Примеры решения задач методом внешних штрафов и методом модифицированной функции Лагранжа

Александр Катруца

1. Методом внешних штрафных функций и методом модифицированной функции Лагранжа решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\min x^2 + 2y^2 + z^2 + xy \\ &\text{s.t. } x + 2y + z \geq 3 \end{aligned}$$

   - Решение методов штрафов: запишем задачу безусловной оптимизации, используя штрафную функцию для огранчений типа неравенств

$$\min x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + \frac{\mu}{2}(\max(-x - 2y - z + 3, 0))^2 \tag{1}$$

     Рассмотрим 2 случая:

     (a) $-x - 2y - z + 3 \leq 0$. Тогда задача (1) примет вид:

$$\min x^2 + 2y^2 + z^2 + xy$$

     Из необходимых условий экстремума следует, что единственная точка, которая им удовлетворяет — это точка $(0, 0, 0)$. Однако она не удовлетворяет предположению, при котором была получена $(-0 - 2 \cdot 0 - 0 + 3 \not\leq 0)$.

     (b) $-x - 2y - z + 3 \geq 0$. Тогда задача (1) примет вид:

$$\min x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + \frac{\mu}{2}(x + 2y + z - 3)^2$$

     Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} 2x + y + \mu(x + 2y + z - 3) = 0 \\ 4y + x + 2\mu(x + 2y + z - 3) = 0 \\ 2z + \mu(x + 2y + z - 3) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\mu + 2)x + (2\mu + 1)y + \mu z = 3\mu \\ (2\mu + 1)x + (4\mu + 4)y + 2\mu z = 6\mu \\ \mu x + 2\mu y + (\mu + 2)z = 3\mu \end{cases}$$

     Далее выразим x, y, z через μ и определим, к чему сходятся эти выражения при $\mu \to \infty$:

$$\begin{cases} x = 3 - 2y - \left(1 + \frac{2}{\mu}\right) z \\ y = \frac{1}{2}\left(-3 + z\left(5 + \frac{2}{\mu}\right)\right) \\ z\left(1 + \frac{2}{\mu} + 4 + \frac{2}{3}\left(4 + \frac{4}{\mu}\right)\right) = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{12}{23} \\ y = \frac{18}{23} \\ z = \frac{21}{23} \end{cases}$$

- Решение методом модифицированной функции Лагранжа: составим модифицированную функцию Лагранжа

$$M = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + \frac{1}{2t}\left((\max(0, \lambda + t(-x - 2y - z + 3)))^2 - \lambda^2\right)$$

  (a) если max обращается в 0, то стационарная точка нарушает ограничения, следовательно, этот случай не даёт решения

  (b) иначе, модифицированная функция Лагранжа записывается в виде

$$M = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + \frac{1}{2t}\left((\lambda + t(-x - 2y - z + 3))^2 - \lambda^2\right)$$

  Необходимое условие экстремума примет вид

$$\begin{cases} x(t+2) + y(2t+1) + tz = \lambda + 3t \\ x(2t+1) + y(4t+4) + 2tz = 2\lambda + 3t \\ xt + 2ty + (t+2)z = \lambda + 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{t}\left(\lambda + 3t - 2ty - z(t+2)\right) \to 3 - 2y - z \\ y = \frac{1}{3t}(6t + 2\lambda - 4z(t+1)) \to 2 - \frac{4}{3}\frac{21}{23} = \frac{18}{23} \\ z = \frac{-7t - 7\lambda/3}{-23t/3 - 14/3} \to \frac{21}{23} \end{cases}$$

  Далее для опредедения значения двойственной переменной λ необходимо в выражение

$$\lambda = \lambda + t(-x - 2y - z + 3)$$

  подставить выражения $x(\lambda, t), y(\lambda, t), z(\lambda, t)$ и перейти к пределу при $t \to \infty$. Таким образом, $\lambda^* = \frac{42}{23}$.

Важные замечания:

- если в процессе решения получаются бесконечности, то есть например в выражении для z в числителе стоит полином большей степени, чем в знаменателе, значит Вы где-то ошиблись
- если Вы получили значения прямых переменных, такие что ограничение-неравенство активно, значит Вы скорее всего получите ненулевое значение двойственной переменной
- можно аналитически решить задачу с помощью условий ККТ и сравнить решение с полученным для проверки его правильности. Для реальных задач этого сделать нельзя.