Лекция-семинар 9

Вязкость слабонеидеального газа

В феноменологической гидродинамике
«вязкий тензор» равен:

$$(*)\qquad \boxed{\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\langle \mathrm{v}_i\rangle + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \mathrm{v}_k\rangle - \frac{2}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle\right) + \varsigma\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle .}$$

Первая вязкость

вторая вязкость

На прошлой лекции мы получили, что в кинетике «вязкий тензор»:

$$\boxed{\sigma'_{ik} = -m\int u_i(\Gamma)u_k(\Gamma)\delta f\, d\Gamma .}$$

Надо найти из этой формулы получить первую и вторую вязкость и, конечно, убедиться, что это выражение сводится к (*).

Простой способ расчета первой вязкости

Предположим, что поток газа движется вдоль оси X, а средняя скорость газа зависит только от координаты вдоль оси Y.

$$\boxed{\left\langle \vec{\mathbf{v}} \right\rangle = \left(\left\langle \mathrm{v} \right\rangle (\mathrm{y}), 0, 0 \right)}$$

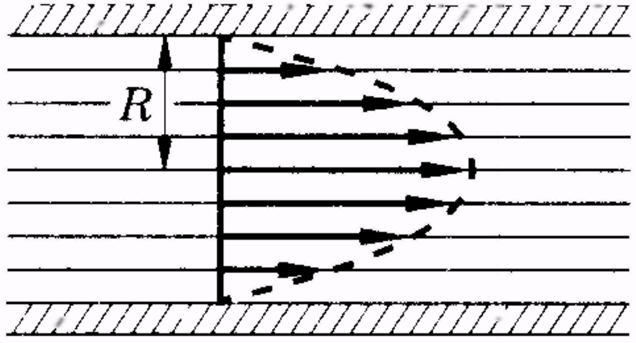


Рис. 7.2

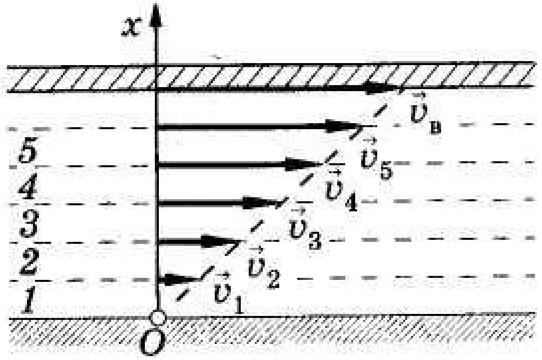


Рис. 7.1

$$\boxed{f = f^0 + \delta f}$$

$$\boxed{f^0(r, \mathbf{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\left(\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle\right)^2}{2T}\right)}$$

$$\boxed{f = f^0 + \delta f}$$

$$\boxed{f^0(r, \mathbf{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\left(\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle\right)^2}{2T}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v} = -\frac{\delta f}{\tau}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v} = -\frac{\delta f}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta f = -\tau \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{u} = \tau m \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \langle \mathrm{v}_x \rangle}{\partial y} u_x u_y}$$

$$\boxed{\sigma'_{ik} = -m\int u_i(\Gamma)u_k(\Gamma)\delta f\, d\Gamma.}$$

$$\boxed{\delta f = \tau m \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \langle \mathrm{v}_x \rangle}{\partial y} u_x u_y}$$

$$\boxed{\sigma'_{xy} = m^2 \frac{\partial \langle \mathrm{v}_x \rangle}{\partial y}\tau \int \left(u_x u_y\right)^2 \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}\right) d\Gamma.}$$

Больцмановский газ: $\boxed{\dfrac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} = -\dfrac{f^0}{T}}$

$$\boxed{\sigma'_{xy} = \frac{m^2\tau}{T}\frac{\partial \langle \mathrm{v}_x \rangle}{\partial y}\int \left(u_x u_y\right)^2 f^0 d\Gamma = \frac{nm^2\tau}{T}\left\langle \left(u_x u_y\right)^2 \right\rangle \frac{\partial \langle \mathrm{v}_x \rangle}{\partial y}.}$$

$$\boxed{\sigma'_{xy} = \frac{m^2\tau}{T}\frac{\partial\langle \mathrm{v}_x\rangle}{\partial y}\int\left(u_x u_y\right)^2 f^0 d\Gamma = \frac{nm^2\tau}{T}\left\langle\left(u_x u_y\right)^2\right\rangle\frac{\partial\langle \mathrm{v}_x\rangle}{\partial y}.}$$

С другой стороны, в общем случае вязких тензор равен

$$\boxed{\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\langle \mathrm{v}_i\rangle + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \mathrm{v}_k\rangle - \frac{2}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle\right) + \varsigma\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle.}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\eta = \frac{nm^2\tau}{T}\left\langle\left(u_x u_y\right)^2\right\rangle = nT\tau = P\tau.}$$

$$f^0(r,\mathbf{u}) = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathbf{u}^2}{2T}\right)$$

$$\left\langle \left(u_x u_y\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(u_x\right)^2 \left(u_y\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(u_x\right)^2 \right\rangle \left\langle \left(u_y\right)^2 \right\rangle = \left(\frac{T}{m}\right)^2 .$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\eta = \frac{nm^2\tau}{T}\left\langle \left(u_x u_y\right)^2 \right\rangle = \frac{nm^2\tau}{T}\left(\frac{T}{m}\right)^2 = nT\tau = P\tau.}$$

Первая вязкость

$$\boxed{\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\langle \mathrm{v}_i\rangle + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \mathrm{v}_k\rangle - \frac{2}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle\right) + \varsigma\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle.}$$

(при температуре 20 °C)

	η, г/с · см	ν, см^2/с
Вода	0,010	0,010
Воздух	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	0,150
Спирт	0,018	0,022
Глицерин . . .	8,5	6,8
Ртуть	0,0156	0,0012

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Попробуем теперь получить из

$$\sigma'_{ik} = -m\int u_i(\Gamma)u_k(\Gamma)\delta f\,d\Gamma.$$

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\langle \mathrm{v}_i\rangle + \frac{\partial}{\partial r_i}\langle \mathrm{v}_k\rangle - \frac{2}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle\right) + \varsigma\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle.$$

Подробный вывод ниже я не буду приводить. Слишком громоздко для презентации. Пропущенные вычисления подробно сделаны в 10 томе курса теоретической физики, «Кинетика»: § 6. Кинетическое уравнение для слабо неоднородного газа .

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} f_0 + \mathbf{v}(p)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_0 + \mathbf{F}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_0 = -\frac{\delta f}{\tau}.} \qquad (*)$$

Локально равновесное распределение для классического газа:

$$f_0 = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_{\text{вн}}}{T}\right) \exp\left(-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2}{2T}\right)$$

Теперь эту формулу надо подставить в (*) и упростить. Именно этих подробностей в презентации нет, только окончательный ответ. Детали см. в п. 6, 10ого тома…

$$f_0 = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_{\text{вн}}}{T}\right) \exp\left(-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2}{2T}\right)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f_0 = \\ = \frac{f_0}{T}\left\{\frac{\varepsilon(\Gamma) - w}{T}\mathbf{v}\nabla T + m v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta} + \frac{w - T c_p - \varepsilon(\Gamma)}{c_v}\operatorname{div}\mathbf{V}\right\}$$

Как эти обозначения понимать?

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla f_0 = \\ =\frac{f_0}{T}\left\{\frac{\varepsilon(\Gamma)-w}{T}\mathbf{v}\nabla T+mv_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}+\frac{w-Tc_p-\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\operatorname{div}\mathbf{V}\right\}$$

$$\frac{d}{dt}f_0=\frac{f_0}{T}\left\{\frac{\varepsilon_p-w}{T}\mathbf{u}\nabla T+mu_\alpha u_\beta V_{\alpha\beta}+\frac{w-Tc_p-\varepsilon_p}{c_v}\operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right\}=-\frac{\delta f}{\tau},$$

$V_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\langle\mathbf{v}\rangle_\beta+\partial_\beta\langle\mathbf{v}\rangle_\alpha\right),\qquad w=c_pT$ -- тепловая функция идеального газа

$$\sigma'_{ik}=-m\int d\Gamma\,\delta f u_i u_k=?$$

$$\delta f=-\tau\frac{f_0}{T}\left\{mu_\alpha u_\beta\partial^2\{V_\alpha,V_\beta\}+\left(\frac{mu^2}{3}-\frac{\varepsilon_p}{c_v}\right)\operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right\},\quad \partial\{V_\alpha,V_\beta\}\equiv\left(V_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f_0 = = \frac{f_0}{T}\left\{\frac{\varepsilon(\Gamma) - w}{T}\mathbf{v}\nabla T + m v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta} + \frac{w - Tc_p - \varepsilon(\Gamma)}{c_v}\operatorname{div}\mathbf{V}\right\}}$$

$$\frac{d}{dt} f_0 = \frac{f_0}{T}\left\{\frac{\varepsilon_p - w}{T}\mathbf{u}\nabla T + m u_\alpha u_\beta V_{\alpha\beta} + \frac{w - Tc_p - \varepsilon_p}{c_v}\operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right\} = -\frac{\delta f}{\tau},$$

$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \langle\mathbf{v}\rangle_\beta + \partial_\beta \langle\mathbf{v}\rangle_\alpha\right),$ $w = c_p T$ -- тепловая функция идеального газа

$$\boxed{\sigma'_{ik} = -m\int d\Gamma\,\delta f u_i u_k = 2\eta\left(V_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right) + \zeta\delta_{ik}\operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle.}$$

Напоминаю, что $\mathbf{v}(p) = \langle\mathbf{v}\rangle + \mathbf{u}$,

$\varepsilon_p = \varepsilon(p)$ – кинетическая энергия.

$$\frac{d}{dt}f_0=\frac{f_0}{T}\left\{\frac{\varepsilon_p-w}{T}\mathbf{u}\nabla T+mu_\alpha u_\beta V_{\alpha\beta}+\frac{w-Tc_p-\varepsilon_p}{c_v}\operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right\}=-\frac{\delta f}{\tau},$$

- Когда вы будете читать вывод этой формулы в учебнике, обратите внимание, что слагаемые, пропорциональные дивергенции скорости и градиенту температуры получились в результате сложных термодинамических преобразований с привлечением уравнения состояния идеального газа. А вывод «второго» слагаемого, которое дает первую вязкость, был относительно простым и не потребовал знаний уравнения состояния!
- Вторая вязкость, связанная с третьим слагаемым, играет ключевую роль в случае, когда осуществляется всестороннее сжатие или растяжение сосуда с газом. В этом случае механическая энергия переходит в тепловую, и за это отвечает вторая вязкость. Для описания сжатия и растяжения конечно надо знать уравнение состояния!

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta f=-\tau\frac{f_0}{T}\left\{mu_\alpha u_\beta\partial^2\{V_\alpha,V_\beta\}+\left(\frac{mu^2}{3}-\frac{\varepsilon_p}{c_v}\right)\mathrm{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right\},\\&\partial\{V_\alpha,V_\beta\}\equiv\left(V_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right),\qquad V_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\langle\mathbf{v}\rangle_\beta+\partial_\beta\langle\mathbf{v}\rangle_\alpha\right).\end{aligned}}$$

$$\boxed{\sigma'_{ik}=-m\int d\Gamma\delta f u_i u_k=?}$$

В идеальном газе ε_p=mu^2/2.
В одноатомном идеальном газе c_v=3/2. $\Rightarrow$ $\left(\frac{mu^2}{3}-\frac{\varepsilon_p}{c_v}\right)=0.$

$$\boxed{\delta f=-\tau\frac{f_0}{T}mu_\alpha u_\beta\partial^2\{V_\alpha,V_\beta\}.}$$

$\Rightarrow$ Нет второй вязкости!

Возможная задача для контрольной: найти вторую вязкость двухатомного газа.

$$\delta f = -\tau \frac{f_0}{T}\left\{ m u_\alpha u_\beta \partial^2 \{V_\alpha, V_\beta\} + \left(\frac{m u^2}{3} - \frac{\varepsilon_p}{c_v}\right) \operatorname{div}\langle \mathbf{v} \rangle \right\},$$

$$\partial\{V_\alpha, V_\beta\} \equiv \left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \operatorname{div}\langle \mathbf{v} \rangle \right), \qquad V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \langle \mathbf{v} \rangle_\beta + \partial_\beta \langle \mathbf{v} \rangle_\alpha \right).$$

$$\delta f = -\tau \frac{f_0}{T} m u_\alpha u_\beta \partial^2 \{V_\alpha, V_\beta\}.$$

$$\sigma'_{ik} = -m \int d\Gamma \delta f u_i u_k = \frac{m^2 \tau}{T} \partial^2 \{V_\alpha, V_\beta\} \int d\Gamma f_0 u_\alpha u_\beta u_i u_k =$$

$$= \frac{m^2 \tau n}{T} \partial^2 \{V_\alpha, V_\beta\} \left\langle u_\alpha u_\beta u_i u_k \right\rangle = ?$$

$$\left\langle u_\alpha u_\beta u_i u_k \right\rangle = ?$$

$$f^0(r,\mathbf{u}) = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathbf{u}^2}{2T}\right)$$

Теорема Вика

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\,, \qquad \mathrm{Re}(\lambda) > 0$$

$$\int \mathrm{d}^n x \ \exp\left(-\frac{1}{2}x^T M x\right) = \mathcal{N}^{-1} \qquad \mathcal{N} = \sqrt{\frac{\det M}{(2\pi)^n}}$$

http://www.laine.itp.unibe.ch/exercises/section1.pdf

Вычисление корреляторов по гауссовскому распределению

$$\rho(x) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T M x\right)$$

$$\langle x_{i_1} \ldots x_{i_m} \rangle = \langle A(x) \rangle \equiv \int \mathrm{d}^n x \, \rho(x) \, A(x)$$

$$\langle x_{i_1} \ldots x_{i_m} \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{i_m}} \exp\left\{ \frac{1}{2} b_i (M^{-1})_{ij} b_j \right\} \right]_{b=0}$$

Вычисление корреляторов по гауссовскому распределению

$$\mathcal{Z}(b) = \mathcal{N} \int \mathrm{d}^n x \, \exp\left(-\frac{1}{2} x^T M x + b^T x\right)$$

$$= \langle \exp(b^T x) \rangle$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2} b^T M^{-1} b\right).$$

$$\langle x_{i_1} \ldots x_{i_m} \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{i_m}} \exp\left\{\frac{1}{2} b_i (M^{-1})_{ij} b_j\right\}\right]_{b=0}$$

$$\rho(x) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T M x\right)$$

$$\langle x_{i_1} \ldots x_{i_m} \rangle = \langle A(x) \rangle \equiv \int \mathrm{d}^n x \, \rho(x) \, A(x)$$

$$\langle x_{i_1} \ldots x_{i_m} \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial b_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{i_m}} \exp\left\{ \frac{1}{2} b_i (M^{-1})_{ij} b_j \right\} \right]_{b=0}$$

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle = (M^{-1})_{i_1 i_2} \, ,$$

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \rangle = (M^{-1})_{i_1 i_2} (M^{-1})_{i_3 i_4} + (M^{-1})_{i_1 i_3} (M^{-1})_{i_2 i_4} + (M^{-1})_{i_1 i_4} (M^{-1})_{i_2 i_3}$$

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle = (M^{-1})_{i_1 i_2} \,,$$

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \rangle = (M^{-1})_{i_1 i_2} (M^{-1})_{i_3 i_4} + (M^{-1})_{i_1 i_3} (M^{-1})_{i_2 i_4} + (M^{-1})_{i_1 i_4} (M^{-1})_{i_2 i_3}$$

$$\left\langle u_\alpha u_\beta u_i u_k \right\rangle = ?$$

$$f^0(r, \mathbf{u}) = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathbf{u}^2}{2T} \right)$$

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle = (M^{-1})_{i_1 i_2} \,,$$

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \rangle = (M^{-1})_{i_1 i_2} (M^{-1})_{i_3 i_4} + (M^{-1})_{i_1 i_3} (M^{-1})_{i_2 i_4} + (M^{-1})_{i_1 i_4} (M^{-1})_{i_2 i_3}$$

$$\left\langle u_\alpha u_\beta u_i u_k \right\rangle = \left\langle u_\alpha u_\beta \right\rangle \left\langle u_i u_k \right\rangle + \left\langle u_\alpha u_i \right\rangle \left\langle u_\beta u_k \right\rangle + \left\langle u_\alpha u_k \right\rangle \left\langle u_\beta u_i \right\rangle =$$

$$= \left(\delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} + \delta_{\alpha i} \delta_{\beta k} + \delta_{\alpha k} \delta_{\beta i} \right) \left(\frac{1}{3} \left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle \right)^2$$

$$\left\langle u_\alpha u_\beta u_i u_k \right\rangle = \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik} + \delta_{\alpha i}\delta_{\beta k} + \delta_{\alpha k}\delta_{\beta i}\right)\left(\frac{1}{3}\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle\right)^2$$

$$\sigma'_{ik} = \frac{m^2 \tau n}{T} \partial^2 \{V_\alpha, V_\beta\} \left\langle u_\alpha u_\beta u_i u_k \right\rangle = ?$$

$$\partial\{V_\alpha, V_\beta\} \equiv \left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\left\langle \mathbf{v} \right\rangle\right), \qquad V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \left\langle \mathbf{v} \right\rangle_\beta + \partial_\beta \left\langle \mathbf{v} \right\rangle_\alpha\right).$$

$$\left\langle u_\alpha u_\beta u_i u_k \right\rangle = \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik} + \delta_{\alpha i}\delta_{\beta k} + \delta_{\alpha k}\delta_{\beta i}\right)\left(\frac{1}{3}\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle\right)^2$$

$$\partial^2 \{V_\alpha, V_\beta\}\left\langle u_\alpha u_\beta u_i u_k \right\rangle = \left(\partial^2 \{V_\alpha, V_\alpha\}\delta_{ik} + 2\partial^2 \{V_i, V_k\}\right)\left(\frac{1}{3}\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle\right)^2 =$$

$$= 2\partial^2 \{V_i, V_k\}\left(\frac{1}{3}\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle\right)^2 = 2\partial^2 \{V_i, V_k\}\left(\frac{T}{m}\right)^2$$

Где мы воспользовались:

$$\partial\{V_\alpha, V_\beta\} \equiv \left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\left\langle \mathbf{v} \right\rangle\right), \qquad V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \left\langle \mathbf{v} \right\rangle_\beta + \partial_\beta \left\langle \mathbf{v} \right\rangle_\alpha\right), \ \Rightarrow \ \partial\{V_\alpha, V_\alpha\} = 0$$

$$\sigma'_{ik} = \frac{m^2 \tau n}{T} \partial^2 \{V_\alpha, V_\beta\} \left\langle u_\alpha u_\beta u_i u_k \right\rangle = 2 \frac{m^2 \tau n}{T} \partial^2 \{V_i, V_k\} \left(\frac{T}{m} \right)^2 =$$

$$= 2(nT)\tau \partial^2 \{V_i, V_k\} = 2P\tau \left(V_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \left\langle \mathbf{v} \right\rangle \right).$$

Выводы: мы из кинетического уравнения получили гидродинамический тензор вязкости в случае одноатомного газа.

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta f=-\tau\frac{f_0}{T}\left\{mu_\alpha u_\beta\partial^2\{V_\alpha,V_\beta\}+\left(\frac{mu^2}{3}-\frac{\varepsilon_p}{c_v}\right)\operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right\},\\&\partial\{V_\alpha,V_\beta\}\equiv\left(V_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle\right),\qquad V_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\langle\mathbf{v}\rangle_\beta+\partial_\beta\langle\mathbf{v}\rangle_\alpha\right).\end{aligned}}$$

$$\boxed{\delta f=-\tau\frac{f_0}{T}mu_\alpha u_\beta\partial^2\{V_\alpha,V_\beta\}.}$$

$$\boxed{\sigma'_{ik}=-m\int d\Gamma\,\delta f u_i u_k=2\eta\partial\{V_\alpha,V_\beta\},\ \eta=P\tau.}$$

Феноменологическая Гидродинамика

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial r_k} \langle \mathrm{v}_i \rangle + \frac{\partial}{\partial r_i} \langle \mathrm{v}_k \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \langle \mathbf{v} \rangle \right) + \varsigma \delta_{ik} \operatorname{div} \langle \mathbf{v} \rangle .$$

Кинетика идеального одноатомного газа:

$$\sigma'_{ik} = -m \int d\Gamma \delta f u_i u_k = 2\eta \partial \{ V_\alpha , V_\beta \} + 0 \delta_{ik} \operatorname{div} \langle \mathbf{v} \rangle , \; \eta = P\tau .$$

$$\partial \{ V_\alpha , V_\beta \} = \frac{1}{2} \left(\partial_\alpha \langle \mathbf{v} \rangle_\beta + \partial_\beta \langle \mathbf{v} \rangle_\alpha \right).$$

Вывод: кинетика и гидродинамика согласуются, когда речь идет о вязкости…

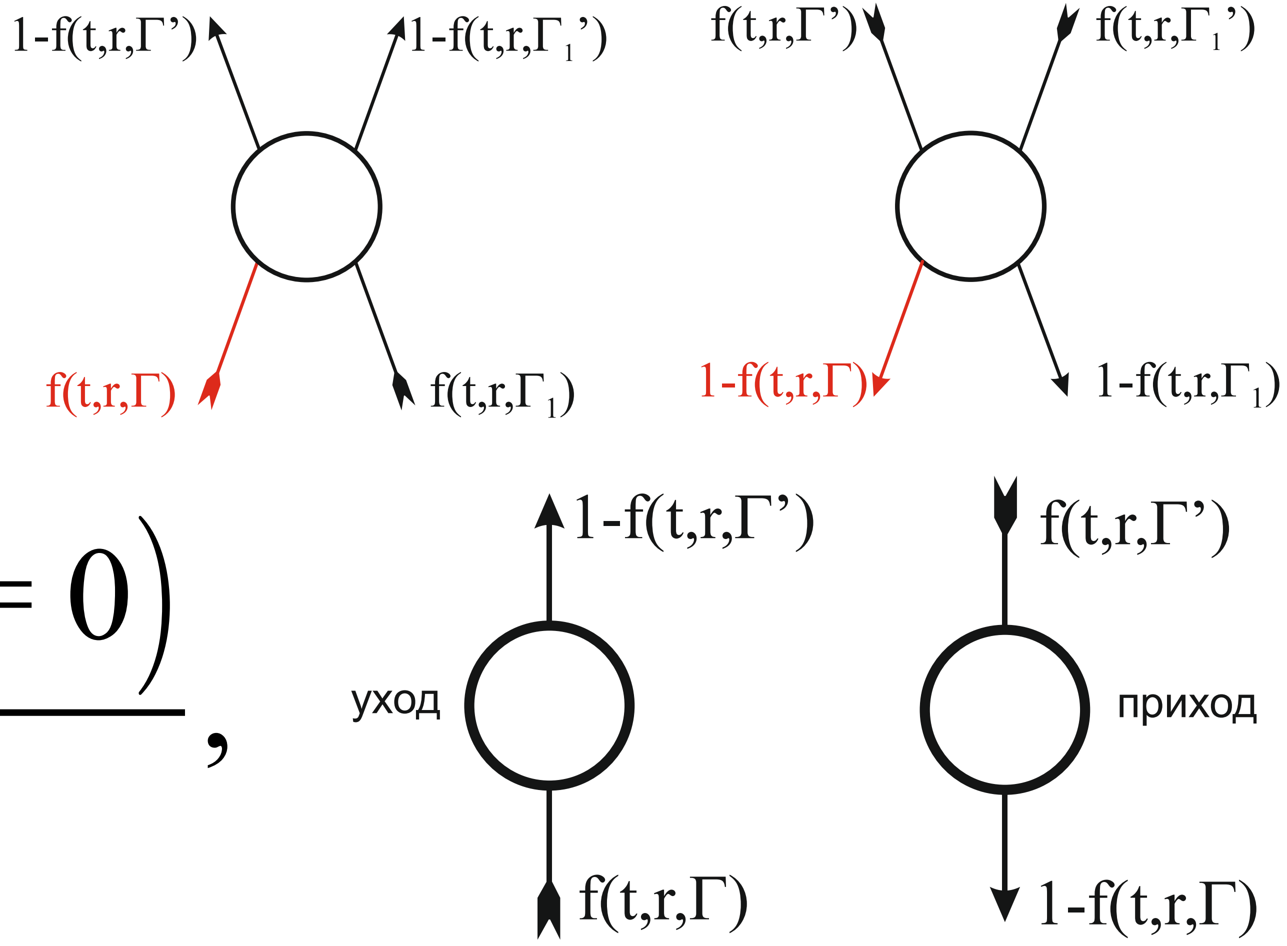
Можно ли из гидродинамических уравнений получить формулу Друде?

Можно ли так обобщить уравнения Навье-Стокса, чтобы получилась формула Друде?

Формула Друде и … гидродинамика

$$I_1 \approx -\frac{f - f_0}{\tau},$$

$$I_2 \approx -\frac{f - f_0\left(\langle \mathbf{v} \rangle = 0\right)}{\tau_{\mathbf{tr}}},$$



Два типа интеграла столкновений.

- Парные столкновения в газе сохраняют импульс…
- Столкновения на вмороженном беспорядке (примесях) не сохраняют импульс…

Вспоминаем, как мы на прошлой лекции выводили гидродинамические уравнения из кинетического уравнения...

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(n\overline{A}\right)+\operatorname{div}\left(\mathbf{j}_A\right)=Fn\left\langle\frac{\partial A}{\partial\Gamma}\right\rangle+\int AI_{st}\,d\Gamma.}$$

$$\boxed{\mathbf{j}_A=\int A\,\mathrm{v}(\Gamma)\,f\,d\Gamma.}$$

$$\boxed{n\left\langle A\right\rangle=\int Af\,d\Gamma.}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&A=1,\\&A=p_i,\\&A=\varepsilon(p),\\&\ldots\end{aligned}}$$

Это уравнение Навье-Стокса…

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(n\left\langle p_i\right\rangle\right)+\nabla_k\Pi_{k,i}=nF_i+\int p_i I_{st}\,d\Gamma.}$$

$$\boxed{\Pi_{ik}=\int p_i\,\mathrm{v}_k(\Gamma)\,f\,d\Gamma.}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(n\langle p_i\rangle\right)+\nabla_k\Pi_{k,i}=nF_i+\int p_i I_{st}\,d\Gamma.}$$

$$\boxed{\Pi_{ik}=\int p_i\,\mathrm{v}_k(\Gamma)\,f\,d\Gamma.}$$

$$\boxed{j_i=e\int \mathrm{v}_i(\Gamma)\,f\,d\Gamma.}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(n\left\langle p_i\right\rangle\right)+\nabla_k\Pi_{k,i}=nF_i+\int p_i I_{st}\,d\Gamma.}$$

Электроны в металле

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}j_i+\frac{e}{m}\nabla_k\Pi_{k,i}=\frac{e^2 n}{m}E_i+\frac{e}{m}\int p_i I_{st}\,d\Gamma.}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{e}{m} \nabla_k \Pi_{k,i} = \frac{e^2 n}{m} E_i + \frac{e}{m} \int p_i I_{st} d\Gamma.}$$

$$\int p_i I_2 d\Gamma = \int p_i \left(-\frac{f - f_0\left(\langle \mathbf{v} \rangle = 0\right)}{\tau_{\mathbf{tr}}} \right) d\Gamma = -\frac{m}{e\tau_{\mathbf{tr}}} j_i,$$

$$\int p_i I_1 d\Gamma = \int p_i \left(-\frac{f - f_0}{\tau} \right) d\Gamma = 0.$$

$$\int p_i I_2 d\Gamma = \int p_i \left(-\frac{f - f_0\left(\langle \mathbf{v} \rangle = 0\right)}{\tau_{\mathbf{tr}}} \right) d\Gamma = -\frac{m}{e\tau_{\mathbf{tr}}} j_i,$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{e}{m} \nabla_k \Pi_{k,i} = \frac{e^2 n}{m} E_i - \frac{j_i}{\tau_{\mathrm{tr}}}.}$$

Уравнение Навье-Стокса, в котором учтено рассеяние электронов на примесях в тау-приближении:

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}} \right) j_i + \frac{e}{m} \nabla_k \Pi_{k,i} = \frac{e^2 n}{m} E_i.}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}}\right) j_i+\frac{e}{m}\nabla_k\Pi_{k,i}=\frac{e^2 n}{m}E_i, \qquad \tau_{\mathrm{tr}}\gg\tau.}$$

условие применимости гидродинамического приближения
(и локально-равновесоого распределения):
средняя скорость меняется медленно на "микроскопических" масштабах...

$$\boxed{\Pi_{ik}=P\delta_{ik}+n\langle p_i\rangle\langle \mathrm{v}_k\rangle-\sigma'_{ik}.}$$

$$\boxed{\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial t}} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}}\right) j_i + \frac{e}{m}\nabla_k \cancel{\Pi_{k,i}} = \frac{e^2 n}{m} E_i .}$$

А это формула Друде!!!
Мы решили задачу из задания.
Какой номер задачи, угадайте сами.

$$\boxed{j_i = \frac{n e^2 \tau_{\mathrm{tr}}}{m} E_i = \sigma_D E_i .}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}}\right) j_i+\frac{e}{m} \nabla_k \cancel{\Pi_{k,i}}=\frac{e^2 n}{m} E_i .}$$

$$\boxed{\left(-i\omega+\frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}}\right) j_i(\omega)=\frac{e^2 n}{m} E_i(\omega).}$$

Это обобщение формулы Друде на случай переменного поля.

Если уравнение Навье-Стокса расписать

Если уравнение Навье-Стокса расписать :

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}}\right)j_i+\frac{e}{m}\nabla_k\Pi_{k,i}=\frac{e^2 n}{m}E_i.}$$

$$\boxed{\Pi_{ik}=P\delta_{ik}+n\langle p_i\rangle\langle \mathrm{v}_k\rangle-\sigma'_{ik}.}$$

$$\boxed{\sigma'_{ik}=\eta\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\langle \mathrm{v}_i\rangle+\frac{\partial}{\partial r_i}\langle \mathrm{v}_k\rangle-\frac{2}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle\right)+\varsigma\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle.}$$

То получится:

$$\boxed{\nabla_k\Pi_{k,i}=\nabla_i P+\nabla_k\left(\langle p_i\rangle n\langle \mathrm{v}_k\rangle\right)-\eta\Delta\langle \mathrm{v}_i\rangle-\left(\eta+\frac{\varsigma}{3}\right)\nabla_i\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle}$$

$$\frac{m}{e}\frac{\partial}{\partial t}j_i+\nabla_k\left(\langle p_i\rangle n\langle \mathrm{v}_k\rangle\right)=m\frac{\partial}{\partial t}\left(n\langle \mathrm{v}_i\rangle\right)+\nabla_k\left(\langle p_i\rangle n\langle \mathrm{v}_k\rangle\right)=$$

$$=\cancel{m\langle \mathrm{v}_i\rangle\frac{\partial}{\partial t}n}+mn\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathrm{v}_i\rangle+\cancel{\langle p_i\rangle\nabla_k\left(n\langle \mathrm{v}_k\rangle\right)}+nm\langle \mathrm{v}_k\rangle\nabla_k\langle \mathrm{v}_i\rangle.$$

$$mn\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{tr}}}\right)+\langle \mathrm{v}_k\rangle\nabla_k\right)\langle \mathrm{v}_i\rangle=enE_i-\nabla_iP+\eta\Delta\langle \mathrm{v}_i\rangle+\left(\eta+\frac{\varsigma}{3}\right)\nabla_i\,\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle.$$

- уравнение Навье-Стокса для электронной жидкости с электрическим полем и рассеянием на вмороженном беспорядке.
- В Графене вязкость дает вклад в сопротивление!!! Тогда приходится для вычисления сопротивления решать ур. Навье-Стокса.

Спасибо за внимание!

Прошу старост всех групп прислать мне на электронный адрес shchelkachev.nm@mipt.ru письмо, где в теме будет указан номер группы, факультет,
Фамили Имя Отчество, электронный адрес.
Присылайте предложения, как нам лучше дистанционно общаться.