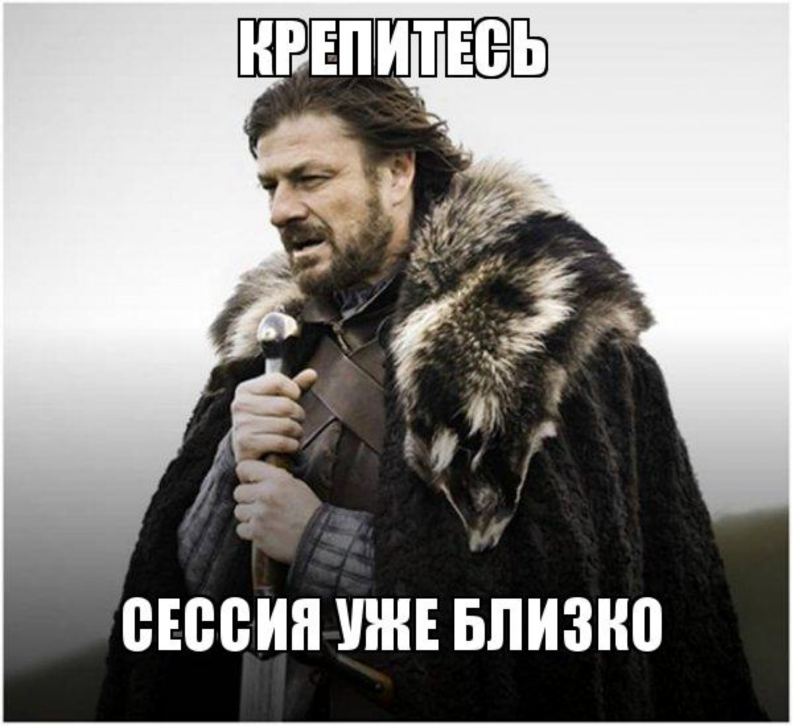


Лекция 13

ОПИСАНИЕ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Постановка задачи

$$H = H_s + H_r + H_{sr}$$

Гамильтониан
Системы (system)

Гамильтониан
Резервуара
(reservoir)

Гамильтониан
взаимодействия

$$H = H_s + H_r + H_{sr}$$

Постановка задачи

$$H = H_s + H_r + H_{sr}$$

Гамильтониан Системы (system)

Гамильтониан Резервуара (reservoir)

Гамильтониан взаимодействия

$\rho -$ матрица плотности всей системы

$O -$ оператор наблюдаемой, относящийся к системе

$$\langle O \rangle = \mathrm{tr}\left(\rho O\right) = \mathrm{tr}_s\left(\mathrm{tr}_r\left(\rho O\right)\right) = \mathrm{tr}_s\left(\mathrm{tr}_r\left(\rho\right) O\right) = \mathrm{tr}_s\left(\rho_s O\right),$$

$\rho_s = \mathrm{tr}_r\left(\rho\right) -$ редуцированная матрица плотности.

Что такое редуцированная матрица плотности?

$$\rho = \sum_{i,j;\alpha\beta} \rho_{ij,\alpha\beta} \left| e_i^{(s)} \right\rangle \left\langle e_j^{(s)} \right| \left| e_\alpha^{(r)} \right\rangle \left\langle e_\beta^{(r)} \right|,$$

$$\rho_s = \mathrm{tr}_r \rho = \sum_\gamma \left\langle e_\gamma^{(r)} \right| \left(\sum_{i,j;\alpha\beta} \rho_{ij,\alpha\beta} \left| e_i^{(s)} \right\rangle \left\langle e_j^{(s)} \right| \left| e_\alpha^{(r)} \right\rangle \left\langle e_\beta^{(r)} \right| \right) \left| e_\gamma^{(r)} \right\rangle =$$

$$= \sum_\gamma \left(\sum_{i,j;\alpha\beta} \rho_{ij,\alpha\beta} \left| e_i^{(s)} \right\rangle \left\langle e_j^{(s)} \right| \right) \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\gamma\beta} = \sum_{i,j;\gamma} \rho_{ij,\gamma\gamma} \left| e_i^{(s)} \right\rangle \left\langle e_j^{(s)} \right|.$$

Как считать средние?

$$O=\sum_{n,m;\chi}O_{nm}\left|e_n^{(s)}\right\rangle\left\langle e_m^{(s)}\right|\left|e_\chi^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\chi^{(r)}\right|,\quad \sum_{\chi}\left|e_\chi^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\chi^{(r)}\right|=1^{(r)},$$

$$\langle O\rangle=\mathrm{tr}\left(\rho O\right)=\sum_{k,\lambda}\left\langle e_k^{(s)}\right|\left\langle e_\lambda^{(r)}\right|\left(\sum_{n,m;\chi}O_{nm}\left|e_n^{(s)}\right\rangle\left\langle e_m^{(s)}\right|\left|e_\chi^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\chi^{(r)}\right|\right)\left(\sum_{i,j;\alpha\beta}\rho_{ij,\alpha\beta}\left|e_i^{(s)}\right\rangle\left\langle e_j^{(s)}\right|\left|e_\alpha^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\beta^{(r)}\right|\right)\left|e_\lambda^{(r)}\right\rangle\left|e_k^{(s)}\right\rangle=$$

$$=\sum_{k}\left\langle e_k^{(s)}\right|\left(\sum_{n,m}O_{nm}\left|e_n^{(s)}\right\rangle\left\langle e_m^{(s)}\right|\right)\sum_{\lambda}\left\langle e_\lambda^{(r)}\right|\left(\sum_{i,j;\alpha\beta}\rho_{ij,\alpha\beta}\left|e_i^{(s)}\right\rangle\left\langle e_j^{(s)}\right|\left|e_\alpha^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\beta^{(r)}\right|\right)\left|e_\lambda^{(r)}\right\rangle\left|e_k^{(s)}\right\rangle=$$

$$=\sum_{k}\left\langle e_k^{(s)}\right|\left(\sum_{n,m;\chi}O_{nm}\left|e_n^{(s)}\right\rangle\left\langle e_m^{(s)}\right|\right)\left(\rho_s\right)_{ij}\left|e_i^{(s)}\right\rangle\left\langle e_j^{(s)}\right|\left|e_k^{(s)}\right\rangle=\mathrm{tr}_s\left(\rho_s O\right).$$

необходимо получить уравнение на редуцированную матрицу плотности

Вывод уравнения на редуцированную матрицу плотности

Операторы Крауса

Литература:
http://nuclphys.sinp.msu.ru/pqm/QM-2018.pdf
Н.В. Никитин МГУ

Рассмотрим удобную запись для эволюции матрицы плотности открытой системы. Пусть квантовая система состоит из двух подсистем "A" ($\equiv$ частица) и "B" ($\equiv$ термостат или резервуар). Если известен полный гамильтониан системы $\hat{H}^{(S)}$, то можно построить и оператор эволюции $\hat{\mathcal{U}}(t,\, t_0)$.

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ подсистемы "A" и "B" не взаимодействовали друг с другом. Подсистема "A" находилась в смешанном состоянии $\hat{\rho}_{A\,0}$, а подсистема "B" в чистом (для простоты!) состоянии $\hat{\rho}_{B\,0} = \big|\, in^{(B)} \,\big\rangle \big\langle\, in^{(B)} \,\big|$.

Тогда матрица плотности подсистемы "A" в представлении Шредингера (S) в произвольный момент времени t будет иметь вид:

$$\hat{\rho}_A^{(S)}(t) = \mathbf{Tr}_B \left(\hat{\mathcal{U}}(t,\, t_0)\, \hat{\rho}_{A\,0}\, \hat{\rho}_{B\,0}\, \hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(t,\, t_0) \right) =$$
$$= \mathbf{Tr}_B \left(\hat{\mathcal{U}}(t,\, t_0) \,\big|\, in^{(B)} \,\big\rangle\, \hat{\rho}_{A\,0} \,\big\langle\, in^{(B)} \,\big|\, \hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(t,\, t_0) \right).$$

Введем для операторов подсистемы "B" базис $\left| f_{k'}^{(B)} \right\rangle$ собственных векторов некоторой наблюдаемой F_B из этой подсистемы. Выбор базиса определяется лишь удобством дальнейших вычислений. Тогда:

$$\hat{\rho}_A^{(S)}(t) = \sum_{k'} \left\langle f_{k'}^{(B)} \left| \hat{\mathcal{U}}(t,t_0) \right| in^{(B)} \right\rangle \hat{\rho}_{A\,0} \left\langle in^{(B)} \left| \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t,t_0) \right| f_{k'}^{(B)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{k'} \hat{M}_{k'}(t)\, \hat{\rho}_{A\,0}\, \hat{M}_{k'}^\dagger(t).$$

Такая форма записи эволюции матрицы плотности открытой квантовой подсистемы называется **представлением Крауса** или **представлением в виде операторной суммы**, а входящие в нее операторы $\hat{M}_{k'}(t) = \left\langle f_{k'}^{(B)} \left| \hat{\mathcal{U}}(t,t_0) \right| in^{(B)} \right\rangle$ – **операторами Крауса**.

Условие нормировки операторов Крауса (для систем, описываемых **эрмитовым** гамильтонианом $\hat{H}^{(S)} \equiv$ **унитарная эволюция**):

$$1 = \mathbf{Tr}_A\, \hat{\rho}_A^{(S)}(t) = \sum_{k'} \hat{M}_{k'}^\dagger(t)\, \hat{M}_{k'}(t).$$

Хотя подсистема "B" может быть достаточно сложной, а ее эволюция – нетривиальной, но часто удается найти простые выражения для операторов $\hat{M}_{k'}$, чтобы описать влияние подсистемы "B" на эволюцию подсистемы "A".

При помощи представления Крауса появляется возможность написать уравнение эволюции для матрицы плотности $\hat{\rho}_A^{(S)}(t)$ **БЕЗ** использования явного вида матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$. Для этого применим разложение Крауса к двум моментам времени t и $t+\Delta t$. Имеем:

$$\sum_{k'} \hat{M}_{k'}(t+\Delta t)\, \hat{\rho}_A^{(S)}(t)\, \hat{M}_{k'}^{\dagger}(t+\Delta t) = \hat{\rho}_A^{(S)}(t+\Delta t) \approx \hat{\rho}_A^{(S)}(t) + \Delta\hat{\rho}_A^{(S)}(t).$$

Выберем базис в подсистеме "B" таким образом, чтобы оператор $\hat{M}_0$ мало отличался от единичного оператора $\hat{1}$. То есть, пусть оператор $\hat{M}_0 = \hat{1} + \Delta\hat{M}_0$. Произвольный оператор можно записать как сумму эрмитового и антиэрмитового операторов. Используем этот математический факт для нахождения самого общего вида оператора $\Delta\hat{M}_0$.

$$\sum_{k'} \hat{M}_{k'}(t+\Delta t)\, \hat{\rho}_A^{(S)}(t)\, \hat{M}_{k'}^{\dagger}(t+\Delta t) = \hat{\rho}_A^{(S)}(t+\Delta t) \approx \hat{\rho}_A^{(S)}(t) + \Delta\hat{\rho}_A^{(S)}(t)$$

Кроме того, в левой части равенства оставим только линейные по Δt слагаемые . Из всего вышесказанного следует, что в самом общем виде операторы Крауса можно написать следующим образом:

$$\hat{M}_0 = \hat{1} + \left(\hat{L}_0 - \frac{i\hat{H}_A}{\hbar}\right)\Delta t;$$
$$\hat{M}_{k'} = \hat{L}_{k'}\sqrt{\Delta t} \quad \textbf{при} \quad k' \neq 0,$$

где $\hat{L}_0^{\dagger} = \hat{L}_0$ и $\hat{H}_A^{\dagger} = \hat{H}_A$ – два эрмитовых оператора. Заметим, что операторы $\hat{L}_{k'}$ при $k' \neq 0$ не обязательно должны быть эрмитовыми. Тогда в линейном приближении по Δt имеем:

$$\hat{M}_0 = \hat{1} + \left(\hat{L}_0 - \frac{i\hat{H}_A}{\hbar}\right)\Delta t;$$

$$\hat{M}_{k'} = \hat{L}_{k'}\sqrt{\Delta t} \quad \textbf{при} \quad k' \neq 0$$

$$\sum_{k'} \hat{M}_{k'}(t+\Delta t)\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{M}_{k'}^{\dagger}(t+\Delta t) = \hat{\rho}_A^{(S)}(t+\Delta t) \approx \hat{\rho}_A^{(S)}(t) + \Delta\hat{\rho}_A^{(S)}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{M}_0\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{M}_0^{\dagger} \approx \hat{\rho}_A^{(S)}(t) + \left(\left\{\hat{L}_0, \hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right\} - \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_A, \hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right]\right)\Delta t$$

$$\hat{M}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{M}_{k'}^{\dagger} = \hat{L}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{L}_{k'}^{\dagger}\,\Delta t$$

Операторы $\hat{L}_{k'}$ называются операторами Линдблада.

$$\hat{M}_0\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{M}_0^\dagger \approx \hat{\rho}_A^{(S)}(t) + \left(\left\{\hat{L}_0,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right\} - \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_A,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right]\right)\Delta t$$

$$\hat{M}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{M}_{k'}^\dagger = \hat{L}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{L}_{k'}^\dagger\,\Delta t$$

$$\frac{\Delta\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{k'}\hat{M}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{M}_{k'}^\dagger - \hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_A,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right] + \left\{\hat{L}_0,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right\} + \sum_{k'\neq 0}\hat{L}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{L}_{k'}^\dagger.$$

Из условий нормировки $\mathbf{Tr}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t+\Delta t) = 1$ **и** $\mathbf{Tr}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t) = 1$ **следует, что**

$$0 = \mathbf{Tr}\frac{\Delta\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{\Delta t} = \mathbf{Tr}\left(\left\{\hat{L}_0,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right\} + \sum_{k'\neq 0}\hat{L}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{L}_{k'}^\dagger\right).$$

$$0 = \mathbf{Tr}\,\frac{\Delta\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{\Delta t} = \mathbf{Tr}\left(\left\{\hat{L}_0,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right\} + \sum_{k'\neq 0}\hat{L}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{L}_{k'}^{\dagger}\right)$$

Мы сразу учли, что след от коммутатора двух операторов равен нулю. Используя цикличность следа, получаем

$$\mathbf{Tr}\left(2\,\hat{L}_0\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t) + \sum_{k'\neq 0}\hat{L}_{k'}^{\dagger}\,\hat{L}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right) = 0,$$

$$\boxed{\hat{L}_0 = -\frac{1}{2}\sum_{k'\neq 0}\hat{L}_{k'}^{\dagger}\,\hat{L}_{k'}}$$

$$\frac{\Delta\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{k'} \hat{M}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{M}_{k'}^{\dagger} - \hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_A,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right] + \left\{\hat{L}_0,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right\} + \sum_{k'\neq 0} \hat{L}_{k'}\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\,\hat{L}_{k'}^{\dagger}$$

$$\boxed{\hat{L}_0 = -\frac{1}{2}\sum_{k'\neq 0} \hat{L}_{k'}^{\dagger}\,\hat{L}_{k'}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_A,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right] + \sum_{k'\neq 0}\left(\hat{L}_{k'}\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\hat{L}_{k'}^{\dagger} - \frac{1}{2}\left\{\hat{L}_{k'}^{\dagger}\,\hat{L}_{k'},\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right\}\right)$$

Уравнение Линблада

$$\hat{A}\,\hat{B}\,\hat{A}^{\dagger} - \frac{1}{2}\left\{\hat{A}^{\dagger}\,\hat{A},\,\hat{B}\right\} = \frac{1}{2}\left(\left[\hat{A}\,\hat{B},\,\hat{A}^{\dagger}\right] + \left[\hat{A},\,\hat{B}\,\hat{A}^{\dagger}\right]\right)$$

$$\frac{d\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_A,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right] + \sum_{k'\neq 0}\left(\hat{L}_{k'}\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\hat{L}_{k'}^{\dagger} - \frac{1}{2}\left\{\hat{L}_{k'}^{\dagger}\,\hat{L}_{k'},\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right\}\right)$$

$$\frac{d\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_A^{(S)},\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right] + \frac{1}{2}\sum_{k}\left(\left[\hat{L}_k\hat{\rho}_A^{(S)}(t),\,\hat{L}_k^{\dagger}\right] + \left[\hat{L}_k,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\hat{L}_k^{\dagger}\right]\right)$$

$$\frac{d\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_A^{(S)},\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\right] + \frac{1}{2}\sum_k\left(\left[\hat{L}_k\hat{\rho}_A^{(S)}(t),\,\hat{L}_k^\dagger\right] + \left[\hat{L}_k,\,\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\hat{L}_k^\dagger\right]\right).$$

Найденное уравнение называется уравнением Линдблада. Оно является наиболее общим уравнением, описывающим неунитарную эволюцию матрицы плотности открытой квантовой подсистемы. Часто данное уравнение называют квантовым марковским уравнением. В окончательной записи мы специально заменили k' на k, чтобы подчеркнуть, что индексы, которыми нумеруются операторы Линдблада $\hat{L}_k$, достаточно условны.

Впервые уравнение Линдблада было, естественно, получено в работе G.Lindblad, ”On the generators of quantum dynamical semigroups”, Commun. Math. Phys. 48, pp. 119 –130 (1976) с использованием аппарата квантовой теории групп. Ясный физический вывод уравнения был предложен в статье V.Gorini, A.Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, ”Completely positive dynamical semigroups of N-level systems”, J. Math. Phys. 17, pp.821-825 (1976).

Вопрос для самоконтроля

- **Где при выводе ур. Линдблада использовалось условие Марковости?**
- Указание: На каждом шаге Δt мы считали, что система в начальный момент «шага» не запутана с термостатом, далее в течении Δt происходило запутывание с термостатом, описываемое операторами Крауса, потом в конце шага система и термостат опять считались распутанными и все повторялось сначала…

Примеры

Уравнение Блоха. Рассмотрим спин ½.

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right] + \mathrm{L}^{+}\hat{\rho}\,\mathrm{L} - \frac{1}{2}\left\{\mathrm{L}^{+}\mathrm{L},\hat{\rho}\right\},$$

$$L = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\vec{\sigma}, \quad \vec{\sigma}\sigma_i\vec{\sigma} = -\sigma_i, \quad \hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{1} + 2\left\langle \mathbf{S}(t)\right\rangle\cdot\vec{\sigma}\right),$$

$$\frac{\gamma}{2}\vec{\sigma}\hat{\rho}\vec{\sigma} - \frac{3\gamma}{4}\left\{\hat{1},\hat{\rho}\right\} = -2\gamma\left\langle \mathbf{S}(t)\right\rangle\cdot\vec{\sigma},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \mathbf{S}(t)\right\rangle = -\left\langle \mathbf{S}(t)\right\rangle\times\vec{\Omega} - \gamma\left\langle \mathbf{S}(t)\right\rangle.$$

Радиоактивный распад

Пусть "A" – двухуровневая квантовая система, имеющая основное состояние $\left|\,0^{(A)}\right\rangle$ и возбужденное состояние $\left|\,1^{(A)}\right\rangle$, которое за счет радиоактивного распада переходит в основное состояние. Выше было показано, что подобный процесс описывается неэрмитовым гамильтонианом и неунитарным оператором эволюции, не сохраняющим норму состояния. Для описания перехода $\left|\,1^{(A)}\right\rangle \to \left|\,0^{(A)}\right\rangle$ необходимо написать единственный оператор Линдблада

$$\hat{L} \sim \left|\,0^{(A)}\right\rangle\left\langle\,1^{(A)}\right| = \sqrt{\frac{\Gamma}{\hbar}}\left|0^{(A)}\right\rangle\left\langle\,1^{(A)}\right|.$$

Поскольку размерность операторов Линдблада равна $\sqrt{(\text{сек}^{-1})}$, то размерность параметра Γ совпадает с размерностью энергии. Состояния $\left|\,0^{(A)}\right\rangle$ и $\left|\,1^{(A)}\right\rangle$ ортогональны друг другу. Тогда легко проверить, что:

$$\hat{L}^{\dagger}\,\hat{L} = \frac{\Gamma}{\hbar}\left|\,1^{(A)}\right\rangle\left\langle\,1^{(A)}\right| \quad \text{и} \quad \hat{L}\,\hat{L}^{\dagger} = \frac{\Gamma}{\hbar}\left|\,0^{(A)}\right\rangle\left\langle\,0^{(A)}\right|.$$

Невозмущенный гамильтониан двухуровневой системы можно написать в виде:

$$\hat{H}_A^{(S)} = E_0 \left| 0^{(A)} \right\rangle \left\langle 0^{(A)} \right| + E_1 \left| 1^{(A)} \right\rangle \left\langle 1^{(A)} \right|.$$

Матрица плотности $\hat{\rho}_A^{(S)}(t)$ в базисе $\left| 0^{(A)} \right\rangle$ и $\left| 1^{(A)} \right\rangle$ в самой общей форме запишется как:

$$\hat{\rho}_A^{(S)} = \rho_{00} \left| 0^{(A)} \right\rangle \left\langle 0^{(A)} \right| + \rho_{11} \left| 1^{(A)} \right\rangle \left\langle 1^{(A)} \right| + \rho_{01} \left| 0^{(A)} \right\rangle \left\langle 1^{(A)} \right| + \rho_{10} \left| 1^{(A)} \right\rangle \left\langle 0^{(A)} \right|$$

Тогда

$$\frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_A^{(S)}, \hat{\rho}_A^{(S)}(t) \right] = i\omega_{10}\, \rho_{01} \left| 0^{(A)} \right\rangle \left\langle 1^{(A)} \right| - i\omega_{10}\, \rho_{10} \left| 1^{(A)} \right\rangle \left\langle 0^{(A)} \right|,$$

где $\omega_{10} = (E_1 - E_0)/\hbar$.

Для дальнейших вычислений удобно ввести базис

$$\left| 0^{(A)} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| 1^{(A)} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и перейти к матричному представлению.

С учетом всего вышесказанного, уравнение Линдблада в матричной форму будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\rho_{00}(t) & \rho_{01}(t)\\ \rho_{10}(t) & \rho_{11}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\Gamma}{\hbar}\,\rho_{11}(t) & \left(i\omega_{01}-\frac{\Gamma}{2\hbar}\right)\rho_{01}(t)\\ -\left(i\omega_{01}+\frac{\Gamma}{2\hbar}\right)\rho_{10}(t) & -\frac{\Gamma}{\hbar}\,\rho_{11}(t)\end{pmatrix}.$$

Решение уравнения:

$$\begin{pmatrix}\rho_{00}(t) & \rho_{01}(t)\\ \rho_{10}(t) & \rho_{11}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\rho_{11}(0)e^{-\Gamma t/\hbar} & \rho_{01}(0)e^{i\omega_{01}t}e^{-\Gamma t/2\hbar}\\ \rho_{10}(0)e^{-i\omega_{01}t}e^{-\Gamma t/2\hbar} & \rho_{11}(0)e^{-\Gamma t/\hbar}\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что число частиц в возбужденном состоянии (которое, очевидно, $\sim \rho_{11}(t)$) убывает согласно закону радиоактивного распада. Недиагональные матричные элементы тоже экспоненциально убывают со временем, но медленнее, чем $\rho_{11}(t)$.

Уравнение Линдблада для наблюдаемых

Уравнение Линдблада для наблюдаемых

$$\langle F_A \rangle_{\rho_A} = \mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_A^{(S)}(t)\ \hat{F}_A^{(S)}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_{A0}\ \hat{F}_A^{(H)}(t)\right).$$

$$\hat{F}_A^H(t) = \hat{M}_k^+(t)\hat{F}_A\hat{M}_k(t),$$

$$\hat{\rho}_A^{(S)}(t) = \hat{M}_k(t)\hat{\rho}_A^{(S)}\hat{M}_k^+(t).$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_A^S = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}_A^S\right] + L_k\hat{\rho}_A^S L_k^+ - \frac{1}{2}\left\{L_k^+L_k,\hat{\rho}_A^S\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\hat{F}_A^H(t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{F}_A^H(t) - \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\hat{F}_A^H(t)\right] + L_k^+\hat{F}_A^H(t)L_k - \frac{1}{2}\left\{L_kL_k^+,\hat{F}_A^H(t)\right\}.$$

Уравнения Паули (Master equation)

Уравнения Паули (Master equation)

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right] + \mathrm{L}\ \hat{\rho}\,\mathrm{L}^{+} - \frac{1}{2}\left\{\mathrm{L}^{+}\mathrm{L},\hat{\rho}\right\},$$

$$\hat{\rho}_{ik} = \delta_{ik}P_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_i = L_{ki}P_k L_{ki}^{*} - \frac{1}{2}\left(L_{ki}^{*}L_{ki}P_i + P_i L_{ki}^{*}L_{ki}\right) = W_{ik}P_k - W_{ki}P_i,$$

$$W_{ik} = \left|L_{ki}\right|^{2}.$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}P_i = W_{ik}P_k - W_{ki}P_i.}$$

Итак, уравнения Паули (Master equation)

$$\frac{d}{dt}P_i = W_{ik}P_k - W_{ki}P_i .$$

Кинетическое уравнение

Столкновительный член

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\big(g(x)p(x,t)\big) = \int \underbrace{dz\Big(\mathrm{W}(x\,|\,z)\,p(\mathrm{z},t)}_{\text{приходный член}} - \underbrace{\mathrm{W}(z\,|\,x)\,p(x,t)}_{\text{уходный член}}\Big).}$$

Квазиклассический предел уравнений Линдблада

$$\rho = \mathrm{P}(x, \mathrm{p}) = \int dx' \left\langle x - \frac{x'}{2} \right| \hat{\rho} \left| x + \frac{x'}{2} \right\rangle e^{ipx},$$

x=(q,p).

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + F\frac{\partial \rho}{\partial p} + \mathrm{v}\frac{\partial \rho}{\partial q} = \int W_{xx'}\rho(x')\,\mathrm{d}\,x' - \rho(x)\int W_{x'x}\,\mathrm{d}\,x'.$$

О Функции Вигнера...

$$\boxed{\rho = \mathrm{P}(x,\mathrm{p}) = \int dx' \left\langle x - \frac{x'}{2} \middle| \hat{\rho} \middle| x + \frac{x'}{2} \right\rangle e^{ipx},}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d} P(x,p) = \langle x | \hat{\rho} | x \rangle,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x,p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dpdx}{(2\pi\hbar)^d} P(x,p) = \mathrm{tr}\,\hat{\rho}.$$

Квазиклассический предел уравнений Линдблада. Функция Вигнера в квазиклассическом пределе превращается в функцию распределения…

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)$$

$$[A,B] = i\hbar\{A,B\} + O(\hbar^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right] + \mathrm{L}^{+}\hat{\rho}\,\mathrm{L} - \frac{1}{2}\left\{\mathrm{L}^{+}\mathrm{L},\hat{\rho}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right] \approx \left\{\hat{H},\hat{\rho}\right\} = \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} = -F\frac{\partial\rho}{\partial p} - \mathrm{v}\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

$$\mathrm{L}^{+}\hat{\rho}\,\mathrm{L} - \frac{1}{2}\left\{\mathrm{L}^{+}\mathrm{L},\hat{\rho}\right\} \approx \int W_{qq'}\rho(q')\,\mathrm{d}q' - \rho(q)\int W_{q'q}\,\mathrm{d}q',$$

x=(q,p).

В итоге:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right] + \mathrm{L}^{+}\hat{\rho}\,\mathrm{L} - \frac{1}{2}\left\{\mathrm{L}^{+}\mathrm{L},\hat{\rho}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right] \approx \left\{\hat{H},\hat{\rho}\right\} = \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial\rho}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = -F\frac{\partial\rho}{\partial p} - \mathrm{v}\frac{\partial\rho}{\partial q},$$

$$\mathrm{L}^{+}\hat{\rho}\,\mathrm{L} - \frac{1}{2}\left\{\mathrm{L}^{+}\mathrm{L},\hat{\rho}\right\} \approx \int W_{xx'}\rho(x')\,\mathrm{d}x' - \rho(x)\int W_{x'x}\,\mathrm{d}x',$$

x=(q,p).

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + F\frac{\partial\rho}{\partial p} + \mathrm{v}\frac{\partial\rho}{\partial q} = \int W_{xx'}\rho(x')\,\mathrm{d}x' - \rho(x)\int W_{x'x}\,\mathrm{d}x'.$$

Так называемые H-теоремы о возрастании энтропии

Lecture Notes on Nonequilibrium Statistical Physics
(A Work in Progress)

Daniel Arovas
Department of Physics
University of California, San Diego

October 22, 2018

H-теорема для уравнения Паули

Let $P_i(t)$ be the probability that the system is in a quantum or classical state i at time t. Then write

$$\frac{dP_i}{dt} = \sum_j \left(W_{ij}\, P_j - W_{ji}\, P_i\right) , \tag{2.86}$$

where W_{ij} is the rate at which j makes a transition to i. This is known as the *Master equation*. Note that we can recast the Master equation in the form

$$\frac{dP_i}{dt} = -\sum_j \Gamma_{ij}\, P_j , \tag{2.87}$$

with

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} -W_{ij} & \text{if } i \neq j \\ \sum_k' W_{kj} & \text{if } i = j , \end{cases} \tag{2.88}$$

Lecture Notes on Nonequilibrium Statistical Physics
(A Work in Progress)

Daniel Arovas
Department of Physics
University of California, San Diego

October 22, 2018

Доказательство Н-теоремы
для «симметричного» частного случая

2.5.2 Boltzmann's H-theorem

Suppose for the moment that Γ is a symmetric matrix, *i.e.* $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$. Then construct the function

$$H(t) = \sum_i P_i(t) \, \ln P_i(t) \, . \tag{2.95}$$

Вспомните неравновесную энтропию для больцмановского газа из курса Стат-Физики (5ый том ЛЛ)

Then

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_i \frac{dP_i}{dt} \left(1 + \ln P_i\right) = \sum_i \frac{dP_i}{dt} \ln P_i \\ &= -\sum_{i,j} \Gamma_{ij} \, P_j \ln P_i \\ &= \sum_{i,j} \Gamma_{ij} \, P_j \big(\ln P_j - \ln P_i\big) \, , \end{aligned} \tag{2.96}$$

where we have used $\sum_i \Gamma_{ij} = 0$. Now switch $i \leftrightarrow j$ in the above sum and add the terms to get

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Gamma_{ij} \big(P_i - P_j\big) \big(\ln P_i - \ln P_j\big) \, . \tag{2.97}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \Gamma_{ij}\left(P_i - P_j\right)\left(\ln P_i - \ln P_j\right) . \tag{2.97}$$

Note that the $i = j$ term does not contribute to the sum. For $i \neq j$ we have $\Gamma_{ij} = -W_{ij} \leq 0$, and using the result

$$(x - y)\,(\ln x - \ln y) \geq 0 , \tag{2.98}$$

we conclude

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 . \tag{2.99}$$

Итак, энтропия, возрастает:

$$S(t) = -\sum_i P_i(t)\ln\left(P_i(t)\right) = -H(t).$$

Доказательство H-теоремы
общий случай

Уравнения Паули (Master equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i = W_{ik} P_k - W_{ki} P_i .$$

Доказательство Н-теоремы

$$\overline{W}_{ij} \equiv W_{ij}\, P_j^{\mathrm{eq}} = W_{ji}\, P_i^{\mathrm{eq}} = \overline{W}_{ji} \ ,$$

and the generalized H-function,

$$H(t) \equiv \sum_i P_i(t)\, \ln\!\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right) .$$

Then

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \overline{W}_{ij} \left(\frac{P_i}{P_i^{\mathrm{eq}}} - \frac{P_j}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\left[\ln\!\left(\frac{P_i}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right) - \ln\!\left(\frac{P_j}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right] \le 0 \, .$$

Детали доказательства

$$\frac{dH}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i P_i(t)\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)=\sum_i\left(\frac{d}{dt}P_i(t)\right)\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-\sum_i P_i(t)\left(\frac{d}{dt}\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)\frac{P_i^{\mathrm{eq}}}{P_i(t)}=$$

$$=\sum_i\left(\frac{d}{dt}P_i(t)\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-1\right)=\sum_i\left(\frac{d}{dt}P_i(t)\right)\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right).$$

$$\frac{dH}{dt}=-\sum_{ij}\left(\Gamma_{ij}P_j(t)\right)\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)=-\sum_{ij}\left(\Gamma_{ij}P_j(t)\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-\ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right),\qquad \sum_j\Gamma_{ij}=0.$$

Детали доказательства

$$\bar{W}_{ij} \equiv W_{ij} P_j^{\text{eq}} = W_{ji} P_i^{\text{eq}} \equiv \bar{W}_{ji}, \qquad \Gamma_{ij} = \begin{cases} -W_{ij}, & i \neq j \\ \sum\limits_{k \neq j} W_{kj}, & i = j \end{cases}$$

$$\frac{dH}{dt} = -\sum_{i \neq j} \left(\Gamma_{ij} P_j(t) \right) \left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\text{eq}}} \right) - \ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\text{eq}}} \right) \right) = \sum_{i \neq j} \left(W_{ij} P_j(t) \right) \left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\text{eq}}} \right) - \ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\text{eq}}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{i \neq j} \left(W_{ij} P_j^{\text{eq}} \frac{P_j(t)}{P_j^{\text{eq}}} \right) \left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\text{eq}}} \right) - \ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\text{eq}}} \right) \right) = \sum_{i \neq j} \left(\bar{W}_{ij} \frac{P_j(t)}{P_j^{\text{eq}}} \right) \left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\text{eq}}} \right) - \ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\text{eq}}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{i \neq j} \left(\bar{W}_{ji} P_j(t) \right) \left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\text{eq}}} \right) - \ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\text{eq}}} \right) \right) = -\sum_{i \neq j} \left(\bar{W}_{ij} \frac{P_i(t)}{P_i^{\text{eq}}} \right) \left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\text{eq}}} \right) - \ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\text{eq}}} \right) \right).$$

Детали доказательства

$$\frac{dH}{dt}=-\sum_{i\neq j}\left(\Gamma_{ij}P_j(t)\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-\ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right)=\sum_{i\neq j}\left(W_{ij}P_j(t)\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-\ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right)=$$

$$=\sum_{i\neq j}\left(W_{ij}P_j^{\mathrm{eq}}\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-\ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right)=\sum_{i\neq j}\left(\bar{W}_{ij}\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-\ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right)=$$

$$=\sum_{i\neq j}\left(\bar{W}_{ji}P_j(t)\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-\ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right)=-\sum_{i\neq j}\left(\bar{W}_{ij}\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-\ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right).$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dH}{dt}=-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\bar{W}_{ij}\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}-\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)-\ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right).$$

Детали доказательства

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\bar{W}_{ij}\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}} - \frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\left(\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right) - \ln\left(\frac{P_j(t)}{P_j^{\mathrm{eq}}}\right)\right).$$

Используя неравенство,

$$(x-y)\big(\ln(x)-\ln(y)\big)\geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dH}{dt}\leq 0.$$

Итак, функция,
похожая на энтропию (но не энтропия!),
возрастает:

$$\tilde{S}(t) = -\sum_i P_i(t) \ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right) = -H(t).$$

Примеры

Уравнения Паули (Master equation)

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\rho}\right] + \mathrm{L}\ \hat{\rho}\,\mathrm{L}^{+} - \frac{1}{2}\left\{\mathrm{L}^{+}\mathrm{L}, \hat{\rho}\right\},$$

$$\hat{\rho}_{ik} = \delta_{ik} P_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i = L_{ik} P_k L_{ik}^{*} - \frac{1}{2}\left(L_{ki}^{*} L_{ki} P_i + P_i L_{ki}^{*} L_{ki}\right) = W_{ik} P_k - W_{ki} P_i,$$

$$W_{ik} = \left|L_{ik}\right|^2.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i = W_{ik} P_k - W_{ki} P_i.$$

Решим уравнение Паули

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \gamma\left(\hat{\sigma}^{-}\hat{\rho}\hat{\sigma}^{+} - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}^{+}\hat{\sigma}^{-}, \hat{\rho}\right\}\right),$$

$$W_{01} = \left|L_{01}\right|^2 = \gamma.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_i = W_{ik}P_k - W_{ki}P_i.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma P_1 \\ -\gamma P_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P_1(t) \\ P_1(0)e^{-\gamma t} \end{pmatrix}.$$

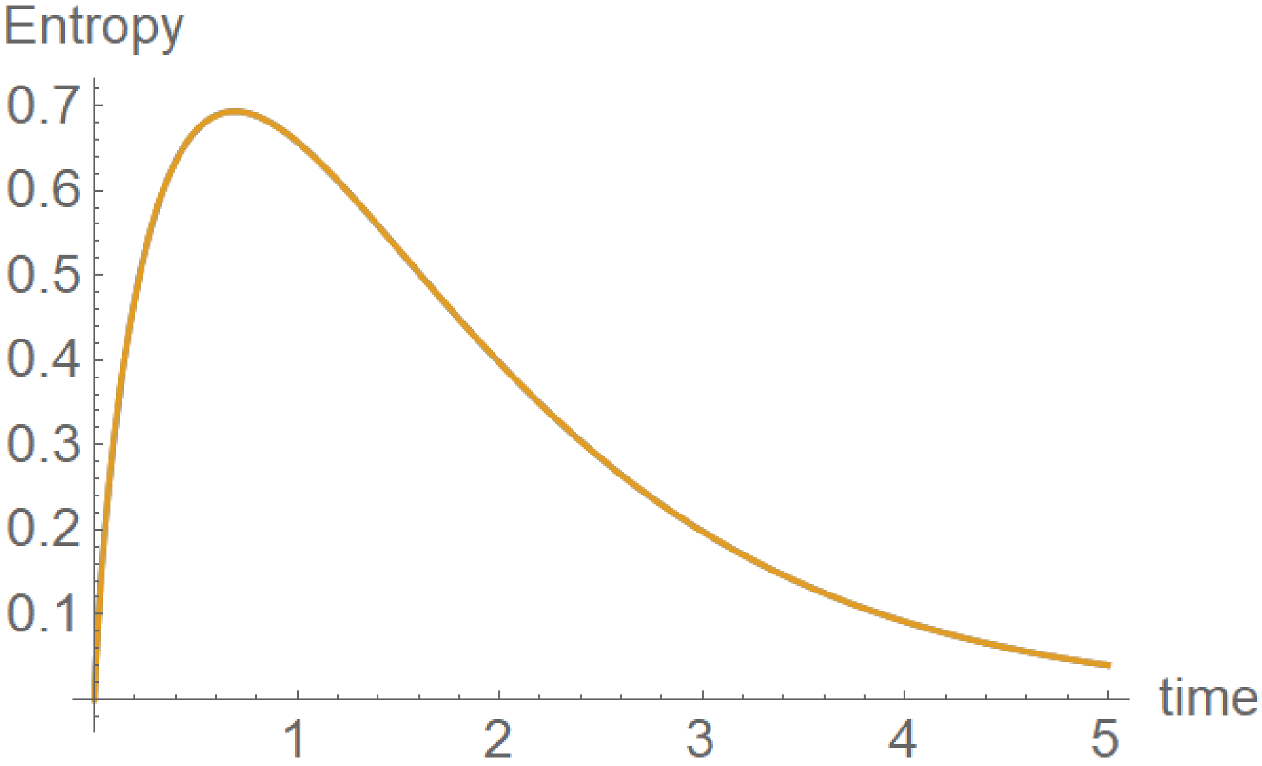
Найдем энтропию

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P_1(t) \\ P_1(0) e^{-\gamma t} \end{pmatrix}.$$

$$S(t) = -P_0(t)\ln P_0(t) - P_1(t)\ln P_1(t).$$

Как же Н-теорема???
Все пропало???

S(t)

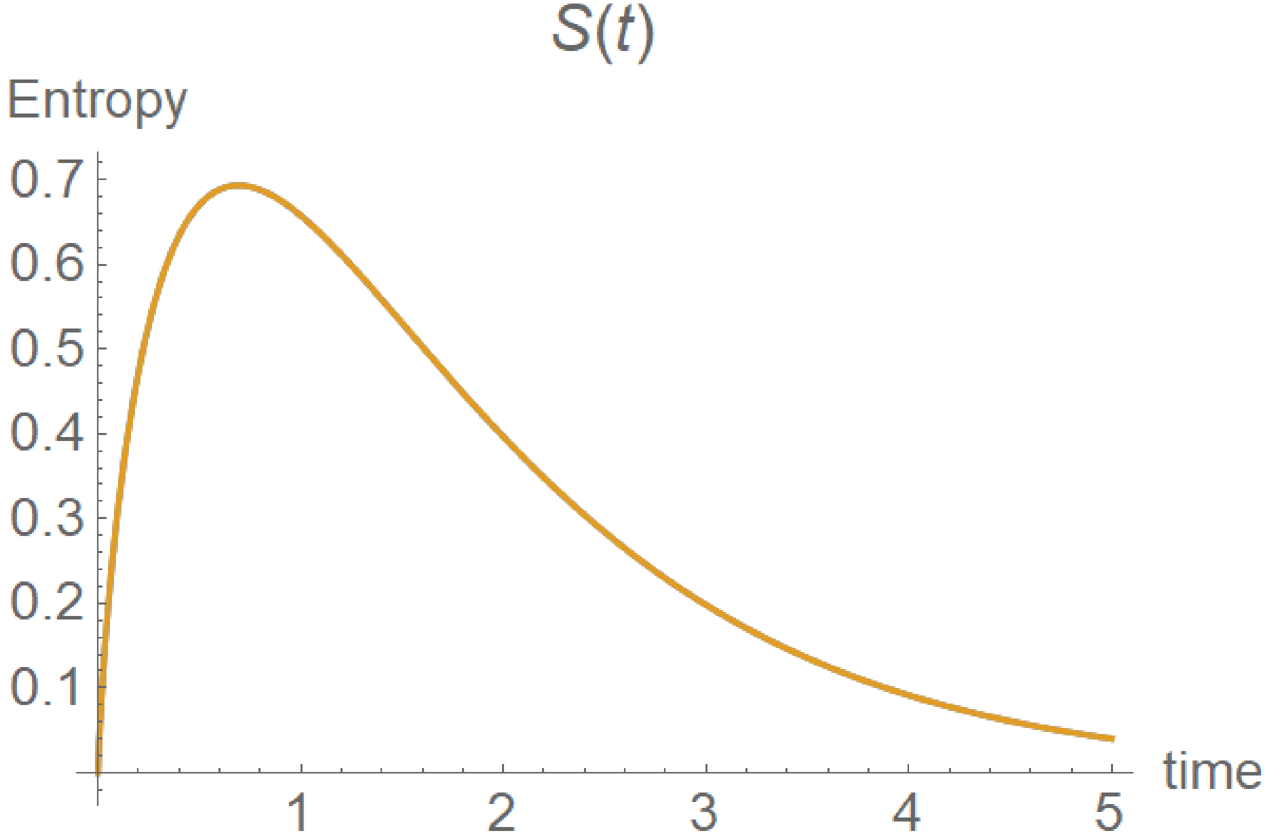


$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma P_1 \\ -\gamma P_1 \end{pmatrix}.$$

Найдем энтропию

$$S(t) = -P_0(t)\ln P_0(t) - P_1(t)\ln P_1(t).$$

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P_1(t) \\ P_1(0)e^{-\gamma t} \end{pmatrix}.$$



В этой задаче равновесное распределение: $P_0 = 1, P_1 = 0$. Не получится ввести H-функцию. На ноль мы делить не можем!

$$H(t) \equiv \sum_i P_i(t)\,\ln\left(\frac{P_i(t)}{P_i^{\mathrm{eq}}}\right)$$

Модифицируем задачу

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \gamma_0\left(\hat{\sigma}^-\hat{\rho}\hat{\sigma}^+ - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^-,\hat{\rho}\right\}\right) + \gamma_1\left(\hat{\sigma}^+\hat{\rho}\hat{\sigma}^- - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}^-\hat{\sigma}^+,\hat{\rho}\right\}\right).$$

Напишем уравнение Паули

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 P_1 - \gamma_1 P_0 \\ -\gamma_0 P_1 + \gamma_1 P_0 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_0 P_1^{eq} - \gamma_1 P_0^{eq} = 0$$

$$P_0^{eq} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + \gamma_1}, P_1^{eq} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma_1}.$$

Модифицируем задачу

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \gamma_0\left(\hat{\sigma}^-\hat{\rho}\hat{\sigma}^+ - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^-,\hat{\rho}\right\}\right) + \gamma_1\left(\hat{\sigma}^+\hat{\rho}\hat{\sigma}^- - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}^-\hat{\sigma}^+,\hat{\rho}\right\}\right).$$

Напишем уравнение Паули

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 P_1 - \gamma_1 P_0 \\ -\gamma_0 P_1 + \gamma_1 P_0 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_0 P_1^{eq} - \gamma_1 P_0^{eq} = 0$$

$$P_0^{eq} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + \gamma_1}, P_1^{eq} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma_1}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 P_1 - \gamma_1 P_0 \\ -\gamma_0 P_1 + \gamma_1 P_0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0^{eq} \\ P_1^{eq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(P_0(t=0) - P_0^{eq}\right) e^{-t(\gamma_0+\gamma_1)} \\ \left(P_0^{eq} - P_0(t=0)\right) e^{-t(\gamma_0+\gamma_1)} \end{pmatrix}.$$

Энтропия:

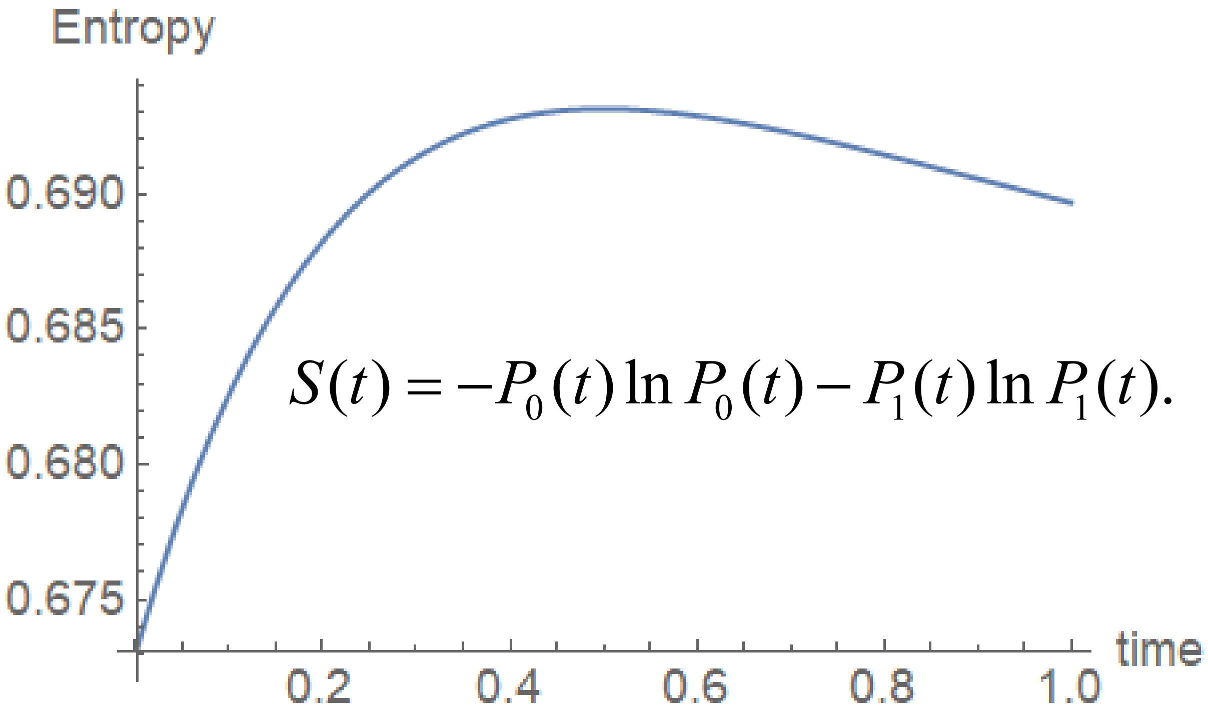
$$S(t) = -P_0(t)\ln P_0(t) - P_1(t)\ln P_1(t).$$

Функция, которая удовлетворяет Н-теореме:

$$S_H(t) = -P_0(t)\ln\frac{P_0(t)}{P_0^{eq}} - P_1(t)\ln\frac{P_1(t)}{P_1^{eq}}.$$

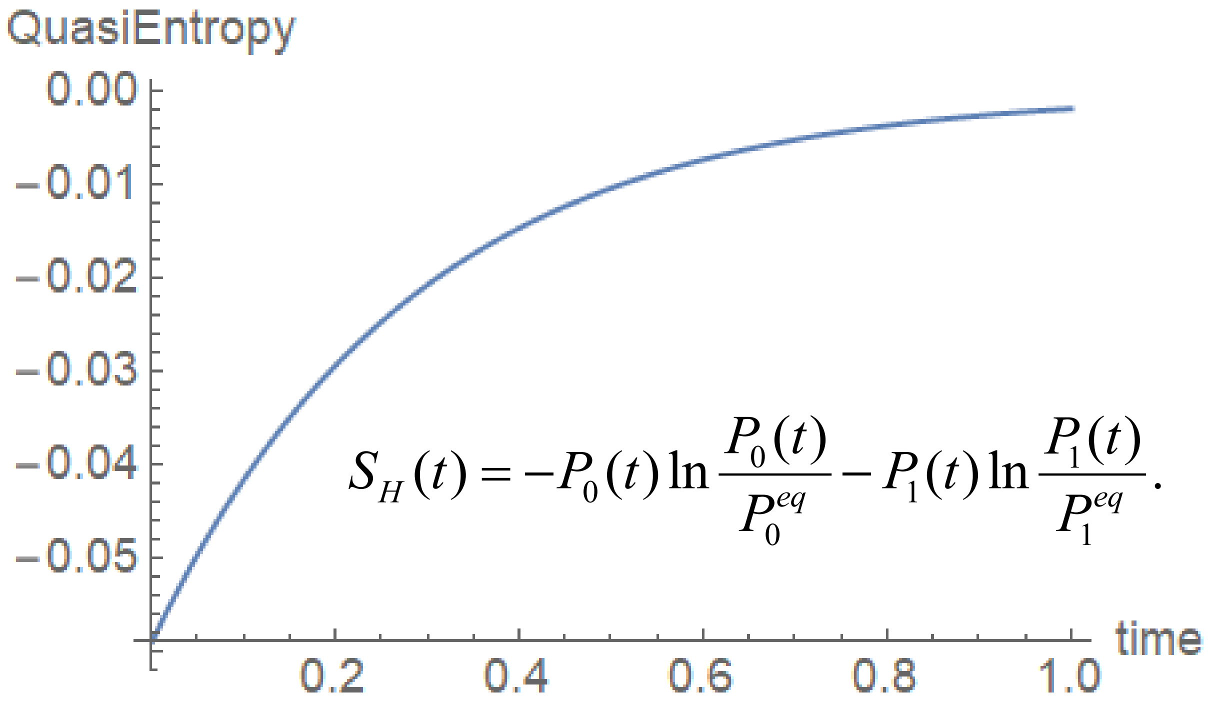
$$\Gamma_{ij} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & \gamma_0 \\ \gamma_1 & -\gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Только если $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$, энтропия совпадает с $S_H(t)$ с точностью до константы!



$$S(t) = -P_0(t)\ln P_0(t) - P_1(t)\ln P_1(t).$$

$$\gamma_0 = 1$$
$$\gamma_1 = 0.75$$



$$S_H(t) = -P_0(t)\ln\frac{P_0(t)}{P_0^{eq}} - P_1(t)\ln\frac{P_1(t)}{P_1^{eq}}.$$

Супероператоры

QuTiP
Quantum Toolbox in Python

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \gamma\left(\hat{\sigma}^{-}\hat{\rho}\hat{\sigma}^{+} - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}^{+}\hat{\sigma}^{-},\hat{\rho}\right\}\right) = \breve{D}\hat{\rho}.$$

$$\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$$

$$\boxed{\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b^{*}(t) & c(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a(t) \\ b^{*}(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}}$$

$$\hat{\rho}_{A}^{(S)}(t) = \hat{M}_{k}(t)\hat{\rho}_{A}^{(S)}\hat{M}_{k}^{+}(t) \to \left(\hat{M}_{k}(t)\otimes\hat{M}_{k}^{*}(t)\right)\hat{\rho}_{A}^{(S)} = \breve{U}(t)\hat{\rho}_{A}^{(S)}.$$

$$\breve{U}(t) = \sum_{k=0,1}\hat{M}_{k}(t)\otimes\hat{M}_{k}^{*}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & \sqrt{1-p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

Корреляционные функции

$$\hat{F}_A^H(t) = \hat{M}_k^+(t)\hat{F}_A\hat{M}_k(t),$$

$$\hat{\rho}_A^{(S)}(t) = \hat{M}_k(t)\hat{\rho}_A^{(S)}\hat{M}_k^+(t).$$

Корреляционные функции

$$\hat{F}_A^H(t) = \hat{M}_k^+(t)\hat{F}_A\hat{M}_k(t).$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \gamma\left(\hat{\sigma}^-\hat{\rho}\hat{\sigma}^+ - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^-,\hat{\rho}\right\}\right) = \breve{D}\hat{\rho}.$$

$$\hat{M}_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p(t)} \end{pmatrix}, \qquad \hat{M}_1(t) = \hat{\sigma}^-\sqrt{p(t)}, \qquad p(t) = 1 - e^{-\gamma t/2}.$$

$$\hat{\sigma}^+(t) = \sqrt{1-p(t)}\,\hat{\sigma}^+ = e^{-\gamma t/2}\hat{\sigma}^+,$$

$$\hat{\sigma}^+(t)\hat{\sigma}^-(0) = \hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^- e^{-\gamma t/2},$$

$$S(t) = \left\langle \hat{\sigma}^+(t)\hat{\sigma}^-(0)\right\rangle = e^{-\gamma t/2}\,\mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^-\right),$$

$$S(\omega) = \int_0^\infty S(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt \sim \frac{1}{\omega + i\gamma/2}.$$

Корреляционные функции, 2ой вариант решения

$$\hat{F}_A^H(t) = \hat{M}_k^+(t)\hat{F}_A\hat{M}_k(t).$$

$$\frac{d}{dt}\hat{F}_A^H(t) = \gamma\left(\hat{\sigma}^+\hat{F}_A^H(t)\hat{\sigma}^- - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}^-\hat{\sigma}^+, \hat{F}_A^H(t)\right\}\right) = \breve{D}_F\hat{\rho}.$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \gamma\left(\hat{\sigma}^-\hat{\rho}\hat{\sigma}^+ - \frac{1}{2}\left\{\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^-, \hat{\rho}\right\}\right) = \breve{D}\hat{\rho}.$$

$$\hat{\sigma}^+(t) = e^{-\gamma t/2}\hat{\sigma}^+,$$

$$\hat{\sigma}^+(t)\hat{\sigma}^-(0) = \hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^- e^{-\gamma t/2},$$

$$S(t) = \left\langle \hat{\sigma}^+(t)\hat{\sigma}^-(0)\right\rangle = e^{-\gamma t/2}\,\mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^-\right),$$

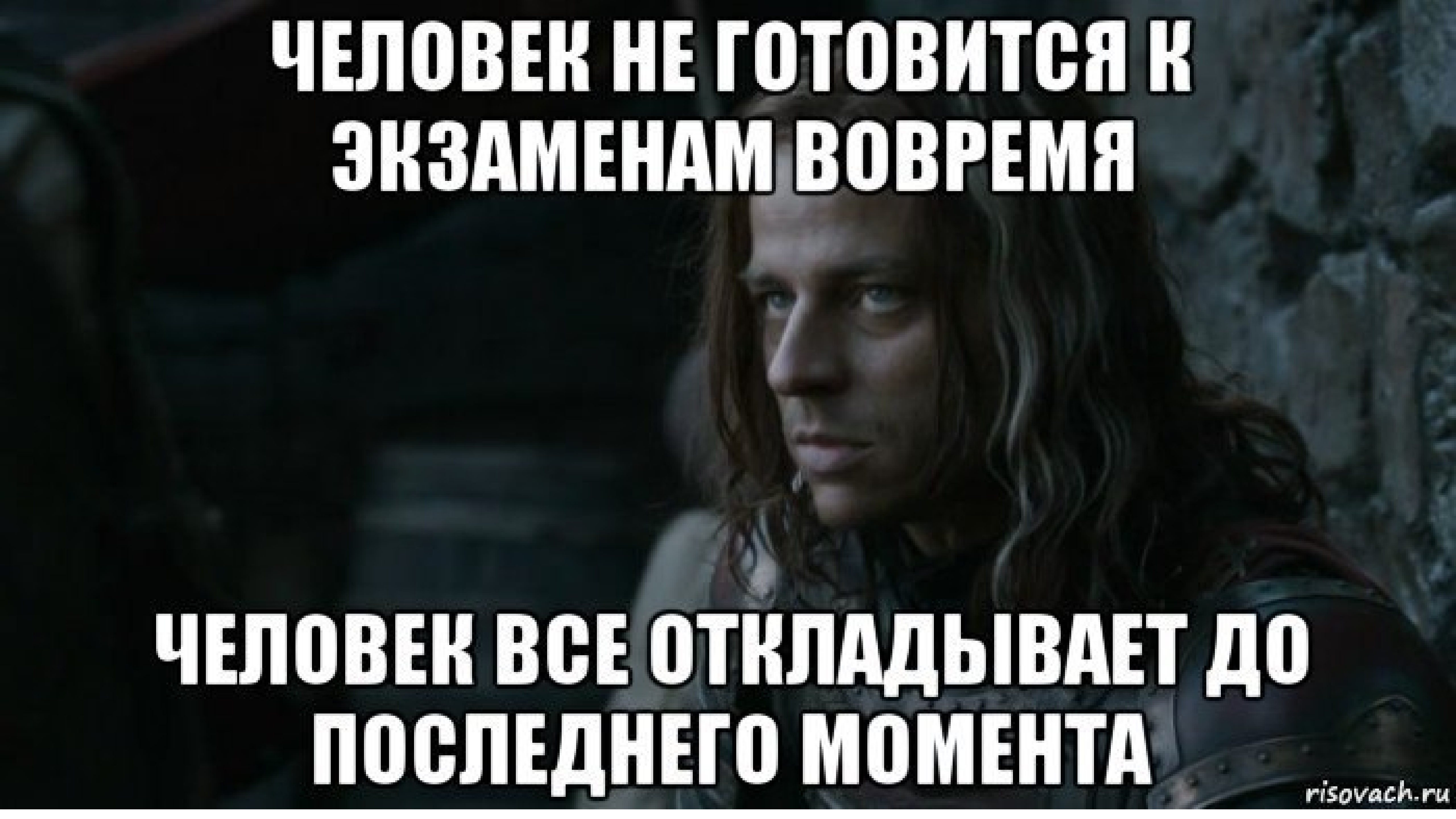
$$S(\omega) = \int_0^\infty S(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt \sim \frac{1}{\omega + i\gamma/2}.$$

На практике удобнее пользоваться супероператорами для нахождения временных корреляционных функций

$$\hat{\rho}_A^{(S)}(t) = \hat{M}_k(t)\hat{\rho}_A^{(S)}\hat{M}_k^{+}(t) \to \left(\hat{M}_k(t) \otimes \hat{M}_k^{+}(t)\right)\left|\hat{\rho}_A^{(S)}\right\rangle = \breve{U}(t)\left|\hat{\rho}_A^{(S)}\right\rangle,$$

$$\hat{F}_H(t) \to \left(\hat{M}_k^{+}(t) \otimes \hat{M}_k(t)\right)\left|\hat{F}\right\rangle \to \left\langle\hat{F}\right|\breve{U}(t).$$

Спасибо за внимание


ЧЕЛОВЕК НЕ ГОТОВИТСЯ К
ЭКЗАМЕНАМ ВОВРЕМЯ
ЧЕЛОВЕК ВСЕ ОТКЛАДЫВАЕТ ДО
ПОСЛЕДНЕГО МОМЕНТА
risovach.ru