) и соотношения (2.27) следует, что

$$|\text{in}\rangle' = \hat{T}|\text{in}\rangle = \begin{pmatrix} b_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = |\text{out}\rangle^*, \quad |\text{out}\rangle' = \hat{T}|\text{out}\rangle = \begin{pmatrix} a_1^* \\ b_2^* \end{pmatrix} = |\text{in}\rangle^*, \quad (2.31)$$

$$|\text{out}\rangle' = S|\text{in}\rangle' \quad \Leftrightarrow \quad |\text{out}\rangle^* = S|\text{in}\rangle^*. \quad (2.32)$$

С другой стороны, после комплексного сопряжения равенства (2.12) получаем:

$$|\text{out}\rangle^* = S^* |\text{in}\rangle^*. \quad (2.33)$$

Сравнивая (2.32) и (2.33), найдем: $S^* = S$. Пользуясь унитарностью матрицы рассеяния (2.16) получим соотношение (2.25).

Важно отметить, что если мы учтем магнитное поле, то соотношения (2.24)-(2.25) немножко изменятся, так как при обращении времени направление магнитного поля \mathbf{B} меняется на противоположное [10, 4]:

$$\Sigma_x M_{-\mathbf{B}} \Sigma_x = M_{\mathbf{B}}^*, \quad S_{-\mathbf{B}} = S_{\mathbf{B}}^T. \quad (2.34)$$

В разделе 4.5 показано, что амплитуда прохождения через рассеиватель, внутри которого на движение частиц нетривиально действует магнитное поле, имеет свойства: $t_{\mathbf{B}} = t'_{-\mathbf{B}}$ и $t_{\mathbf{B}} \neq t'_{\mathbf{B}}$, в согласии с (2.34). Так что, не следует верить в то, что всегда $t = t'$!

2.2.2 Симметрия по отношению к инверсии

Ниже мы докажем, что если гамильтониан инвариантен по отношению к инверсии ($x \rightarrow -x$), то матрица рассеяния и трансформатрица удовлетворяют соотношениям:

$$\Sigma_x M \Sigma_x = M^{-1}, \quad (2.35)$$

$$\Sigma_x S \Sigma_x = S. \quad (2.36)$$

Из любого из этих соотношений немедленно следует, что $r = r'$.

Гамильтониан (2.1) инвариантен по отношению к инверсии, если $U(x) = U(-x)$. Тогда волновая функция $\hat{P}\psi_E(x) = \psi_E(-x)$, где \hat{P} – оператор четности, тоже удовлетворяет ур. (2.1) с той же самой матрицей рассеяния (трансформатрицей). Но теперь,

$$|L\rangle' = \hat{P}|L\rangle = a_2 \frac{e^{-ik_2x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} + b_2 \frac{e^{ik_2x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \Sigma_x |R\rangle, \quad (2.37)$$

$$|R\rangle' = \hat{P}|R\rangle = a_1 \frac{e^{-ik_1x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} + b_1 \frac{e^{ik_1x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \Sigma_x |L\rangle, \quad (2.38)$$

$$|\text{in}\rangle' = \hat{P}|\text{in}\rangle = \begin{pmatrix} b_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \Sigma_x |\text{in}\rangle, \quad (2.39)$$

$$|\text{out}\rangle' = \hat{P}|\text{out}\rangle = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \Sigma_x |\text{out}\rangle, \quad (2.40)$$

$$|L\rangle' = M|R\rangle', \quad |\text{out}\rangle' = S|\text{in}\rangle'. \quad (2.41)$$

Конечно, раз $U(-x) = U(x)$, то $k_1 = k_2$. Соотношения (2.11) и (2.12) по-прежнему справедливы, так как $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$. Поэтому, сравнивая (2.11) и (2.12) с (2.41) получим тождества (2.35)-(2.36).

Может оказаться так, что потенциал рассеяния будет несимметричным, $U(-x) \neq U(x)$. Тогда гамильтониан не инвариантен относительно инверсии. Но часто бывает нужно ответить на вопрос, как изменятся матрицы распространения, если мы заменим $U(x)$ на $U(-x)$ в гамильтониане. Ответ на этот вопрос можно получить аналогично тому, как мы доказывали (2.35)-(2.36):

$$\Sigma_x M_U \Sigma_x = M_{\hat{P}U}^{-1}, \quad (2.42)$$

$$\Sigma_x S_U \Sigma_x = S_{\hat{P}U}. \quad (2.43)$$

Эти соотношения означают, что переходя в гамильтониане от потенциала рассеяния $U(x)$ к $U(-x)$ мы должны в матрице рассеяния, соответствующей $U(x)$, поменять местами r, r' и t, t' .

2.3 Фейнмановский подход к теории рассеяния

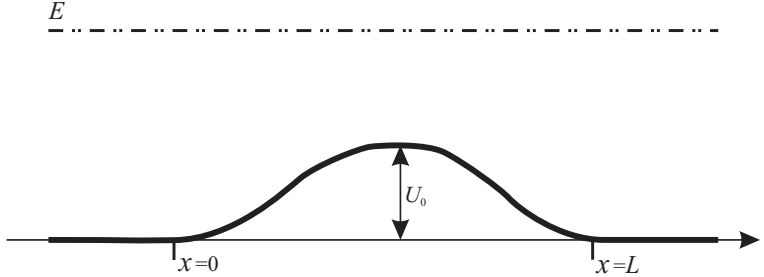


Рис. 2.2. Квазиклассический потенциальный барьер.

Существует несколько способов описания одномерного рассеяния на потенциальных барьерах. Традиционный для квантовой механики подход предполагает, что падающие и рассеянные волны пропорциональны $e^{\pm ikx}$. В оптике и в теории квантового электронного транспорта в мезоскопических наносистемах часто бывает более удобным выбрать разные системы координат для падающих, отраженных и прошедших волн так, чтобы зависящие от координат фазы формально обращались в нуль на границах области, где происходит рассеяние. Данный способ описания рассеяния иногда

называю Фейнмановским, так как в случае применимости квазиклассического описания к рассеянию, амплитуды пропорциональны суммам экспонент от действий частиц взятых по всем возможным путям рассеяния.

Чтобы проиллюстрировать разницу этих двух подходов, найдем амплитуду прохождения частицы над квазиклассическим барьером, см. рис. 2.2, обычным способом:

$$t = \exp \left\{ i \int_0^L [k(x) - k_\infty] dx \right\} = \exp \left\{ i \frac{S(0, L)}{\hbar} - ik_\infty L \right\}, \quad (2.44)$$

где $k(x) = \sqrt{2m[E - U(x)]/\hbar^2}$, $k_\infty = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ и $S(0, L)$ – классическое действие частицы, прошедшей от точки $x = 0$ к точке $x = L$. Амплитуда прохождения $t \rightarrow 1$, когда $U_0 \rightarrow 0$.

Рассмотрим рассеяние в рамках оптического подхода. Тогда прошедшая волна должна быть пропорциональна $\exp[ik(x - L)]$, так как точка $x = L$ – начало системы отсчета для волн бегущих справа от барьера. Амплитуда прохождения \tilde{t} в этом случае равна экспоненте от классического действия частицы,

$$\tilde{t} = \exp \left\{ i \int_0^L k(x) dx \right\} = \exp \left\{ i \frac{S(0, L)}{\hbar} \right\}. \quad (2.45)$$

Если мы устремим потенциал к нулю, то амплитуда прохождения не будет уже равна единице: $\tilde{t} = \exp(ik_\infty L)$, при $U_0 \rightarrow 0$.

2.4 Рассеяние с учетом спина

Часто встречаются случаи, когда амплитуды рассеяния – матрицы. В качестве простейшего примера рассмотрим одномерное рассеяние частиц со спином. Тогда потенциал рассеяния представляет собой матрицу в спиновом пространстве и состояния рассеяния имеют вид:

$$\psi_{E,a}^{(1)}(x, \sigma) = \begin{cases} \frac{e^{ik_1 x} \chi_a(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} + \frac{e^{-ik_1 x} \chi_b(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} r_{ba}, & \text{если } x \rightarrow -\infty; \\ \frac{e^{ik_2 x} \chi_b(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} t_{ba}, & \text{если } x \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\psi_{E,a}^{(2)}(x, \sigma) = \begin{cases} \frac{e^{-ik_1 x} \chi_b(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} t'_{ba}, & \text{если } x \rightarrow -\infty; \\ \frac{e^{ik_2 x} \chi_b(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} r'_{ba} + \frac{e^{-ik_2 x} \chi_a(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}}, & \text{если } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.47)$$

Здесь $\chi_a(\sigma)$ – спиновая волновая функция частицы с проекцией спина на ось z равной a . По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Например, амплитуда отражения r_{ab} описывает процесс, когда на потенциальный барьер падает частица с проекцией спина a , а отраженная частица имеет проекцию спина b . Для частицы со спином $1/2$: $a \in \{\uparrow, \downarrow\}$ и $\sigma \in \{1/2, -1/2\}$, см. [2].

Пусть частица движется к рассеивателю вдоль оси x , спин у частицы имеет определенную проекцию вдоль оси z и матрица рассеяния равна S . Часто приходится искать ответ на вопрос, как изменится матрица рассеяния S , если падающие частицы поляризованы не вдоль оси z , а, например, вдоль оси y или любой другой оси с направлением \mathbf{n} , перпендикулярным направлению оси x . [Предполагается, что мы решаем задачу рассеяния в новой системе координат.] В системе координат, связанной с осью z спиновые волновые функции частицы равны $\chi = \hat{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} \chi^{(\mathbf{n})}$, где $\chi^{(\mathbf{n})}$ – спиновая волновая функция в системе координат связанной с \mathbf{n} , и $\hat{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}}$ – оператор (спинового) поворота вокруг оси x , совмещающего направление оси z с \mathbf{n} . Например, в случае спина $1/2$:

$$\hat{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_S \equiv \mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} \otimes \mathbb{I}_S. \quad (2.48)$$

Здесь \otimes – символ прямого произведения, \mathbb{I}_S – единичная матрица в пространстве блоков матрицы рассеяния S и θ – угол между направлением оси z и вектором \mathbf{n} . Тогда в системе координат, связанной с осью z , движущие в сторону потенциала рассеяния состояния будут равны $\hat{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} |\text{in}\rangle_{\mathbf{n}}$. Согласно определению матрицы рассеяния S ,

$$|\text{out}\rangle_z = \hat{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} |\text{out}\rangle_{\mathbf{n}} = S \hat{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} |\text{in}\rangle_{\mathbf{n}} = S |\text{in}\rangle_z. \quad (2.49)$$

Отсюда найдем матрицу рассеяния в системе, где частицы поляризованы вдоль оси \mathbf{n} :

$$S_{\mathbf{n}} = (\hat{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}})^\dagger S \hat{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} = \begin{pmatrix} (\mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}})^\dagger r \mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} & (\mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}})^\dagger t' \mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} \\ (\mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}})^\dagger t \mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} & (\mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}})^\dagger r' \mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Мы воспользовались тем, что оператор поворота $\hat{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}}$ нетривиальная матрица в спиновом пространстве, но он пропорционален единичной матрице в пространстве блоков матрицы рассеяния S .

Аналогично рассматривается рассеяние, если рассеивающиеся частицы помимо спина характеризуются другими квантовыми числами (например, это могут быть каналы поперечного квантования, как мы увидим ниже).

Упражнения

1. Используя асимптотики (2.2), докажите, что слева от барьера $j_E = \frac{1}{2\pi\hbar}(|a_1|^2 - |b_1|^2)$, а справа от барьера $j_E = \frac{1}{2\pi\hbar}(|a_2|^2 - |b_2|^2)$.
2. Покажите, что условие линейной зависимости (2.5) можно записать другим эквивалентным способом с помощью матрицы S , см. ур. (2.6).
3. Выведите формулу (2.23).
4. Трансформатрицу можно определить иначе, $\tilde{M}|L\rangle = |R\rangle$. Выведите формулу, аналогичную (2.23) для \tilde{M} .
5. Выведите соотношение (2.34).
6. Выведите соотношения (2.42)-(2.43).
- 7.* Докажите, что между коэффициентами $a_i, b_i, i = 1, 2$ действительно имеется линейная зависимость.
8. Докажите, что в общем случае матрицы S и M параметризуются следующим образом (см. [11]):

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\mathcal{T}} & \mathcal{T} \\ \mathcal{T} & \sqrt{1-\mathcal{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

и

$$M = \begin{pmatrix} t^{-1} & -t^{-1}r' \\ rt^{-1} & (t'^{\dagger})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & (V')^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}^{-1} & \sqrt{\mathcal{T}^{-1}-1} \\ \sqrt{\mathcal{T}^{-1}-1} & \mathcal{T}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{\dagger} \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

где U , U' , V и V' – комплексные числа с единичной нормой (линейные комбинации фаз рассеяния). Если амплитуды рассеяния – матрицы, то U , U' , V и V' – унитарные матрицы, и \mathcal{T} – диагональная матрица, состоящая из собственных чисел $t^\dagger t$ (transmission eigenvalues).

9. Покажите, что можно определить состояния рассеяния также следующим образом:

$$\psi_{E,a}^{(1)}(x, \sigma) = \begin{cases} \frac{e^{ik_1 x} \chi_a(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} + r_{ab} \frac{e^{-ik_1 x} \chi_b(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}}, & \text{если } x \rightarrow -\infty; \\ t_{ab} \frac{e^{ik_2 x} \chi_b(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}}, & \text{если } x \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (2.53)$$

$$\psi_{E,a}^{(2)}(x, \sigma) = \begin{cases} t'_{ab} \frac{e^{-ik_1 x} \chi_b(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}}, & \text{если } x \rightarrow -\infty; \\ r'_{ab} \frac{e^{ik_2 x} \chi_b(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} + \frac{e^{-ik_2 x} \chi_a(\sigma)}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}}, & \text{если } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.54)$$

Покажите, что при таком выборе $\psi_{E,a}^{(1,2)}(x, \sigma)$, вероятности рассеяния будут такими же, как и в случае (2.46)-(2.47).

10. Воспроизведите формулу (2.50).

11. Докажите, что для произвольного спина оператор $\hat{\mathcal{U}}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}}$ – тривиальная матрица в пространстве блоков матрицы рассеяния S :

$$\hat{\mathcal{U}}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} = \mathcal{U}_x^{z \leftarrow \mathbf{n}} \otimes \mathbb{I}_S. \quad (2.55)$$

Глава 3

Точно решаемые задачи одномерного рассеяния.

3.1 δ -барьер.

Вычислим амплитуду рассеяния на потенциале в виде дельта функции. Прежде чем делать формальный расчет, попробуем понять, когда потенциал может быть смоделирован дельта-функцией Дирака. Приблизиться к ответу на этот вопрос помогает решение задачи о связанном состоянии в “мелкой” одномерной потенциальной яме. Напомним, что термин мелкая яма относится к потенциалам $U(x)$ малой глубины с симметричными краями ($U(\infty) = U(-\infty) = 0$):

$$|U_0| \ll \frac{\hbar^2}{2mL^2}, \quad (3.1)$$

где $U_0 < 0$ и L – характерные глубина и ширина ямы соответственно. Известно, что в мелкой яме с симметричными краями всегда есть связанное состояние.¹ Условие (3.1) означает, что потенциальная энергия связанной частицы много меньше ее кинетической энергии. На языке волновых функций это означает, что большую часть времени связанная частица проводит вне ямы (в классически

¹В двумерных мелких ямах это утверждение тоже справедливо, что оказывается очень важным в теории сверхпроводимости, но в трехмерных мелких ямах связанных состояний нет! См. §45 в [2] и задачи к этому параграфу.

запрещенной области). Известно, что исследуя связанное состояние в мелкой потенциальной яме $U(x)$, можно приближенно описывать яму дельта-функцией Дирака: $U(x) \rightarrow \alpha\delta(x)$, где

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} dx U(x) \sim U_0 L. \quad (3.2)$$

[Доказательство (3.2) содержится в §45 [2] и в задачах, относящихся к этому параграфу.] Решив модельную задачу о связанном состоянии в δ яме легко найти, что длина волны де Бройля частицы в яме равна $\lambda = \hbar^2/(2\pi m\alpha) \sim \hbar^2/(m|U_0|L)$. Используя это соотношение можно исключить U_0 из (3.1). Тогда условие (3.1) будет выглядеть так:

$$\lambda \gg L. \quad (3.3)$$

Это означает, что яма может быть смоделирована дельта-функцией Дирака, если область ее действия много меньше, чем λ — длина волны де Бройля частицы. Такое же условие накладывается в задаче рассеяния, только теперь λ в (3.3) — это длина волны де Бройля рассеивающейся частицы.

Итак, решим задачу рассеяния в потенциале $U(x) = \alpha\delta(x - a)$. Для этого нужно решить уравнение Шредингера:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta(x - a) \right] \psi(x) = E\psi(x). \quad (3.4)$$

Вне точки $x = a$, решения имеют вид $e^{\pm ikx}$, где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Поэтому мы запишем нужное нам решение задачи рассеяния

$$\psi_E^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar v}} \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx}, & x < a \\ te^{ikx}, & x > a, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $v = \hbar k/m$. Решения уравнения Шредингера (3.4) должны быть непрерывны $\psi_E^{(1)}(a-0) = \psi_E^{(1)}(a+0)$, поэтому

$$e^{ika} + re^{-ika} = te^{ika}. \quad (3.6)$$

Первая производная от ψ не является непрерывной из-за того, что потенциал содержит сингулярность от дельта-функции; мы однако

можем проинтегрировать уравнение (3.4) от $a-0$ до $a+0$ и получить условия

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d}{dx} \psi(a+0) - \frac{d}{dx} \psi(a-0) \right] + \alpha \psi(a) = 0, \quad (3.7)$$

из которых следует

$$\frac{\hbar^2}{2m} ik (te^{ika} - e^{ika} + re^{-ika}) + \alpha te^{ika} = 0. \quad (3.8)$$

Используя (3.6), найдем амплитуды рассеяния

$$t = t' = \frac{1}{1 + iZ}, \quad (3.9)$$

$$r = e^{2ika} \frac{iZ}{1 + iZ}, \quad (3.10)$$

$$r' = e^{-2ika} \frac{iZ}{1 + iZ}, \quad (3.11)$$

где $Z = m\alpha/\hbar^2 k$, и при вычислении t' мы воспользовались условием симметричности матрицы рассеяния (2.36), а при вычислении r' использовалось условие унитарности матрицы рассеяния, см. ур. (2.21). Заметим, что при $a = 0$, $r = r'$. Это следует из четности δ -функции Дирака, см. ур.(2.36).

Обратим внимание, что амплитуда прохождения не зависит от положения потенциала рассеяния, координаты a , а то время как, амплитуды отражения имеют зависящую от a фазу. Это свойство амплитуд отражения окажется очень важным при рассмотрении ниже рассеяния на резонансом потенциале типа Фабри-Перо. Заметим также, что амплитуда прохождения через дельта-потенциал стремится к нулю при $k \rightarrow 0$; и это на самом деле общее свойство амплитуд прохождения через любой не исчезающий потенциал. Обратим также внимание, что условие $m\alpha/\hbar^2 k \ll 1$ соответствует условию применимости Борновского приближения теории рассеяния для быстрых частиц. Так что, первый член разложения ур. (3.9)-(3.11) по $m\alpha/\hbar^2 k$ соответствует Борновскому приближению теории рассеяния. А в ур. (3.9)-(3.11) мы собрали все порядки теории возмущений, где возмущение – потенциал рассеяния.

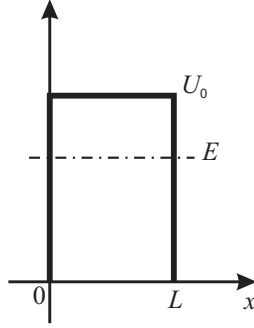


Рис. 3.1. Прямоугольный барьер длиной L и высотой U_0 .

3.2 Прямоугольный барьер

Чтобы описать туннелирование частицы с энергией E под прямоугольным барьером длиной L и высотой U_0 , см. рис. 3.1, мы представим волновую функцию в виде

$$\psi_E^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar v}} \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx}, & x < 0, \\ C_+e^{\kappa x} + C_-e^{-\kappa x}, & 0 < x < L, \\ te^{ikx}, & L < x, \end{cases} \quad (3.12)$$

где, $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ and $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$ - волновые вектора в соответствующих областях. Чтобы найти решения для задачи о туннелировании, мы должны сшить волновую функцию и её производные при $x = 0$,

$$\psi_E^{(1)}(0^-) = \psi_E^{(1)}(0^+) \quad \longrightarrow \quad 1 + r = C_+ + C_-, \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dx}\psi_E^{(1)}(x)|_{x=0^-} = \frac{d}{dx}\psi_E^{(1)}(x)|_{x=0^+} \quad \longrightarrow \quad ik(1 - r) = \kappa(C_+ - C_-), \quad (3.14)$$

и при $x = L$,

$$\psi_E^{(1)}(L-0) = \psi_E^{(1)}(L+0) \quad \longrightarrow \quad C_+ e^{\varkappa L} + C_- e^{-\varkappa L} = t e^{ikL}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_E^{(1)}(x)|_{x=L-0} &= \frac{d}{dx} \psi_E^{(1)}(x)|_{x=L+0} \\ \longrightarrow \quad \varkappa(C_+ e^{\varkappa L} - C_- e^{-\varkappa L}) &= i k t e^{ikL}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Выражая r и t в системе уравнений (3.13)-(3.16), через коэффициенты C_+ и C_- получаем,

$$C_{\pm} = \frac{2ik(\varkappa \pm ik)e^{\mp \varkappa L}}{(\varkappa + ik)^2 e^{-\varkappa L} - (\varkappa - ik)^2 e^{\varkappa L}}. \quad (3.17)$$

Вставляя C_{\pm} в ур. (3.16), мы получаем для амплитуды прохождения

$$t = \frac{4ik\varkappa}{(\varkappa + ik)^2 e^{-\varkappa L} - (\varkappa - ik)^2 e^{\varkappa L}} e^{-ikL}. \quad (3.18)$$

Для длинного барьера, $\varkappa L \gg 1$, мы можем пренебречь слагаемым пропорциональным $e^{-\varkappa L}$ в знаменателе (3.18) и получить

$$t = -\frac{4ik\varkappa}{(\varkappa - ik)^2} e^{-(\varkappa + ik)L}. \quad (3.19)$$

Прозрачность (вероятность прохождения) $\mathcal{T} = |t|^2$ барьера в этом пределе дается выражением

$$\mathcal{T} = \frac{16k^2 \varkappa^2}{(k^2 + \varkappa^2)^2} e^{-2\varkappa L}. \quad (3.20)$$

Заметим, что квазиклассическое рассмотрение дает только экспоненту $e^{-2\varkappa L}$; множитель $16k^2 \varkappa^2 / (k^2 + \varkappa^2)^2$ появляется за счет резких границ барьера, где квазиклассическое приближение не применимо.

Прямоугольный барьер можно аппроксимировать δ -потенциалом, если длины волны частицы значительно больше области действия потенциала. Это значит, что для налетающей частицы и частицы в области действия потенциала должны выполняться условия: $kL = 2\pi L/\lambda \ll 1$ и, аналогично, $\varkappa L \ll 1$. Тогда разложив знаменатель формулы (3.18) по $\varkappa L$ до первого порядка и, полагая,

$e^{ikL} \rightarrow 1$, получим после упрощения:

$$t \approx \frac{1}{1 - iL(k^2 - \kappa^2)/2k} \approx \frac{1}{1 + iL\kappa^2/2k} = \frac{1}{1 + im\alpha/\hbar^2 k}, \quad (3.21)$$

где $\alpha = U_0 L$ в соответствии с ур. (3.2) и выражение для t совпадает с ур. (3.9). Обратим внимание, что нам пришлось также потребовать выполнения неравенства $k \ll \kappa$ [эквивалентно, $E \ll U_0$].² Тогда условие $\kappa L \ll 1$ становится эквивалентным ур. (3.1).

3.3 Двойной барьер – интерферометр Фабри-Перо

Двойным барьером мы будем называть два рассеивающих потенциала, расположенных последовательно. Интерференция, возникающая при многократных рассеяниях, приводит к возникновению резонансов в прозрачности, которым соответствуют квазисвязанные состояния. Амплитуды прохождения и отражения можно найти способом, использованным в предыдущем параграфе – т.е. с помощью сшивки волновой функции и ее производных. Здесь мы, однако, хотим использовать другой способ, основанный на интуиции: суммирование по всем траекториям, по которым может двигаться частица.

Первый и второй барьеры имеют матрицы рассеяния,

$$S_1 = \begin{pmatrix} r_1 & t'_1 \\ t_1 & r'_1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} r_2 e^{i2kL} & t'_2 \\ t_2 & r'_2 e^{-i2kL} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Фазовые множители при амплитудах отражения второго барьера появились из-за того, что второй барьер сдвинут относительно начала координат на расстояние L ; амплитуды t_2, t'_2, r_2 и r'_2 описывают рассеяние на потенциале, расположенном в начале координат. Подобную зависимость фаз амплитуд отражения от положения потенциала мы уже получали выше для δ - потенциала, см. (3.10)-(3.11).

²Последнее неравенство иллюстрирует известный факт, что прямоугольный потенциал бесконечной высоты и бесконечно малой ширины при $\alpha = U_0 L = \text{const}$ аппроксимирует δ -функцию Дирака.

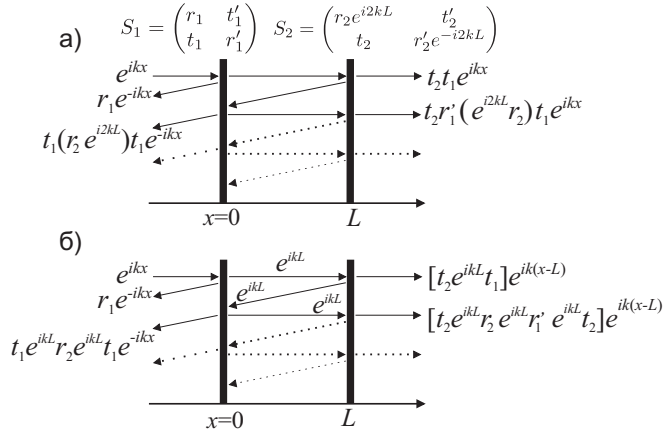


Рис. 3.2. Двойной барьер (два рассеивающих потенциала, расположенных последовательно) можно рассматривать как аналог известного в оптике интерферометра Фабри-Перо. Интерференция приводит к наличию резонансов при условии $kL \approx \pi n$, $n = 1, 2, \dots$. Существует несколько способов описания рассеяния на барьерах типа Фабри Перо. а) Традиционный для квантовой механики подход предполагает, что падающие и рассеянные волны пропорциональны $e^{\pm ikx}$ (3.24). б) В оптике обычно выбирают разные системы координат для падающих, отраженных и прошедших волн так, чтобы зависящие от координат фазы формально обращались в нуль на барьерах (в нашем случае при $x = 0$ и $x = L$, так что прошедшая волна пропорциональна $e^{ik(x-L)}$). В этом случае каждому лучу проходящему через интерферометр необходимо приписать фазу, $\int k dx$, пропорциональную классическому действию, взятому по траектории луча внутри интерферометра.

Рассеяние на двухбарьерном потенциале схематически изображено на рис. 3.2а. Амплитуда прохождения дается суммой ряда

$$t = t_2 t_1 + t_2 [r'_1 (r_2 e^{2ikL})] t_1 + t_2 [r'_1 (r_2 e^{2ikL})]^2 t_1 + \dots, \quad (3.23)$$

где первый слагаемый соответствует траектории проходящей через два барьера без отражения, второй слагаемый соответствует траектории с двумя отражениями, формирующими одну петлю, и т.д. Суммируя ряд (геометрическую прогрессию) получаем амплитуду прохождения

$$t = t' = \frac{t_1 t_2}{1 - r'_1 r_2 e^{2ikL}}, \quad (3.24)$$

Напомним, что $t_1 = t'_1$, $t_2 = t'_2$ и $t' = t$, если гамильтониан системы инвариантен относительно обращения времени, см. § 2.2.1.

Таким же образом мы можем просуммировать траектории для амплитуды отражения назад

$$r = r'_1 + t'_1 r_2 e^{2ikL} t_1 + t'_1 (r_2 e^{2ikL} r'_1) r_2 e^{2ikL} t_1 + \dots \quad (3.25)$$

что дает,

$$r = r'_1 + \frac{t_1 t'_1 r_2 e^{i2kL}}{1 - r'_1 r_2 e^{2ikL}} = \frac{r'_1 + r_2 e^{2ikL} (t_1 t'_1 - r_1'^2)}{1 - r'_1 r_2 e^{2ikL}}. \quad (3.26)$$

Обратим внимание, что выше мы использовали традиционный для квантовой механики подход к рассеянию, предполагающий, что падающие и рассеянные волны пропорциональны $e^{\pm ikx}$, см. рис. 3.2а. В оптике и в теории мезоскопических наноконтактов обычно выбирают разные системы координат для падающих, отраженных и прошедших волн так, чтобы зависящие от координат фазы формально обращались в нуль на барьерах, см. § 2.3. Тогда прошедшие направо волны будут пропорциональны $e^{ik(x-L)}$. В этом случае, нужно опустить $e^{\pm 2ikL}$ -множители при амплитудах отражения второго рассеивателя. Чтобы правильно просуммировать вклады всех траекторий в рамках этого подхода, лучу проходящему через интерферометр необходимо сопоставить $\exp[i \int k dx]$, где $\int \hbar k dx$ – классическое действие частицы, двигающейся между рассеивателями, см. рис. 3.2б. Так что, например,

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t_2 e^{ikL} t_1 + t_2 e^{ikL} r'_1 e^{ikL} r_2 e^{ikL} t_1 + \\ & t_2 e^{ikL} [r'_1 e^{ikL} r_2 e^{ikL}]^2 t_1 + \dots = \frac{t_1 t_2 e^{ikL}}{1 - r'_1 r_2 e^{2ikL}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Если сделать потенциал рассеяния бесконечно маленьким, т.е. положить $r = r' = 0$, то амплитуда прохождения (3.27) не будет равна единице (в отличие от (3.23)): $t = e^{ikL}$, где фаза $\int k dx = kL$.

Прозрачность всей системы дается,

$$\mathcal{T} \equiv |t|^2 = \frac{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}{1 + \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 - 2\sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} \cos(\theta)}, \quad (3.28)$$

где $\theta = 2kL + 2\varphi^r$, $\mathcal{T}_i = |t_i|^2$, $\mathcal{R}_i = |r_i|^2$ вероятности прохождения и отражения для барьеров, а $\varphi^r = (\varphi^{r_1} + \varphi^{r_2})/2$ (например,

$\varphi^{r'}_1 \equiv \arg r'_1$). Соотношение (3.28) проиллюстрировано на рис. 3.3. Полная прозрачность $\mathcal{T}(E)$ достигает максимума при $\theta = 2\pi n$, $n = 1, 2, \dots$, что соответствует волновым векторам $k_n = (\pi n - \varphi^r)/L$ с соответствующей энергией

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mL^2} (\pi n - \varphi^r)^2. \quad (3.29)$$

Максимальное значение $\mathcal{T}(E)$ дается выражением

$$\mathcal{T}_{\max} = \frac{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}{(1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2})^2}, \quad (3.30)$$

которое равно единице при $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ и $4\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 / (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)^2$ при $\mathcal{T}_i \ll 1$, $i = 1, 2$.³

У полученной вероятности прохождения есть интересное свойство – для симметричного барьера с $t_1 = t_2$ резонансы идеальны, $|t| = 1$. Таким образом, двух-барьерная структура становится идеально прозрачной (за исключением набора фазы) даже при очень сильном рассеянии на каждом из барьеров. Этот эффект возникает из-за интерференции и является четким индикатором полной когерентности движения частицы. Если когерентность потеряна, вероятность прохождения дается произведением вероятностей и становится приблизительно равной $\mathcal{T} \approx \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2$. Эта величина может быть много меньше единицы. Измерение \mathcal{T} используется для экспериментальной проверки степени когерентности. Заметим, что если $\mathcal{T} < 1$, невозможно решить, когерентна система или нет. Случай же $\mathcal{T} = 1$ однозначно указывает на полную когерентность.

Вне резонанса (в области деструктивной интерференции),

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\min} = \frac{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}{(1 + \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2})^2}. \quad (3.31)$$

При $\mathcal{T}_{1(2)} \ll 1$ получаем, $\mathcal{T} \approx \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 / 4$. Эффект деструктивной интерференции сравним с эффектом от сбоя фазы, о котором мы более подробно расскажем ниже.

Определим расстояние между резонансами (“спейсинг”) как

$$\Delta_n = \frac{|E_{n+1} - E_{n-1}|}{2} = 2\pi \frac{\hbar^2}{2mL^2} |\pi n - \varphi^r| = \frac{\pi \hbar v_n}{L} = \pi \hbar \nu_n, \quad (3.32)$$

³Мы предполагаем, что $\mathcal{T}_{1(2)}$ и φ^r практически не зависят от энергии на масштабах порядка расстояния между резонансами. На практике такое приближение обычно хорошо работает.

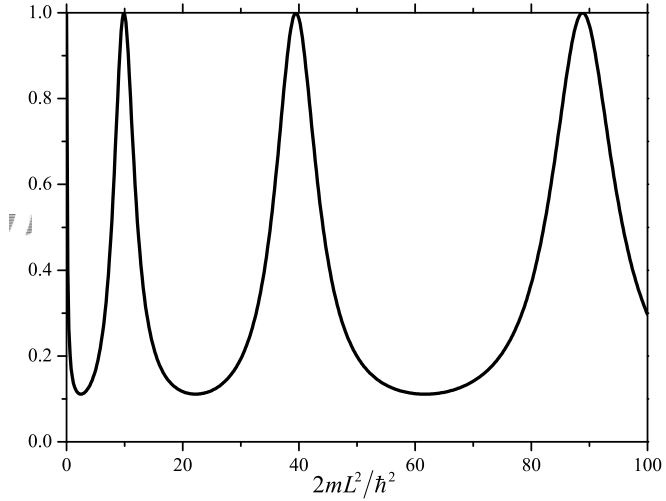


Рис. 3.3. Вероятность прохождения $\mathcal{T}(E)$ как функция энергии, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = 0.5$ и $\varphi^r \equiv 0$.

где $v_n = \frac{dE}{d(\hbar k)}_{E=E_n}$ — скорость электрона, летящего между потенциальными стенками двухбарьерного потенциала. Заметим что резонансные энергии не эквидистантны, а также что определение $\Delta_n = |\partial E_n / \partial n|$ дает тот же результат. Выражение

$$\nu_n = v_n / L, \quad (3.33)$$

имеет размерность частоты; ее физический смысл — число попыток электрона в единицу времени выскочить из “ловушки” между потенциальными барьерами (“*attempt frequency*”).

Проанализируем теперь выражение (3.28) возле резонансной энергии E_n (3.29). Для этого разложим косинус в знаменателе до второго порядка по отклонению энергии от резонансной $\delta E_n = E - E_n$ и получим,

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dE_n} \right)^2 (\delta E_n)^2, \quad \frac{d\theta}{dE_n} = \frac{d\theta}{dE} \Big|_{E=E_n} = \frac{1}{\hbar \nu_n}, \quad (3.34)$$

Подставляя это выражение в (3.28), найдем, что вблизи n -ого резонанса вероятность прохождения может быть аппроксимирована

функцией Лоренца (часто в этом случае используют термин “Лоренцевская форма линий”):⁴

$$\mathcal{T}(E \sim E_n) \approx \mathcal{T}_{\text{BW}} = \frac{\gamma_n^2}{\gamma_n^2 + (\delta E_n)^2} \mathcal{T}_{\text{max}}. \quad (3.35)$$

Часто ур. (3.35) называют формулой Брейта-Вигнера. Здесь мы ввели полуширину резонанса, как

$$\gamma_n = \left. \frac{1}{2} \frac{dE}{d\theta} \right|_{E=E_n} \frac{1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}}{\sqrt[4]{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}} = \frac{\hbar \nu_n (1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2})}{2 \sqrt[4]{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}}. \quad (3.36)$$

Можно аппроксимировать \mathcal{T} функциями Лоренца при всех энергиях,

$$\mathcal{T}(E) \approx \sum_n \mathcal{T}_{\text{BW}}(\delta E_n). \quad (3.37)$$

Относительная погрешность аппроксимации (3.37) не превышает нескольких процентов, даже если $\mathcal{T}_{1,2} \lesssim 0.5$. Например, если мы добавим график аппроксимации (3.37) на рис. 3.3 с теми же параметрами, которые определяют график \mathcal{T} на рис. 3.3, то оба графика совпадут настолько хорошо, что разница будет визуальнo не заметна.

Для выраженного резонанса $\mathcal{T}_{1,2} \ll 1$, удобнее другие обозначения, которые имеют простой и наглядный вид. Введем парциальные ширины резонансов,

$$\Gamma_n^{(i)} = \frac{d\theta}{dE_n} \mathcal{T}_i = \hbar \nu_n \mathcal{T}_i, \quad (3.38)$$

где $i = 1, 2$. Таким образом, отношение Γ_i/\hbar имеет наглядный физический смысл — это число *успешных* попыток частицы выпрыгнуть в единицу времени из ловушки между стенками двухбарьерного потенциала. Раскладывая ур.(3.35) по малым вероятностям прохождения через потенциальные стенки, найдем, что вблизи резонанса,

$$\mathcal{T}(E) \approx \frac{\Gamma_n^{(1)} \Gamma_n^{(2)}}{\Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}} A_n(E - E_n), \quad (3.39)$$

$$A_n(E - E_n) = \frac{\Gamma_n}{\epsilon^2 + (\Gamma_n/2)^2}, \quad (3.40)$$

⁴Зависимость типа $1/(1+x^2)$ обычно называется функцией Лоренца. Формула Брейта-Вигнера описывает, как иногда говорят, Лоренцевские резонансы.

где $\Gamma_n = \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}$ – полная ширина резонанса и A – функция Лоренца. Тогда $\gamma_n = \hbar\nu_n(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)/4 = \Gamma/4$. Как видим резонансы становятся тем резче, чем меньше \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 .

Обсудим теперь эффекты сбоя фазы, о которых мы упомянули выше. Перепишем формулу (3.23), добавив в каждое слагаемое фазовые множители со случайными фазами α_i , $i = 1, 2, \dots$:

$$t = t_2 t_1 e^{i\alpha_1} + t_2 [r'_1(r_2 e^{2ikL})] t_1 e^{i\alpha_2} + t_2 [r'_1(r_2 e^{2ikL})]^2 t_1 e^{i\alpha_3} + \dots \quad (3.41)$$

Физически эти фазы появляются из-за рассеяния на примесях или неоднородностях потенциала, что по разному сказывается при многократных отражениях внутри резонансного потенциала, которые описываются слагаемыми в ур. (3.23). Найдем теперь вероятность прохождения, усреднив ее по реализациям фаз α_i , считая, что α_i – независимые случайные величины, с дисперсией много большей 2π . Тогда,

$$\langle \mathcal{T} \rangle_\alpha = |t_2 t_1|^2 + |t_2 [r'_1(r_2 e^{2ikL})] t_1|^2 + |t_2 [r'_1(r_2 e^{2ikL})]^2 t_1|^2 + \dots = \frac{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}{1 - \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}. \quad (3.42)$$

Некогерентное туннелирование, описываемое ур. (3.42), принято в англоязычной литературе называть термином “sequential tunneling”, см. [4], что буквально означает, “последовательное туннелирование”. Если $\mathcal{T}_{1(2)} \ll 1$,

$$\langle \mathcal{T} \rangle_\alpha \approx \frac{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}{\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2}. \quad (3.43)$$

Обратим внимание, что эффект деструктивной интерференции, см. ур. (3.31), значительно больше подавляет \mathcal{T} , чем фазовая некогерентность: в первом случае $\mathcal{T} \propto \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 / 4$, а во втором – $\mathcal{T} \propto \mathcal{T}_1$ при $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2 \ll 1$.

3.4 Рассеяние на “ферромагнитном” барьере

Если мы рассматриваем рассеяние частиц со спином $1/2$, движущихся вдоль оси x , то потенциал рассеяния будет матрицей в спи-

новом пространстве. Простейший случай:

$$\hat{U}(x) = \begin{pmatrix} U_1(x) & 0 \\ 0 & U_2(x) \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

Такой потенциал рассеивает по разному частицы со спином вдоль оси z и против оси z , но рассеяние не сопровождается переворотом спина (амплитуды рассеяния – диагональные матрицы в спиновом пространстве). Например,

$$t = \begin{pmatrix} t_{\uparrow\uparrow} & 0 \\ 0 & t_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

где $t_{\uparrow\uparrow}$ амплитуда рассеяния частиц с проекцией спина вдоль оси z на потенциале $U_1(x)$.

Повернем рассеивающий потенциал вокруг оси x на угол θ с помощью матрицы поворота (см. [2]):

$$\mathcal{U}_x^\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Тогда амплитуда рассеяния будет равна

$$t_\theta = (\mathcal{U}_x^\theta)^\dagger t (\mathcal{U}_x^\theta) = \begin{pmatrix} t_{\uparrow\uparrow} \cos^2 \frac{\theta}{2} + t_{\downarrow\downarrow} \sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{i}{2} (t_{\uparrow\uparrow} - t_{\downarrow\downarrow}) \sin \theta \\ -\frac{i}{2} (t_{\uparrow\uparrow} - t_{\downarrow\downarrow}) \sin \theta & t_{\downarrow\downarrow} \cos^2 \frac{\theta}{2} + t_{\uparrow\uparrow} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Амплитуда $(t_\theta)_{\uparrow\downarrow} = \frac{i}{2} (t_{\uparrow\uparrow} - t_{\downarrow\downarrow}) \sin \theta$ описывает вероятность прохождения частицы через барьер с переворотом спина. Легко найти t'_θ пользуясь тем, что $t = t'$:

$$t'_\theta = (\mathcal{U}_x^\theta)^\dagger t' (\mathcal{U}_x^\theta) = t_\theta. \quad (3.48)$$

Обратим внимание, что в общем случае $t'_\theta \neq t_\theta$, см. 2.2.1.

Наибольший интерес представляет случай “ферромагнитного” барьера, когда $|t_{\uparrow\uparrow}| = 1$ и $t_{\downarrow\downarrow} = 0$ ($U_1 = 0$, $U_2 \rightarrow \infty$). Таким образом, частицы не могут пройти через барьер, если их спиновая поляризация противоположна направлению “намагниченности” барьера. Рассмотрим случай произвольного угла θ между направлением поляризации частиц и направлением намагниченности барьера. В этом случае, согласно ур. (3.47), вероятность рассеяния частицы без переворота спина равна $|t_\theta|_{\uparrow\uparrow}^2 = \cos^4 \frac{\theta}{2}$, а вероятность

рассеяния с переворотом спина равна $|t_\theta|_{\uparrow\downarrow}^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Суммарная вероятность прохождения частицы через барьер равна $\cos^2 \frac{\theta}{2}$. Рассмотренный выше барьер представляет собой реализацию поляризационного фильтра для частиц со спином $1/2$. Такие барьеры на основе ферромагнетиков реализуются экспериментально в электронных мезоскопических (нано)проводниках.

Упражнения

1. Найти уровень в δ -яме, пользуясь формулой (3.9) для амплитуды прохождения через δ -барьер. (Указание, исследуйте полюса амплитуд рассеяния, см. [2, 9]).
2. Докажите, что при сдвиге потенциала рассеяния $U(x)$, где $U(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$, от начала координат на расстояние L , амплитуды отражения приобретают фазы $e^{\pm i2kL}$, как в ур. (3.22), а амплитуды прохождения не меняются. Что изменится, если $U(x \rightarrow \infty) \neq U(x \rightarrow -\infty)$, см. (3.53).
3. Найти амплитуду отражения справа, r' , для резонансного потенциала типа Фабри-Перо.
4. Докажите, что амплитуды рассеяния от потенциала (3.44) – диагональные матрицы в спиновом пространстве.
5. Почему, $t_\theta^\tau \neq t_\theta'$ (см. (3.47)-(3.48))? Докажите, исследуя симметрии гамильтониана системы, что

$$t_\theta^\tau = t_\theta' |_{t_{\uparrow\uparrow} \rightarrow t_{\downarrow\downarrow}; t_{\downarrow\downarrow} \rightarrow t_{\uparrow\uparrow}; \theta \rightarrow \pi - \theta}.$$

3.5 Решение задачи рассеяния методом трансферматриц

3.5.1 Интегральное произведение трансферматриц

Решение задачи рассеяния означает, что нам известна матрица рассеяния S , или трансферматрица M . Аналитически задача рассея-

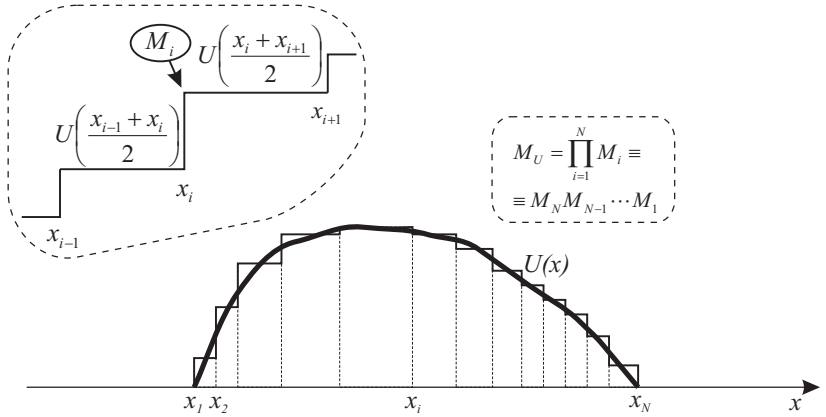


Рис. 3.4. Приближенное вычисление трансформатрицы потенциального барьера $U(x)$.

ния решается только в нескольких случаях, для потенциалов специальной формы. Что же делать, если нам нужно решить задачу рассеяния, пусть приблизительно, в случае потенциала общего вида. Методом трансформатриц эту общую задачу можно решить, см. рис.3.4.

Представим потенциальный барьер $U(x)$ в виде совокупности прямоугольных ступенек как показано на рис. 3.4. Тогда трансформатрица потенциала U будет приблизительно равна произведению трансформатриц ступенек, аппроксимирующих $U(x)$. Точность аппроксимации тем выше, чем выше мелкость разбиения. Это утверждение аналогично теореме о интегральной сумме в математическом анализе. Ниже мы этот вопрос обсудим более подробно.

Рассмотрим, например, потенциальную ступеньку вида:

$$U_s(x) = \begin{cases} U_1, & \text{если } x < 0; \\ U_2, & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Волновой вектор в области $x < 0$ равен $k_1 = \sqrt{2m(E + U_1)/\hbar^2}$, а при $x > 0$, $k_2 = \sqrt{2m(E + U_2)/\hbar^2}$. Амплитуды рассеяния от потен-

циала U :

$$t = t' = \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{k_1 + k_2}, \quad (3.50)$$

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad r' = -r. \quad (3.51)$$

Найдем трансферматрицу:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1 + k_2}{2\sqrt{k_1 k_2}} & \frac{k_1 - k_2}{2\sqrt{k_1 k_2}} \\ \frac{k_1 - k_2}{2\sqrt{k_1 k_2}} & \frac{k_1 + k_2}{2\sqrt{k_1 k_2}} \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Тогда

$$S(a) = \begin{pmatrix} r \exp(-2ik_1 a) & t' \exp(i(k_2 - k_1)a) \\ t \exp(i(k_2 - k_1)a) & r' \exp(2ik_2 a) \end{pmatrix} \equiv \tilde{V}(a)S(0)\tilde{V}(a),$$

$$\tilde{V}(a) = \begin{pmatrix} \exp(-ik_1 a) & 0 \\ 0 & \exp(ik_2 a) \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

Аналогично изменится трансферматрица:

$$M(a) = \begin{pmatrix} m_{11} \exp(i(k_1 - k_2)a) & m_{12} \exp(i(k_1 + k_2)a) \\ m_{21} \exp(-i(k_1 + k_2)a) & m_{22} \exp(-i(k_1 - k_2)a) \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$\equiv V_1^\dagger(a)M(0)V_2(a),$$

$$V_1(a) = \begin{pmatrix} \exp(-ik_1 a) & 0 \\ 0 & \exp(ik_1 a) \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

$$V_2(a) = \begin{pmatrix} \exp(-ik_2 a) & 0 \\ 0 & \exp(ik_2 a) \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Трансферматрица барьера, показанного на рис. 3.4, равна

$$M_\Sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N M(x_i). \quad (3.57)$$

Это соотношение аналогично интегральной сумме в математическом анализе. На практике, выбрав достаточно большое N , можно с большой точностью аппроксимировать трансферматрицу M_Σ с помощью (3.57).

3.5.2 Интерферометр Фабри-Перо, решение задачи рассеяния методом трансформатриц

Потенциал типа Фабри-Перо состоит из двух потенциальных барьеров, 1 и 2. полная трансформатрица системы M равна произведению трансформатриц барьеров: $M = M_1 M_2$.

Амплитуда прохождения через систему равна

$$\begin{aligned} t &= m_{11}^{-1} = (m_{11}^{(1)} m_{11}^{(2)} + m_{12}^{(1)} m_{21}^{(2)})^{-1} = (t_1^{-1} t_2^{-1} - t_1^{-1} r_1' r_2 t_2^{-1})^{-1} = \\ &= (t_1^{-1} [1 - r_1' r_2] t_2^{-1})^{-1} = t_2 [1 - r_1' r_2]^{-1} t_1. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Амплитуда отражения r равна $m_{21} t$. Тогда

$$m_{21} = m_{21}^{(1)} m_{11}^{(2)} + m_{22}^{(1)} m_{21}^{(2)} = r_1 t_1^{-1} t_2^{-1} + (t_1' - r_1 t_1^{-1} r_1') r_2 t_2^{-1} \quad (3.59)$$

и

$$\begin{aligned} r &= (r_1 t_1^{-1} t_2^{-1} + (t_1' - r_1 t_1^{-1} r_1') r_2 [1 - r_1' r_2]^{-1} t_1 = \\ &= r_1 t_1^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1' r_2)^n t_1 + t_1' r_2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1' r_2)^n t_1 - r_1 t_1^{-1} r_1' r_2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1' r_2)^n t_1 = \\ &= r_1 + t_1' r_2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1' r_2)^n t_1 = r_1 + t_1' r_2 [1 - r_1' r_2]^{-1} t_1. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Физ смысл знаменателя. Уравнение $1 - r_1' r_2 = 0$ определяет квазистационарные уровни энергии. Если привести фазы амплитуд рассеяния к началу координат, то мы получим: $1 - r_{10}' r_{20} e^{2ika} = 0$, где k — волновой вектор между барьерами, и a — расстояние между барьерами.

Квазиклассическая волновая функция пропорциональна $\psi(x) \sim \cos(\int_a^x k(z) dz - \pi/4)$. Пусть профиль потенциала не зависит от x в области $x_1 < x < x_2$. Тогда фаза амплитуды отражения r_1' равна $\phi(r_1') = 2 \int_{a_1}^{x_1} k(z) dz - 2k_0 x_1 - \pi/2$, где k_0 волновой вектор в области $x_1 < x < x_2$. Аналогично, $\phi(r_2) = -2 \int_{a_2}^{x_2} k(z) dz + 2k_0 x_2 - \pi/2$. Тогда мы получаем условие квантования спектра:

$$\phi(r_1') + \phi(r_2) = 2 \int_{a_1}^{x_1} k(z) dz + 2 \int_{x_2}^{a_2} k(z) dz - 2k_0(x_2 - x_1) - \pi = 2\pi n. \quad (3.61)$$

А это правило квантования Бора-Зоммерфельда.

3.5.3 Модель Кронига-Пени — спектр

Теорема Блоха: $\psi(x) = e^{iKx}u(x)$, где $u(x)$ – периодическая функция с периодом a и $|K| < \pi/a$.

В интервале $0 < x < a$, волновая функция равна

$$\psi(x) = \psi_{0-a}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \equiv e^{iKx}u(x). \quad (3.62)$$

В интервале $a < x < 2a$, волновая функция равна согласно теореме Блоха

$$\psi(x) = e^{iKa} \left(Ae^{ik(x-a)} + Be^{-ik(x-a)} \right). \quad (3.63)$$

С другой стороны,

$$S \begin{pmatrix} A \\ Be^{iKa+ika} \end{pmatrix} \equiv S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{iKa+ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{iKa-ika} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Получаем уравнение на спектр:

$$\det \left(S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{iKa+ika} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{iKa-ika} & 0 \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (3.65)$$

Вычисляя детерминант и раскрывая скобки, найдем, что

$$rr' - tt' - e^{-i2ka} + t'e^{iKa-ika} + te^{-iKa-ika} = 0. \quad (3.66)$$

Произведение rr' и tt' не зависит от положения потенциального барьера относительно начала координат, так как и слева и справа от барьера k -векторы одинаковые (это следствие периодичности системы).

Из условия унитарности матрицы рассеяния (см. (2.21)) $r' = -tr^\dagger[t'^\dagger]^{-1}$. Учитывая, что $t = t'$,

$$(rr' - t^2)/t = -R/t^* - t = -\frac{R + \mathcal{T}}{t^*} = -\frac{1}{t^*}, \quad (3.67)$$

где $R = |r|^2$.

В итоге, получаем уравнение:

$$-\frac{e^{ika}}{t^*} - \frac{e^{-ika}}{t} + 2\cos(Ka) = 0, \quad (3.68)$$

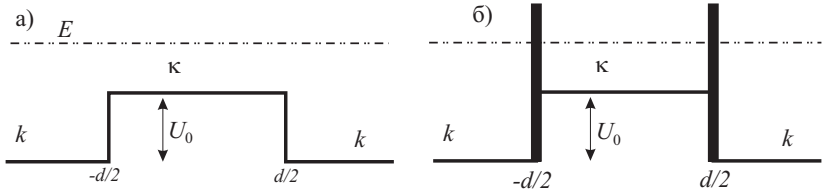


Рис. 3.5. а) Прямоугольный потенциальный барьер, где $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ и $\kappa = \sqrt{2m(E + U_0)/\hbar^2}$. На рис. 3.5б изображен прямоугольный барьер к которому добавлены δ -потенциалы в точках $x = \pm d/2$.

или

$$-\operatorname{Re} \frac{e^{ika}}{t^*} + \cos(Ka) = 0. \quad (3.69)$$

Для δ -барьеров ($U(x) = \alpha\delta(x)$), $t = t' = \frac{1}{1+iZ}$, где $Z = m\alpha/\hbar^2 k$. Тогда уравнение на спектр (3.69) можно переписать следующим образом:

$$-\cos(ka) - Z \sin(ka) + \cos(Ka) = 0. \quad (3.70)$$

3.5.4 Прямоугольный барьер, решение задачи рассеяния методом трансферматриц

В качестве упражнения решим задачу надбарьерного рассеяния для прямоугольного потенциального барьера методом трансферматриц, см. рис. 3.5а и раздел 3.2, где эта задача решена методом сшивки волновых функций для случая подбарьерного рассеяния. Прямоугольный барьер можно представить в виде суперпозиции двух потенциальных ступенек расположенных в точках $x = \pm d/2$. Тогда трансферматрица прямоугольного потенциального барьера равна произведению трансферматриц этих потенциальных ступе-

нек:

$$M_{\Sigma} = M(d/2)M(-d/2) = \begin{pmatrix} m_{11} \exp(i(k - \kappa)d/2) & m_{12} \exp(i(k + \kappa)d/2) \\ m_{21} \exp(-i(k + \kappa)d/2) & m_{22} \exp(-i(k - \kappa)d/2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_{11} \exp(-i(\kappa - k)d/2) & m_{12} \exp(-i(\kappa + k)d/2) \\ m_{21} \exp(i(\kappa + k)d/2) & m_{22} \exp(i(\kappa - k)d/2) \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

где $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ и $\kappa = \sqrt{2m(E + U_0)\hbar^2}$. Пользуясь общим соотношением, (2.23), между элементами трансформатрицы и амплитудами рассеяния найдем амплитуды прохождения и отражения от прямоугольного потенциального барьера. Например,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_{\Sigma}} = (M_{\Sigma})_{11} &= m_{11}^2 e^{-i(\kappa - k)d} + m_{12}m_{21} e^{i(k + \kappa)d} = \\ &= \left(\frac{k + \kappa}{2\sqrt{k\kappa}} \right)^2 e^{-i(\kappa - k)d} + \frac{k - \kappa}{2\sqrt{k\kappa}} \frac{\kappa - k}{2\sqrt{k\kappa}} e^{i(k + \kappa)d}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

После упрощения найдем

$$\begin{aligned} t_{\Sigma} &= \frac{t^2 e^{i(\kappa - k)d}}{1 - r^2 e^{2i\kappa d}} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{k\kappa}}{k + \kappa} \right)^2 e^{i(\kappa - k)d}}{1 - \left(\frac{k - \kappa}{k + \kappa} \right)^2 e^{2i\kappa d}} = \\ &= \frac{4k\kappa e^{-ikd}}{(k + \kappa)^2 e^{-i\kappa d} - (k - \kappa)^2 e^{i\kappa d}}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где t и r определены в ур. (3.50). Соотношение (3.73) для t_{Σ} после замены $\kappa \rightarrow i\kappa$ [переход к подбарьерному рассеянию, $E < U_0$] совпадает с найденным нами методом сшивки волновых функций амплитудой прохождения через прямоугольный потенциальный барьер, см. ур. (3.18). Самостоятельно найдите r_{Σ} . Обратим внимание, что формула (3.73) удивительно похожа на амплитуду прохождения (3.24) через резонансный потенциал. Это не случайно, прямоугольный барьер – это частный случай резонансного потенциала.

Задача.1 Проверьте, что уравнение $t_{\Sigma} = \frac{tt' e^{i(\kappa - k)d}}{1 - r^2 e^{2i\kappa d}}$ определяет амплитуду прохождения через резонансный потенциал типа интер-

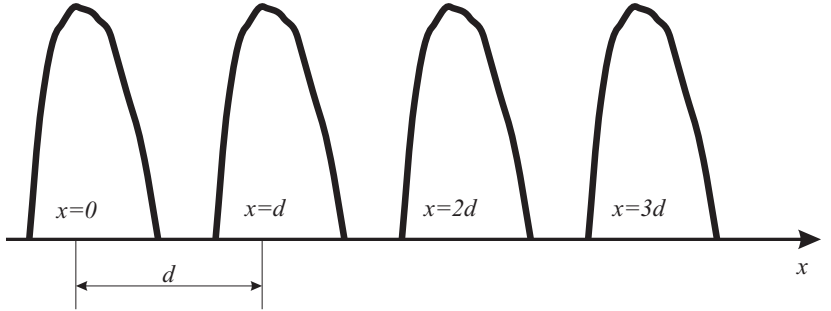


Рис. 3.6. Резонансный потенциал, составленный из одинаковых потенциальных барьеров сдвинутых на d . Между барьерами волновой вектор частицы равен $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Необходимо *аналитически* найти амплитуды рассеяния от потенциала при условии, что амплитуды рассеяния от потенциальных барьеров известны.

ферометра Фабри Перо [прямоугольный барьер к которому добавлены δ -потенциалы в точках $x = \pm d/2$, см. рис. 3.5б], если t , t' , r и r' — амплитуды рассеяния от потенциальной ступеньки с δ -потенциалом. Попробуйте решить эту задачу с помощью сшивки волновых функций (не используя трансферматрицы!)... Указание, убедитесь в том, что если δ -барьер равен $\alpha\delta(x)$, то формулы (3.50) модифицируются:

$$t = t' = \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{k_1 + k_2 + ik_0}, \quad (3.74)$$

$$r = \frac{k_1 - k_2 - ik_0}{k_1 + k_2 + ik_0}, \quad r' = \frac{k_2 - k_1 - ik_0}{k_1 + k_2 + ik_0}, \quad (3.75)$$

где $k_0 = 2m\alpha/\hbar^2$.

3.5.5 Туннелирование через потенциальную гребенку

Рассмотрим резонансный потенциал, составленный из одинаковых потенциальных барьеров сдвинутых на a , см. рис. 3.6.⁵ Между ба-

⁵ Похожая задача возникает в оптике при исследованиях прохождения света через тонкие пленки, маневренные на поверхность линз для “просветления”.

рьерами волновой вектор частицы равен $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Необходимо *аналитически* найти амплитуды рассеяния от потенциала при условии, что амплитуды рассеяния от потенциальных барьеров известны. Если бы барьеров было два, то задача бы сводилась к исследованию рассеяния от интерферометра Фабри-Перо [простая задача с хорошо известным решением]. Если же барьеров больше чем два, то задачу трудно решить обычными методами, например, сшивкой волновых функций. Решим задачу методом трансформатриц.

Аналогично тому, как решалась задача о прямоугольном барьере, будем считать, что нам известна трансформатрица потенциального горба, расположенного в точке $x = 0$:

$$M = M(0) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

где, как обычно, матричные элементы трансформатрицы связаны с амплитудами рассеяния соотношением (2.23). Матрица рассеяния потенциала сдвинутого на d равна

$$M(d) = V^\dagger(d)MV(d), \quad V(d) = \begin{pmatrix} \exp(-ikd) & 0 \\ 0 & \exp(ikd) \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

где $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Трансформатрица потенциальной гребенки, состоящей из $N + 1$ потенциальных горбов, равна

$$\begin{aligned} M_\Sigma &= M(0)M(d)M(2d) \dots M(Nd) = \\ &= MV^\dagger(d)MV(d)V^\dagger(2d)MV(2d) \dots V^\dagger(Nd)MV(Nd) = \\ &= [MV^\dagger(d)]^{N+1}V((N+1)d). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению степени от комплексной квадратной матрицы размерности 2. Найти степень матрицы можно разными способами, например это можно сделать с помощью следующей теоремы: пусть Q комплексная 2×2 -матрица с определителем равным единице. Тогда

$$Q^n = \begin{pmatrix} Q_{11}U_n(a) - U_{n-1}(a) & Q_{12}U_n(a) \\ Q_{21}U_n(a) & Q_{22}U_n(a) - U_{n-1}(a) \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

где $a = \text{tr } Q/2$ и U_n — полином Чебышева второго рода,

$$U_n(a) = \frac{\sin[(n+1) \arccos a]}{\sqrt{1-a^2}}. \quad (3.80)$$

Упражнения

1. Как изменятся M и S , если потенциальная ступенька расположена не в точке $x = 0$, а в точке $x = a$ ($U_s \rightarrow U_s(x - a)$)?
2. Найти вероятность прохождения через потенциальную гребенку, используя ур. (3.79).
3. Найдите амплитуду прохождения через резонансный потенциал типа Фабри-Перо методом трансферматриц.

Глава 4

Квантовые контакты

4.1 Ток через квантовый точечный контакт

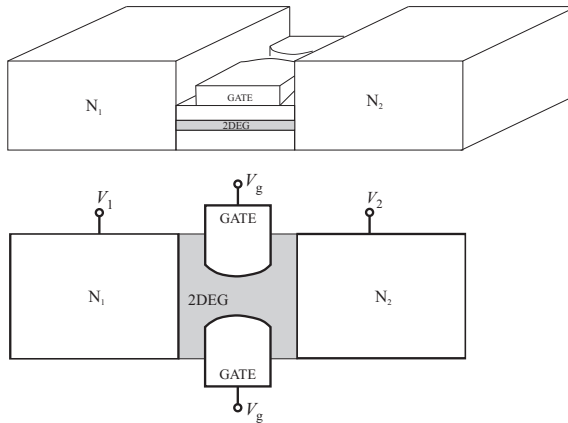


Рис. 4.1. Схема экспериментальной реализации точечного контакта. Два массивных электрода соединены слоем двумерного электронного газа (2DEG), сформированного в полупроводниковой гетероструктуре. Сужение формируется с помощью напряжения V_g , подаваемого на затвор (gate).

В проводниках основной вклад в ток дают обычно электроны с энергиями, близкими к энергии Ферми E_F . Рассмотрим контакт двух проводников. Если ширина контакта W настолько мала, что в ней укладывается лишь несколько длин волн электронов λ_F , то будем называть такой контакт точечным. В данном разделе мы увидим, к каким особенностям транспорта приводит настолько малая ширина контакта.

В эксперименте типичный точечный контакт реализуется следующим образом: два массивных электрода соединяют слоем двумерного электронного газа (часто используется аббревиатура $2\text{DEG} = 2\text{-dimensional electron gas}$), сформированного в области полупроводникового гетероперехода — см. рис. 4.1. Затем сверху к двумерному электронному газу подводят пластины затвора (gate). Подавая на затвор потенциал, можно «выдавливает» электроны из областей вблизи затвора, делая эти области недоступными для электронов и тем самым формируя сужение в двумерном электронном газе (это и есть точечный контакт). Чем больше поданное на затвор напряжение, тем больше запрещённая для электронов область и тем уже сужение. Таким образом, с помощью затвора достаточно легко можно менять геометрию контакта.

Для исследования электронного транспорта в мезоскопических контактах широко используется метод матриц рассеяния (также его называют подходом Ландауэра). Зная матрицу рассеяния \hat{S} (составленную из коэффициентов отражения и прохождения) электронов на потенциальном поле, формирующем контакт, можно найти транспортные свойства контакта: средний ток и корреляторы токов (шум). Матрицу рассеяния можно найти, решая уравнение Шрёдингера, описывающее состояние электронов в поле контакта аналогично тому, как мы выше искали амплитуды одномерного рассеяния. Подробное изложение метода Ландауэра можно найти в книге [4], а также в обзоре [5]. Наше изложение использует элементы этого подхода; в основном мы будем следовать статье [3].

Рассмотрим мезоскопическую систему, соединяющую резервуары N_1 и N_2 , как показано на рис. 4.2. В отличие от привычных задач из курса общей физики, где локальный ток j задается локальным электрическим полем E , $j = \sigma E$ где σ — проводимость, данная задача нелокальна, и сама постановка задачи меняется. Задается полная разность потенциалов между берегами (т.е. напряжение, а при рассмотрении температурных эффектов учитывается еще и

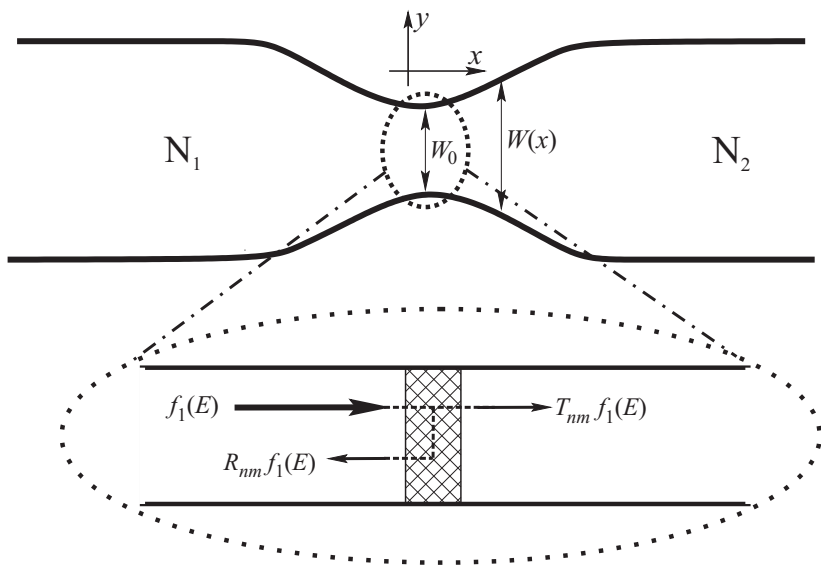


Рис. 4.2. Точечный контакт, имеющий формул сужения. Ширина сужения описывается функцией $W(x)$ с минимальным значением W_0 . В нижней части рисунка на увеличенном фрагменте показано, что внутри сужения в общем случае может находиться некоторый рассеиватель (например, примесь или туннельный барьер), который характеризуется вероятностями отражения и прохождения \mathcal{R}_{nm} и \mathcal{T}_{nm} из канала m в канал n .

различие в функциях распределения электронов), и требуется найти полный ток через проводник. При этом мы рассматриваем ситуацию, когда электроны испытывают только упругое рассеяние и диссипация возникает только далеко в берегах в силу очень медленной энергетической релаксации. Резервуары имеют электрохимические потенциалы μ_1 и μ_2 , функции распределения электронов в них имеют вид

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu_\alpha)/T] + 1}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.1)$$

Будем считать, что система двумерная, это соответствует стандартной экспериментальной ситуации, показанной на рис. 4.1. Выберем направление осей x, y так, как это показано на рис. 4.2. Тогда

ток течёт вдоль оси x . Волновые функции стационарных состояний электронов удовлетворяют уравнению Шрёдингера

$$\hat{H}(x, y)\psi(x, y) = E\psi(x, y). \quad (4.2)$$

Одноэлектронный гамильтониан $H(x, y)$ даётся формулой

$$\hat{H}(x, y) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + U(x, y), \quad (4.3)$$

где $U(x, y)$ – потенциал, описывающий границы (стенки) контакта. Для простоты будем считать, что стенки непроницаемые, при этом расстояние между ними меняется вдоль x по некоторому закону $W(x)$. Тогда волновая функция на стенках, т. е. при $y = \pm W(x)/2$, должна обращаться в ноль. Предполагая, что форма контакта достаточно плавная [т. е. $W(x)$ медленно меняется на расстояниях порядка фермиевской длины волны λ_F], мы можем записать решение уравнения (4.2) с помощью адиабатического разделения переменных:

$$\psi_n(x, y) = \phi_n(x) \sqrt{\frac{2}{W(x)}} \sin \left[n\pi \left(\frac{y}{W(x)} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4.4)$$

где индекс $n = 1, 2, 3, \dots$ (целые положительные числа), а функция $\phi_n(x)$ удовлетворяет одномерному уравнению Шрёдингера с эффективным потенциалом $U_n(x)$, описывающим влияние стенок контакта:¹

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_n(x) \right] \phi_n(x) = E\phi_n(x), \quad U_n(x) = \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mW^2(x)}. \quad (4.5)$$

Характерные размеры резервуаров значительно больше длины волны электрона. Поэтому можно считать, что $W(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow$

¹Легко заметить, что в случае $W = \text{const}$ имеет место точное разделение переменных x и y в уравнении Шрёдингера, и соответственно точными оказываются формулы (4.4)-(4.5). В случае же, когда W зависит от x , точное разделение переменных уже не имеет места. Однако, если ширина контакта $W(x)$ мала и является медленной функцией (в соответствии с нашими предположениями), имеет место адиабатическое приближение [9]: на качественном языке, движение вдоль y гораздо более быстрое, чем вдоль x , поэтому в своём движении по x частица чувствует некоторые усреднённые характеристики поперечного движения, и это позволяет разделить переменные. Технически адиабатическое приближение сводится к тому, что в формулы (4.4)-(4.5) вместо постоянного W теперь надо подставить $W(x)$.

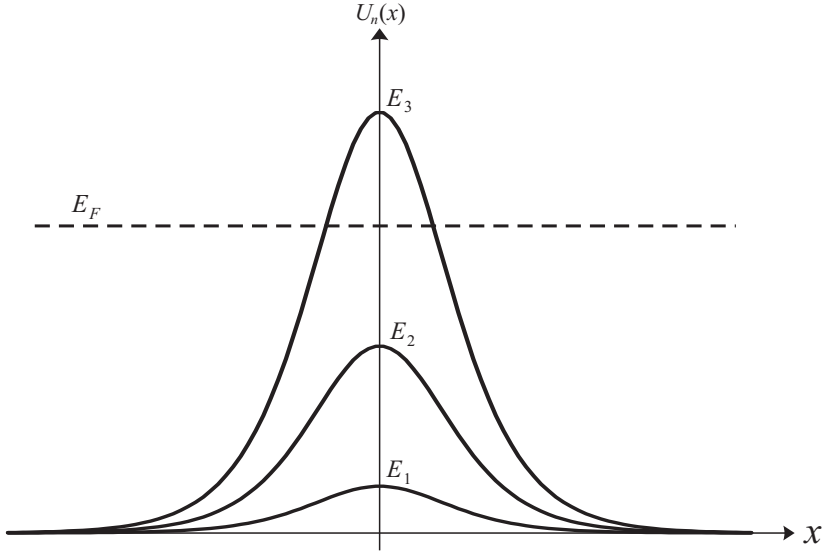


Рис. 4.3. Пример эффективного потенциала $U_n(x)$, возникающего в результате влияния стенок контакта. При каждом n обозначим максимальное значение потенциала (определяемое самым узким местом сужения) как E_n . Ток обеспечивается электронами, имеющими энергию вблизи энергии Ферми E_F . Изображённая ситуация соответствует двум открытым каналам (каналы 1 и 2, т. к. только для них выполнено соотношение $E_F > E_n$).

$\pm\infty$. Минимальное значение $W(x)$ обозначим W_0 . Тогда эффективный потенциал (зависящий от поперечного квантового числа n) в получившемся уравнении Шрёдингера имеет вид потенциального барьера максимальной высоты

$$E_n = \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mW_0^2}, \quad (4.6)$$

убывающего до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$, см. рис. 4.3.

Мы видим, что волновая функция характеризуется номером поперечного квантования n . Иными словами, поперечное движение электрона должно быть устроено так, чтобы на ширине контакта укладывалось целое число полувольт $\lambda_F/2$. Поэтому электроны, пролетающие через контакт могут иметь либо одну полуволну,

укладывающуюся на ширине контакта, либо две, либо три и т. д. Для обозначения таких состояний используется термин «канал». Например, принято говорить, что электрон в состоянии с волновой функцией ψ_n находится в n -ом канале.

Ввиду медленности изменения $W(x)$, можно решить (4.5), используя квазиклассическое приближение. В главном приближении через сужение проникают только электроны с энергиями $E > E_n$. Иногда бывает нужно учитывать дополнительное рассеяние электронов в сужении, например, на потенциале примесей или на туннельном барьере. Такой рассеиватель схематично изображён штриховкой на рис. 4.2.

Вычислим электрический ток в сужении слева от рассеивающего потенциала. Электроны с различными энергиями дают независимые вклады в полный ток. Носители заряда с энергией E , приходящие из левого резервуара N_1 , дают вклад в ток, пропорциональный $ef_1(E) \sum_n v_n$, где $v_n = \sqrt{2(E - E_n)}/m$. Из-за отражения электронов от рассеивающего потенциала возникает обратный ток, пропорциональный $-ef_1(E) \sum_{n,m} v_n \mathcal{R}_{nm}$. Здесь \mathcal{R}_{nm} – вероятность того, что летящий на рассеиватель в канале m из N_1 электрон отразится от рассеивающего потенциала в канал n . Электроны, летящие из правого резервуара, дадут вклад в ток, пропорциональный $-ef_2(E) \sum_{n,m} v_n \mathcal{T}_{nm}$, где \mathcal{T}_{nm} – вероятность того, что летящий на рассеиватель в канале m из N_2 электрон пройдёт через рассеиватель в канал n .² Кроме того, необходимо учесть, что указанные вклады возникают только в случае, если соответствующие каналы открыты, т. е. $E > E_n$ и $E > E_m$. В результате ток оказывается равным

$$I = 2 \sum_{n,m} \int_0^\infty \frac{dE}{2\pi\hbar v_n} e v_n [f_1(E)(\delta_{nm} - \mathcal{R}_{nm}) - f_2(E)\mathcal{T}_{nm}], \quad (4.7)$$

где мы учли, что плотность состояний в канале n равна $2/2\pi\hbar v_n(E)$ (коэффициент 2 в числителе учитывает спиновое вырождение). Как мы видим, максимальный вклад в ток (при $\mathcal{T} = 1$) во всех каналах оказывается одинаковым.³ θ обозначает функцию Хевисайда. Для простоты предполагается, что вероятности рассеяния

²Здесь ставится многоканальная задача рассеяния. Амплитуды рассеяния в этом случае будут матрицами в пространстве каналов.

³В одномерном случае без учёта спина число состояний в интервале импуль-

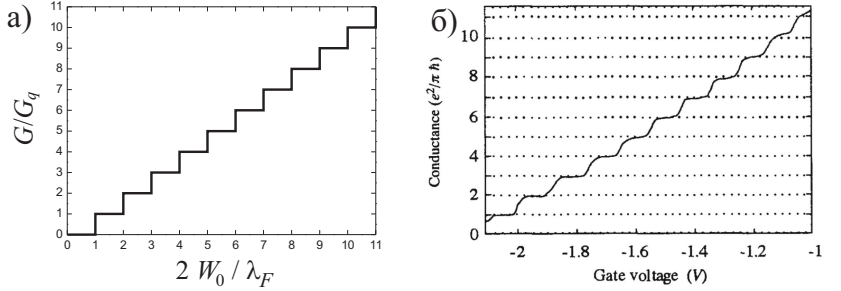


Рис. 4.4. Квантование кондактанса точечного контакта при изменении ширины сужения W_0 напряжением на затворе, (см. рис. 4.1). (а) Кондактанс как функция W_0 . (б) Экспериментальные зависимости кондактанса сужения как функции напряжения на затворе V_g . С хорошей степенью точности можно считать, что W_0 – линейная функция V_g . [График (б) взят из первой экспериментальной работы на эту тему [12]. Практически одновременно аналогичные результаты были представлены в работе [13].]

от энергии не зависят.

Упражнения

1. Определить точность адиабатического приближения (4.4).

4.2 Квантование кондактанса

Найдём теперь линейный кондактанс: $G = dI/dV$ при $V \rightarrow 0$. Будем считать, что $\mu_1 = E_F$, $\mu_2 = E_F - eV$. Тогда в пределе нулевой температуры получаем

$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_{n,m} \mathcal{T}_{nm} \theta(E_F - E_n) \theta(E_F - E_m). \quad (4.8)$$

Величина

$$G_q = \frac{e^2}{\pi\hbar} = \frac{2e^2}{h} \quad (4.9)$$

сов dp в расчёте на единицу объема равно $dp/(2\pi\hbar)$, что можно переписать как $dE/[2\pi\hbar(\partial E/\partial p)]$. После этого остаётся заметить, что $\partial E/\partial p = v$.

называется квантовым кондактансом. Это естественная единица измерения кондактанса в мезоскопических системах.

Исследуем важный предельный случай формулы (4.8). Пусть $T_{nm} = \delta_{nm}$ — это значит, что рассеяния на примесях в сужении нет и каналы не перемешиваются. Тогда

$$G = NG_q, \quad N = \sum_n \theta(E_F - E_n), \quad (4.10)$$

где N — число «открытых» каналов. Посмотрим, как будет меняться G , если мы будем менять ширину W_0 сужения, прикладывая напряжение к затвору, см. рис. 4.3. Если $W_0 \rightarrow 0$, то мы получаем $E_F < E_1$, поэтому $N = 0$ и электроны не могут пройти через сужение. Если $E_1 < E_F < E_2$, то открыт один канал и $G = G_q$. Когда $E_2 < E_F < E_3$, открыто два канала, поэтому $G = 2G_q$ и т. д. Таким образом, кондактанс сужения квантуется в единицах G_q , см. рис. 4.4.⁴ [На экспериментальном графике рис. 4.4б высота ступенек подчиняется правилу квантования с очень хорошей точностью, в то время как их края заметно размыты. Это может быть связано с различными причинами, такими как конечная температура, конечная вероятность подбарьерного прохождения и надбарьерного отражения и др.]

Разделение каналов на открытые и закрытые очень наглядно видно на рис. 4.3. Эффективная энергия $U_n(x)$ учитывает влияние стенок сужения, т. е. учитывает поперечное квантование. Для открытия какого-либо канала необходимо, чтобы энергия электронов E_F превысила эффективную энергию, соответствующую этому каналу (т. е. энергия электрона должна превышать энергию поперечного квантования) — тогда электроны проходят. В противном же случае электроны отражаются от барьера (у них «не хватает» энергии на поперечное квантование, и уж тем более не остаётся энергии для движения по x), и такой канал закрыт. Если при фиксированном E_F мы будем увеличивать ширину сужения W_0 , то эффективная энергия будет уменьшаться, и всё большее число каналов будет удовлетворять критерию $E_n < E_F$.

⁴В этом идеальном случае G_q можно назвать квантом кондактанса. Однако, в общем случае, когда имеется отражение от примесей в сужении, кондактанс одного канала будет меньше, чем G_q , и эта величина теряет смысл кванта кондактанса. Поэтому во избежание недоразумений мы называем её квантовым кондактансом.

Упражнения

1. Вывести формулу (4.8).
2. Найти число открытых каналов в квазиклассическом сужении, т.е., если $W_0 \gg \lambda_F$. Как изменится ответ, если резервуары и сужение сделать трехмерными.
3. Как изменится квантование кондактанса, если мы поместим систему в магнитное поле B , такое что $l_B = \sqrt{\hbar c/eB} \gg W_0$? Указание: необходимо учесть зеемановский член в гамильтониане.

4.3 Размытие ступеней кондактанса за счет туннелирования через эффективный потенциал.

Примем в качестве модели для формы квантового точечного контакта, рис. 4.2, зависимость

$$W(x) = \frac{W_0}{L} \sqrt{x^2 + L^2} \quad (4.11)$$

где W_0 и L – ширина и длина сужения соответственно. Величина $\alpha = 2 \arctan(W_0/2L)$ – угол под которым открывается контакт. Эффективный потенциал, см. (4.5), в этом случае равен:

$$U_n(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2 L^2 n^2}{2mW_0^2(x^2 + L^2)} \approx U_n(0) - \frac{m}{2} \Omega_n^2 x^2 \quad (4.12)$$

приблизительно квадратичен вблизи вершины барьера ($x = 0$) с коэффициентами разложения:

$$E_n = U_n(0) = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mW^2} \quad \text{and} \quad \Omega_n = \frac{\hbar \pi n}{mWL}.$$

Проблема туннелирования через опрокинутый квадратичный потенциал может быть решена точно. Вероятность прохождения через (4.12) дается формулой Кембла

$$\mathcal{T}_n(E) = \left[e^{2\pi[E_n - E]/\hbar\Omega_n} + 1 \right]^{-1}, \quad (4.13)$$

в виде размытой ступеньки возрастающей от 0 при $E < E_n$ до 1 при $E > U_n(0)$ а (переход) кроссовер происходит на масштабе $\hbar\Omega_n/2\pi$. Чтобы можно было наблюдать ступени в кондактансе как функции W_0 , ширина ступени $\hbar\Omega_n/2\pi$ должна быть много меньше расстояния между ступенями $U_{n+1}(0) - U_n(0) \approx \hbar^2\pi^2 n/mW_0^2$, то есть,

$$\frac{L}{W} \gg \frac{1}{2\pi^2} \approx 0.051. \quad (4.14)$$

Поэтому даже для относительно короткого точечного контакта наблюдается хорошее квантование.

Упражнения

1. Вывести формулу Кембла. Указание, см. задачу 4 после §50 [2].

4.4 Транспортные свойства контактов с резонансным потенциалом.

Рассмотрим квантовый контакт между двумя электронными резервуарами. Нас будет интересовать случай, когда рассеивателем в контакте служит резонансный потенциал типа Фабри-Перо, см. рис. 3.2. Будем считать для простоты, что открыт только один канал, так что ур. (4.7) имеет вид:

$$I = 2e \int_0^\infty \frac{dE}{2\pi\hbar} [f_1(E) - f_2(E)] \mathcal{T}(E) \theta(E - E_1^\perp), \quad (4.15)$$

где мы ввели верхний индекс у эффективной энергии в сужении, чтобы не путать E_1^\perp с резонансной энергией потенциала рассеяния. Будем также предполагать, что $\mathcal{T}_{1,2} \ll 1$, так что приближение Брейта-Вигнера (3.39) применимо. Тогда

$$\mathcal{T}(E) \approx \sum_n \frac{\Gamma_n^{(1)} \Gamma_n^{(2)}}{\Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}} A_n(E - E_n), \quad (4.16)$$

$$A_n(E - E_n) = \frac{\Gamma_n}{\epsilon^2 + (\Gamma_n/2)^2}, \quad (4.17)$$

где $\Gamma_n^{(i)}$, $i = 1, 2$ парциальные ширины резонансов и $\Gamma_n = \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}$ – полная ширина резонанса. Подставив это выражение в (4.15), найдем при $T = 0$, что

$$I = \frac{e}{\pi\hbar} \sum_n \frac{\Gamma_n^{(1)}\Gamma_n^{(2)}}{\Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}} \int_{E_1^\perp}^V A_n(E - E_n). \quad (4.18)$$

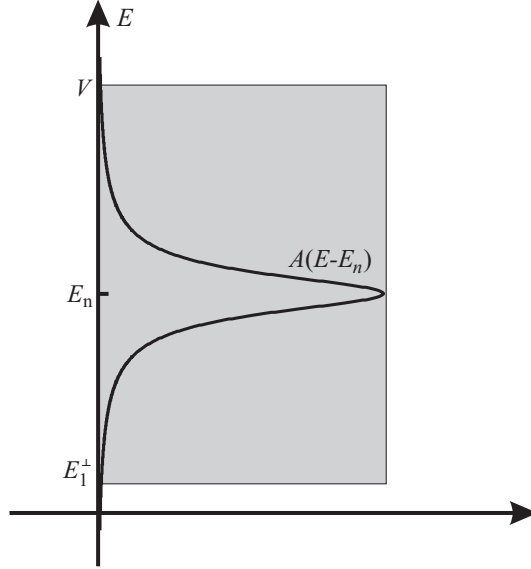


Рис. 4.5. Вклад резонансов вероятности прохождения в ток определяется интегралом от спектральной Лоренцевской функции $A(E - E_n)$ в интервале от E_1 до V .

Пусть в интервале $E_n \in [E_1^\perp, V]$ находится несколько резонансов вероятности прохождения. Тогда согласно (4.18) и рис. 4.5 вклад этих резонансов в ток равен

$$\frac{2e}{\hbar} \sum_n \frac{\Gamma_n^{(1)}\Gamma_n^{(2)}}{\Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)}}, \quad (4.19)$$

где мы воспользовались тем, что $\int_{-\infty}^{\infty} A_n(E) = 2\pi$.

Упражнения

1. Показать, что при некогерентном туннелировании (sequential tunneling) ток равен $I = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$ при любых напряжениях. Указание, см. [4].

4.5 Эффект Ааронова-Бома

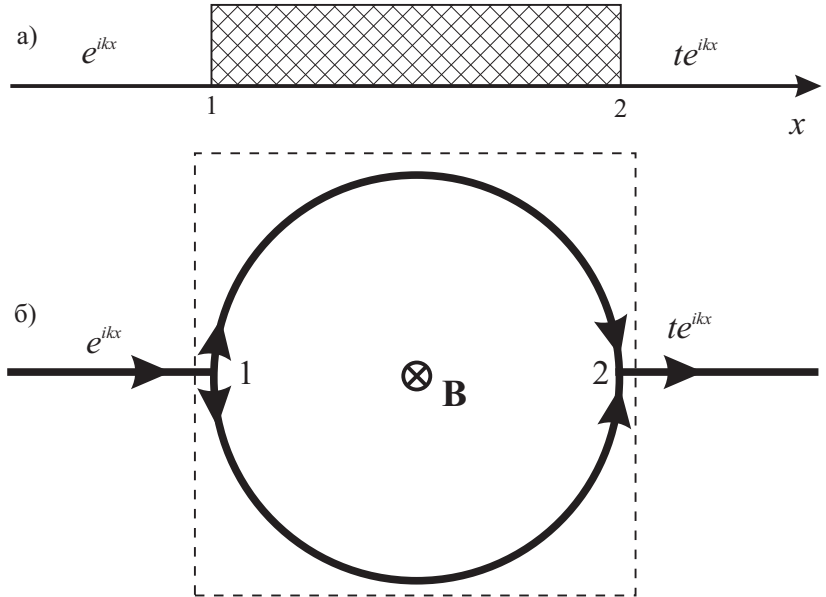


Рис. 4.6. На рис. 4.6а показано одномерное рассеяние частицы на потенциале, схематично отмеченным штриховкой. На рис. 4.6б этот потенциал рассеяния показан в явном виде. Квантовый проводник с одним открытым каналом (одна распространяющаяся мода), соединяется в точке “1” с другим (одномодовым) проводником, согнутым в кольцо. В точке “2” кольцо соединяется с другим квантовым одномодовым проводником.

Во всех задачах по теории рассеяния, рассмотренных выше, матрица рассеяния была симметрична, так что $t = t'$. Ниже приводится конкретный пример, показывающий, что это далеко не всегда так.

На рис. 4.6а показано одномерное рассеяние частицы на потенциале, схематично отмеченным штриховкой. На рис. 4.6б этот потенциал рассеяния показан в явном виде. Квантовый проводник с одним открытым каналом (одна распространяющаяся мода), соединяется в точке “1” с другим (одномодовым) проводником, согнутым в кольцо. В точке “2” кольцо соединяется с другим квантовым одномодовым проводником. Задача состоит в том, чтобы вычислить амплитуду прохождения частицы из одного проводника в другой через кольцо, учитывая, что кольцо находится в однородном магнитном поле \mathbf{B} , перпендикулярном его плоскости.

Будем вычислять амплитуду рассеяния согласно Фейнмановскому подходу, см.2.3. Тогда, чтобы найти полную амплитуду рассеяния, необходимо просуммировать амплитуды прохождения частицы из одного проводника в другой через кольцо по всем возможным путям. Самый короткий путь – прохождение частицы из левого проводника в правый через верхнюю или нижнюю часть кольца. Будем считать без ограничений общности, что кольцо и контакты симметричны, так что при $\mathbf{B} = 0$ амплитуды прохождения частицы по эти путям, $t_{12}^{u(d)}$ одинаковы и равны t_{12} . Если магнитное поле \mathbf{B} отлично от нуля, то проходя по верхней (нижней) части кольца частица приобретает *разную* фазу,

$$t_{12}^{(u)} = t_{12} e^{i\varphi_1}, \quad t_{12}^{(d)} = t_{12} e^{i\varphi_2}, \quad (4.20)$$

$$\varphi_1 = \frac{e}{c\hbar} \int_{\text{upper arm}} \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad \varphi_2 = \frac{e}{c\hbar} \int_{\text{lower arm}} \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad (4.21)$$

где \mathbf{A} – векторный потенциал, и интеграл берется по траектории частицы между точками 1 и 2. Разность этих фаз будет равна отношению потока магнитного поля через кольцо $\Phi = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$, к кванту магнитного потока $\Phi_0 = \hbar c/e$:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{e}{c\hbar} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (4.22)$$

Тогда, соответственно, полная амплитуда рассеяния и вероят-

ность прохождения равны,

$$\tilde{t} = t_{12} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)/2} \left[e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2} \right], \quad (4.23)$$

$$\tilde{t}' = t_{12} e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)/2} \left[e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2} \right], \quad (4.24)$$

$$\mathcal{T} = |\tilde{t}|^2 = 2\mathcal{T}_{12} + 2\mathcal{T}_{12} \cos(\varphi). \quad (4.25)$$

Обратим внимание, что амплитуда рассеяния слева направо \tilde{t}' , найденная нами с помощью правила (2.34) из выражения для \tilde{t} , не равна в общем случае \tilde{t} .

Периодическая зависимость вероятности прохождения \mathcal{T} от потока магнитного поля составляет суть эффекта Ааронова-Бома. Этот эффект реально измерим когда система, показанная на рис. 4.6, справа и слева присоединена к двум электронным резервуарам. Тогда, кондактанс такого контакта равен $G = G_q \mathcal{T}$ согласно формуле Ландауера (4.8). Если бы движения частицы по кольцу было бы некогерентным, то $\mathcal{T} = 2\mathcal{T}_{12}$. Благодаря интерференции $\mathcal{T} = 0$, когда $\varphi = \pi + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Это означает, что в полукольцах текут конечные токи, равные по величине и противоположные по направлению, которые в точках 1 и 2, складываясь, дают суммарно нулевой ток. В случае, $\varphi = 2\pi n$, токи в полукольцах текут в одном направлении и складываясь дают кондактанс в два раза больший чем в некогерентном случае.

Следует отметить, что мы учли в ур. (4.23) далеко не все вклады в амплитуду рассеяния. Частица формально может протуннелировать в точке 1 в кольцо из левого проводника, обойти несколько раз вокруг кольца и только после этого пройти в правый проводник. Мы не стали учитывать эти эффекты, предполагая, что длина энергетической (фазовой) релаксации частицы сравнима с длиной окружности кольца, так что упомянуты процессы не дают вклада из-за неупругих эффектов. Благодаря этим процессам, которыми мы пренебрегли для простоты, в вероятности прохождения появляются высшие гармоники, по сравнению с $\cos(\varphi)$. Если бы мы предположили, что неупругая длина сопоставима с расстоянием между рассеивателями в интерферометре Фабри-Перо, то нам бы тоже пришлось оборвать ряд (3.27), оставив только несколько первых членов.

Другая возможность (реализованная в реальных экспериментах) избежать многократных отражений, характерных для интер-

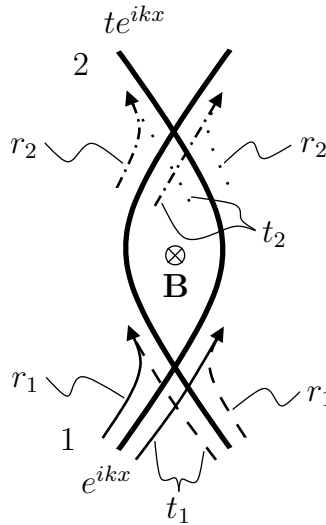


Рис. 4.7

ферометра типа Фабри -Перо, состоит в том, чтобы воспользоваться интерферометром типа Маха-Зендера, в котором интерферируют только две амплитуды (см. рис. 4.7). При этом, вообще говоря, требуется изготовить безотражательный рассеиватель («делитель потока»). Такая задача сложно выполнима, но в условиях квантового эффекта Холла это реально, см., например, работу [14].

Упражнения

1. Найти амплитуду рассеяния и вероятность прохождения, учитывая возможность многократного обхода частицы вокруг кольца. Указание: используйте [4].

Глава 5

Метод вторичного квантования и матрицы рассеяния

Выше был найден ток, текущий через сужение между двумя электронными резервуарами. Используемый в расчетах метод был не строгим. Довольно трудно вычислить, чему равны корреляторы тока, например шум, используя рассуждения, приведенные выше. Чтобы правильно решать задачу о квантовом транспорте через сужение удобно использовать метод вторичного квантования. Средний ток будет найден после усреднения оператора тока в представлении вторичном квантования по неравновесной матрице плотности системы, учитывающей разницу в распределении чисел заполнения в электронных резервуарах. Мы будем решать задачу о транспорте в точечном мезоскопическом контакте в предельном случае одного открытого канала с обеих сторон рассеивателя. Изложение общего случая можно найти в [5].

5.1 Оператор тока

В задачах об электронном транспорте в мезоскопических контактах удобно использовать вторичное квантование в координатном пространстве. Это значит, что мы должны определить $\hat{\Psi}$ -операторы.

Вспомним сначала, как это делается в стандартных курсах квантовой механики.

Введение вторичного квантования обычно начинается с определения одночастичного гамильтониана \hat{H}_0 , описывающего *не взаимодействующие* тождественные частицы. Такой гамильтониан представляется в виде суммы гамильтонианов отдельных частиц: $\hat{H}_0[N] = \sum_i^N (\hat{T} + U)_{x_i}$, где x_i — координата i -ой частицы и \hat{T} , U — операторы кинетической и потенциальной энергии отдельной частицы. Ключевую роль в представлении вторичного квантования играют так называемые одночастичные волновые функции $\varphi_\alpha(x)$, собственные функции гамильтониана одной частицы $(\hat{T} + U)$ или, что эквивалентно, собственные функции $\hat{H}_0[N = 1]$. Тогда $\hat{\Psi}(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \hat{a}_\alpha$ и гамильтониан имеет вид в представлении вторичного квантования, $\hat{H}_0 = \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x) (\hat{T} + U)_x \hat{\Psi}(x)$, где \hat{a}_α — оператор уничтожения частицы в состоянии α .¹

Задачи о квантовом транспорте — неравновесные задачи и их надо решать методами неравновесной квантовой статистической физики. исследуем квантовый транспорт в задаче о двух электронных резервуарах, соединенных через сужение с одним открытым каналом. Одночастичные волновые функции ψ — это состояния рассеяния. Если частица с энергией E падает на рассеиватель со стороны левого резервуара, будем обозначать это состояние как $\psi_{E,1}(x)$, если со стороны правого резервуара — $\psi_{E,2}(x)$. Таким образом, квантовые числа, характеризующие одночастичное состояние — это энергия E и резервуар, из которого вылетела частица. Теперь можно ввести $\hat{\Psi}$ -оператор (в гайзенберговском представлении):

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(x) &= \int dE \{ \psi_{E,1}(x) \hat{a}_{E,1} + \psi_{E,2}(x) \hat{a}_{E,2} \} \\ &= \int dE \sum_{\alpha=1,2} \psi_{E,\alpha}(x) \hat{a}_{E,\alpha}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где, например, $\hat{a}_{E,1}$ — оператор уничтожения электрона в состоянии с квантовыми числами $\{E, 1\}$. Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\{ \hat{a}_{E,\alpha}, \hat{a}_{E',\beta}^\dagger \} = \delta(E - E') \delta_{\alpha\beta}, \quad \{ \hat{a}_{E,\alpha}, \hat{a}_{E',\beta} \} = 0, \quad (5.2)$$

$$\{ \hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(x') \} = \delta(x - x'), \quad (5.3)$$

¹Мы предполагаем, что базис из волновых функций ψ ортонормирован.

где $\alpha = 1, 2$.

В глубине резервуаров² функция распределения электронов – Ферми распределение. При этом, температура и электрохимический потенциалы резервуаров в общем случае разные. Таким образом,

$$\langle \hat{a}_{E,\alpha}^\dagger \hat{a}_{E',\alpha'} \rangle = \delta(E - E') \delta_{\alpha\alpha'} f_\alpha(E), \quad (5.4)$$

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu_\alpha)/T_\alpha] + 1}, \quad (5.5)$$

где усреднение производится по (неравновесной) матрице плотности системы. В квантовой статистике, температура и химический потенциал – одинаковы в каждой точке. Здесь это не так! Поток частиц, вылетающих из левого резервуара, имеет температуру своего резервуара и соответствующий химический потенциал. По умолчанию мы предполагали ферми-статистику частиц. Аналогично теория строится для бозе частиц; в этом случае используется второе квантование для бозонов, и f_α будет Бозе-распределением. Можно аналогично исследовать транспорт смеси бозе и ферми частиц.

Оператор тока (в отсутствии магнитного поля) будет равен,

$$\hat{I}(x, t) = \frac{-ie\hbar}{m} \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(x, t) \frac{d}{dx} \hat{\Psi}(x, t) - \left[\frac{d}{dx'} \hat{\Psi}^\dagger(x', t) \right]_{x=x'} \hat{\Psi}(x, t) \right\}, \quad (5.6)$$

где мы учли спиновое вырождение.

Выражение для $\hat{\Psi}$ -оператора (5.1) справедливо при любом x . Однако для практических вычислений удобно работать в волновой зоне, см. рис. 5.1, где состояния рассеяния имеют асимптотический вид (2.8)-(2.9). Граница волновой зоны была определена выше через длину волны электрона $\lambda(E) = 2\pi\hbar/\sqrt{2mE}$. Здесь мы отсчитываем энергию от химических потенциалов резервуаров, так что $E \rightarrow E - \mu_\alpha$. Кроме того в (5.1) производится интегрирование по энергии и поэтому может показаться, что границы волновой зоны

²На расстояниях от контакта, значительно больших характерной длины энергетической релаксации электронов l_E , связанной с неупругими столкновениями электронов с фононами или электрон-электронными столкновениями.

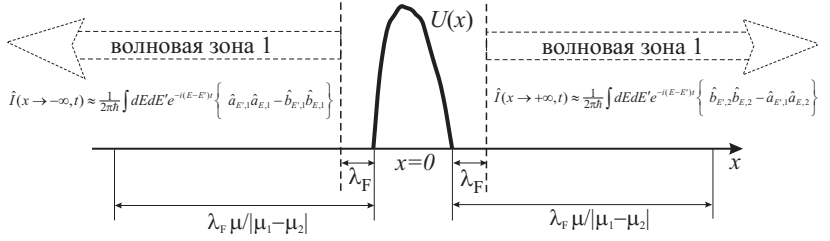


Рис. 5.1. Волновая зона вблизи рассеивателя, где состояния рассеяния приобретают асимптотический вид (2.8)-(2.9)

становятся зависящими от энергии и, поэтому, они плохо определены. В действительности обычно электроны можно считать сильно вырожденными, $|\mu_1 - \mu_2| \ll \mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$, и большинство интегралов по энергиям быстро сходятся вблизи μ . Поэтому в качестве характерной длины волны электрона следует взять фермиевскую длину волны с $E_F = \mu$.

Итак, найдем $\hat{\Psi}$ в левой волновой зоне, используя (2.8)-(2.9),

$$\hat{\Psi}(x \rightarrow -\infty) = \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} \{ (e^{ik_1 x} + r_E e^{-ik_1 x}) \hat{a}_{E,1} + t_E e^{-ik_1 x} \hat{a}_{E,2} \}. \quad (5.7)$$

Аналогично можно найти выражение для $\hat{\Psi}$ в правой волновой зоне,

$$\hat{\Psi}(x \rightarrow +\infty) = \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} \{ \hat{a}_{E,1} t_E e^{ikx} + \hat{a}_{E,2} (r_E e^{ikx} + e^{-ikx}) \}. \quad (5.8)$$

Теперь можно найти оператор тока в волновой зоне, пользуясь

(5.6), (5.7)-(5.8). Например, справа от рассеивателя,³

$$\begin{aligned} \hat{I}(x) = e \int dE' dE \frac{i}{2\pi m \sqrt{v_1 v_2'}} \Big\{ & \\ & \hat{a}_{E',1}^\dagger \hat{a}_{E,1} (-ik' - ik) t_{E'}^* t_E e^{i(k-k')x} + \\ & + \hat{a}_{E',1}^\dagger \hat{a}_{E,2} \left[(-ik') t_{E'}^* e^{-ik'x} (e^{-ikx} + r_E e^{ikx}) - \right. \\ & \left. t_{E'}^* e^{-ik'x} (-ik e^{-ikx} + ik r_E e^{ikx}) \right] + \\ & \hat{a}_{E',2}^\dagger \hat{a}_{E,1} \left[(ik' e^{ik'x} - ik' r_{E'}^* e^{-ik'x}) t_E e^{ikx} - \right. \\ & \left. - (e^{ik'x} + r_{E'}^* e^{-ik'x}) ik t_E e^{ikx} \right] + \\ & \hat{a}_{E',2}^\dagger \hat{a}_{E,2} \left[(ik' e^{ik'x} - ik' r_{E'}^* e^{-ik'x}) (e^{-ikx} + r_E e^{ikx}) - \right. \\ & \left. (e^{ik'x} + r_{E'}^* e^{-ik'x}) (-ik e^{-ikx} + ik r_E e^{ikx}) \right] \Big\}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Для чистого состояния многочастичной квантовой системы, которое во вторичном квантовании описывается выражением типа $|\psi\rangle = \hat{a}_{E_1}^\dagger \hat{a}_{E_2}^\dagger \dots |0\rangle$ (где $|0\rangle$ обозначает вакуумное состояние), средний ток дается выражением

$$I = \langle \psi | \hat{I} | \psi \rangle. \quad (5.10)$$

В случае, если состояние описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$ (является некогерентной суперпозицией чистых состояний), среднее значение тока дается выражением

$$I = \sum_{\{\psi\}, \{\psi'\}} \langle \psi' | \hat{\rho} | \psi \rangle \langle \psi | \hat{I} | \psi' \rangle \equiv \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{I} \}, \quad (5.11)$$

где оператор тока умножается на матрицу плотности и от произведения берется след. Для равновесной системы с гамильтонианом

³Существует способ более компактной записи операторов тока через операторы вторичного квантования. Этот подход основан на применении преобразования Боголюбова к операторам вторичного квантования. Обычно такое преобразование значительно упрощает вычисления транспортных характеристик системы, например корреляторов тока. Заметим также, что этот метод в последнее время чрезвычайно широко используется в научной литературе, см., обзор [5] и приложение 6.3.

\hat{H} с конечной температурой T и химпотенциалом μ матрица плотности дается выражением⁴

$$\hat{\rho} = e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})/T}. \quad (5.12)$$

Ландауер предположил, что резервуары полностью независимы и, поэтому, матрица плотности системы дается произведением матриц плотности левого и правого резервуаров $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$. Матрица плотности резервуара α дается формулой

$$\hat{\rho}_\alpha = e^{-\sum_E \hat{a}_{E,\alpha}^\dagger \hat{a}_{E,\alpha} (E-\mu_\alpha)/T_\alpha}. \quad (5.13)$$

Тогда матрица плотности всей системы имеет вид

$$\hat{\rho} = e^{-\sum_E \{\hat{a}_{E,1}^\dagger \hat{a}_{E,1} (E-\mu_1)/T_1 - \hat{a}_{E,2}^\dagger \hat{a}_{E,2} (E-\mu_1)/T_2\}}. \quad (5.14)$$

Зная базис, в котором выписана матрица плотности, можно найти все средние, используя формулы

$$\langle \hat{a}_{E,\alpha}^\dagger \hat{a}_{E',\alpha'} \rangle = \delta(E-E') \delta_{\alpha\alpha'} f_\alpha(E). \quad (5.15)$$

В глубине резервуаров⁵ функция распределения $f_\alpha(E)$ электронов дается Ферми распределением

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{\exp[(E-\mu_\alpha)/T_\alpha] + 1}. \quad (5.16)$$

При этом, температура и электрохимический потенциалы резервуаров в общем случае разные. Подчеркнем, что в квантовой статистике, температура и химический потенциал — одинаковы в каждой точке. Здесь это не так. Потоки частиц, вылетающих и из левого и из правого резервуаров, имеют свою функцию распределения, характеризующуюся своей температурой и химическим потенциалом.

⁴В данном случае мы используем стандартное для теории «усреднение по ансамблю». Однако, экспериментально усреднение происходит по времени. Уверенность в том что два эти способа усреднения дают одинаковый ответ составляет предмет эргодической гипотезы. Таким образом мы вычисляем одну величину, измеряется же другая величина, а эргодическая гипотеза дает нам основание полагать, что они должны совпасть. Для некоторых конкретных систем эргодическая гипотеза может быть доказана.

⁵На расстояниях от контакта, значительно больших характерной длины энергетической релаксации электронов l_E , связанной с неупругими столкновениями электронов с фононами или электрон-электронными столкновениями.

В области контакта функция распределения сильно неравновесна. Помимо состояний относящихся к проводящим каналам в контакте, в правом и левом резервуарах существует огромное количество других состояний. Эти каналы не связаны посредством контакта, однако играют главную роль в формировании функции распределения далеко в берегах. Поэтому в берегах функции распределения можно считать равновесными с большой точностью.

В дальнейшем мы будем полагать равенство температур в левом и правом резервуарах $T_1 = T_2 = T$.

Упражнения

1. Выведите формулу (5.6) и докажите, что средний ток (5.6) сохраняется, т.е. $\nabla \langle \hat{I} \rangle = 0$.
2. Докажите, что в общем случае,

$$\hat{I}(x_\alpha) \approx \frac{e}{\pi \hbar} \int dE dE' \hat{a}_{E', \delta}^\dagger A_{\delta\gamma}(\alpha, E, E') \hat{a}_{E, \gamma}, \quad (5.17)$$

$$A_{\delta\gamma}(\alpha, E, E') = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\alpha\gamma} - s_{\delta\alpha}^\dagger(E') s_{\alpha\gamma}(E), \quad (5.18)$$

где $x_{1(2)}$ означает, что оператор тока вычисляется в левой (правой) волновой зоне и $s_{\alpha\beta}$ — матричные элементы матрицы рассеяния [например, $s_{11} = r$ и $s_{12} = t'$].

5.2 Средний ток

Пользуясь формулами (5.23), (5.11) и (5.14) получаем средний ток⁶ — знаменитую формулу Ландауэра:

$$\langle \hat{I} \rangle = \frac{e}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(E) \{f_1(E) - f_2(E)\} dE. \quad (5.19)$$

Если $\mu_1 = E_F$ и $\mu_2 = E_F + eV$ и $T_1 = T_2 = T$, то продифференцировав электрический ток по V и положив в конце $V = 0$, найдем,

⁶ При выводе следует использовать формулу $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$. Также обратите внимание на то, что члены в формуле (5.23), замещающие резервуары (которые содержат операторы рождения и уничтожения с разными индексами α), записываются в силу (5.15).

что кондактанс равен

$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(E) \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) dE \quad (5.20)$$

В пределе нулевой температуры,

$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar} \mathcal{T}(E = 0), \quad (5.21)$$

в согласии с (4.8). Обратим внимание, что (6.21) следует из формулы (4.7) в случае одного канала.

5.3 Дробовой шум

В этой главе мы рассмотрим флуктуации тока во времени. Для описания флуктуаций тока (или, как говорят, «шума») нам потребуется оператор тока в гейзенберговском представлении, который зависит от времени. Для гамильтониана системы H_0 , не зависящего от времени, оператор тока в гейзенберговском представлении записывается так

$$\hat{I}(x, \tau) = e^{i\hat{H}_0\tau/\hbar} \hat{I}(x) e^{-i\hat{H}_0\tau/\hbar}. \quad (5.22)$$

Оператор тока приобретает вид

$$\begin{aligned} \hat{I}(x, \tau) = e \int dE' dE \frac{ie^{-i(E-E')\tau/\hbar}}{2\pi m \sqrt{v_1 v_2}} \Big\{ & \\ & \hat{a}_{E',1}^\dagger \hat{a}_{E,1} (-ik' - ik) t_{E'}^* t_E e^{i(k-k')x} + \\ & + \hat{a}_{E',1}^\dagger \hat{a}_{E,2} \left[(-ik') t_{E'}^* e^{-ik'x} (e^{-ikx} + r_E e^{ikx}) - \right. \\ & \quad \left. t_{E'}^* e^{-ik'x} (-ike^{-ikx} + ikr_E e^{ikx}) \right] \\ & + \hat{a}_{E',2}^\dagger \hat{a}_{E,1} \left[(ik' e^{ik'x} - ik' r_{E'}^* e^{-ik'x}) t_E e^{ikx} - \right. \\ & \quad \left. - (e^{ik'x} + r_{E'}^* e^{-ik'x}) ikt_E e^{ikx} \right] \\ & + \hat{a}_{E',2}^\dagger \hat{a}_{E,2} \left[(ik' e^{ik'x} - ik' r_{E'}^* e^{-ik'x}) (e^{-ikx} + r_E e^{ikx}) - \right. \\ & \quad \left. (e^{ik'x} + r_{E'}^* e^{-ik'x}) (-ike^{-ikx} + ikr_E e^{ikx}) \right] \Big\}. \quad (5.23) \end{aligned}$$

Для описания флуктуаций используется среднее $\langle \Delta \hat{I}(x, \tau) \Delta \hat{I}(x', \tau') \rangle$, где оператор $\Delta \hat{I} = \hat{I} - \langle \hat{I} \rangle$ определяет отклонение от среднего тока. Для этой величины в специализированной литературе используется термин *неприводимый коррелятор*. Он обозначается так $\langle \langle \hat{I}(x, \tau) \hat{I}(x', \tau') \rangle \rangle$, при этом

$$\langle \langle \hat{I}(x, \tau) \hat{I}(x', \tau') \rangle \rangle \equiv \langle \Delta \hat{I}(x, \tau) \Delta \hat{I}(x', \tau') \rangle \equiv \langle \hat{I}(x, \tau) \hat{I}(x', \tau') \rangle - \langle \hat{I}(x, \tau) \rangle \langle \hat{I}(x', \tau') \rangle. \quad (5.24)$$

Операторы тока в разные моменты времени не коммутируют, поэтому оператор $\Delta \hat{I}(x, \tau) \Delta \hat{I}(x', \tau')$ не эрмитов и величина (5.24) в типичном случае является комплексной. Это означает, что экспериментально такая величина напрямую не измерима. В учебнике Ландау и Лившица [15] в качестве измеримой величины изучается симметризованный коррелятор

$$\frac{1}{2} (\langle \langle \hat{I}(x, \tau) \hat{I}(x', \tau') \rangle \rangle + \langle \langle \hat{I}(x', \tau') \hat{I}(x, \tau) \rangle \rangle). \quad (5.25)$$

Другой стандартной величиной для характеристики шума является Фурье образ от корреляторов токов (*спектральная плотность шума*). Для этой величины в [15] предлагается брать Фурье образ от симметризованного коррелятора (5.25). Однако, как показывает анализ процесса измерения, в типичном случае, измеримой величиной является Фурье образ от несимметризованного коррелятора [17],

$$S(\omega) = \int d\tau e^{i\omega\tau} \langle \langle \hat{I}(x, \tau) \hat{I}(x, 0) \rangle \rangle. \quad (5.26)$$

Этот факт был подтвержден в реальных экспериментах последних лет.

В формуле (5.26) мы воспользовались тем, что в отсутствии зависящих от времени внешних полей корреляционная функция должна зависеть только от разности времен. Поэтому Фурье преобразование по времени равно

$$S(\omega) 2\pi \delta(\omega + \omega') = \langle \langle \hat{I}(x, \omega) \hat{I}(x, \omega') \rangle \rangle. \quad (5.27)$$

Вычислим $S(\omega, x_\alpha, x'_\beta)$ (т.е., x_α в волновой зоне в индексом α). Воспользуемся для этого тождеством, справедливым для средних от

фермиевских операторов рождения и уничтожения, см. приложение 6.2:

$$\langle \hat{a}_{E_1, \alpha}^\dagger \hat{a}_{E_2, \beta} \hat{a}_{E_3, \gamma}^\dagger \hat{a}_{E_4, \delta} \rangle - \langle \hat{a}_{E_1, \alpha}^\dagger \hat{a}_{E_2, \beta} \rangle \langle \hat{a}_{E_3, \gamma}^\dagger \hat{a}_{E_4, \delta} \rangle = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta(E_1 - E_4) \delta(E_2 - E_3) f_\alpha(E_1) [1 - f_\beta(E_2)]. \quad (5.28)$$

Здесь мы воспользовались теоремой Вика (в статистической физике эту теорему иногда называют теоремой Блоха – де Доминисиса, см. [16]). Здесь она справедлива, так как (неравновесная) матрица плотности системы — это прямое произведение матриц плотности резервуаров. Наиболее часто изучаемой величиной является спектральная плотность шума на нулевой частоте $S(0)$. В этом случае получаем

$$S(0) = \frac{2e^2}{h} \int_0^{+\infty} dE \left[f_1(E) [1 - f_1(E)] \mathcal{T}_E^2 + f_2(E) [1 - f_2(E)] \mathcal{T}_E^2 + \mathcal{T}_E [1 - \mathcal{T}_E] + \{ f_1(E) (1 - f_2(E)) + f_2(E) (1 - f_1(E)) \} \right]. \quad (5.29)$$

Посмотрим, чему равен $S(0)$ в предельном случае, когда резервуары находятся в равновесии друг с другом ($f_1 = f_2 = f$). Тогда имеет место соотношение, $f(1 - f) = -T \partial_E f$.

$$S(0) = \frac{2e^2 T}{\pi \hbar} \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \mathcal{T}. \quad (5.30)$$

Это равновесный (Найквистов) шум. Он возникает вследствие *температурных* флуктуаций чисел заполнения электронов в резервуарах. Проинтегрировав (5.30), получаем

$$S(0) = 4TG. \quad (5.31)$$

Посмотрим, чему равен шум в предельном (квантовом) случае, когда температуры резервуаров равны нулю. Тогда $f_\alpha(E) = \theta(E - \mu_\alpha)$ и

$$S(0) = \frac{e^2}{\pi \hbar} \int dE [1 - \mathcal{T}(E)] \mathcal{T}(E) \{ f_2(E) - f_1(E) \} \approx \frac{e^3 |V|}{\pi \hbar} (1 - \mathcal{T}) \mathcal{T}, \quad (5.32)$$

где мы положили $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu + eV$ последнее приближенное равенство справедливо тогда когда вероятность прохождения \mathcal{T} слабо зависит от энергии; при $\mathcal{T}(E) = \mathcal{T}(E_F)$ оно превращается в точное равенство. Таким образом, квантовый дробовой шум определяется рассеянием на потенциальном барьере. Если рассеивателя нет, $\mathcal{T} = 1$, то нет и шума. Также шум пропадает, если $\mathcal{T} = 0$, т.е. барьер бесконечной высоты. Отметим также, что впервые формула (5.32) была получена в работе [18], а без учета зависимости прозрачности от энергии ранее в работе [19] (см., также обзор [5]).

Глава 6

Приложение

6.1 Нормировки плоских волн

Волновая функция, описывающих движение свободной частицы слева направо ($k > 0$), имеет вид,

$$\varphi_k(x) = C \exp(ikx), \quad (6.1)$$

где C – константа нормировки.

Если мы выберем нормировку, $\langle \varphi_{k'} | \varphi_p \rangle = \delta(k - k')$, то

$$\langle \varphi_{k'} | \varphi_k \rangle = C^2 \int dx \exp(i(k - k')x) = C^2 2\pi \delta(k - k'), \quad (6.2)$$

отсюда $C = 1/\sqrt{2\pi}$.

Если мы выберем нормировку, $\langle \varphi_{k'} | \varphi_k \rangle = \delta(E - E')$, то

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{k'} | \varphi_k \rangle &= \langle \varphi_{E'} | \varphi_E \rangle = C^2 \int dx \exp(i(k - k')x) = \\ &= C^2 2\pi \delta(k - k') = C^2 2\pi \frac{\delta(E - E')}{\left| \frac{dk}{dE} \right|}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

отсюда $C = 1/\sqrt{2\pi\hbar v}$, где $v = \left| \frac{dE}{\hbar dk} \right|$.

Легко теперь убедиться, что нормировка волновой функции (2.8) пропорциональна $\delta(E - E')$. Вычислим нормировочный ин-

теграл:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_E | \psi_{E'} \rangle = & \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_E^*(x) \psi_{E'}(x) \approx \\
& \int_{-\infty}^0 dx \frac{a_1^*(E) a_1(E') e^{i[k_1(E') - k_1(E)]x}}{2\pi\hbar\sqrt{v_1(E)v_1(E')}} + \\
& \int_{-\infty}^0 dx \frac{b_1^*(E) b_1(E') e^{-i[k_1(E') - k_1(E)]x}}{2\pi\hbar\sqrt{v_1(E)v_1(E')}} + \\
& + \int_0^{\infty} dx \frac{a_2^*(E) a_2(E') e^{i[k_2(E') - k_2(E)]x}}{2\pi\hbar\sqrt{v_2(E)v_2(E')}} + \\
& \int_0^{\infty} \frac{b_2^*(E) b_2(E') e^{-i[k_2(E') - k_2(E)]x}}{2\pi\hbar\sqrt{v_2(E)v_2(E')}}. \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Символ “ \approx ”, стоящий в (6.4) означает, что мы оставили только те члены, которые дают при интегрировании сингулярный вклад — обобщенную функцию $\delta(E - E')$; опущенные быстроосциллирующие интерференционные члены дают регулярный вклад в интеграл, который не должен учитываться по сравнению с $\delta(E - E')$,¹ см. [2]. Совершив во втором и четвертом интегралах замену переменных интегрирования x на $-x$, воспользовавшись тождеством (2.4) и соотношением

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i[k_1(E') - k_1(E)]x}}{2\pi\hbar\sqrt{v_1(E)v_1(E')}} \approx \\
\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp\{ix(E' - E)/\hbar v_1(E)\}}{2\pi\hbar v_1(E)} = \delta(E - E'), \quad (6.5)
\end{aligned}$$

получим, что $\langle \psi_E | \psi_{E'} \rangle \approx (|a_1(E)|^2 + |b_2(E)|^2) \delta(E - E')$. Требуя, чтобы ψ_E была нормирована на $\delta(E - E')$, найдем следующее соотношение для коэффициентов:

$$|a_2(E)|^2 + |b_1(E)|^2 = |a_1(E)|^2 + |b_2(E)|^2 = 1. \quad (6.6)$$

¹ Непрерывный спектр в природе на самом деле не встречается, это математическая модель, идеализация. Реальное движение частицы ограничено, например отрезком $[-L, L]$, где $L\lambda_{1(2)} \rightarrow \infty$. Тогда расстояние между уровнями энергии $\delta_L \sim \hbar^2/mL^2$ (докажите!) и опущенные в (6.4) члены имеют порядок $\sim \delta_L/|E|$ относительно оставленных (проверьте!). Таким образом, энергия определена в (6.4) с точностью до δ_L , так что δ -функция в (6.4) размыта на масштабе δ_L .

Таким образом, можно сформулировать следующее правило для нормировки волновой функции инфинитного в обе стороны движения: волновая функция будет нормирована на δ -функцию от энергии, если сумма потоков в волнах, бегущих по направлению к началу координат с положительной и отрицательной сторон оси x , равна $1/2\pi\hbar$. Аналогичным образом можно получить такое же правило для нормировки волновых функций движения, инфинитного в одну сторону на δ -функцию от энергии: представив асимптотическое выражение волновой функции в виде суммы двух бегущих в противоположные стороны плоских волн, надо выбрать нормировочный коэффициент таким образом, чтобы плотность потока в волне, бегущей по направлению к началу координат (или в направлении от начала координат), была равна $1/2\pi\hbar$, см. §21 [2].

Также как мы искали норму общего вида волновой функции непрерывного спектра, (2.8), можно убедиться, что базис, составленный из состояний рассеяния ортонормирован, т.е. $\langle \psi_E^{(i)} | \psi_{E'}^{(j)} \rangle = \delta_{ij} \delta(E - E')$, где $i, j = 1, 2$. Собственно, то, что состояния рассеяния имеют единичную норму, мы неявно доказали в (6.6), которое для состояний рассеяния переписывается как: $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$.²

6.2 Среднее от произведения четырех операторов рождения и уничтожения.

В главе 5 широко используется метод вторичного квантования. В частности, при вычислении шума приходится усреднять произведения четырех операторов рождения и уничтожения. Здесь мы покажем, как производить такое усреднение.

Найдем среднее:

$$\langle a_p^\dagger a_q^\dagger a_m a_l \rangle \equiv \frac{\text{tr}(e^{-\beta H} a_p^\dagger a_q^\dagger a_m a_l)}{\text{tr}(e^{-\beta H})}, \quad (6.7)$$

где $H = \sum_p (E_p - \mu) a_p^\dagger a_p$, a_p — Ферми операторы.

Пронесем оператор a_p слева направо под знаком среднего, учи-

²Обратим внимание, что из унитарности матрицы рассеяния мы получаем следующие соотношения: $\mathcal{R} + \mathcal{T}' = \mathcal{R}' + \mathcal{T} = 1$, где, например, $\mathcal{T}' = |t'|^2$.

тывая правило $\{a_p, a_{p'}^\dagger\} = \delta_{p,p'}$:

$$\begin{aligned}\langle a_p^\dagger a_q^\dagger a_m a_l \rangle &= -\langle a_q^\dagger a_p^\dagger a_m a_l \rangle = -\langle a_q^\dagger a_p^\dagger a_m a_l \rangle = \langle a_q^\dagger a_m a_p^\dagger a_l \rangle - \\ &\delta_{pm} \langle a_q^\dagger a_l \rangle = -\langle a_q^\dagger a_m a_l a_p^\dagger \rangle - \delta_{pm} \langle a_q^\dagger a_l \rangle + \delta_{pl} \langle a_q^\dagger a_m \rangle.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Теперь воспользуемся тождеством: $a_p^\dagger e^{-\beta H} = e^{-\beta H} a_p^\dagger e^{\beta E_p}$,

$$\begin{aligned}\langle a_p^\dagger a_q^\dagger a_m a_l \rangle &= -e^{\beta E_p} \langle a_p^\dagger a_q^\dagger a_m a_l \rangle - \delta_{pm} \langle a_q^\dagger a_l \rangle + \delta_{pl} \langle a_q^\dagger a_m \rangle \\ \langle a_p^\dagger a_q^\dagger a_m a_l \rangle &= -\frac{\delta_{pm}}{1 + e^{\beta E_p}} \langle a_q^\dagger a_l \rangle + \frac{\delta_{pl}}{1 + e^{\beta E_p}} \langle a_q^\dagger a_m \rangle.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\langle a_p^\dagger a_q^\dagger a_m a_l \rangle &= -\langle a_p^\dagger a_m \rangle \langle a_q^\dagger a_l \rangle + \langle a_p^\dagger a_l \rangle \langle a_q^\dagger a_m \rangle \equiv \\ &f_p f_q (-\delta_{pm} \delta_{ql} + \delta_{pl} \delta_{qm}),\end{aligned}\quad (6.9)$$

где $f_p = 1/(1 + e^{\beta E_p})$. Следует подчеркнуть, что этот результат можно получить с помощью теоремы Блоха-де Доминисиса (Вика) [16] в одну строчку.

Упражнения

1. Докажите соотношение, $a_p^\dagger e^{-\beta H} = e^{-\beta H} a_p^\dagger e^{\beta E_p}$.

Указание, рассмотрите оператор $a_p(\tau) = e^{\tau H} a_p e^{-\tau H}$. Докажите, что $\frac{d}{d\tau} a_p(\tau) = -E_p a_p$. Решите это дифференциальное уравнение с начальным условием $a_p(0) = a_p$.

6.3 Вторичное квантование в «повернутом» базисе операторов рождения и уничтожения

Существует способ, альтернативный, изложенному выше в главе 5, записи операторов тока через операторы вторичного квантования. Этот подход основан на применении преобразования Боголюбова к операторам вторичного квантования. Обычно такое преобразование пространства операторов вторичного квантования значительно

упрощает вычисления транспортных характеристик системы, например корреляторов тока. Заметим также, что этот метод в последнее время чрезвычайно широко используется в научной литературе, см., обзор [5].

Итак, согласно (5.7) оператор $\hat{\Psi}$ в левой волновой зоне имеет вид,

$$\hat{\Psi}(x \rightarrow -\infty) = \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} \{ (e^{ik_1x} + r_E e^{-ik_1x}) \hat{a}_{E,1} + t_E e^{-ik_1x} \hat{a}_{E,2} \}. \quad (6.10)$$

Удобно переписать это выражение в более компактном виде введя новые операторы уничтожения,

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{E,1} \\ \hat{b}_{E,2} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \hat{a}_{E,1} \\ \hat{a}_{E,2} \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

где S – матрица рассеяния. Так что, например, $\hat{b}_{E,1} = r \hat{a}_{E,1} + t' \hat{a}_{E,2}$, и

$$\hat{\Psi}(x \rightarrow -\infty) = \int dE \left\{ \frac{e^{ik_1x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} \hat{a}_{E,1} + \frac{e^{-ik_1x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_1}} \hat{b}_{E,1} \right\}. \quad (6.12)$$

Аналогично можно найти выражение для $\hat{\Psi}$ в правой волновой зоне,

$$\hat{\Psi}(x \rightarrow \infty) = \int dE \left\{ \frac{e^{ik_2x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} \hat{b}_{E,2} + \frac{e^{-ik_2x}}{\sqrt{2\pi\hbar v_2}} \hat{a}_{E,2} \right\}, \quad (6.13)$$

где $\hbar k_2 = \sqrt{2m(E - \mu_2)}$.

Теперь легко найти оператор тока в волновой зоне, пользуясь соотношениями (5.6), (6.12)-(6.13). Например, слева от рассеивателя,

$$\begin{aligned} \hat{I}(x \rightarrow -\infty) &= e \int dE dE' e^{-i(E-E')t/\hbar} \frac{k_1 + k'_1}{2\pi m \sqrt{v_1 v'_1}} \times \\ &\quad \left\{ e^{i(k_1 - k'_1)x} \hat{a}_{E',1}^\dagger \hat{a}_{E,1} - e^{-i(k_1 - k'_1)x} \hat{b}_{E',1}^\dagger \hat{b}_{E,1} \right\} + \\ &\quad e \int dE dE' e^{-i(E-E')t/\hbar} \frac{k_1 - k'_1}{2\pi m \sqrt{v_1 v'_1}} \times \\ &\quad \left\{ e^{-i(k_1 + k'_1)x} \hat{a}_{E',1}^\dagger \hat{b}_{E,1} - e^{i(k_1 + k'_1)x} \hat{b}_{E',1}^\dagger \hat{a}_{E,1} \right\}. \quad (6.14) \end{aligned}$$

Это выражение все еще очень громоздко, им неудобно пользоваться. Покажем, что вторым слагаемым можно пренебречь. Действительно, $|\mu_1 - \mu_2| \ll \mu$ и, следовательно, $|k_1 - k'_1| \ll |k_1 + k'_1|$. Найдем также условия, когда $e^{\pm i(k_1 - k'_1)x} \approx 1$. Такую замену можно проинвестировать, если $x|\mu_1 - \mu_2|/\hbar v_F \ll 1$. Это эквивалентно тому, что в волновой зоне мы выделяем подзону, $\lambda_F \ll |x| \ll \lambda_F \mu/|\mu_1 - \mu_2|$. Таким образом получается,

$$\hat{I}(x \rightarrow -\infty, t) \approx \frac{e}{\pi \hbar} \int dE dE' e^{-i(E-E')t/\hbar} \left\{ \hat{a}_{E',1}^\dagger \hat{a}_{E,1} - \hat{b}_{E',1}^\dagger \hat{b}_{E,1} \right\}. \quad (6.15)$$

Выражением (6.15) мы будем пользоваться вычисляя ток, шум, и т.д. Это одна из ключевых формул теории волнового транспорта. Докажите, что в общем случае, оператор тока можно эквивалентно записать в следующем виде:

$$\hat{I}(x_\alpha, t) \approx \frac{e}{\pi \hbar} \int dE dE' e^{-i(E-E')t/\hbar} \hat{a}_{E',\delta}^\dagger A_{\delta\gamma}(\alpha, E, E') \hat{a}_{E,\gamma}, \quad (6.16)$$

$$A_{\delta\gamma}(\alpha, E, E') = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\alpha\gamma} - s_{\delta\alpha}^\dagger(E') s_{\alpha\gamma}(E), \quad (6.17)$$

где $x_{1(2)}$ означает, что оператор тока вычисляется в левой (правой) волновой зоне и $s_{\alpha\beta}$ – матричные элементы матрицы рассеяния [например, $s_{11} = r$ и $s_{12} = t'$]. Например, если $\alpha = 1$, то

$$A_{\delta\gamma}(\alpha, E, E') = \begin{pmatrix} 1 - r^\dagger(E')r(E') & -r^\dagger(E')t'(E) \\ -t^\dagger(E')r(E) & -t^\dagger(E')t'(E) \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\delta,\gamma} A_{\delta\gamma}(\alpha, E, E') A_{\gamma\delta}(\beta, E', E) = \\ (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\alpha\gamma} - s_{\delta\alpha}^\dagger(E') s_{\alpha\gamma}(E)) (\delta_{\beta\delta} \delta_{\beta\gamma} - s_{\gamma\beta}^\dagger(E) s_{\beta\delta}(E')) = \\ \delta_{\alpha\beta} - s_{\beta\alpha}^\dagger(E') s_{\alpha\beta}(E) - s_{\alpha\beta}^\dagger(E) s_{\beta\alpha}(E') + s_{\delta\alpha}^\dagger(E') s_{\alpha\gamma}(E) s_{\gamma\beta}^\dagger(E) s_{\beta\delta}(E') = \\ 2\delta_{\alpha\beta} - (s_{\beta\alpha}^\dagger(E') s_{\alpha\beta}(E) + s_{\alpha\beta}^\dagger(E) s_{\beta\alpha}(E')). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Используя (6.15) вычислим средний ток,

$$\langle \hat{I} \rangle = \frac{e}{\pi \hbar} \int dE \left\{ \langle \hat{a}_{E,1}^\dagger \hat{a}_{E,1} \rangle - \langle \hat{b}_{E,1}^\dagger \hat{b}_{E,1} \rangle \right\}. \quad (6.20)$$

Согласно (5.15), $\langle \hat{a}_{E,1}^\dagger \hat{a}_{E,1} \rangle = f_1(E)$. С помощью (6.11) найдем, $\langle \hat{b}_{E,1}^\dagger \hat{b}_{E,1} \rangle = \mathcal{R}f_1(E) + \mathcal{T}f_2(E)$, где $\mathcal{R}(E) = |r|^2$ и $\mathcal{T}(E) = |t|^2$ — вероятности отражения и прохождения соответственно. Соотношение $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ позволяет дополнительно упростить (6.20), и получить знаменитую формулу Ландауэра:

$$\langle \hat{I} \rangle = \frac{e}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(E) \{f_1(E) - f_2(E)\} dE. \quad (6.21)$$

Рассмотрим флуктуации тока. Введем для этого оператор $\Delta \hat{I} = \hat{I} - \langle \hat{I} \rangle$ и корреляционную функцию, количественно описывающую отклонения тока от среднего $S(t - t', x, x') = \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{I}(t, x) \Delta \hat{I}(t', x') + \Delta \hat{I}(t', x') \Delta \hat{I}(t, x) \rangle$. Фурье преобразование по времени равно

$$S(\omega, x, x') 2\pi \delta(\omega + \omega') = \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{I}(\omega, x) \Delta \hat{I}(\omega', x') + \Delta \hat{I}(\omega', x') \Delta \hat{I}(\omega, x) \rangle. \quad (6.22)$$

Вычислим $S(\omega, x_\alpha, x'_\beta)$ (т.е., x_α в волновой зоне в индексом α). Воспользуемся для этого соотношением (5.28). В итоге,

$$S(\omega, x_\alpha, x'_\beta) = \frac{e^2}{\pi \hbar} \sum_{\gamma \delta} \times \int dE A_{\gamma \delta}(\alpha, E, E + \hbar \omega) A_{\delta \gamma}(\beta, E + \hbar \omega, E) \times \{f_\gamma(E)[1 - f_\delta(E + \hbar \omega)] + [1 - f_\gamma(E)]f_\delta(E + \hbar \omega)\}. \quad (6.23)$$

В предельном случае, когда резервуары находятся в равновесии друг с другом ($f_1 = f_2 = f$) имеет место соотношение, $f(1 - f) = -T \partial_E f$. Используя также тождество: $\sum_{\gamma \delta} s_{\gamma \alpha}^\dagger s_{\alpha \delta} s_{\delta \beta}^\dagger s_{\beta \gamma} = \delta_{\alpha \beta}$, следующее из унитарности матрицы рассеяния, получим уже известный нам ответ для равновесного (Найквистова) шума:

$$S(0, x_\alpha, x'_\beta) = \frac{4e^2 T}{\pi \hbar} \times \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) [\delta_{\alpha \beta} - \frac{1}{2} (s_{\beta \alpha}^\dagger s_{\alpha \beta} + s_{\alpha \beta}^\dagger s_{\beta \alpha})]. \quad (6.24)$$

Если $\alpha = \beta$, то $s_{\beta\alpha}^\dagger s_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}^\dagger s_{\beta\alpha} = 2R$ и $\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(s_{\beta\alpha}^\dagger s_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}^\dagger s_{\beta\alpha}) = 1 - R = \mathcal{T}$; когда $\alpha \neq \beta$, то $s_{\beta\alpha}^\dagger s_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}^\dagger s_{\beta\alpha} = 2\mathcal{T}$. Поэтому, например, $S(0, x_1, x'_1) = -S(0, x_1, x'_2)$ и

$$S(0, x_1, x'_1) = 4TG, \quad (6.25)$$

где $G = \mathcal{T}e^2/\pi\hbar$ – кондактанс.

Если температуры резервуаров равны нулю, но между резервуарами имеется конечная разность потенциалов, тогда $f_\alpha(E) = \theta(E - \mu_\alpha)$ и

$$S(0, x_\alpha, x'_\beta) = \frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_{\gamma \neq \delta} \int dE s_{\gamma\alpha}^\dagger s_{\alpha\delta} s_{\delta\beta}^\dagger s_{\beta\gamma} \{f_\gamma(E)[1 - f_\delta(E)] + [1 - f_\gamma(E)]f_\delta(E)\}. \quad (6.26)$$

Будем искать шум при $\alpha = \beta = 1$ ($s_{\gamma\alpha}^\dagger s_{\alpha\delta} s_{\delta\beta}^\dagger s_{\beta\gamma} = (r^\dagger r)^2$)

$$S(0, x_1, x'_1) = \frac{e^2}{\pi\hbar} \int dE [1 - \mathcal{T}(E)] \mathcal{T}(E) \{f_2(E) - f_1(E)\} \approx \frac{e^3 |V|}{\pi\hbar} (1 - \mathcal{T}) \mathcal{T}, \quad (6.27)$$

где мы выбрали $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu + eV$, и вычислили первый неисчезающий член разложения шума по малому параметру $eV/\mu \ll 1$; вероятность прохождения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(0)$.

Шум в приближении постоянных амплитуд рассеяния

В этом случае, $A_{\gamma\delta}(\alpha, E, E + \hbar\omega)$ не зависит от энергии.

$$S(\omega, x_\alpha, x'_\beta) = \frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta}(\alpha) A_{\delta\gamma}(\beta) F_{\gamma,\delta}(\omega), \quad (6.28)$$

$$F_{\gamma,\delta}(\omega) = \int dE \{f_\gamma(E)[1 - f_\delta(E + \hbar\omega)] + [1 - f_\gamma(E)]f_\delta(E + \hbar\omega)\}. \quad (6.29)$$

Известны следующие модельные интегралы от ферми-распределений:

$$n_\Omega^{(\text{LR})} = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon f^{(L)}(\epsilon_+) \left[1 - f^{(R)}(\epsilon_-)\right], \quad (6.30)$$

где $f^{(L)}(\epsilon, T) = f_F(\epsilon - eV/2, T)$ и $f^{(R)}(\epsilon, T) = f_F(\epsilon + eV/2, T)$. Тогда

$$n_{\Omega}^{(\text{LR})} = \frac{\Omega - eV}{\Omega} N_B(\Omega - eV, T), \quad (6.31a)$$

$$n_{\Omega}^{(\text{RL})} = \frac{\Omega + eV}{\Omega} N_B(\Omega + eV, T), \quad (6.31b)$$

где $N_B(\Omega, T)$ – Бозе распределение.

Тогда

$$F_{\gamma \neq \delta}(\omega) = (\omega - eV)N_B(\omega - eV, T) + (\omega + eV)N_B(\omega + eV, T), \quad (6.32)$$

$$F_{\gamma = \delta}(\omega) = \omega B(\omega, T), \quad B(\omega) = 2N_B(\omega, T) + 1 = \coth \frac{\omega}{2T}. \quad (6.33)$$

В пределе нулевой частоты,

$$F_{\gamma \neq \delta}(\omega = 0) = eVB(eV, T), \quad (6.34)$$

$$F_{\gamma = \delta}(\omega = 0) = 2T, \quad (6.35)$$

или в матричной форме:

$$\begin{aligned} F_{\gamma, \delta}(\omega = 0) &= \begin{pmatrix} 2T & eVB(eV, T) \\ eVB(eV, T) & 2T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2T & 2T + (eVB(eV, T) - 2T) \\ 2T + (eVB(eV, T) - 2T) & 2T \end{pmatrix} = \\ &= 2T(\Sigma_0 + \Sigma_x) + \begin{pmatrix} 0 & eVB(eV, T) - 2T \\ eVB(eV, T) - 2T & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Тогда,

$$\begin{aligned} S(\omega = 0, x_{\alpha}, x'_{\beta}) &= 2T \frac{e^2}{\pi \hbar} \sum_{\gamma \delta} A_{\gamma \delta}(\alpha) A_{\delta \gamma}(\beta) + \\ &+ (eVB(eV, T) - 2T) \frac{e^2}{\pi \hbar} \sum_{\gamma \neq \delta} A_{\gamma \delta}(\alpha) A_{\delta \gamma}(\beta). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Отсюда,

$$S(0, x_1, x'_1) = 4TG + (eVB(eV, T) - 2T) \frac{e^2}{\pi \hbar} 2\mathcal{T}R. \quad (6.38)$$

Упражнения

1. Докажите, что преобразование (6.11) к новым операторам уничтожения \hat{b} является каноническим. Указание, используйте унитарность матрицы рассеяния.

2. Докажите, что

$$\hat{I}(x \rightarrow +\infty, t) \approx \frac{e}{\pi \hbar} \int dE dE' e^{-i(E-E')t/\hbar} \left\{ \hat{b}_{E',2}^\dagger \hat{b}_{E,2} - \hat{a}_{E',2}^\dagger \hat{a}_{E,2} \right\}. \quad (6.39)$$

3. Найдите $\langle \hat{b}_{E,1}^\dagger \hat{b}_{E,2} \rangle$, $\langle \hat{b}_{E,1}^\dagger \hat{a}_{E,2} \rangle$, $\langle \hat{a}_{E,1}^\dagger \hat{b}_{E,2} \rangle$ и $\langle \hat{b}_{E,2}^\dagger \hat{b}_{E,1} \rangle$.

Литература

1. M. Born and E. Wolf, Principles of Optics Pergamon, New York, 1986, p. 341.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Курс теоретической физики, том III: Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2004.
3. Л. И. Глазман, Г. Б. Лесовик, Д. Е. Хмельницкий, Р. И. Шехтер, Письма в ЖЭТФ, том **48**, вып. 4, стр. 218-220 (1988).
4. S. Datta. Electronic transport in mesoscopic systems. Cambridge University Press, 1995; В.Я.Демиховский, Г.А. Вугальтер, Физика квантовых низкоразмерных структур, Москва, Логос, 2000.
5. Ya. M. Blanter, M. Büttiker, Physics Reports **336**, 1 (2000).
6. Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика (с задачами) 2е изд., Физматлит, 2000.
7. В.П. Маслов и М.В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, Москва, Наука 1976.
8. Б.Н. Захарьев, В.М. Чабанов, Послушная Квантовая Механика, Москва, Институт Компьютерных Исследований 2002.
9. В.М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган, Задачи по квантовой механике, Москва, УРСС, 2001.
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Курс теоретической физики, том II: Теория поля. М.: Физматлит, 2006.
11. C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).

12. B.J. van Wees, H. van Houten, C.W.J. Beenakker, J.G. Williamson, L.P. Kouwenhoven, D. van der Marel, C.T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).
13. D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie, G. A. C. Jones, J. Phys. C **21**, L209 (1988).
14. Y. Ji, Y. Chung, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu, H. Shtrikman, Nature **422**, 415 (2003).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Курс теоретической физики, том V: Статистическая физика, часть 1. М.: Наука, 1976.
16. Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов (мл.). Введение в квантовую статистическую механику, Наука, 1984.
17. G.B. Lesovik, Loosen, Письма в ЖЭТФ **49** 513 (1989) [JETP Lett. **49**, 592 (1989)].
18. G.B. Lesovik, Письма в ЖЭТФ **49** 513 (1989) [JETP Lett. **49**, 592 (1989)].
19. V. A. Khlus, ЖЭТФ **93** 2179 (1987) [Sov. Phys. JETP **66**, 1243 (1987)].