# Лекция 15

Плазма, уравнения Власова

# Уравнения Власова, нерелятивистская плазма

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \mathrm{v}_p \frac{\partial}{\partial r} f + \left( eE + \cancel{\frac{1}{c} \mathrm{v}_p \times B} \right) \frac{\partial}{\partial p} f = I_{st}[f],$$

$$\begin{cases} \nabla \times E = -\dfrac{1}{c} \dfrac{\partial}{\partial t} B, \\ \nabla \times H = \dfrac{4\pi}{c} j_{ext} + \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial}{\partial t} D, \\ \nabla B = 0, \\ \nabla D = 4\pi \rho_{ext}, \end{cases}$$

$$D = E + 4\pi P, \qquad B = \mathrm{H} + \cancel{4\pi \mathrm{M}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P + \cancel{c \nabla \times M} = j = e \int \mathrm{v}_p \, f d\Gamma,$$

$$-\nabla P = \rho = e \int f d\Gamma.$$

# Слабые поля

$$D_\alpha(r,t) = E_\alpha(r,t) + 4\pi P_\alpha(r,t) \approx \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int dr' \varepsilon_{\alpha\beta}(r,t;r',t') E_\beta(r',t').$$

## В среднем однородная система:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(r,t;r',t') \approx \varepsilon_{\alpha\beta}(r-r',t-t') \propto \theta(t-t').$$

$$\boxed{D_\alpha(k,\omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(k,\omega) E_\beta(k,\omega), \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}(k,\omega) = \int\int dt dr\, \mathrm{e}^{-ikr+i\omega t} \varepsilon_{\alpha\beta}(r,t).}$$

Согласно теореме Онзагера:

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta}(-k,-\omega) = \varepsilon^{*}_{\alpha\beta}(k,\omega).}$$

Однородная система с выделенным направлением, задаваемым вектором k,
поперечные и продольные проницаемости:

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta}(k,\omega) = \varepsilon^{tr}(k,\omega)\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \varepsilon^{l}(k,\omega)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}.}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{D}(k,\omega) = \varepsilon^{l}(k,\omega)\mathbf{E}^{(l)}(k,\omega) + \varepsilon^{tr}(k,\omega)\mathbf{E}^{(\mathrm{tr})}(k,\omega).}$$

# Предел k→0

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k,\omega) = \varepsilon^{tr}(k,\omega)\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \varepsilon^{l}(k,\omega)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2},$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k \to 0,\omega) \propto \delta_{\alpha\beta},$$

$$\varepsilon^{tr}(k \to 0,\omega) = \varepsilon^{l}(k \to 0,\omega) = \varepsilon(\omega).$$

# (почти) бесстолкновительная плазма

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \mathrm{v}_p \frac{\partial}{\partial r} f + \left( eE + \frac{1}{c} \mathrm{v}_p \times B \right) \frac{\partial}{\partial p} f = -\frac{\delta f}{\tau} \to 0,$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial t} \delta f \right| \gg \frac{|\delta f|}{\tau} \Rightarrow \omega \gg \frac{1}{\tau}, \\ &\left| \mathrm{v}_p \frac{\partial}{\partial r} \delta f \right| \gg \frac{|\delta f|}{\tau} \Rightarrow \mathrm{v}_p k \gg \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow k \gg \frac{1}{l}. \end{aligned}}$$

# Тензор восприимчивости

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \mathrm{v}_p \frac{\partial}{\partial r} f + \left( eE + \frac{e}{c} \mathrm{v}_p \times B \right) \frac{\partial}{\partial p} f = -\frac{\delta f}{\tau} \to 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f + \mathrm{v}_p \frac{\partial}{\partial r} \delta f + eE \frac{\partial}{\partial p} f^{(0)} = -\frac{\delta f}{\tau} \to 0,$$

$$-i\omega \delta f_{k\omega} + \mathrm{v}_p \, ik \delta f_{k\omega} + eE_{k\omega} \frac{\partial}{\partial p} f^{(0)} = -\frac{\delta f_{k\omega}}{\tau}.$$

# Тензор восприимчивости

$$-i\omega\delta f+\mathrm{v}_p\,ik\delta f+eE\frac{\partial}{\partial p}f^{(0)}=-\frac{\delta f}{\tau}.$$

$$\boxed{\delta f=\frac{ieE_\beta\dfrac{\partial}{\partial p_\beta}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p-\omega-i/\tau}.}$$

$$\boxed{j_\alpha=e\int\mathrm{v}_\alpha\,\delta f d\Gamma=e^2\int\mathrm{v}_\alpha\frac{iE_\beta\dfrac{\partial}{\partial p_\beta}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p-\omega-i/\tau}d\Gamma=ie^2E_\beta\int\mathrm{v}_\alpha\,\mathrm{v}_\beta\frac{\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p-\omega-i/\tau}d\Gamma.}$$

# Тензор восприимчивости

$$j = e\int \mathrm{v}\,\delta f d\Gamma = e^2 \int \mathrm{v}_\alpha \frac{iE_\beta \dfrac{\partial}{\partial p_\beta} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p - \omega - i/\tau} d\Gamma = ie^2 E_\beta \int \mathrm{v}_\alpha\,\mathrm{v}_\beta \frac{\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p - \omega - i/\tau} d\Gamma.$$

$$D = E + 4\pi P,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D = \frac{\partial}{\partial t} E + 4\pi \frac{\partial}{\partial t} P = \frac{\partial}{\partial t} E + 4\pi j,$$

$$-i\omega D = -i\omega E + 4\pi j,$$

$$D_\alpha(k,\omega) = E_\alpha(k,\omega) - \frac{4\pi e^2 E_\beta(k,\omega)}{\omega} \int \mathrm{v}_\alpha\,\mathrm{v}_\beta \frac{\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_p - \omega - i/\tau} d\Gamma.$$

$$D_\alpha(k,\omega)=E_\alpha(k,\omega)-\frac{4\pi e^2 E_\beta(k,\omega)}{\omega}\int \mathrm{v}_\alpha\,\mathrm{v}_\beta\,\frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau}\,d\Gamma,$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k,\omega)=\delta_{\alpha\beta}-\frac{4\pi e^2}{\omega}\int \mathrm{v}_\alpha\,\mathrm{v}_\beta\,\frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau}\,d\Gamma.$$

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta}(k,\omega)=\varepsilon^{tr}(k,\omega)\left(\delta_{\alpha\beta}-n_\alpha n_\beta\right)+\varepsilon^{l}(k,\omega)n_\alpha n_\beta.}$$

$$\boxed{n_\alpha=k_\alpha/k}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon^{tr}(k,\omega)&=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha\beta}-n_\alpha n_\beta\right),\\ \varepsilon^{l}(k,\omega)&=n_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}n_\beta.\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon^{tr}(k,\omega) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha\beta}-n_\alpha n_\beta\right),\\ \varepsilon^{l}(k,\omega) &= n_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}n_\beta.\end{aligned}}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(k,\omega)=\delta_{\alpha\beta}-\frac{4\pi e^2}{\omega}\int \mathrm{v}_\alpha\,\mathrm{v}_\beta\,\frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau}d\Gamma.$$

---

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon^{l}(k,\omega) &= n_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}n_\beta=1-\frac{4\pi e^2}{\omega}\int\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\right)^2\frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau}d\Gamma,\\ \varepsilon^{tr}(k,\omega) &= 1-\frac{2\pi e^2}{\omega}\int\frac{\mathbf{v}^2-\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\right)^2}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}d\Gamma.\end{aligned}}$$

$$\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega}=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{k}+\frac{\omega}{k}\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega},$$

$$\int \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{k}d\Gamma=0.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\varepsilon^l(k,\omega)=n_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}n_\beta=1-\frac{4\pi e^2}{\omega}\int(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2\frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau}d\Gamma,\\ \varepsilon^l(k,\omega)=1-\frac{4\pi e^2}{k}\int\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau}d\Gamma.\end{gathered}}$$

# Эквивалентный способ получения продольной диэлектрической проницаемости плазмы.
# Выше мы делали так:

$$D = E + 4\pi P,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D = \frac{\partial}{\partial t} E + 4\pi \frac{\partial}{\partial t} P = \frac{\partial}{\partial t} E + 4\pi j,$$

$$-i\omega D = -i\omega E + 4\pi j,$$

$$D_\alpha(k,\omega) = E_\alpha(k,\omega) - \frac{4\pi e^2 E_\beta(k,\omega)}{\omega} \int \mathrm{v}_\alpha \, \mathrm{v}_\beta \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega - i/\tau} d\Gamma,$$

$$P_\alpha = -\frac{e^2 E_\beta(k,\omega)}{\omega} \int \mathrm{v}_\alpha \, \mathrm{v}_\beta \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega - i/\tau} d\Gamma.$$

$$P_\alpha n_\alpha = -\frac{e^2 E_\beta(k,\omega)}{\omega}\int n_\alpha \, \mathrm{v}_\alpha \, \mathrm{v}_\beta \frac{\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau} d\Gamma \to$$

$$E_p = 4\pi P_\alpha n_\alpha = -\frac{4\pi e^2 E^l(k,\omega)}{\omega}\int \frac{(n_\alpha \, \mathrm{v}_\alpha)^2 \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau} d\Gamma = -\frac{4\pi e^2 E^l(k,\omega)}{k}\int \frac{n_\alpha \, \mathrm{v}_\alpha \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau} d\Gamma.$$

# Можно вести расчеты иначе, если поле направлено вдоль волнового вектора…

$$\rho_p = \mathrm{e}\int \delta f d\Gamma = e^2 \int \frac{iE_\beta \dfrac{\partial}{\partial p_\beta} f^{(0)}}{k\,\mathrm{v} - \omega - i/\tau} d\Gamma,$$

$$\varphi_p(r,t) = \int \frac{\rho_p(r',t')dr'}{|r-r'|} \Rightarrow \varphi_p(\mathrm{k},\omega) = \frac{4\pi}{k^2}\rho_p(k,\omega).$$

$$4\pi\mathbf{P} = -\mathbf{E}_p(r,t) = \nabla\varphi_p \Rightarrow \mathbf{E}_p(\mathrm{k},\omega) = -i\mathbf{k}\frac{4\pi}{k^2}\rho_p(k,\omega).$$

$$\rho_p = \mathrm{e}\int \delta f d\Gamma = e^2 \int \frac{i\,\mathrm{v}_\beta\, E_\beta \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega - i/\tau} d\Gamma,$$

$$\varphi_p(r,t) = \int \frac{\rho_p(r',t')dr'}{|r-r'|} \Rightarrow \varphi_p(\mathrm{k},\omega) = \frac{4\pi}{k^2}\rho_p(k,\omega).$$

$$4\pi\mathbf{P} = -\mathbf{E}_p = i\mathbf{k}\frac{4\pi}{k^2}\rho_p(k,\omega),$$

$$\mathrm{D}^l = E^l + 4\pi P^l = E^l \left( 1 + i\mathbf{k}\frac{4\pi}{k^2} e^2 \int \frac{i\,\mathrm{v}_\beta\, n_\beta \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega - i/\tau} d\Gamma \right),$$

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k} \int \frac{\mathrm{v}_\beta\, n_\beta \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{k\,\mathrm{v} - \omega - i/\tau} d\Gamma.$$

---

Из ур. Максвелла известно, что $\mathrm{div}P = -4\pi\rho_b$, $\mathrm{div}E = 4\pi\rho$. Поэтому не стоит сильно удивляться, что $4\pi P = -E_p$.

# Статический предел

$$\varepsilon^l(k,\omega \to 0) = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2}\int \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)} d\Gamma \approx$$

$$\approx 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2 T}\int f^{(0)} d\Gamma = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2 T} n = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}.$$

Дебаевский радиус экранирования.

$$r_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}} = \frac{\mathrm{v}_T}{\omega_{pl}}.$$

Плазменная частота

$$\omega_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}.$$

$$\mathrm{v}_T = \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

$$\varepsilon^l(k,\omega\to 0) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2},$$

$$U(k) = \frac{4\pi Ze^2}{k^2\varepsilon^l(k)} = \frac{4\pi Ze^2}{k^2 + 1/r_D^2},$$

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r} e^{-r/r_D}.$$

Дебаевский радиус экранирования.

$$r_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi ne^2}} = \frac{\mathrm{v}_T}{\omega_{pl}}.$$

Плазменная частота

$$\omega_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}.$$

$$\mathrm{v}_T = \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

# Теория Дебая-Хюккеля

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e\, \delta n$$

$$\delta n(\boldsymbol{r}) = n\, e^{e\phi(\boldsymbol{r})/k_{\mathrm{B}}T} - n \approx \frac{ne\phi(\boldsymbol{r})}{k_{\mathrm{B}}T}$$

$$\boxed{r_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}} = \frac{\mathrm{v}_T}{\omega_{pl}}.}$$

# Потенциал Юкавы

$$\nabla^2 \phi = \lambda^{-2}\, \phi - 4\pi Z e \delta(\boldsymbol{r})$$

$$U(\boldsymbol{r}) = -e\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{Ze^2}{r}\, e^{-r/\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{U}(\boldsymbol{q}) = \frac{4\pi Z e^2}{\boldsymbol{q}^2 + \lambda^{-2}}$$

# Экранирование Томаса-Ферми (вырожденная плазма)

$$\varepsilon^l(k,\omega\to 0)=1-\frac{4\pi e^2}{k^2}\int\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}d\Gamma\approx 1-\frac{4\pi e^2}{k^2}\int\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}D(\varepsilon)d\varepsilon\approx$$

$$\approx 1-\frac{4\pi e^2}{k^2}D(\varepsilon_F)\int\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}d\varepsilon=1+\frac{4\pi e^2}{k^2}D(\varepsilon_F).$$

$$r_{TF}=\sqrt{\frac{1}{4\pi e^2 D(\varepsilon_F)}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\varepsilon_F}{4\pi n e^2}}.$$

$$r_D=\sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}}=\frac{\mathrm{v}_T}{\omega_{pl}}.$$

# Вырожденная плазма

$$\varepsilon^l(k,\omega) = n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} n_\beta = 1 - \frac{4\pi e^2}{\omega} \int (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2 \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega - i/\tau} d\Gamma.$$

$$\varepsilon^l(k \to 0,\omega) \approx 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \int (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)} \left( 1 + \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\omega} + \left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\omega}\right)^2 + \ldots \right) d\Gamma.$$

$$\varepsilon^l(k \to 0,\omega) \approx 1 - \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \left( \frac{1}{3} D(\varepsilon_F) v_F^2 + D(\varepsilon_F) v_F^2 \frac{1}{5} \frac{k^2 v_F^2}{\omega^2} \right) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_F^2}{\omega^2} \right).$$

# Собственные колебания плазмы, продольные волны

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}(k, \omega) = 0,$$

$$\varepsilon^l(k, \omega)\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(k, \omega) = 0.$$

Условие существования продольных колебаний:

$$\boxed{\begin{aligned}&\varepsilon^l(k, \omega) = 0,\\ &\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(k, \omega) \neq 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}(k, \omega) = 0.\end{aligned}}$$

Поперечные волны:

$$\boxed{\omega^{tr}(\mathrm{k}) = ck / \sqrt{\varepsilon^{tr}(k, \omega)}}$$

# Затухание Ландау

$$\varepsilon^l(k,\omega)=n_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}n_\beta=1-\frac{4\pi e^2}{\omega}\int(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2\frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau}d\Gamma,$$

$$\varepsilon^l(k,\omega)\approx 1+\frac{4\pi e^2}{\omega T}\int \mathrm{v}_z^2\frac{f^{(0)}}{\mathrm{k}\,\mathrm{v}_z-\omega-i/\tau}d\Gamma=1+\frac{4\pi e^2}{\omega T}\int \mathrm{v}_z^2\frac{f^{(0)}}{\mathrm{k}\,\mathrm{v}_z-\omega-i/\tau}dp_z dp_x dp_y.$$

$$f^{(0)}=\frac{n}{\sqrt[3]{2\pi mT}}\exp\left(-\frac{m\,\mathrm{v}^2}{2T}\right).$$

$$\int f^{(0)}dp_x dp_y=\frac{n}{\sqrt{2\pi mT}}\exp\left(-\frac{m\,\mathrm{v}_z^2}{2T}\right).$$

$$\int f^{(0)} dp_x dp_y = \frac{n}{\sqrt{2\pi m T}} \exp\left(-\frac{m\,\mathrm{v}_z^2}{2T}\right).$$

$$\boxed{\varepsilon^l(k,\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega T} \int \mathrm{v}_z^2 \frac{f^{(0)}}{\mathrm{k}\,\mathrm{v}_z - \omega - i/\tau} dp_z dp_x dp_y = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega T} \frac{n}{\sqrt{2\pi m T}} \int \mathrm{v}_z^2 \frac{\exp\left(-\frac{m\,\mathrm{v}_z^2}{2T}\right)}{\mathrm{k}\,\mathrm{v}_z - \omega - i/\tau} dp_z.}$$

Замена переменных: $x = \mathrm{v}_z \sqrt{m/T} = \mathrm{v}_z / \mathrm{v}_T$

$$\boxed{\begin{gathered}\varepsilon^l(k,\omega) = 1 + \frac{4\pi n e^2}{\omega k} \frac{1}{\sqrt{2\pi m T}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x - x_0 - i\delta} dx, \\ x_0 = \frac{\omega}{k\,\mathrm{v}_T}, \qquad \delta = \frac{1}{\tau k\,\mathrm{v}_T}.\end{gathered}}$$

$$\varepsilon^l(k,\omega) = 1 + \frac{4\pi n e^2}{\omega k}\frac{1}{\sqrt{2\pi m T}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x - x_0 - i\delta}dx =$$

$$= 1 + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega k\,\mathrm{v}_T}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x - x_0 - i\delta}dx,$$

$$x_0 = \frac{\omega}{k\,\mathrm{v}_T}, \qquad \delta = \frac{1}{\tau k\,\mathrm{v}_T},$$

$$\omega_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}, \qquad \mathrm{v}_T = \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

$$\boxed{\frac{1}{x-x_0-i\delta}=i\pi\,\mathrm{sign}(\delta)\delta(x-x_0)+\mathrm{P}\frac{1}{x-x_0}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x-x_0-i\delta}dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\left(i\pi\,\mathrm{sign}(\delta)\delta(x-x_0)+\mathrm{P}\frac{1}{x-x_0}\right)dx=\\&=i\pi\,\mathrm{sign}(\delta)x_0^2e^{-\frac{x_0^2}{2}}+\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{x-x_0}dx.\end{aligned}}$$

$$\varepsilon^{l}(k,\omega)=1+\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega k\,\mathrm{v}_{T}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2}\frac{\exp\left(-\frac{x^{2}}{2}\right)}{x-x_{0}-i\delta}dx,$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon^{l}(k,\omega)=\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega k\,\mathrm{v}_{T}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi\,\mathrm{sign}(\delta)x_{0}^{2}e^{-\frac{x_{0}^{2}}{2}}=\frac{\omega\omega_{pl}^{2}}{\left(k\,\mathrm{v}_{T}\right)^{3}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega^{2}}{2\left(k\,\mathrm{v}_{T}\right)^{2}}},$$

$$x_{0}=\frac{\omega}{k\,\mathrm{v}_{T}},\qquad \delta=\frac{1}{\tau k\,\mathrm{v}_{T}},$$

$$\omega_{pl}=\sqrt{\frac{4\pi ne^{2}}{m}},\qquad \mathrm{v}_{T}=\sqrt{\frac{T}{m}}.$$

$$\varepsilon^{l}(k,\omega)=1+\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega k\,\mathrm{v}_{T}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{2}\frac{\exp\left(-\dfrac{x^{2}}{2}\right)}{x-x_{0}-i\delta}dx,$$

$$\operatorname{Re}\varepsilon^{l}(k,\omega)=1+\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega k\,\mathrm{v}_{T}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{2}e^{-\frac{x^{2}}{2}}\frac{1}{x-x_{0}}dx.$$

Найдем асимптотику интеграла в смысле главного значения при

$$x_0 = \frac{\omega}{k\mathrm{v}_T} \gg 1$$

Найдем асимптотику интеграла в смысле главного значения при $x_0 = \dfrac{\omega}{k\text{v}_T} \gg 1$

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{x-x_0}\,dx = -\frac{1}{x_0}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x_0}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1+\frac{x}{x_0}+\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\ldots\right)dx = -\frac{1}{x_0}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \frac{1}{x_0^3}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \ldots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 3\sqrt{2\pi}.$$

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{x-x_0}\,dx \approx -\frac{1}{x_0}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \frac{1}{x_0^3}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{x_0}\left(1+\frac{3}{x_0^2}\right).$$

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon^{l}(k,\omega)=1+\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega k\,\mathrm{v}_{T}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2}e^{-\frac{x^{2}}{2}}\frac{1}{x-x_{0}}dx=$$

$$=1-\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega k\,\mathrm{v}_{T}}\frac{1}{x_{0}}\left(1+\frac{3}{x_{0}^{2}}\right)=1-\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega^{2}}\left(1+\frac{3\left(k\,\mathrm{v}_{T}\right)^{2}}{\omega^{2}}\right),$$

$$x_{0}=\frac{\omega}{k\,\mathrm{v}_{T}}.$$

$$\operatorname{Re}\varepsilon^{l}(k,\omega)=1-\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega^{2}}\left(1+\frac{3(k\,\mathrm{v}_{T})^{2}}{\omega^{2}}\right),$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon^{l}(k,\omega)=\frac{\omega\omega_{pl}^{2}}{(k\,\mathrm{v}_{T})^{3}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega^{2}}{2(k\,\mathrm{v}_{T})^{2}}},$$

$$\varepsilon^{l}(k,\omega)=1-\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega^{2}}\left(1+\frac{3(k\,\mathrm{v}_{T})^{2}}{\omega^{2}}\right)+i\frac{\omega\omega_{pl}^{2}}{(k\,\mathrm{v}_{T})^{3}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega^{2}}{2(k\,\mathrm{v}_{T})^{2}}}.$$

Уравнение на спектр собственных колебаний поля:

$$\varepsilon^{l}(k,\omega)=1-\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega^{2}}\left(1+\frac{3\left(k\,\mathrm{v}_{T}\right)^{2}}{\omega^{2}}\right)+i\frac{\omega\omega_{pl}^{2}}{\left(k\,\mathrm{v}_{T}\right)^{3}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega^{2}}{2\left(k\,\mathrm{v}_{T}\right)^{2}}}=0.$$

Если пренебречь затуханием, то в нулевом приближении спектр колебаний:

$$1-\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega^{2}}=0\rightarrow\omega^{(0)}(k)=\omega_{pl}.$$

Уравнение на спектр собственных колебаний поля:

$$\varepsilon^l(k,\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3\left(k\,\mathrm{v}_T\right)^2}{\omega^2}\right) + i\frac{\omega\omega_{pl}^2}{\left(k\,\mathrm{v}_T\right)^3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega^2}{2\left(k\,\mathrm{v}_T\right)^2}} = 0.$$

Если пренебречь затуханием, то

$$1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3\left(k\,\mathrm{v}_T\right)^2}{\omega^2}\right) = 0$$

$$\omega^2(k) \approx \omega_{pl}^2\left(1 + \frac{3\left(k\,\mathrm{v}_T\right)^2}{\omega_{pl}^2}\right) = \omega_{pl}^2\left(1 + \frac{3}{2}\left(kr_D\right)^2\right).$$

# Учтем затухание

$$\boxed{\varepsilon^{l}(k,\mathrm{z}) = 1 - \frac{\omega_{pl}^{2}}{z^{2}}\left(1 + \frac{3(k\,\mathrm{v}_{T})^{2}}{z^{2}}\right) + i\frac{z\omega_{pl}^{2}}{(k\,\mathrm{v}_{T})^{3}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{z^{2}}{2(k\,\mathrm{v}_{T})^{2}}} = 0.}$$

Будем искать решение:

$$\boxed{z = \omega - i\gamma.}$$

В нулевом приближении $\mathrm{z} = \omega_{pl}$.

$$\varepsilon^l(k,z)=1-\frac{\omega_{pl}^2}{z^2}\left(1+\frac{3(k\,v_T)^2}{z^2}\right)+i\frac{z\omega_{pl}^2}{(k\,v_T)^3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{z^2}{2(k\,v_T)^2}}=0.$$

$$1-\frac{\omega_{pl}^2}{(\omega-i\gamma)^2}\left(1+\frac{3(k\,v_T)^2}{\omega_{pl}^2}\right)+i\frac{\omega_{pl}^3}{(k\,v_T)^3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega_{pl}^2\left(1+\frac{3(k\,v_T)^2}{\omega_{pl}^2}\right)}{2(k\,v_T)^2}}=0.$$

$$1-\frac{\omega_{pl}^{2}}{(\omega-i\gamma)^{2}}\left(1+\frac{3(k\,\mathrm{v}_T)^{2}}{\omega_{pl}^{2}}\right)+i\frac{\omega_{pl}^{3}}{(k\,\mathrm{v}_T)^{3}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{\omega_{pl}^{2}\left(1+\frac{3(k\,\mathrm{v}_T)^{2}}{\omega_{pl}^{2}}\right)}{2(k\,\mathrm{v}_T)^{2}}}=0.$$

$$-i2\frac{\gamma}{\omega}\frac{\omega_{pl}^{2}}{(\omega)^{2}}\left(1+\frac{3(k\,\mathrm{v}_T)^{2}}{\omega_{pl}^{2}}\right)+i\frac{\omega_{pl}^{3}}{(k\,\mathrm{v}_T)^{3}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{\omega_{pl}^{2}}{2(k\,\mathrm{v}_T)^{2}}-\frac{3}{2}}=0.$$

$$\gamma(k)=\frac{\omega_{pl}^{4}}{2(k\,\mathrm{v}_T)^{3}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{\omega_{pl}^{2}}{2(k\,\mathrm{v}_T)^{2}}-\frac{3}{2}}=\operatorname{Im}\varepsilon^{l}\left(\operatorname{Re}\omega(k),k\right).$$

# Затухание Ландау

$$\boxed{\gamma(k) = \frac{\omega_{pl}^4}{2\left(k\,\mathrm{v}_T\right)^3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{\omega_{pl}^2}{2\left(k\,\mathrm{v}_T\right)^2}-\frac{3}{2}} = \operatorname{Im}\varepsilon^l\left(\operatorname{Re}\omega(k), k\right).}$$

# Поперечные колебания плазмы

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}^{tr}=0,$$

$$\mathbf{D}^{tr}=\varepsilon^{tr}\mathbf{E}^{tr}\Rightarrow\mathbf{k}\cdot\mathbf{D}^{tr}=0$$

$$\begin{cases}\nabla\times E=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}B\Rightarrow\mathbf{k}\times\mathbf{E}^{tr}=\dfrac{\omega}{c}\mathbf{B},\\ \nabla\times H=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}D\Rightarrow\mathbf{k}\times\mathbf{B}=-\dfrac{\omega}{c}\mathbf{D}^{tr},\\ \nabla B=0,\Rightarrow\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}=0\\ \nabla D=0,\Rightarrow\mathbf{k}\cdot\mathbf{D}^{tr}=0\end{cases}$$

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}^{tr})=\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}^{tr})-k^2\mathbf{E}^{tr}=\frac{\omega}{c}\mathbf{k}\times\mathbf{B}=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{D}^{tr}=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon^{tr}\mathbf{E}^{tr}.$$

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}^{tr})=\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}^{tr})-k^2\mathbf{E}^{tr}=\frac{\omega}{c}\mathbf{k}\times\mathbf{B}=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{D}^{tr}=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon^{tr}\mathbf{E}^{tr}.$$

$$\Downarrow$$

$$-k^2\mathbf{E}^{tr}=-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon^{tr}\mathbf{E}^{tr}.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega^2(k)=c^2k^2/\varepsilon^{tr}(\omega,k).}$$

$$\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1 - \frac{2\pi e^2}{\omega}\int \frac{\mathbf{v}^2 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega - i/\tau}\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f^{(0)} d\Gamma =$$

$$= 1 - \frac{2\pi e^2}{\omega}\int \frac{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2}{k\,\mathrm{v}_z - \omega - i/\tau}\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f^{(0)} d\Gamma.$$

Высокочастотный предел

$$\varepsilon^{tr}(k\to 0,\omega) = 1 - \frac{2\pi e^2}{\omega^2 T}\int \left(\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2\right) f^{(0)} d\Gamma =$$

$$= 1 - \frac{4\pi n e^2}{\omega^2 m} = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}, \qquad \omega \gg k\,\mathrm{v}$$

$$\varepsilon^{tr}(k \to 0, \omega) = 1 - \frac{2\pi e^2}{\omega^2 T} \int \left(\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2\right) f^{(0)} d\Gamma = = 1 - \frac{4\pi n e^2}{\omega^2 m} = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}.$$

$$\omega^2(k) \approx \omega_{pl}^2.$$

Более аккуратный расчет показывает,

$$\omega^2(k) \approx \omega_{pl}^2 + c^2 k^2.$$

$$\boxed{\omega^2(k) \approx \omega_{pl}^2 + c^2k^2.}$$

Волны с частотой меньшей плазменной затухают и не могут распространяться в плазме.

При попадании электромагнитной волны на поверхность проводника *(плазмы)*: возникают *колебания электронов* (электрический ток), электромагнитное поле которого стремится компенсировать это воздействие, что приводит к практически полному отражению света. Ну а на больших частотах электроны начинают «не поспевать» за электромагнитной волной.
Особенно это заметно в электролитах, где тяжелые ионы переносят электрический ток… Для видимого света электролиты обычно прозрачны, а металлы нет, почему?

$$\boxed{\omega^2(k) \approx \omega_{pl}^2 + c^2 k^2.}$$

Волны с частотой меньшей плазменной затухают
и не могут распространяться в плазме.

В области низких ($\omega \ll vk$) частот действительная часть поперечной компоненты диэлектрической проницаемости $\varepsilon_t$ приближенно равна

$$\operatorname{Re} \varepsilon_t(\omega \ll vk) \approx 1 - \frac{1}{k^2 r_D^2}.$$

Основной вклад в поперечную компоненту диэлектрической проницаемости $\varepsilon_t$ связан с ее мнимой частью, которую можно оценить как

$$\operatorname{Im} \varepsilon_t(\omega \ll vk) \approx \frac{\pi}{2} \frac{\Omega^2}{\omega k} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \sim \frac{\Omega}{\omega k r_D}.$$

# Экранированное взаимодействие…

Левитов Л. С., Шитов А. В. **Функции Грина. Задачи и решения.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 392 с. — ISBN 5-9221-0098-X.



что сумма диаграмм на рис. 8.3 описывает эффект *динамической экранировки* затравочного взаимодействия $V_{\mathbf{k}}$, изображенного волнистой линией. Закон дисперсии коллективных возбуждений $\omega(\mathbf{k})$ определяется полюсами заэкранированного взаимодействия.

Рис. 8.3

$$V_{\omega,\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}}^2\Pi(\omega,\mathbf{k}) + V_{\mathbf{k}}^3\Pi^2(\omega,\mathbf{k}) + \ldots = \frac{V_{\mathbf{k}}}{1 - V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k})}$$

Поляризационный оператор есть

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2i\int G(\varepsilon_-,\mathbf{p}_-)G(\varepsilon_+,\mathbf{p}_+)\frac{d^3p\,d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^4}, \tag{8.43}$$

где $\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \omega/2$, $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$, а множитель 2 возникает при суммировании по спинам.

Интегрируя по частоте $\varepsilon$, находим[9)]

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2\int \frac{n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+)}{\omega - \xi(\mathbf{p}_+) + \xi(\mathbf{p}_-)}\,\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{8.44}$$

$$V_{\omega,\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}}^2\Pi(\omega,\mathbf{k}) + V_{\mathbf{k}}^3\Pi^2(\omega,\mathbf{k}) + \ldots = \frac{V_{\mathbf{k}}}{1 - V_{\mathbf{k}}\Pi(\omega,\mathbf{k})}$$

Поляризационный оператор есть

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2i\int G(\varepsilon_-,\mathbf{p}_-)G(\varepsilon_+,\mathbf{p}_+)\frac{d^3p\,d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^4}, \tag{8.43}$$

где $\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \omega/2$, $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$, а множитель 2 возникает при суммировании по спинам.

Интегрируя по частоте $\varepsilon$, находим[9)]

$$\Pi(\omega,\mathbf{k}) = 2\int \frac{n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+)}{\omega - \xi(\mathbf{p}_+) + \xi(\mathbf{p}_-)}\,\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{8.44}$$

# Полюс экранированного взаимодействия – спектр продольных плазмонов. Где учитывается, что плазмоны продольные?

$$V_{\omega,\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}}^2 \Pi(\omega, \mathbf{k}) + V_{\mathbf{k}}^3 \Pi^2(\omega, \mathbf{k}) + \ldots = \frac{V_{\mathbf{k}}}{1 - V_{\mathbf{k}} \Pi(\omega, \mathbf{k})}$$

$$\boxed{V_{\mathbf{k}} \Pi(\omega, \mathbf{k}) = 1}$$

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\int \frac{n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+)}{\omega - \xi(\mathbf{p}_+) + \xi(\mathbf{p}_-)} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{8.44}$$

где $n(\mathbf{p})$ — распределение Ферми (ср. с выводом (7.85)).

**44a.** Рассмотрим случай малых $|\mathbf{k}| \ll p_0$. Приближенно можно записать

$$n(\mathbf{p}_-) - n(\mathbf{p}_+) = k\cos\theta\,\delta(|\mathbf{p}| - p_0), \tag{8.45}$$

где $\theta$ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Из-за $\delta$-функции интеграл в (8.44) оказывается ограничен на поверхность ферми-сферы:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \int\limits_0^\pi \frac{kv_F\cos\theta}{\omega - kv_F\cos\theta}\, d\cos\theta. \tag{8.46}$$

Интегрируя по $\theta$, находим

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \left(\frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1} - 1\right), \tag{8.47}$$

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \left( \frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 \right), \tag{8.47}$$

Закон дисперсии плазмона при малых $\mathbf{k}$ можно получить, разложив выражение (8.47) по $1/s$:

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = 2\nu_0 \left( \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{5s^4} + \ldots \right). \tag{8.48}$$

Тогда уравнение $V_{\mathbf{k}} \Pi(\omega, \mathbf{k}) = 1$ принимает вид

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{k^2 v_F^2}{\omega^2} \right) = 1, \tag{8.49}$$

где $\omega_0^2 = 4\pi n e^2/m$ ($n = p_0^3/(3\pi^2)$ — плотность частиц). Следовательно, закон дисперсии при малых $\mathbf{k}$ есть

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \omega_0^2 + \frac{3}{5}\mathbf{k}^2 v_F^2 + \mathrm{O}\left( \frac{(k v_F)^4}{\omega_0^4} \right). \tag{8.50}$$

# Вырожденная плазма

$$\varepsilon^{l}(k,\omega)=n_{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}n_{\beta}=1-\frac{4\pi e^{2}}{\omega}\int(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^{2}\frac{\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega-i/\tau}d\Gamma.$$

$$\varepsilon^{l}(k\to 0,\omega)\approx 1+\frac{4\pi e^{2}}{\omega^{2}}\int(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^{2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^{(0)}\left(1+\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\omega}+\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\omega}\right)^{2}+\dots\right)d\Gamma.$$

$$\varepsilon^{l}(k\to 0,\omega)\approx 1-\frac{4\pi e^{2}}{\omega^{2}}\left(\frac{1}{3}D(\varepsilon_{F})v_{F}^{2}+D(\varepsilon_{F})v_{F}^{2}\frac{1}{5}\frac{k^{2}v_{F}^{2}}{\omega^{2}}\right)=1-\frac{\omega_{pl}^{2}}{\omega^{2}}\left(1+\frac{3}{5}\frac{k^{2}v_{F}^{2}}{\omega^{2}}\right).$$

Спасибо за внимание!