2. ЗАДАНИЕ 2

2.16. (Л) а) Вычислить тензор диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы. Найти закон дисперсии поперечных колебаний в плазме. Описать затухание Ландау. б) (С) В графене, представляющем собой монослой графита, найти продольную диэлектрическую проницаемость и дисперсию продольных плазменных колебаний–плазмонов. [Бурмистров С.Н. Задачи по физической кинетике. – Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2016]. с)* Найти закон дисперсии поперечных колебаний в плазме, используя метод функций Грина, вычисляя соответствующий поляризационный оператор и исследуя полюса экранированного взаимодействия. Сравнить ответ с пунктом (а) [Л.С. Левитов, А.В. Шитов, Физматлит, 2002]. (+1 балл за работу в семестре)

Решение.

Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы.

Пусть $n(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ – функция распределения заряженных частиц, для которой кинетическое уравнение имеет стандартный вид

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}+\mathbf{F}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}=I_{\text{ст.}}.$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость частицы и $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]/c)$ – сила Лоренца, действующая на частицу с зарядом q. Рассматривая плазму как бесстолкновительную, мы должны пренебрегать интегралом столкновений $I_{\text{ст.}}$, который при малых отклонениях $\delta n=n-n_0$ от равновесной функции распределения $n_0(\mathbf{p})$ может быть аппроксимирован выражением $-\delta n/\tau$, где τ – характерное время между двумя последовательными столкновениями. Возможность такого приближения возникает тогда, когда $\frac{\partial \delta n}{\partial t}\sim\omega\delta n\gg\delta n/\tau$ или $\mathbf{v}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}\sim kv\delta n\sim v\delta n/L\gg\delta n/\tau$, где ω – характерная частота и $L\sim 1/k$ – характерная длина, на которых во времени и в пространстве меняются электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{B}$ поля. То есть, необходимо реализовать либо высокочастотную ситуацию $\omega\tau\gg 1$ или большую длину пробега частиц плазмы $\ell=v\tau\gg L$ ($kv\tau\gg 1$). Иными словами, должно быть $\omega\gg\nu$, $kv\gg\nu$, где $\nu\sim 1/\tau$ – частота столкновений. Итак, в бесстолкновительной плазме мы имеем следующие кинетические уравнения для функции распределения электронов с зарядом $(-e)$ и функции распределения ионов с зарядом Ze

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}-e(\mathbf{E}+[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]/c)\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}=0,\quad \frac{\partial n_i}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial n_i}{\partial \mathbf{r}}+Ze(\mathbf{E}+[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]/c)\frac{\partial n_i}{\partial \mathbf{p}}=0.$$

Полные плотность заряда $\rho(\mathbf{r},t)$ и плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ выразим через функции распределения как $\rho=e\int(Zn_i-n)d\Gamma$ и $\mathbf{j}=e\int\mathbf{v}(Zn_i-n)d\Gamma$, где $d\Gamma=2d^3p/(2\pi\hbar)^3$.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, мы должны включить в рассмотрение уравнения Максвелла, определяющие эволюцию электрического и магнитного полей под действием электрических зарядов и токов:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Все вместе, эти уравнения составляют самосогласованную замкнутую систему уравнений Власова для определения как функций распределения $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ и $n_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, так и полей $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать приближении с неподвижными ионами, то есть считать ионную функцию распределения равновесной $n_i = n_{i0}$. Это приближение оправдывается неравенством $M \gg m$, где M – масса иона и m – масса электрона. Электронную функцию представим в виде $n = n_0 + \delta n$. В силу электронейтральности плазмы и отсутствия электрических токов в равновесии имеем $\int (Zn_{i0} - n_0) d\Gamma = 0$ и $\int \mathbf{v}(Zn_{i0} - n_0) d\Gamma = 0$. Тогда $\rho = -e \int \delta n d\Gamma$ и $\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta n d\Gamma$.

В равновесии также $\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$. В линейном приближении по всем малым отклонениям от равновесных значений для электронов мы получим уравнение

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} - e(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c)\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Поскольку $\partial n_0(\varepsilon_p)/\partial \mathbf{p} = \mathbf{v} \partial n_0(\varepsilon)/\partial \varepsilon$, то член с магнитным полем полностью выпадает, и тогда

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} = e(\mathbf{v}\mathbf{E})\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}.$$

Если электрическое поле содержит одну гармонику: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$, то в силу линейности уравнения и $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \delta n_{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Соответственно, мы получим, что $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta n_{\mathbf{k},\omega} = ie(\mathbf{v}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega})\partial n_0/\partial \varepsilon$.

При решении этого уравнения происходит деление на нуль и возникает особая точка в виде полюса. Для выбора физического решения учтем, что возмущение функции распределения $\delta n_{\mathbf{k},\omega}$ электрическим полем $\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}$ должно представлять собой *запаздывающий отклик* на внешнее воздействие. Тогда, по принципу причинности, отклик $\delta n_{\mathbf{k},\omega}$ должен быть аналитической функцией частоты в верхней полуплоскости комплексной переменной ω, а полюсная особенность $\delta n_{\mathbf{k},\omega}$ может находиться только в нижней полуплоскости переменной ω. Этому условию удовлетворяет решение

$$\delta n_{\mathbf{k},\omega} = \frac{ie(\mathbf{v}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta}\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = ie(\mathbf{v}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega})\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\left(P\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\right)$$

с полюсом в точке $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v} - i\delta$ $(\delta \to +0)$ в нижней полуплоскости комплексной переменной ω. Другой взгляд на это состоит в том, что если бы мы оставили в правой части кинетического уравнения столкновительный член в виде $-\delta n/\tau$, то для фурье-образов мы сразу бы получили $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i/\tau)\delta n_{\mathbf{k},\omega} = ie(\mathbf{v}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega})\partial n_0/\partial \varepsilon$. То есть, бесстолкновительный режим соответствует не $1/\tau \equiv \nu = 0$, а $\tau \to \infty$, или $\nu \to +0$.

Поляризация электронной компоненты $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ вводится соотношениями $\rho = -\mathrm{div}\mathbf{P}$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)/\partial t$ [тогда выполнено $\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$]. Для фурье-компонент имеем

$\mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega} = -i\omega\mathbf{P}_{\mathbf{k},\omega}$, так что $\omega\mathbf{P}_{\mathbf{k},\omega} = e^2\int\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega})}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i\delta}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}d\Gamma$. Переписывая в компонентах, найдем восприимчивость $\chi_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k})$ из соотношения $P_\alpha = \frac{e^2}{\omega}E_\beta\int\frac{v_\alpha v_\beta}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i\delta}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\,d\Gamma = \chi_{\alpha\beta}E_\beta$, а затем и диэлектрическую проницаемость $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k})$ [согласно $D_\alpha = E_\alpha + 4\pi P_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}E_\beta$]:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi\chi_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega}\int\frac{v_\alpha v_\beta}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i\delta}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\,d\Gamma.$$

Вычисление интеграла сделаем следующим образом. Введем единичные векторы $\hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{\mathbf{k}}$ вдоль вектора скорости $\mathbf{v}$ и волнового вектора $\mathbf{k}$, т. е. $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$. Тогда имеем

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega^2}\int d\Gamma\, sv^2\,\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{\hat{v}_\alpha\hat{v}_\beta}{s-\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{k}}+i\delta}, \qquad s = \frac{\omega}{vk}.$$

Интегрирование по пространственному углу вектора $\hat{\mathbf{v}}$ приведет к некоторому тензору второго ранга, который зависит от двух индексов α и β. У нас имеется только два независимых тензора второго ранга: $\delta_{\alpha\beta}$ и $\hat{k}_\alpha\hat{k}_\beta$. Следовательно, интеграл по пространственному углу Ω должен обладать следующей структурой: $\int\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{\hat{v}_\alpha\hat{v}_\beta}{s-\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{k}}+i\delta} = A(s)\delta_{\alpha\beta} + B(s)\hat{k}_\alpha\hat{k}_\beta$. Чтобы найти функции $A(s)$ и $B(s)$, достаточно вычислить интеграл два раза: один раз для компонент $\alpha = \beta = z$, и второй раз для свертки. Выберем ось z вдоль вектора $\hat{\mathbf{k}}$. Тогда мы найдем, что $[x^2 = (x-s)^2 + 2s(x-s) + s^2]$

$$A + B = \int\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{\hat{v}_z^2}{s-\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{k}}+i\delta} = \int_0^\pi\frac{\sin\theta d\theta}{2}\frac{\cos^2\theta}{s-\cos\theta+i\delta} = -sW(s),$$

$$3A + B = \int\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{1}{s-\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{k}}+i\delta} = \int_0^\pi\frac{\sin\theta d\theta}{2}\frac{1}{s-\cos\theta+i\delta} = \frac{1-W(s)}{s},$$

где функция $W(s)$ равна

$$W(s) = 1 - \frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1+i\delta}.$$

При $s > 1$ (или $v < \omega/k$) функция $W(s)$ действительная. При $s < 1$ (или $v > \omega/k$) функция $W(s)$ содержит мнимую часть $\operatorname{Im}W = \pi s/2$. Эта особенность, которая возникает при скорости частицы v, превышающей фазовую скорость ω/k приводит к мнимой составляющей в диэлектрической проницаемости и специфическому затуханию в плазме – затуханию Ландау. Система из двух уравнений на $A(s)$ и $B(s)$ легко решается:

$$A(s) = \frac{1-W(s)+s^2W(s)}{2s} = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{1-s^2}{2s}\ln\frac{s+1}{s-1+i\delta}\right),$$

$$B(s) = \frac{-1+W(s)-3s^2W(s)}{2s} = -\frac{s}{2}\left(3 + \frac{1-3s^2}{2s}\ln\frac{s+1}{s-1+i\delta}\right).$$

В результате находим диэлектрическую проницаемость $\epsilon_{\alpha\beta}$:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k}) = \left(1 + \frac{4\pi e^2}{\omega^2}\int d\Gamma\, sv^2A(s)\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\right)\delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{4\pi e^2}{\omega^2}\int d\Gamma\, sv^2B(s)\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\right)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}.$$

Разделим диэлектрическую проницаемость $\epsilon_{\alpha\beta}$ на продольную и поперечную компоненты, то есть представим её в виде

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_l k_\alpha k_\beta / k^2 + \epsilon_t \left(\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2\right).$$

Если электрическое поле представить как сумму продольной и поперечной (по отношению к вектору $\mathbf{k}$) составляющих, то есть как $\mathbf{E} = \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_t$, где $\mathbf{E}_l = (\mathbf{E}\mathbf{k})\mathbf{k}/k^2$ и $\mathbf{E}_t = \mathbf{E} - \mathbf{E}_l$, так что $(\mathbf{k}\mathbf{E}_t) = 0$, то вектор $D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta = \{\epsilon_l k_\alpha k_\beta / k^2 + \epsilon_t \left(\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2\right)\} \times (E_{l\beta} + E_{t\beta}) = \epsilon_l E_{l\alpha} + \epsilon_t E_{t\alpha} \equiv D_{l\alpha} + D_{t\alpha}$, то есть $\mathbf{D}_l = \epsilon_l \mathbf{E}_l$, $\mathbf{D}_t = \epsilon_t \mathbf{E}_t$.

Для продольной и поперечной компонент диэлектрической проницаемости находим окончательно:

$$\epsilon_l = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\Gamma\, \frac{A(s) + B(s)}{s} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \left(1 - \frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1+i\delta}\right) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$\epsilon_t = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\Gamma\, \frac{A(s)}{s} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = 1 + \frac{2\pi e^2}{k^2} \int \left(1 + \frac{1-s^2}{2s} \ln \frac{s+1}{s-1+i\delta}\right) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Здесь $g(\varepsilon)$ – плотность состояний, то есть $d\Gamma = g(\varepsilon)d\varepsilon$, скорость электронов $v = v(\varepsilon)$ и параметр s равен $s = \omega/(vk)$.

Анализ продольной компоненты ϵ_l.

Рассмотрим продольную компоненту диэлектрической восприимчивости $\epsilon_l(\omega, \mathbf{k})$. В области высоких частот ($\omega \gg vk$, $s \gg 1$) можно разложить подынтегральное выражение по $1/s \ll 1$ и найти, что $\epsilon_l(\omega \gg vk) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{3s^2} + \frac{1}{5s^4} + \dots\right) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2}{3\omega^2} \int_0^\infty v^2 \left(1 + \frac{3}{5}\frac{k^2 v^2}{\omega^2} + \dots\right) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon$. Для дальнейших преобразований мы воспользуемся следующим соотношением, справедливым при $r > -1/2$ для плотности состояний $g(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$ (для энергии частиц $\varepsilon = mv^2/2$):

$$\int \varepsilon^r \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} d\Gamma = \int_0^\infty \varepsilon^r \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon = -\left(r + \frac{1}{2}\right) \int_0^\infty \varepsilon^{r-1} n_0(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon = -\left(r + \frac{1}{2}\right) \int \varepsilon^{r-1} n_0(\varepsilon) d\Gamma.$$

Используя это, мы легко получим, что

$$\epsilon_l(\omega \gg vk) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{\omega^2}\right), \qquad \Omega^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}.$$

Частота Ω называется плазменной частотой и является важнейшей характеристикой плазмы. Плотность электронов n введена как обычно $n = \int n_0(\varepsilon) d\Gamma$, а угловые скобки обозначают здесь и ниже стандартное усреднение с функцией распределения n_0: $\langle (\dots) \rangle = \frac{\int (\dots) n_0(\varepsilon) d\Gamma}{\int n_0(\varepsilon) d\Gamma} \equiv \frac{1}{n} \int (\dots) n_0(\varepsilon) d\Gamma$.

Вычисление мнимой части продольной компоненты диэлектрической проницаемости можно точно провести в аналитическом виде, с учетом $g(\varepsilon) = \frac{m^2 v}{\pi^2 \hbar^3}$:

$$\operatorname{Im} \epsilon_l = -\pi \frac{4\pi e^2}{k^2} \int_{v > \omega/k} \frac{\omega}{2vk} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon = \pi \frac{4\pi e^2}{k^2} \frac{\omega}{2k} \frac{m^2}{\pi^2 \hbar^3} n_0\!\left(\frac{m\omega^2}{2k^2}\right) = \omega \frac{\Omega^2}{k^2} \frac{m^3}{nk} \frac{n_0(m\omega^2/2k^2)}{2\pi\hbar^3}.$$

Используя разложение подынтегрального выражения при $s \ll 1$, для области низких частот $\omega \ll vk$ получим, что

$$\epsilon_l(\omega \ll vk) \approx 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\Gamma \left(1 + i\frac{\pi s}{2}\right) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = 1 + \frac{\Omega^2}{k^2} \left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle + i\omega \frac{\Omega^2}{k^2} \frac{m^3}{nk} \frac{n_0(\varepsilon = 0)}{2\pi\hbar^3}.$$

Отсюда можно найти статическую диэлектрическую проницаемость, равную $\epsilon_l(0,k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}$, где $r_D^{-2} = \Omega^2 \langle \frac{1}{v^2} \rangle$, которая определяет экранирование электрического заряда в плазме. Действительно, фурье-компонента потенциала φ_k для точечного заряда величиной q равна $\varphi_k = \frac{4\pi q}{k^2 \epsilon_l(0,k)} = \frac{4\pi q}{k^2 + r_D^{-2}}$. Соответствующее пространственное поведение потенциала отвечает дебаевскому/томас-фермиевскому экранированию $\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}$ с радиусом экранирования r_D. Простое вычисление дает

$$r_D^2 = \begin{cases} \frac{T}{4\pi n e^2}, & T \gg \varepsilon_F \text{ (невырожденная плазма)}, \langle v^{-2} \rangle = m/T \\ \frac{\varepsilon_F}{6\pi n e^2} \equiv \frac{1}{4\pi e^2 \nu(\varepsilon_F)}, & T \ll \varepsilon_F \text{ (вырожденная плазма)}, \langle v^{-2} \rangle = 3/v_F^2 \end{cases},$$

где ε_F – энергия Ферми и T – температура.

Рассмотрим возможность существования продольных колебаний в плазме. Пусть электрическое поле в плазме $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \equiv \mathbf{E}_l(\mathbf{r},t) \sim \mathbf{E}_l \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$ – продольное, то есть $\mathbf{E}_l = E\mathbf{k}/k$. Тогда имеем $\operatorname{rot} \mathbf{E}_l = i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}_l] = 0$ и, следовательно, $\partial \mathbf{B}/\partial t = -i\omega \mathbf{B} = 0$. Магнитное поле отсутствует, $\mathbf{B} = 0$, и нулевое значение $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$ дает $\partial \mathbf{D}/\partial t = -i\omega \mathbf{D} = 0$, то есть $\mathbf{D} = 0$. С другой стороны, для продольного поля вектор электрической индукции равен $\mathbf{D} = \epsilon_l(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_l = 0$. Нетривиальные решения возможны только если $\epsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = 0$, которое определяет дисперсию продольных плазменных колебаний. Подставляя в это уравнение продольную диэлектрическую проницаемость, найденную выше, имеем

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{\omega^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \approx \Omega^2 + k^2 \langle v^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \omega \approx \Omega + \frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{2\Omega}.$$

Второе слагаемое, зависящее от волнового вектора k, мало по сравнению с плазменной частотой Ω. Таким образом, в плазме существуют слабодисперсные продольные плазменные (ленгмюровские) волны, или плазмоны, в принципе слабозатухающие.

Поперечные колебания в плазме.

Поперечные колебания электрического поля $\mathbf{E}_t(\mathbf{r},t) \sim \mathbf{E}_t \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$ подразумевают равенство $\mathbf{kE}_t = 0$. Так как $\mathbf{D}_t = \epsilon_t \mathbf{E}_t$, то и для вектора индукции также будет $\mathbf{kD}_t = 0$. Согласно уравнениям Максвелла для фурье-компонент электрического и магнитного полей мы найдем, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_t = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}_t}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}_t = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_t = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \quad \mathbf{kB} = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c}\mathbf{D}_t, \quad \mathbf{kD}_t = 0.$$

Отсюда, исключая магнитное поле $\mathbf{B}$, получим $[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_t]] = \mathbf{k}(\mathbf{kE}_t) - k^2 \mathbf{E}_t = \frac{\omega}{c}[\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = -\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}_t = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_t \mathbf{E}_t$. Чтобы существовало нетривиальное решение $\mathbf{E}_t \neq 0$, необходимо удовлетворить следующему дисперсионному уравнению:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_t(\omega, k).$$

Для высокочастотных ($\omega \gg vk$) поперечных колебаний учет пространственной дисперсии в диэлектрической проницаемости ϵ_t не существенен в силу $v \ll c$, и можно положить $\epsilon_t(\omega, k) \approx \epsilon_t(\omega, 0) = 1 - \Omega^2/\omega^2$. Это дает

$$\omega^2 = \Omega^2 + c^2 k^2.$$

При $\omega \gg \Omega$ влияние плазмы не сказывается, и $\omega = ck$, как и в вакууме. Частоты $\omega < \Omega$ отвечают мнимым значениям волнового вектора $\mathbf{k}$. Физически это означает, что колебания с такими частотами затухают и не могут распространяться вглубь плазмы.

Выпишем мнимую часть поперечной компоненты диэлектрической проницаемости (она получается интегрированием по частям с учетом зависимости $g(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon} \sim v$):

$$\mathrm{Im}\,\epsilon_t = -\pi \frac{2\pi e^2}{k^2} \int_{v>\omega/k} \frac{v^2k^2 - \omega^2}{2\omega v k} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\, g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\pi \Omega^2}{2\omega k} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \frac{\int_{m\omega^2/2k^2}^{\infty} n_0(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^{\infty} n_0(\varepsilon) d\varepsilon}.$$

В области низких частот ($\omega \ll vk$, $s \ll 1$) действительная часть поперечной компоненты диэлектрической проницаемости ϵ_t приближенно равна

$$\mathrm{Re}\,\epsilon_t(\omega \ll vk) \approx 1 - \frac{1}{k^2 r_D^2}.$$

Основной вклад в поперечную компоненту диэлектрической проницаемости ϵ_t связан с её мнимой частью, которую можно оценить как

$$\mathrm{Im}\,\epsilon_t(\omega \ll vk) \approx \frac{\pi}{2} \frac{\Omega^2}{\omega k} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \sim \frac{\Omega}{\omega k r_D}.$$

Подстановка приближенного значения ϵ_t в дисперсионное уравнение дает

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(i \frac{\pi \Omega^2}{2\omega k} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \right).$$

Отсюда находим для дисперсии длинноволновых ($kr_D \ll 1$) поперечных колебаний

$$\omega = -i \frac{2}{\pi} \frac{c^2 k^3}{\Omega^2 \langle v^{-1} \rangle}.$$

Чисто мнимое значение частоты означает, что такие плазменные колебания являются апериодическими и сильно затухающими.

Двумерный случай.

Рассмотрим двумерный слой плазмы, лежащий в плоскости $z = 0$. Для функции распределения электронов $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, *лежащий в плоскости слоя*, запишем кинетическое уравнение в бесстолкновительном случае

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ – скорость электронов и $\mathbf{F} = -e\left(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c\right)$ – сила Лоренца, действующая на электрон с зарядом $(-e)$. Для малых отклонений $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ функции распределения от равновесной функции $n_0(\varepsilon_p)$ с учетом того, что $\partial n_0(\varepsilon_p)/\partial \mathbf{p} = \mathbf{v} \partial n_0/\partial \varepsilon$, получим

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} = e(\mathbf{v}\mathbf{E}) \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon},$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, z = 0, t)$ – напряженность электрического поля в слое. Если электрическое поле содержит гармонику $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$, то в силу линейности уравнения и $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \delta n_{\mathbf{k},\omega} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Принимая во внимание запаздывающий характер отклика на электрическое поле, сразу запишем, что

$$\delta n_{\mathbf{k},\omega} = \frac{ie(\mathbf{v}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}(z=0))}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}.$$

Соответственно, индуцированная возмущением электрического поля плотность поляризационных зарядов будет равна

$$\rho_{\mathbf{k},\omega} = -e \int \delta n_{\mathbf{k},\omega} \frac{2d^2p}{(2\pi\hbar)^2} = -ie^2 \int \frac{(\mathbf{v}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}(z=0))}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{2d^2p}{(2\pi\hbar)^2}.$$

Рассмотрим входящий в это выражение интеграл:

$$\mathbf{I}(\omega, \mathbf{k}) = \int \frac{\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\delta} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{2d^2p}{(2\pi\hbar)^2}.$$

Интегрирование по плоскому углу φ между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ приведет к некоторому вектору, направленному вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, именно,

$$\mathbf{I}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{k^2} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} A(s) \frac{2d^2p}{(2\pi\hbar)^2}.$$

Здесь $s = \omega/vk$, и функция $A(s)$ определяется выражением [подстановка $x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$]

$$A(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\cos\varphi}{s - \cos\varphi + i\delta} = \begin{cases} -1 + s/\sqrt{s^2-1}, & s > 1, \\ -1 - is/\sqrt{1-s^2}, & s < 1. \end{cases}$$

Появление мнимой части в $A(s)$ связано с механизмом затухания Ландау, когда скорость частицы v превышает фазовую скорость волны ω/k. После перехода от интегрирования по импульсу к интегрированию по энергии $\varepsilon = p^2/2m$ плотность поляризационных зарядов $\rho_{\mathbf{k},\omega}$ определяется выражением [$g(\varepsilon) = \frac{m}{\pi\hbar^2} \equiv \frac{1}{\pi e^2 a_B}$]

$$\rho_{\mathbf{k},\omega} = -ie^2 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}(z=0))}{k^2} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} A(s) \frac{2d^2p}{(2\pi\hbar)^2} = -\frac{i(\mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}(z=0))}{\pi k^2 a_B} \int_0^\infty \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} A(s) d\varepsilon,$$

где через $a_B = \hbar^2/me^2$ обозначен боровский радиус.

Поляризованные заряды в слое с объемной плотностью $\rho_V(\mathbf{r}, z) = \rho(\mathbf{r})\delta(z)$ приведут к появлению поляризационного потенциала

$$\varphi(\mathbf{r}, z) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\delta(z')}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 + (z-z')^2}} d^2r' dz' = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\, d^2r'}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 + z^2}}.$$

Делая справа и слева фурье-преобразование и пользуясь тем, что

$$\int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2r}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kr\cos\varphi) d\varphi r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{J_0(kr) r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{2\pi}{k} e^{-k|z|},$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого индекса, находим следующую связь между фурье-компонентами потенциала и плотности поляризационных зарядов, возникающих в бесконечно тонком слое:

$$\varphi_{\mathbf{k},\omega}(z) = \frac{2\pi}{k} e^{-k|z|} \rho_{\mathbf{k},\omega}.$$

Зная потенциал поляризационных зарядов, мы можем найти соответствующую напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в точке $z = 0$ или поляризацию $\mathbf{P}$ согласно $\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{P}$. Нас интересует компонента поля, параллельная электронному слою, и поскольку в нашем случае $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$, то

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}(z) = i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k},\omega}(z) = \frac{2\pi i\mathbf{k}}{k} e^{-k|z|} \rho_{\mathbf{k},\omega}.$$

Отсюда, положив значение $z = 0$, получим следующие выражения для вектора поляризации $\mathbf{P}_{\mathbf{k},\omega}$:

$$4\pi\mathbf{P}_{\mathbf{k},\omega} = \frac{2\pi i\mathbf{k}}{k}\rho_{\mathbf{k},\omega} = \frac{2\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega})}{k^3 a_B} \int_0^\infty \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} A(s) d\varepsilon,$$

и для коэффициента поляризуемости $\chi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$:

$$4\pi\chi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi\chi_l(\omega, k)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} = \frac{2}{k a_B}\left(\int_0^\infty \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} A(s) d\varepsilon\right)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для продольной диэлектрической проницаемости $\epsilon_l(\omega, k)$:

$$\epsilon_l(\omega, k) = 1 + 4\pi\chi_l(\omega, k) = 1 + \frac{2}{k a_B}\int_0^\infty \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} A(s) d\varepsilon.$$

Проанализируем сначала наиболее интересный случай нулевой температуры, когда электронная компонента представляет собой вырожденный ферми-газ. Тогда можно положить $\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ и сразу получить для продольной проницаемости выражение

$$\epsilon_l(\omega, k) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{k a_B}\left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - v_F^2 k^2}}\right) & \omega > v_F k, \\ 1 + \frac{2}{k a_B}\left(1 + \frac{i\omega}{\sqrt{v_F^2 k^2 - \omega^2}}\right) & \omega < v_F k. \end{cases}$$

Статическое значение диэлектрической проницаемости $\epsilon_l(0, k) = 1 + 2/k a_B$ означает, что электрическое поле точечного заряда величиной q в тонкой металлической пленке начинает экранироваться на расстояниях порядка боровского радиуса a_B. Однако, в отличие от объемного металла, экранирование здесь гораздо менее эффективно, становится неэкспоненциальным и напряженность поля от внесенного в слой заряда q спадает на больших расстояниях степенным образом как $q a_B^2/r^3$.

Спектр плазменных колебаний или плазмонов определяется из дисперсионного уравнения $\epsilon_l(\omega, k) = 0$. Предполагая $\omega > v_F k$, получим уравнение

$$1 + \frac{k a_B}{2} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - v_F^2 k^2}} \quad \text{или} \quad \omega^2 = k\frac{v_F^2}{a_B}\frac{(1 + k a_B/2)^2}{1 + k a_B/4}.$$

Отсюда, в естественном длинноволновом пределе $ka_B \ll 1$ имеем дисперсионное соотношение для плазмонов с корневой зависимостью от волнового вектора $\omega(k) = v_F\sqrt{k/a_B} = \sqrt{2\pi ne^2k/m}$. При переходе к последнему равенству мы учли, что для двумерного ферми-газа электронов импульс Ферми p_F и скорость Ферми v_F связаны с плотностью электронов n соотношением $p_F = mv_F = \hbar(2\pi n)^{1/2}$. При конечной температуре спектр плазмонов в длинноволновом $ka_B \ll 1$ пределе остается неизменным. Воспользовавшись разложением $A(s) \approx 1/2s^2$ при $s \gg 1$ и $g(\varepsilon) = \frac{m}{\pi\hbar^2}$, получим

$$\epsilon_l = 1 + \frac{2e^2k}{\hbar^2\omega^2}\int_0^\infty \varepsilon\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}d\varepsilon = 1 - \frac{2e^2k}{\hbar^2\omega^2}\int_0^\infty n_0(\varepsilon)d\varepsilon = 1 - \frac{2\pi ne^2k}{m\omega^2}.$$

Условие $\epsilon_l = 0$ дает тот же самый корневой спектр плазмонов. При конечной температуре механизм затухания Ландау приведет к незначительному затуханию двумерных плазмонов.

Плазмоны в графене.

В графене энергия электронов *в двух подзонах* описывается линейной функцией импульса $\varepsilon_p = \pm vp$, где v – фиксированная скорость электронов, а плотность состояний $g(\varepsilon) = \int \frac{2d^2p}{(2\pi\hbar)^2}[\delta(\varepsilon - vp) + \delta(\varepsilon + vp)] = \frac{|\varepsilon|}{\pi\hbar^2v^2}$ (кратность вырождения спектра по спину электронов и двум подзонам $\nu = 2 \times 2 = 4$).

Воспользуемся предыдущими результатами и запишем общее выражение для продольной диэлектрической проницаемости двумерного слоя электронов

$$\epsilon_l(\omega, k) = 1 + \frac{2\pi e^2}{k}\int \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}A(s)d\Gamma = 1 + \frac{2\pi e^2}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}A(s)g(\varepsilon)d\varepsilon,$$

где $n_0(\varepsilon) = 1/(1 + e^{(\varepsilon-\mu)/T})$ – функция распределения Ферми, а функцию $A(s) = -1 + s/\sqrt{s^2 - 1}$ $(s > 1)$ можно вынести из под знака интеграла, так как ее аргумент $s = \omega/vk$ не зависит от импульса . В результате после перехода от интегрирования по импульсу к интегрированию по энергии с введением плотности состояний $g(\varepsilon)$ мы получим для диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_l(\omega, k) = 1 + \frac{2\pi e^2}{k}A\Big(\frac{\omega}{vk}\Big)\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}g(\varepsilon)d\varepsilon = 1 - \frac{2\pi e^2}{k}A\Big(\frac{\omega}{vk}\Big)\frac{1}{\pi\hbar^2v^2}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varepsilon}{4T}\frac{|\varepsilon|}{\operatorname{ch}^2\frac{\varepsilon-\mu}{2T}} =$$

$$= 1 - \frac{2e^2T}{\hbar^2v^2k}A\Big(\frac{\omega}{vk}\Big)\left\{-\int\limits_{\frac{\mu}{2T}}^{\infty}\frac{(\frac{\mu}{2T} - x)dx}{\operatorname{ch}^2 x} + \int\limits_{-\frac{\mu}{2T}}^{\infty}\frac{(\frac{\mu}{2T} + x)dx}{\operatorname{ch}^2 x}\right\} = 1 - \frac{4e^2T}{\hbar^2v^2k}A\Big(\frac{\omega}{vk}\Big)\ln\Big(2\operatorname{ch}\frac{\mu}{2T}\Big).$$

Дисперсию плазмонов находим из уравнения $\epsilon_l(\omega, k) = 0$, решение которого несложно: $\omega^2 = \frac{\varkappa k}{1+v^2k/4\varkappa} + v^2k^2$, $\quad \varkappa = \frac{2e^2T}{\hbar^2}\ln(2\operatorname{ch}\frac{\mu}{2T})$. В наиболее интересной длинноволновой области $k \ll \varkappa/v^2$ плазменные колебания (плазмоны) имеют ту же корневую зависимость от волнового вектора $\omega(k) = \sqrt{\varkappa k}$, как и для обычных двумерных систем, но с температурной зависимостью $\varkappa$ при $\mu \lesssim T$.