Сопряженные функции.
Семинар 6-7. 6-13 октября 2019 г.

Семинарист: Данилова М.

Сопряженные функции

Определение сопряженной функции

Определение 1. Замкнутая функция

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на множестве E в нормированном пространстве V. Функция f называется замкнутой, если epi$f$ является замкнутым множеством.

Определение 2. Сопряженная функция

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ - функция, заданная на множестве E в евклидовом пространстве V. **Сопряженной функцией** или **сопряженной функцией Фенхеля** для функции f называется функция $f^* : E_* \to \mathbb{R}$, определенная как

$$f^*(s) = \sup_{x \in E}\{\langle s, x\rangle - f(x)\},$$

где $E_* = \{s \in V \ : \ \sup\limits_{x \in E}\{\langle s, x\rangle - f(x) < +\infty\}\}$. Преобразование $f \mapsto f^*$ называют **преобразованием Лежандра-Фенхеля**.

Замечание 1. Сопряженная функция f^* - выпуклая и замкнутая функция как поточечный супремум семейства аффинных функций, независимо от того, является ли при этом исходная функция f выпуклой или замкнутой.

Замечание 2. В более общем случае сопряженная функция определяется на двойственном пространстве V^* всевозможных непрерывных линейных функционалов на V; в этом случае $s \in V^*$ - линейный функционал, а операция $\langle s, x\rangle$ интерпретируется как вычисление линейного функционала s на аргументе x.

Утверждение 1. Неравенство Фенхеля–Юнга Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ - функция, заданная на множестве E в евклидовом пространстве V, и пусть $f^* : E_* \to \mathbb{R}$ - сопряженная функция. Тогда для всех $x \in E$ и всех $s \in E_*$ выполнено

$$\langle s, x\rangle \le f^*(s) + f(x).$$

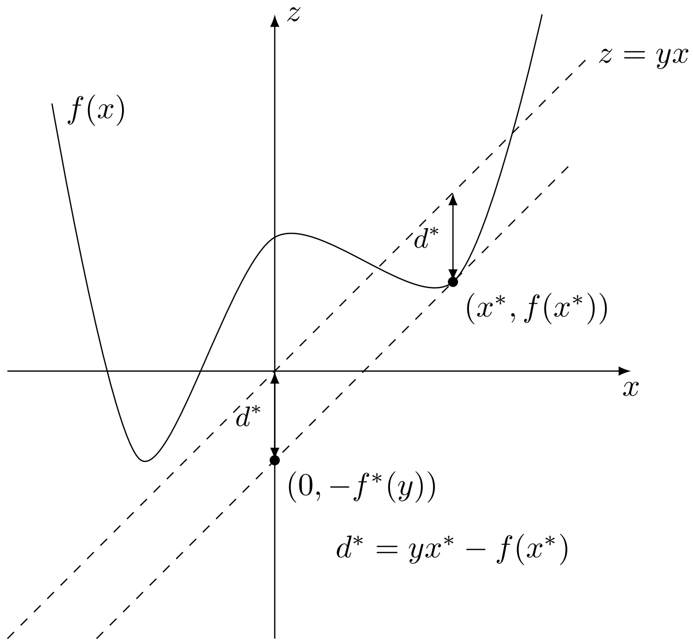

Рис. 1: Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, значение $y \in \mathbb{R}$. Сопряженная функция $f^*(y)$ - максимальный разрыв между линейной функцией yx и $f(x)$.

Свойства и примеры

Далее будем рассматривать функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, тогда сопряженная к ней функция $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определяется как

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \left(y^T x - f(x) \right),$$

где $\mathrm{dom} f$ - область определения функции f, а $\mathrm{dom} f^*$ - множество таких y, что супремум конечен.

Пример 1. Рассмотрим сопряженные функции для функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Аффинная функция $f(x) = ax + b, \ \mathrm{dom} f = R$.

$$\begin{aligned} f^*(y) &= -b \\ y &= a \end{aligned}$$

2. Отрицательный логарифм $f(x) = -\log x, \ \mathrm{dom} f = R_{++}$.

$$\begin{aligned} f^*(y) &= -\log(-y) - 1 \\ y &< 0 \end{aligned}$$

3. Экспонента $f(x) = \exp(x), \ \mathrm{dom} f = R$.

$$\begin{aligned} f^*(y) &= y \log y - y \\ y &\geq 0 \\ f^*(0) &= 0 \end{aligned}$$

4. Отрицательная энтропия $f(x) = x \log x,\ \mathrm{dom} f = R_+,\ f(0) = 0.$
$$f^*(y) = \exp(y-1)$$

5. Обратная функция $f(x) = \frac{1}{x},\ \mathrm{dom} f = R_{++}.$
$$f^*(y) = -2\sqrt{-y}$$
$$y \le 0$$

Пример 2. Строго выпуклая квадратичная функция

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x,\ Q \in S^n_{++}$.

Сопряженная к ней функция
$$f^*(y) = \frac{1}{2}y^T Q^{-1} y.$$

Пример 3. Индикаторная функция множества

Рассмотрим функцию I_S - индикатор множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

$I_S(x) = 0,$ если $\mathrm{dom} I_S = S$, при других значениях x - функция $I_S(x)$ не определена.

Сопряженная к ней функция
$$I_S^*(y) = \sup_{x \in S}(y^T x),$$
так же данная функция назвается **опорной функцией** множества S.

Определение 3. Сопряженная норма

Пусть $\|\cdot\|$ - норма в $\mathbb{R}^n$, тогда сопряженная норма определяется как
$$\|y\|_* = \sup_{\|x\| \le 1} y^T x.$$

Пример 4. Норма

Пусть $\|\cdot\|$ - норма в $\mathbb{R}^n$, сопряженная норма $\|\cdot\|_*$.

Сопряженная функция к функции $f(x) = \|x\|$
$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & \|y\|_* \le 1 \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 3. Сопряженная функция $\|\cdot\|^*$ для нормы $\|\cdot\|$ не равна сопряженной норме $\|\cdot\|_*$. Сопряженная функция $\|\cdot\|^*$ - это индикаторная функция единичного шара относительно сопряженной нормы Несмотря на схожие обозначения, функции $\|\cdot\|^*$ и $\|\cdot\|_*$ являются разными: например, сопряженная норма $\|\cdot\|_*$ всегда определена на всем пространстве (как и любая норма), в то время как сопряженная функция $\|\cdot\|^*$ оказывается определенной на собственном подмножестве.

Пример 5. Квадрат нормы

Пусть $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, где $\|\cdot\|$ - норма, $\|x\|_*$ - сопряженная норма.

Сопряженная функция
$$f^*(y) = \frac{1}{2}\|y\|_*^2.$$

Свойства

1. f^* - выпуклая функция вне зависимости от f;
2. **Неравенство Фенхеля**
$$f(x) + f^*(y) \geq x^T y \quad \forall x, y;$$
Например для функции $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx,\ Q \in S^n_{++}$,
мы получаем следующее неравенство
$$x^T y \leq \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}y^T Q^{-1} y;$$
3. если f выпукла и замкнута, то $f^{**} = f$;
4. если f дифференцируема, выпукла и $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^n$, то
$$f^*(y) = \nabla f^T(x^*)x^* - f(x^*),$$
где x^* - супремум $\big(y^T x - f(x)\big)$.
5. **Разделение переменных**
$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$
$$f^*(y_1, y_2) = f_1^*(y_1) + f_2^*(y_2),$$
где f_1, f_2 - выпуклые функцие.

Двойственная и сопряженная функции

1. Рассмотрим следующую задачу
$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x = 0, \end{aligned}$$
лагранжиан принимает форму $\quad L(x, \nu) = f(x) + \nu^T x$,
двойственная функция $\quad g(\nu) = \inf_x \big(f(x) + \nu^T x\big) = -\sup_x \big((-\nu)^T x - f(x)\big) = -f^*(-\nu)$;
2. теперь рассмотрим другую, более общую задачу
$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax \prec b \\ & Cx = d, \end{aligned}$$
двойственная функция
$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \inf_x \big(f_0(x) + \lambda^T(Ax - b) + \nu^T(Cx - d)\big) \\ &= -b^T\lambda - d^T\nu + \inf_x \big(f_0(x) + (A^T\lambda + C^T\nu)^T x\big) \\ &= -b^T\lambda - d^T\nu - f_0^*\left(-A^T\lambda - C^T\nu\right), \end{aligned}$$
где
$$\mathrm{dom} g = \left\{(\lambda, \nu) \mid -A^T\lambda - C^T\nu \in \mathrm{dom} f_0^*\right\}.$$