ДЗ 1

№2

L-гладк: $\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|_2 \le L\|x-y\|_2$ $\forall x, y \in Q$

3 • $f(x)=\frac{1}{2}\|x\|_2^2$

$\nabla f(x)= \|x\|_2 \cdot \frac{x}{\|x\|_2} = x$

$\|x-y\|_2 \overset{?}{\le} L\|x-y\|$ $L\ge1$ – можно подобрать.

$\Rightarrow$ L-гладкая

• $f(x)=\|x\|_2^3$

$\nabla f(x)= 3\|x\|_2^2 \cdot \frac{x}{\|x\|_2} = 3\|x\|_2 x$ $3\| \|x\|_2 x - \|y\|_2 y\| \overset{?}{\le} L\|x-y\|$

Возьмём, для примера, x, y: $\|x\|_2=L$, $\|y\|_2=L$ $\Rightarrow$ $3L\|x-y\| \overset{?}{\le} L\|x-y\|_2$

$3 \overset{?}{\le} 1$

– очевидно, противоречие.

$\Rightarrow$ не L-гладк//

• $f(x)=x^3$ на $[1,2]$

$\nabla f(x)=3x^2$ $3\|x^2-y^2\|_2 \overset{?}{\le} L\|x-y\|_2$ на $[1,2]$

$3|x^2-y^2| \le L|x-y|$

$3|x-y|\cdot|x+y| \overset{?}{\le} L|x-y|$

$3|x+y| \overset{?}{\le} L$ $\max|x+y|=4$

$\Rightarrow$ положим $L=3\cdot4=12$

$\Rightarrow$ L-гладк

---

1 $f(x)=\frac{1}{2}\|x\|_2^2$ – очев. дифф. $\Rightarrow$ опр сильной выпуклости

$f(y)\ge f(x) + \langle \nabla f(x), y-x\rangle + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\nabla f(x)=x$ $\Rightarrow$ $f(y)\overset{?}{\ge} f(x) + x^T y - x^T x + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$

$\frac{\|y\|_2^2}{2} \overset{?}{\ge} \frac{\|x\|_2^2}{2} + x^T y - \|x\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$

$\frac{1}{2}\|y-x\|_2^2 \ge \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$

$1\ge\mu$ $\Rightarrow$ $\mu\le1$ – можно подобрать

$\Rightarrow$ $f(x)$ – сильно выпукл//

2. $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \le L\|x-y\|_2$

или $f(y) \le f(x) + (\nabla f(x), y-x) + \frac{L}{2}\|y-x\|_2^2$

$D_y^- D_y | \dots$ $\quad \nabla^2 f(y) \le L \cdot I$

$\|A\|_2 = \sup\limits_{|x|=1} \|Ax\|_2$ $\quad \Rightarrow \|\nabla^2 f(y)\| \le L$

ЧТД