

Методы оптимизации.

Семинар 2. Выпуклые множества.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

11 сентября 2019 г.

- Предмет и задача курса
- Общая постановка задачи математического программирования
- Примеры задач оптимизации:
 - линейное программирование
 - метод наименьших квадратов
 - выпуклая оптимизация
- Чем хороши выпуклые задачи?

Аффинное множество

Аффинное множество

Множество A называется аффинным, если для любых $x_1, x_2 \in A$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in A$.

Примеры: \mathbb{R}^n , гиперплоскость, точка.

Аффинная комбинация точек

Пусть $x_1, \dots, x_k \in G$, тогда точка $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ при $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$ называется аффинной комбинацией точек x_1, \dots, x_k .

Аффинная оболочка точек

Множество $\left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in G, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1 \right\}$ называется аффинной оболочкой множества G и обозначается $\text{aff}(G)$.

Утверждение 1

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда в него входят все аффинные комбинации его точек.

Утверждение 2

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $\{x | Ax = b\}$.

Выпуклое множество

Выпуклое множество

Множество C называется выпуклым, если

$$\forall x_1, x_2 \in C, \theta \in [0, 1] \rightarrow \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C.$$

\emptyset и $\{x_0\}$ также считаются выпуклыми.

Примеры: \mathbb{R}^n , аффинное множество, луч, отрезок.

Выпуклая комбинация точек

Пусть $x_1, \dots, x_k \in G$, тогда точка $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ при

$\sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$ называется выпуклой комбинацией точек x_1, \dots, x_k .

Выпуклая оболочка точек

Множество $\left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in G, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}$ называется выпуклой оболочкой множества G и обозначается $\text{conv}(G)$.

Операции, сохраняющие выпуклость

- Пересечение любого (конечного или бесконечного) числа выпуклых множеств — выпуклое множество
- Образ аффинного отображения выпуклого множества — выпуклое множество
- Линейная комбинация выпуклых множеств — выпуклое множество
- Декартово произведение выпуклых множеств — выпуклое множество
- Перспективное отображение

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1/x_{n+1} \\ \vdots \\ x_n/x_{n+1} \end{bmatrix}$$

выпуклого множества — выпуклое множество

Примеры

Проверьте на аффинность и выпуклость следующие множества:

1. Полупространство: $\{\mathbf{x} | \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq c\}$
2. Многоугольник: $\{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{C}\mathbf{x} = 0\}$
3. Шар по норме в \mathbb{R}^n : $B(r, x_c) = \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| \leq r\}$
4. Эллипсоид:
 $\mathcal{E}(\mathbf{x}_c, \mathbf{P}, r) = \{\mathbf{x} | (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \leq r^2\}$
5. Множество симметричных
положительно-определённых матриц:
 $\mathbf{S}_+^n = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \mathbf{X}^T = \mathbf{X}, \mathbf{X} \succeq 0\}$
6. $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \text{Tr}(\mathbf{X}) = \text{const}\}$
7. Гиперболическое множество: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n | \prod_{i=1}^n x_i \geq 1\}$

Конус (выпуклый)

Множество C называется конусом (выпуклым конусом), если

$$\forall x \in C, \theta \geq 0 \rightarrow \theta x \in C$$

$$(\forall x_1, x_2 \in C, \theta_1, \theta_2 \geq 0 \rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C)$$

Примеры: \mathbb{R}^n , аффинное множество, проходящее через 0, луч.

Коническая (неотрицательная) комбинация точек

Пусть $x_1, \dots, x_k \in G$, тогда точка $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ при $\theta_i \geq 0$ называется конической (неотрицательной) комбинацией точек x_1, \dots, x_k .

Коническая оболочка точек

Множество $\left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in G, \theta_i \geq 0 \right\}$ называется конической оболочкой множества G и обозначается $\text{cone}(G)$.

Примеры конусов

1. S_+^n
2. Нормальный конус: $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq t\}$
Для ℓ_2 -нормы называется конусом второго порядка
или Лоренцевым конусом
3. Конкретные примеры с числами

- Аффинное множество
- Выпуклое множество
- Конус
- Методы проверки свойств конкретных множеств