Задача 15

Ферми-жидкость…

С.Н. БУРМИСТРОВ

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

10. Неравновесные состояния ферми-жидкости описываются функцией распределения квазичастиц, зависящей от координат, импульсов и времени $n = n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$. При нулевой температуре или при достаточно низких температурах столкновения между квазичастицами становятся настолько редкими, что ими можно полностью пренебречь. В отсутствие столкновений между частицами справедлива теорема Лиувилля о тождественном обращении в нуль полной производной по времени от функции распределения

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \{H, n\} = 0,$$

где $\{H, n\}$ — скобки Пуассона для гамильтониана H и функции распределения n. Используя следующее кинетическое уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{p}} = 0,$$

рассмотреть малые колебания функции распределения при $T = 0$.

Найти условия, когда возможно распространение незатухающих волн, получивших название *нуль-звук*. Считать, что функция взаимодействия квазичастиц не зависит от импульсов $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') = f_0$.

10. Рассмотрим малые отклонения функции распределения $\delta n = n - n_0$ от равновесной функции n_0. Тогда также изменяется и энергия квазичастиц $H = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$

$$n = n_0(\boldsymbol{p}) + \delta n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \quad \text{и} \quad H = \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \delta\varepsilon[n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)].$$

В линейном приближении по δn и $\delta\varepsilon$ из уравнения Лиувилля найдем

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \boldsymbol{p}} \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}} = 0.$$

Скорость квазичастиц равна $\boldsymbol{v} = \partial\epsilon_0/\partial\boldsymbol{p}$ и производная функции распределения имеет вид $\partial n_0/\partial\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\,\partial n_0/\partial\varepsilon$. Решение ищем в виде бегущей волны

$$\delta n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \delta n(\boldsymbol{p})\, e^{i\boldsymbol{kr} - i\omega t},$$

10. Рассмотрим малые отклонения функции распределения $\delta n = n - n_0$ от равновесной функции n_0. Тогда также изменяется и энергия квазичастиц $H = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$

$$n = n_0(\boldsymbol{p}) + \delta n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \quad \text{и} \quad H = \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \delta\varepsilon[n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)].$$

В Ферми-жидкости, спектр энергии элементарных возбуждений зависит от функции распределения!

10. Рассмотрим малые отклонения функции распределения $\delta n = n - n_0$ от равновесной функции n_0. Тогда также изменяется и энергия квазичастиц $H = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$

$$n = n_0(\boldsymbol{p}) + \delta n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \quad \text{и} \quad H = \varepsilon_0(\boldsymbol{p}) + \delta\varepsilon[n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)].$$

В Ферми-жидкости, спектр энергии элементарных возбуждений зависит от функции распределения!

В линейном приближении по δn и $\delta\varepsilon$ из уравнения Лиувилля найдем

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}} = 0.$$

Сила, связана с зависимостью спектра от функции распределения!

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \boldsymbol{p}} \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}} = 0.$$

Скорость квазичастиц равна $\boldsymbol{v} = \partial \epsilon_0 / \partial \boldsymbol{p}$ и производная функции распределения имеет вид $\partial n_0 / \partial \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\, \partial n_0 / \partial \varepsilon$. Решение ищем в виде бегущей волны

$$\delta n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \delta n(\boldsymbol{p})\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - i\omega t},$$

где $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор и ω — частота колебаний. Изменение энергии квазичастиц через функцию взаимодействия $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ дается выражением

$$\delta\varepsilon = \int f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\, \delta n(\boldsymbol{p}')\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - i\omega t} d\tau_{p'}\,, \qquad d\tau_{p'} = 2\frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}\,.$$

Это самый общий вид линейного члена разложения энергии квазичастицы по приращению функции распределения.

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \boldsymbol{p}} \frac{\partial \delta \varepsilon}{\partial \boldsymbol{r}} = 0.$$

Скорость квазичастиц равна $\boldsymbol{v} = \partial \epsilon_0 / \partial \boldsymbol{p}$ и производная функции распределения имеет вид $\partial n_0 / \partial \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\, \partial n_0 / \partial \varepsilon$. Решение ищем в виде бегущей волны

$$\delta n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \delta n(\boldsymbol{p})\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - i\omega t},$$

где $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор и ω — частота колебаний. Изменение энергии квазичастиц через функцию взаимодействия $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ дается выражением

$$\delta \varepsilon = \int f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\, \delta n(\boldsymbol{p}')\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - i\omega t} d\tau_{p'}, \quad d\tau_{p'} = 2\frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Поэтому

$$(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\, \delta n(\boldsymbol{p}) = -(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \int f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\, \delta n(\boldsymbol{p}')\, d\tau_{p'}.$$

$$-i\omega \delta n_{\omega,k} + i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \delta n_{\omega,k} - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \cdot (i\mathbf{k}) \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\omega,k} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 0$$

$$-\omega \delta n_{\omega,k} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \delta n_{\omega,k} - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\omega,k} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 0$$

Для упрощения анализа мы положим $f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}') = f_0 = \text{const}$ и температуру $T = 0$. Тогда

$$(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\,\delta n(\boldsymbol{p}) = -(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} f_0 \int \delta n(\boldsymbol{p}')\, d\tau_{p'}.$$

Из вида уравнения решение имеет форму $\delta n(\boldsymbol{p}) = n_0'(\varepsilon)\,\nu(\theta)$, где θ — угол между векторами $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{k}$. Поскольку $n_0'(\varepsilon) = -\delta(p - p_F)/v_F$, поправка $\delta n(\boldsymbol{p})$ отлична от нуля только на поверхности Ферми, т. е. при $|\boldsymbol{p}| = p_F$ и $|\boldsymbol{v}| = v_F$. Подставляя $\delta n(\boldsymbol{p})$, найдем

$$(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\,\nu(\theta) = \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} F_0 \int \nu(\theta')\frac{d\Omega_{\theta'}}{4\pi}, \qquad F_0 = \frac{p_F^2}{\pi^2\hbar^3 v_F} f_0 = \frac{m^* p_F}{\pi^2\hbar^3} f_0.$$

Здесь F_0 — безразмерный *параметр Ландау*, $m^* p_F/\pi^2\hbar^3$ — плотность состояний и $d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$ — элемент телесного угла. Далее мы получим

$$(\omega - \boldsymbol{kv})\,\nu(\theta) = \boldsymbol{kv}F_0 \int \nu(\theta')\,\frac{d\Omega_{\theta'}}{4\pi}\,, \qquad F_0 = \frac{p_F^2}{\pi^2\hbar^3 v_F}\,f_0 = \frac{m^* p_F}{\pi^2\hbar^3}\,f_0.$$

Здесь F_0 — безразмерный *параметр Ландау*, $m^* p_F/\pi^2\hbar^3$ — плотность состояний и $d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta$ — элемент телесного угла. Далее мы получим

$$\frac{\nu(\theta)}{F_0} = \frac{\cos\theta}{s - \cos\theta} \int \nu(\theta')\,\frac{d\Omega_{\theta'}}{4\pi} \quad \text{и} \quad s = \frac{\omega}{v_F k}\,.$$

Из условия самосогласования

$$\frac{1}{F_0} \int \nu(\theta)\,\frac{d\Omega_\theta}{4\pi} = \int \frac{\cos\theta}{s - \cos\theta}\,\frac{d\Omega_\theta}{4\pi} \left(\int \nu(\theta')\,\frac{d\Omega_{\theta'}}{4\pi} \right),$$

находим

$$\frac{1}{F_0} = \int\limits_0^\pi \frac{\cos\theta}{s - \cos\theta}\,\frac{2\pi \sin\theta\, d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{s - x}\,.$$

$$\frac{1}{F_0} = \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{s-\cos\theta} \frac{2\pi \sin\theta \, d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{s-x}.$$

Дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{F_0} = \frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1$$

имеет действительные решения только при $F_0 > 0$, так как правая часть изменяется в пределах $(+\infty, 0)$ при изменении s от 1 до $+\infty$. Таким образом, при $F_0 > 0$, что отвечает отталкиванию квазичастиц на ферми-поверхности, дисперсионное уравнение имеет одно действительное решение $s = s(F_0)$, которое соответствует незатухающей волне со звуковым спектром

$$\omega(k) = s(F_0)\, v_F k.$$

Такие звуковые волны в ферми-жидкости называются *бесстолкновительным звуком* или *нуль-звуком*. Если $F_0 \to +0$, то $s \to 1$. Для $F_0 \gg 1$, $s \approx \sqrt{F_0/3}$. Следовательно, незатухающие волновые процессы возможны только при условии, что скорость квазичастиц v_F не превышает фазовую скорость волны ω/k. В жидком ^{3}He значение $F_0 = 10{,}8$ и скорость нуль-звука примерно 197 м/с. В процессе распространения нуль-звука поверхность Ферми вытягивается в направлении распространения волны и сплющивается в противоположном направлении.

При $F_0 < 0$ действительных решений дисперсионного уравнения нет и моды колебаний ферми-поверхности — затухающие.

Спасибо за внимание!