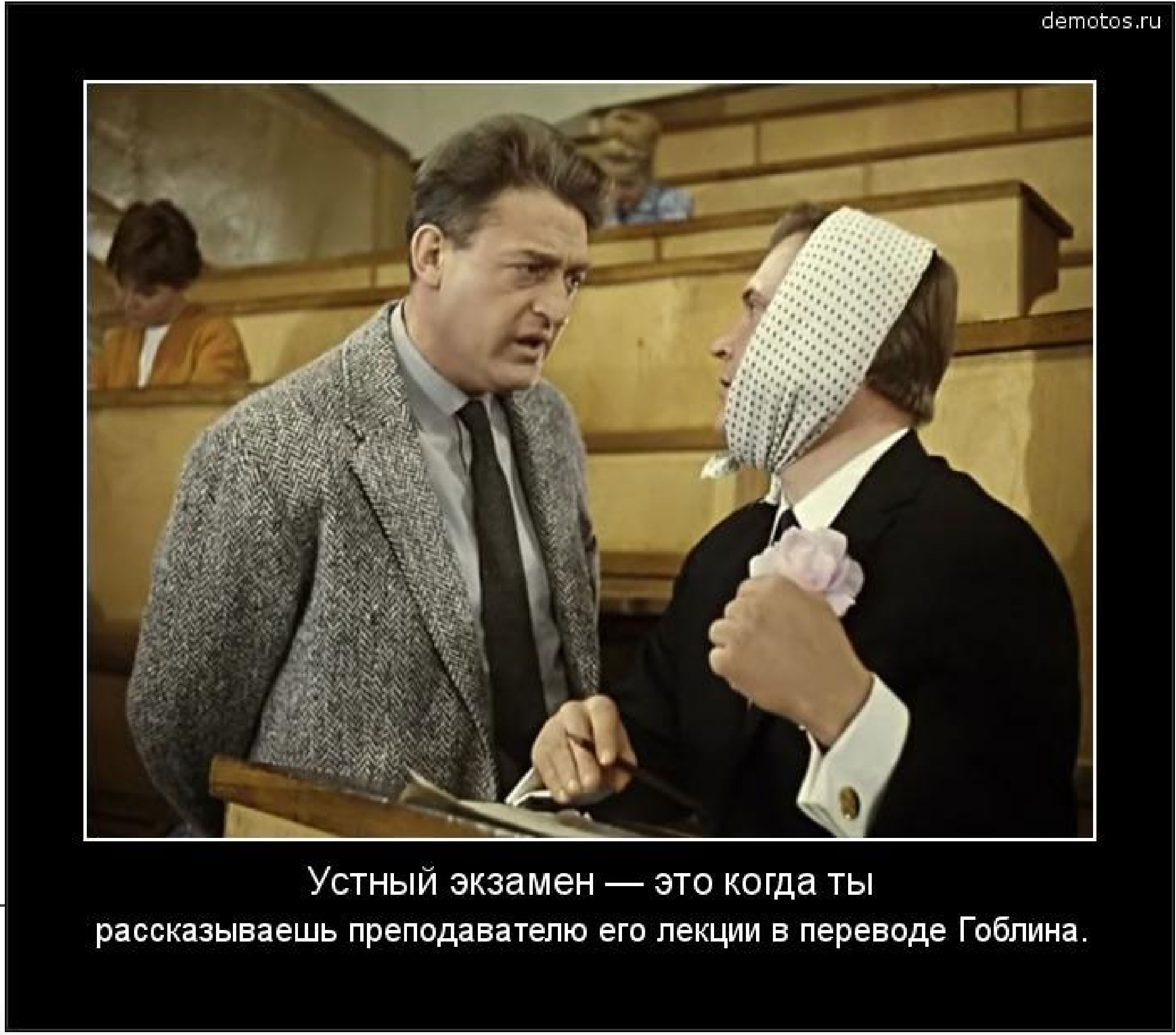
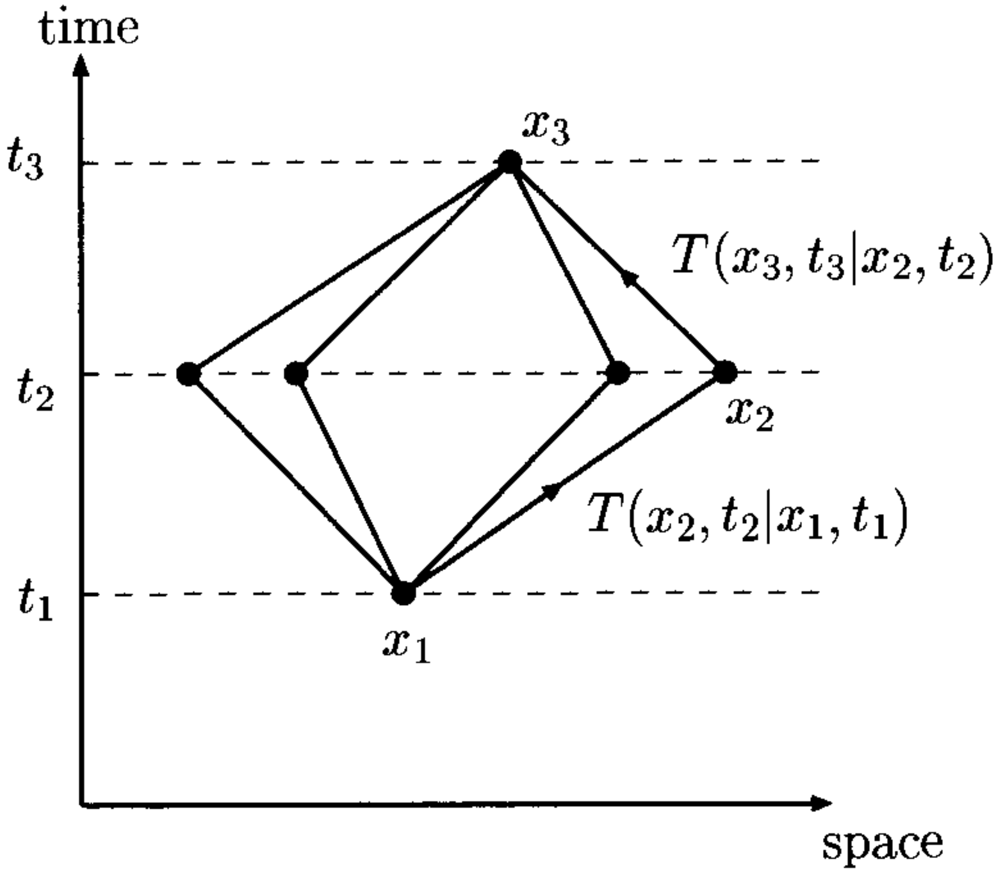


О функциональном интеграле

ЗАРИСОВКИ…

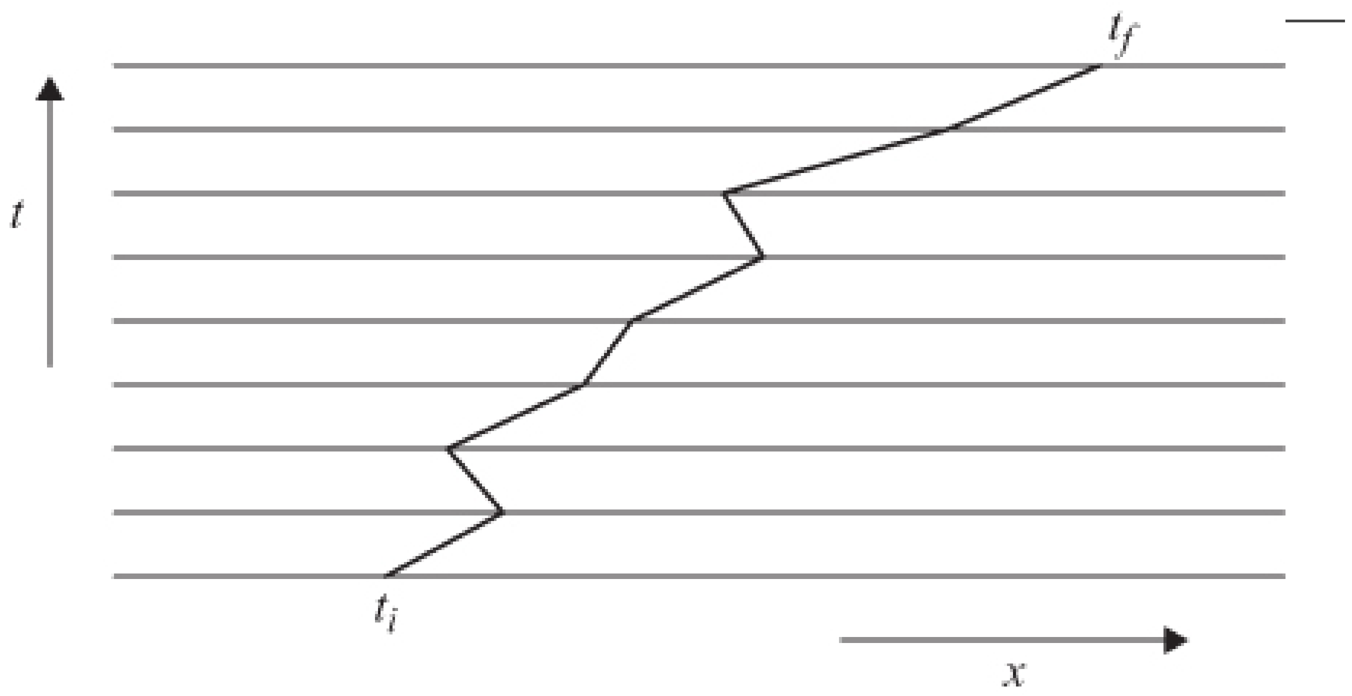
Уравнение Чепмана-Колмогорова

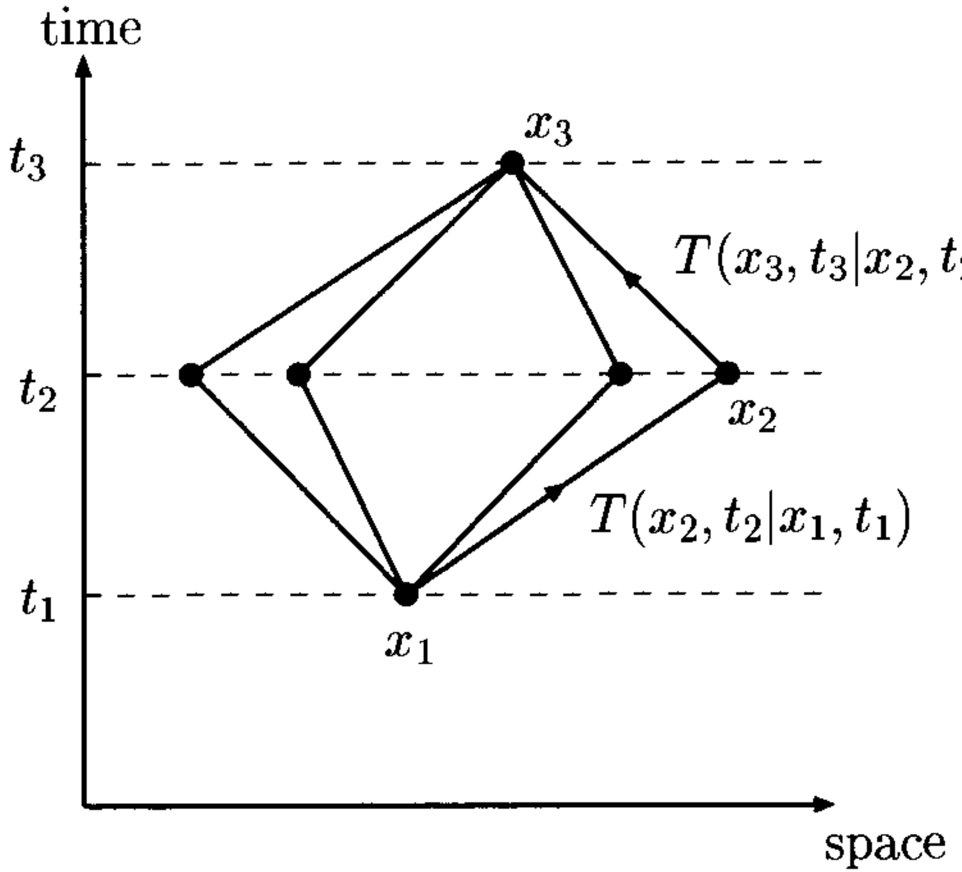
$$T(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int dx_2 \, T(x_3, t_3|x_2, t_2) T(x_2, t_2|x_1, t_1)$$



Функциональный интеграл по траекториям…

О функциональном интеграле





$$T(x_f, t_f \mid x_i, t_i) = \int dx_n \ldots dx_3 dx_2 dx_1 T(x_f, t_f \mid x_n, t_n) \ldots T(x_3, t_3 \mid x_2, t_2) T(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) T(x_1, t_1 \mid x_i, t_i)$$

О функциональном интеграле

$$T(x_f,t_f\,|\,x_i,t_i)=\int dx_n\ldots dx_3dx_2dx_1T(x_f,t_f\,|\,x_n,t_n)\ldots T(x_3,t_3\,|\,x_2,t_2)T(x_2,t_2\,|\,x_1,t_1)T(x_1,t_1\,|\,x_i,t_i)$$

когда $dt=t_2-t_1\to 0,$ Пропагатор почти дельта-функция. Напишем

$$T(x_2,t_2\,|\,x_1,t_1)\approx A(dx,dt,x_2,t_2)\exp\left(-L[dx,dt,x_2,t_2]dt\right)\to\delta(x_2-x_1),\quad dt=t_2-t_1\to 0,$$

Ясно, что A, L -- расходятся, при **фиксированном** dx, когда $dt\to 0$.

Иначе не получится дельта-функции. -- Это плохая новость.

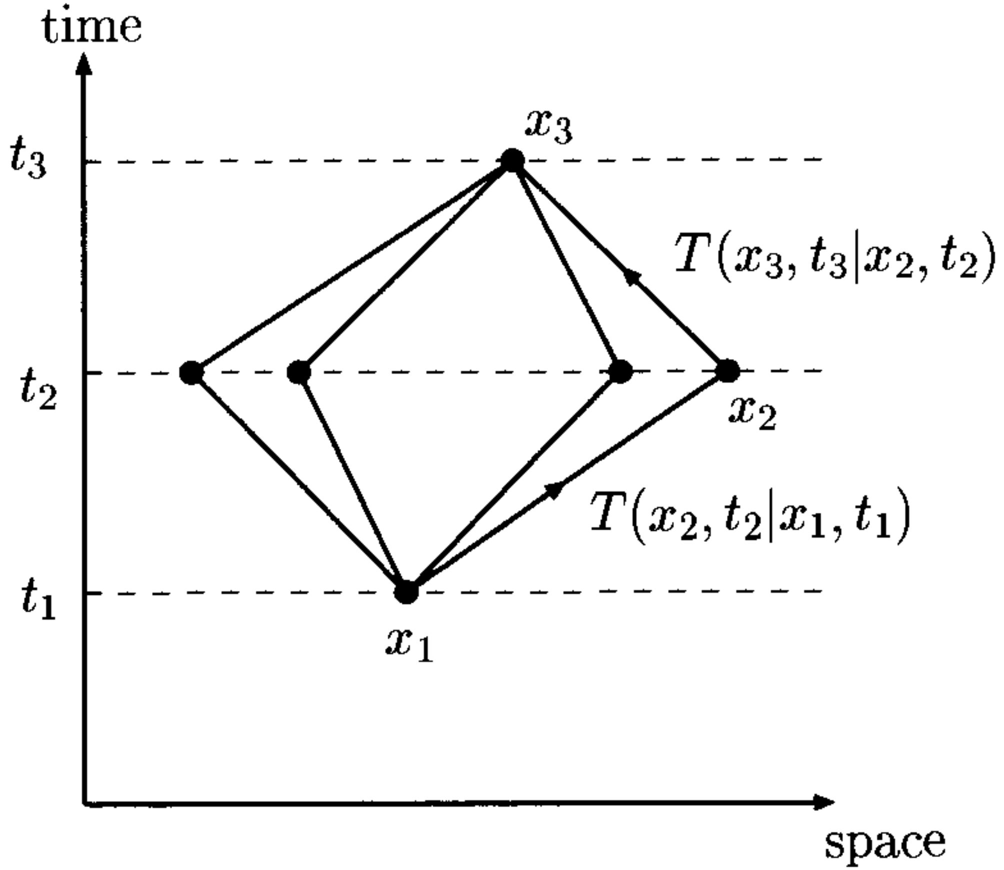
Хорошая новость в том, что часто $L[dx,dt,x_2,t_2]=L[\dfrac{dx}{dt},x_2,t_2]\approx L[\dot{x},x_2,t_2]$.

$$T(x_f,t_f\,|\,x_i,t_i)=\int A_ndx_n\ldots A_3dx_3A_2dx_2A_1dx_1\exp\left(-dt\left(L[\dot{x},x_f,t_f]\ldots+L[\dot{x},x_2,t_3]+L[\dot{x},x_2,t_2]+L[\dot{x},x_1,t_1]\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\iint\prod_{i=1,\ldots,n}A_idx_i\exp\left(-\int_{t_i}^{t_f}L[\dot{x}(t),x(t),t]dt\right)\equiv\int_{(x_i,t_i)}^{(x_f,t_f)}Dx\exp\left(-\int_{(x_i,t_i)}^{(x_f,t_f)}L[\dot{x},x,t]dt\right).$$

О функциональном интеграле (выводы)

$$T(x_f, t_f \mid x_i, t_i) = \lim_{n\to\infty} \iint \prod_{i=1,\ldots,n} A_i dx_i \exp\left(-\int_{t_i}^{t_f} L[x(t), t] dt \right) \equiv \int_{(x_i, t_i)}^{(x_f, t_f)} Dx \exp\left(-\int_{(x_i, t_i)}^{(x_f, t_f)} L[x, t] dx \right)$$



Диффузионный пропагатор

$$T(x,t\,|\,x_0,t_0)=0,\quad t<t_0.$$

$$T(x,t\,|\,x_0,t_0)\propto\theta(t-t_0)$$

Уравнение Фоккера-Планка

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t\,|\,x_0,t_0)=-\frac{d}{dx}\left[F_1(x)T(x,t\,|\,x_0,t_0)\right]+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left[F_2(x)T(x,t\,|\,x_0,t_0)\right].$$

Пусть $x(t)$ – Марковский случайный процесс.

Определим $\delta x(t)$=$x(t+\delta t)-x(t)$.

Постулируем для малых δt:

1) $\langle \delta x(t) \rangle = F_1(x(t))\,\delta t$

2) $\langle (\delta x(t))^2 \rangle = F_2(x(t))\,\delta t$

3) $\langle (\delta x(t))^n \rangle = O((\delta t)^2)$, n>2.

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t\,|\,x_0,t_0) = -\frac{d}{dx}\Big[F_1(x)T(x,t\,|\,x_0,t_0)\Big] + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\Big[F_2(x)T(x,t\,|\,x_0,t_0)\Big] + \delta(x-x_0)\delta(t-t_0).$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t\,|\,x_0,t_0)=-\frac{d}{dx}\big[g(x)T(x,t\,|\,x_0,t_0)\big]+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\big[D(x)T(x,t\,|\,x_0,t_0)\big].$$

$$\frac{dx_i}{dt}=g_i(x(t))+\xi_i(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t\,|\,x_0,t_0)=-\frac{d}{dx_i}\big[g_i(x)T(x,t\,|\,x_0,t_0)\big]+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx_i dx_j}\big[D_{ij}(x)T(x,t\,|\,x_0,t_0)\big].$$

Гауссовский шум: $\langle \xi_i(t_1)\xi_j(t_2)\rangle = D_{ij}\delta(t-t')$

Диффузионный процесс

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,\, t) + \frac{\partial}{\partial x_i}J_i(x,\, t) = 0$$

$$J_i = G_i(x,t)\,p(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(D_{ij}(x,t)\,p(x,t)\right).$$

$$G_i(x,t) = A_i(x,t) - g_i(x,t),$$

$$G(x,t) = 0,$$

$$D = 1.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t\,|\,x',t') - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t\,|\,x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t').$$

$$T(x,\, t|x',\, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t')}}\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2(t-t')}\right)$$

$$p(x,\, t=0) = \delta(x)$$

Диффузионный процесс

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i(t), \qquad \langle \xi_i(t_1)\xi_j(t_2)\rangle = \delta(t - t')$$

$$\boxed{\begin{aligned} G(x,t) &= 0, \\ D &= 1. \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t} T(x,t\,|\,x',t') - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t\,|\,x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t'). \end{aligned}}$$

$$T(x,\, t|x',\, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t')}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2(t-t')}\right)$$

$$p(x,\, t=0) = \delta(x)$$

На примере диффузионного процесса мы можем понять, что такое L и A, когда мы строили функциональный интеграл...

Диффузионный пропагатор иногда называют мерой Винера...

$$T(x_f, t_f \mid x_i, t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t_f - t_i)}} \exp\left(-\frac{\| x_f - x_i \|^2}{2D(t_f - t_i)} \right).$$

$$T(x_f,t_f \mid x_i,t_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D(t_f-t_i)}}\exp\left(-\frac{\|x_f-x_i\|^2}{2D(t_f-t_i)}\right).$$

$$T(x_f,t_f \mid x_i,t_i)=\lim_{n\to\infty}\iint\prod_{i=1,\ldots,n}A_i dx_i \exp\left(-\int_{t_i}^{t_f}L[x(t),t]dt\right)\equiv\int_{(x_i,t_i)}^{(x_f,t_f)}Dx\exp\left(-\int_{(x_i,t_i)}^{(x_f,t_f)}L[x,t]dx\right)=$$

$$=\int_{(x_i,t_i)}^{(x_f,t_f)}D_W x\exp\left(-\int_{(x_i,t_i)}^{(x_f,t_f)}\frac{1}{2D}\dot{x}^2dt\right),\quad D_W x=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1,\ldots,n}\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi Ddt}}$$

Функциональный интеграл

$$\boxed{T(x_f, t_f \mid x_i, t_i) = \iiint Dx \exp\left(-\int_{t_i}^{t_f} L\left(x, \dot{x}, t'\right) dt'\right)}$$

$$\boxed{Dx = \left(\rho(\varepsilon) dx_{n-1}\right)\left(\rho(\varepsilon) dx_{n-2}\right)\ldots\left(\rho(\varepsilon) dx_1\right),\ \varepsilon \to 0, n \to \infty}$$

Диффузионный процесс:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} T(x, t |, x', t') - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t |, x', t,) = \delta(x - x')\delta(t - t')}$$

$$T(x, t \mid x', t') = \frac{\theta(t - t')}{\sqrt{\pi D(t - t')}} \exp\left(-\frac{\left(x - x'\right)^2}{D(t - t')}\right) =$$

$$= \iiint Dx \exp\left(-\int_{t'}^{t} \frac{\dot{x}^2}{D} d\tau\right), \quad \rho(\varepsilon) = A = \frac{1}{\sqrt{\pi D \varepsilon}}, L[\dot{x}, x, t] = \frac{\dot{x}^2}{D}.$$

Кв.мех. НЕ является марковским случайным процессом, несмотря на некое сходство!

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-V(x)\right)\mathrm{G}^R(x,t\,|,x',t')=\delta(x-x')\delta(t-t').$$

Уравнение Шредингера:

$$\mathrm{G}^R(x,t\,|\,x',t')\approx\exp\left(i\varepsilon L\left(\overline{x},\dot{x},\overline{t}\right)/\hbar\right)\rho(\varepsilon)\to\delta(x-x'),\ \varepsilon\to 0$$

$$\varepsilon=t-t',\ \ \overline{x}=\frac{x+x'}{2},\ \ \overline{t}=\frac{t+t'}{2},\ \ \dot{x}=\frac{x-x'}{\varepsilon}$$

$$\rho(\varepsilon)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}},\ L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-V(\overline{x}).$$

Брагута В.В. Континуальный интеграл в квантовой механике: Препринт ИФВЭ 2009–2. – Протвино, 2009. – 7 с., библиогр.: 3.

Р. Фейнман, А. Хибс

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ИНТЕГРАЛЫ НО ТРАЕКТОРИЯМ

Таким образом, имеет место правило: *амплитуды последовательных во времени событий перемножаются.*

$$\mathrm{G}^R(x,t\,|\,x',t') = \int dx_2 G^R(x,t\,|\,x_2,t_2)\,\mathrm{G}^R(x_2,t_2\,|\,x',t')$$

$$G^R(x_f,t_f\,|\,x_i,t_i) = \left\langle x_f,t_f\,|\,x_i,t_i\right\rangle = \iiint\limits_{\substack{x(t_i)=\mathrm{x}_i;\\ x(t_f)=\mathrm{x}_f}} Dx\,\exp\left(i\int_{t_i}^{t_f} L\left(x,\dot{x},t'\right)dt'/\hbar\right),$$

$$Dx = \left(\rho(\varepsilon)dx_{n-1}\right)\left(\rho(\varepsilon)dx_{n-2}\right)\ldots\left(\rho(\varepsilon)dx_1\right),\ \varepsilon\to 0, n\to\infty$$

Почему квантовая механика не является марковским случайным процессом.

Начнем с того, что функции грина – аналоги пропагатора, -- комплексные величины. Их фаза дает эффекты интерференции. Ничего этого в теории случайных процессов нет. Пропагаторы не описывают интерференцию, они всего лишь – некая вероятность...

Чего надо сделать, чтобы успешно сдать экзамен?

Чего надо сделать, чтобы успешно сдать экзамен?

Вам надо понравиться экзаменаторам…