Ответы на вопросы к заданию

Задание №1

Вопрос 1. Каким условием нормирована одночастичная функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ для больцмановского газа? Элемент фазового объема $d\Gamma$?

$$\int d^3r d^3p f(r, p, t) = N; \quad d\Gamma = d^3p$$

Вопрос 2. Вид локаль-равновесного распределения для больцмановского газа $f_{loc}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ и равновесного f_0.

$$f_{loc}^{(0)} = n(r,t)\left(\frac{1}{2\pi mT(r,t)}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(p - m\mathrm{V})^2}{2mT(r,t)}\right)$$

$$f_0 = n(r,t)\left(\frac{1}{2\pi mT(r,t)}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT(r,t)}\right)$$

Здесь $\mathbf{V}$ - скорость элемента газ (к примеру, газ по трубе течёт).

Вопрос 3. Свойства интеграла столкновений $I_{\mathbf{st}}[f]$.

Источник: Семинар №1, скинутый накануне сдачи

Определение интеграла столкновений $I_{\text{st}} = \Delta N_{\boldsymbol{p}}^{(+)} - \Delta N_{\boldsymbol{p}}^{(-)}$ - изменение числа частиц в состоянии с импульсом $\boldsymbol{p}$ в единицу времени. Здесь $N_{\boldsymbol{p}}^{(-)} d^3p$ - убыль в единицу времени числа частиц из элемента d^3p, $N_{\boldsymbol{p}}^{(+)} d^3p$ - прибыль частиц в единицу времени в элемент d^3p.

Свойства интеграла столкновений:

1. $I_{\text{st}}[f^{(0)}] = 0$, где $f^{(0)}$ - равновесная функция распределения;
2. $\int I_{\text{st}}[f] d^3p = 0$ - сохранение плотности частиц
3. $\int I_{\text{st}}[f] \varepsilon(p) d^3p = 0$ - закон сохранения энергии
4. $\int I_{\text{st}}[f] \boldsymbol{p} d^3p = \mathbf{0}$ - закон сохранения имульса (работает только при абсолютно упругом столкновени!)

Вопрос 4. Чему равно $I_{\mathbf{st}}[f_{\mathbf{loc}}]$? Удовлетворяет $f^{\mathbf{loc}}$ уравнению Больцмана или нет? Почему?

Источник: Упражнение 5, Д/З + Семинар №1, скинутый накануне сдачи

Интеграл столкновений $I_{\text{st}}[f_{\text{loc}}] = 0$, так как интеграл столкновений определяет изменение числа частиц с определенным импульсом в единицу объема в единицу времени за счет столкновений; в равновесии никакого изменения нет; упражнение 5: использование ЗСЭ. Кажется, f^{loc} является решение только в нулевом порядке по градиентам и временным производным, в 1 семинаре написано, но я не оч понял

Вопрос 5. Вид тензора плотности потока импульса Π_{ij}, связь с тензором давлений $\mathcal{P}_{ij}$. Вид тензора $\mathcal{P}_{ij}$ в жидкости с вязкостью.

Источник: Семинар №1, скинутый накануне сдачи

У него есть разные обозначения, видимо, в разных областях.

$$\Pi_{ik} = \underbrace{p\delta_{ik} + \rho \langle u_i u_k \rangle}_{\text{в терминах гидродинамики}} = \underbrace{\rho \langle \mathrm{V}_i \mathrm{V}_k \rangle + \rho \langle u_i u_k \rangle}_{\text{Семинар 1, скинутый сегодня}},$$

Это - тензор плотности потока импульса. Его физический смысл такой: это $i-$я компонента импульса, переносимого молекулами в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x_k.

Тензор давления вводится следующим образом:

$$\mathcal{P}_{ik} = \rho \langle u_i u_k \rangle = m \int u_i u_k f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) d^3 p$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ - скорость газа в локальное системе отсчёта, $\mathbf{V}$ - скорость элемента газа.

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{ik} = P\delta_{ik}; & \text{в идеальной жидкости} \\ \mathcal{P}_{ik} = P\delta_{ik} - \sigma_{ik}. & \text{в вязкой жидкости} \end{cases}$$

Здесь P - давление, σ_{ik} - тензор вязких напряжений.

Вопрос 6. Выражение для вектора плотности потока тепла $\boldsymbol{Q}$ через тепловую скорость $\boldsymbol{u}$.

Источник: Семинар №1, скинутый накануне сдачи

$$\boldsymbol{Q} = \int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \frac{mu^2}{2} \boldsymbol{u} d^3 p.$$

Вопрос 7. Выражение для плотности энергии ρ^E плотности потока энергии j^E. Когда j^E совпадает с $\boldsymbol{Q}$?

Источник: Семинар №1, скинутый накануне сдачи

$$\rho^E = \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2} + \frac{\rho \langle u^2 \rangle}{2}$$
$$j_i^E = \rho \mathrm{V}_i + \mathrm{V}_k \mathcal{P}_{ki} + Q_i$$

j^E совпадает с $\mathbf{Q}$ в том случае, когда газ не движется, то есть $\mathbf{V} = \mathbf{0}$.

Вопрос 8. Вид интеграла столковений $\hat{I}_{st}[f]$ при рассеянии на примесях (больцмановская статистика). Выражение для $\hat{I}_{st}[f]$ в терминах времени релаксации τ. Связь τ с транспортным сечением рассеяния σ_{tr}. Чему равна проводимость σ и нервновесная добавка к функции распределения $f^{(1)}$ в электрическом поле E?

Источник: Семинар №1

При рассеянии на примесях - $\hat{I}_{st}[f] = \Delta N_p^{(+)} - \Delta N_p^{(-)} = n \int w(p, p')(f(p') - f(p)) d^3 p'$, где n - концентрация рассеивателей.

Тау-приближение: $\hat{I}_{st}[f] = -\dfrac{f^{(1)}}{\tau}$.

$\dfrac{1}{\tau} = n v \sigma_{tr}$

Проводимость - по формуле Друде: $\sigma = \dfrac{\tau n e^2}{m}$

$f^{(1)} = \tau \dfrac{eEvf^{(0)}}{T}$

Вопрос 9. На одномерный осцилятор $(m = 1)$ с трением γ действует сила $f(t)$. Найти отклик $x(\omega)$, функцию отклика (восприимчивость) $\chi(\omega)$.

Источник: Задача 12 из задания, начало

$x(\omega) = \chi(\omega) f_\omega$

$\chi(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 - i\gamma\omega + m\Omega^2}$ - преобразование фурье от силы. См билет 26

Вопрос 10. Уравнение переноса энтропии. Чему равно производство энтропии σ^s в процессе теплопроводности $\nabla T \neq 0$?

Источник: Семинар №4, скинутый накануне сдачи; задача №7 из задания

Уравнение переноса энтропии выглядят вот так:

$$\frac{\partial \rho^S}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j}^S = \sigma^S,$$

где введены следующие обозначения:

$$\rho^S = -\int f \ln f d^3p \quad \text{плотность энтропии}$$

$$\boldsymbol{j}^S = -\int \boldsymbol{v} f \ln f d^3p \quad \text{плотность потока энтропии}$$

$$\sigma^S = -\int \ln f I_{\mathrm{st}}[f] d^3p \quad \text{производство (источник) энтропии}$$

В случае, когда $\nabla T \neq 0$, имеется следующее выражение для производства энтропии:

$$\sigma^S = \boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{F} - \nabla\mu}{T} + \boldsymbol{Q}\nabla\frac{1}{T}$$

Вопрос 11. Соотношения Онсагера. Проиллюстрировать для процесса протекания тока $\boldsymbol{j}$ и тепла $\boldsymbol{Q}$ под действием электрического поля $\boldsymbol{E}$ и градиента температуры ∇T.

Источник: Семинар №4, скинутый накануне сдачи; Wikipedia (Онсагер); задача №7 из задания

Формулировка теоремы Онзагера:

Пусть имеет место феноменологическое соотношение между термодинамическими потоками J_i и термодинамическими силами X_k:

$$J_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} X_k,\ (i = 1, 2, ..., n)$$

Тогда при соответствующем выборе потоков J_i и сил X_k матрица феноменологических коэффициентов должна быть симметричной, то есть

$$L_{ik} = L_{ki},\ (i, k = 1, 2, ..., n)$$

Данные тождества называются соотношениями Онсагера

Применительно к нашей задаче J - производство энтропии σ^S, потоки - $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{j}$.

$$\boldsymbol{j} = L_{11}\frac{-e\boldsymbol{E} - \nabla\mu}{T} + L_{12}\nabla\frac{1}{T}$$
$$\boldsymbol{Q} = L_{21}\frac{-e\boldsymbol{E} - \nabla\mu}{T} + L_{22}\nabla\frac{1}{T}$$
$$L_{11} = \frac{1}{3}n\left\langle\tau v^2\right\rangle_0, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1}{3}n\left\langle\tau v^2(\varepsilon_p - \mu)\right\rangle_0, \quad L_{22} = \frac{1}{3}n\left\langle\tau v^2(\varepsilon_p - \mu)^2\right\rangle_0$$

Соотношения Онсагера выполняются.

Задание №2

Вопрос 12. Проиллюстрировать выполнение условия детального баланса.

Источник: Семинар 7, пример 1 (в конце); упражнение 1 из задания

$$p = \begin{pmatrix}\text{вер-ть солнца}\\ \text{вер-ть пасм}\end{pmatrix} \longrightarrow T = \begin{pmatrix}0.85 & 0.5\\ 0.15 & 0.5\end{pmatrix}$$
$$p^{(t+1)} = Tp^{(t)}$$
$$\begin{pmatrix}p^{(t+1)}_{\text{солн}}\\ p^{(t+1)}_{\text{пасм}}\end{pmatrix} = \begin{array}{c}\begin{matrix}\;\;a & \;\;\;\;b\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0.85 & 0.5\\ 0.15 & 0.5\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}p^{(t)}_{\text{солн}}\\ p^{(t)}_{\text{пасм}}\end{pmatrix}$$

$$q = Tq \longrightarrow (T - E)q = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix}a-1 & b\\ 1-a & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{gathered}q_1 + q_2 = 1\\ q_1(a-1) + (1-q_1)b = 0\\ q_1 = \tfrac{b}{1-a+b},\ q_2 = \tfrac{1-a}{1-a+b}\end{gathered}$$

$q \approx \begin{pmatrix}0.769\\ 0.231\end{pmatrix}$, при этом $b\cdot\frac{1-a}{1-a+b} = (1-a)\frac{b}{1-a+b}$. Выполнено условие детального баланса:

$$p(\text{пасм})p(\text{солн}|\text{пасм}) = p(\text{солн})p(\text{пасм}|\text{солн})$$

Вопрос 13. Для броуноской частицы записать уравнение Ланжевена. Чему равен средний квадрат скорости броуновской частицы $\langle \mathbf{v}^2(t)\rangle$? Выразить его через характеристику случайной силы. Связать коэффициента трения с временным коррелятором случайной силы (флуктуационно-диссипационная теорема).

Источник: Семинар №9

Уравнение движения частицы:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_{\text{тр}} + \boldsymbol{F}_{\text{сл}}$$
$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = -\gamma m\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{F}_{\text{сл}} = m\boldsymbol{F}, \quad \langle\boldsymbol{F}\rangle = 0$$
$$\ddot{\boldsymbol{v}} = -\gamma\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}$$

Средний квадрат скорости броуновской частицы:

$$\left\langle\boldsymbol{v}^2(t)\right\rangle = e^{-2\gamma t}\boldsymbol{v}_0^2 + F_0 e^{-2\gamma t}\frac{e^{2\gamma t} - 1}{2\gamma} \overset{\text{большое время}}{=} \frac{3T}{m},$$

где $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(0)$, $K(\tau) = F_0\delta(\tau)$ - коррелятор случайной вличины. $K(t, t') = \langle F^\alpha(t)F^\alpha(t')\rangle$. В нашем случае $K(\tau) = \langle F^\alpha(t)F^\alpha(t-\tau)\rangle$.

Связь коэффициента трения с коррелятором случайной силы:

$$\gamma = \frac{m}{3T}\int_0^{+\infty}\langle F^\alpha(t+\tau)F^\alpha(t)\rangle\, d\tau$$

Вопрос 14. Проиллюстрировать диффузию в импульсном пространстве на примере уравнения Фоккера-Планка для броуновской частицы.

Это по сути весь семинар Seminar_11ckin.pdf. Я буду писать с конца, так как скорее всего можно будет просто написать ответ дать и пару комментариев, опуская все выкладки.

Итоговый результат - уравнение

$$\frac{\partial P(\boldsymbol{k},t)}{\partial t} = -D\boldsymbol{k}^2 P(\boldsymbol{k},t)$$

с очевидным решением

$$P(\boldsymbol{k},t) = \exp\left(-D\boldsymbol{k}^2 t\right)$$

Как это уравнение получить? Во-первых, выясняется, что уравнение Фоккера-Планка для броуновской частицы имеет вид уравнения диффузии:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\Delta P$$

И если в начальный момент времени $P(\boldsymbol{r},0) = \delta^3(\boldsymbol{r})$, то решение уравнения будет выглядеть вот так:

$$P(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{(3/2)}}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{r}^2}{4Dt}\right)$$

Кстати, можно проверить выполнение соотношения

$$\left\langle \delta\boldsymbol{r}^2\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{r}^2\right\rangle = \int d^2\boldsymbol{r} P(\boldsymbol{r},t) = 6Dt$$

Для получения ответа на вопрос нужно просто перейти в импульсное представление.

$$P(\boldsymbol{k},t) = \int d^3 r \exp\left(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}\right)\delta^3(\boldsymbol{r})$$

Как вообще получилось уравнение диффузии $\frac{\partial P}{\partial t} = D\Delta P$- вопрос отдельный, курите семинар Seminar_11ckin.pdf; я в принципе могу перекатать его сюда

Вопрос 15. Проиллюстрировать соотношение Эйнштейна для коэффициента диффузии.

Пусть концентрация тяжёлых частиц - n и она мала. В результате теплового движения возникает поток этих частиц $\boldsymbol{j} = -D\nabla n$, где D - коэффициент диффузии. Пусть на частицы действует некоторая внешняя сила $\boldsymbol{F}$. Под действием такой силы частицы также будут двигаться, но в силу со противления движению со стороны частиц газа это движение будет не ускоренным, а движением с постоянной средней скоростью $\boldsymbol{u} = b\boldsymbol{F}$, где коэффициент b называется подвижностью частиц. В результате выозникает поток частиц $nb\boldsymbol{F}$ и суммарный поток будет даваться формулой

$$\boldsymbol{j} = -D\nabla n + nb\boldsymbol{F}$$

Предположим, что $\boldsymbol{F} = -\nabla U$, то есть есть внешнее потенциальное поле. Пусть установилось равновесие между диффузионным движением и движением во внешнем поле. Тогда $n = n_0\exp\left(-U/T\right)$ (барометрическая формула), а также суммарный поток $\boldsymbol{j}$ обращается в нуль. Следовательно:

$$0 = \boldsymbol{j} = -D\nabla n + nb\boldsymbol{F} = \left(\frac{D}{T} - b\right)\nabla U\exp\left(-U/T\right),$$

откуда получаем соотношение Эйнштейна $D = bT$.

Вопрос 16. Вид тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k},\omega)$ в плазме (разложение на проницаемости $\varepsilon_{ii}, \varepsilon_{ij}\dfrac{k_i k_j}{k^2}$?

ДЗ задание 2 №2.16

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_l \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \varepsilon_t\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)$$
$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{l^2}\int\left(1 - \frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1+i\delta}\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}d\Gamma_\varepsilon$$
$$\varepsilon_t = 1 + \frac{2\pi e^2}{l^2}\int\left(1 + \frac{1-s^2}{2s}\ln\frac{s+1}{s-1+i\delta}\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}d\Gamma_\varepsilon$$

где ε_l - продольная компонента диэлетрической проницаемости, ε_t - поперечная компонента диэлектрической проницаемости, $s = \frac{\omega}{vk}$.

Вопрос 17. Как связаны D и E для продольной волны, для поперечной волны? Чему равны B и D в продольной волне?

Случай продольной волны Пусть электрическое поле $\boldsymbol{E}_l(\boldsymbol{r},t) \sim \boldsymbol{E}_l \exp\left(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - i\omega t\right)$ продольное, то есть $\boldsymbol{E}_l \uparrow\uparrow \boldsymbol{k}$. Тогда $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}_l = i[\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}_l] = 0$, что влечёт $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -i\omega\boldsymbol{B} = 0 \Longrightarrow \mathrm{rot}B = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -i\omega\boldsymbol{D} = 0$. Но с другой стороны $\boldsymbol{D} = \varepsilon_l\boldsymbol{E}_l = 0$, что даст нетривиальные решения только тогда, когда

$$\varepsilon_l(\omega,\boldsymbol{k}) = 0$$

Поперечные колебания электрического поля $\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) \sim \boldsymbol{E}_t \exp\left(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - i\omega t\right)$ подразумевают равенство $\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_t = 0$. Но $\boldsymbol{D}_t = \varepsilon_t\boldsymbol{E}_t \Longrightarrow \boldsymbol{k}\boldsymbol{D}_t = 0$. Согласно уравнениям Максвелла для фурье-компонент электрического и магнитного полей мый найдём:

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\boldsymbol{E}_t = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{D}_t}{\partial t}, \mathrm{div}\boldsymbol{D}_t = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_t = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{k}\boldsymbol{B} = 0\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B} = -\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}_t, \boldsymbol{k}\boldsymbol{D}_t = 0\end{cases}$$

Исключая магнитное поле из этих уравнений, получим:

$$\boldsymbol{k}\times[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_t] = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_t) - k^2\boldsymbol{E}_t = \frac{\omega}{c}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}] = -\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{D}_t = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_t\boldsymbol{E}_t$$

Для существования нетривиального решения необходимо выполнение соотношения:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_t(\omega,k)$$

Вопрос 18. График зависимости и аналитическое выражение для частоты продольных волн от волнового вектора, $\omega_l(\boldsymbol{k})$. Связь между ω_{pl}, v_T и r_D.

0Обозначени таковы: $\omega_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}$ - плазменная частота, $v_T = \sqrt{\frac{T}{m}}$ - параметр (размерность скорости), $r_D = \frac{v_T}{\omega_{pl}}$ - дебаевский радиус. Между параметрами имеется соотношение:

$$r_D = \frac{v_T}{\omega_T}$$

В первом приближении спектр продольных волн выгляжит следующим образом:

$$\omega = \omega_{pl}\left(1 + \frac{3}{2}k^2 r_D^2\right)$$

Вопрос 19. График зависимости и аналитическое выражение для частоты поперечных волн от волнового вектора, $\omega_{tr}(\mathbf{k})$.

В первом приближении спектр поперечных волн выглядит следующим образом:

$$\omega^2 = \omega_{pl}^2 + c^2 k^2$$

Вопрос 20. Предельный вид тензора $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ при $\mathbf{k} \to 0$ в плазме.

При стремлении $\boldsymbol{k} \to 0$, продольная и поперечная компонента будут совпадать. В итоге получится:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}\right)\delta_{\alpha\beta}$$