Физическая Кинетика

Билеты к экзамену

ФОПФ 62X

Эти билеты составлены студентами и могут содержать смысловые ошибки — будьте осторожны.
Примечание для составителей: используйте окружение \paper{номер билета}{формулировка билета}, чтобы автоматически добавить билет в оглавление, выделить ему новую страницу, оформить все билеты одинаковым шрифтом.

Содержание

1. Марковские случайные процессы. Что такое случайный процесс? Условная вероятность случайного процесса? Марковский процесс? Пропагатор? Теорема Чемпена-Колмогорова. Дифференциальная форма теоремы Чемпена-Колмогорова. Привести в качестве примера дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет пропагатор пуассоновского случайного процесса и, решив уравнение, найти пропагатор в явном виде. Задача: решить уравнение Больцмана в тау-приближении, когда электрическое поле зависит от времени. Найти электрический ток в произвольный момент времени.

Марковские случайные процессы

Случайный процесс - последовательность случайных величин $x_1, ..., x_n$.
Условная вероятность случайного процесса - $P(x_n|x_{n-1})$, вероятность перейти в состояние x_n из состояния x_{n-1}.
Марковский процесс - случайный процесс, в котором вероятность перехода в следующее состояние зависит исключительно от предыдущего состояния и ни от чего больше.
Пропагатор - вероятность перехода из одного состояния системы в другое через некоторое время $(t - t')$.(????)

Теорема Чемпена-Колмогорова

Уравнение Чемпена-Колмогорова:

$$P(t + s) = P(t)P(s)$$

где $P(t)$ — оператор, преобразующий распределение вероятностей в начальный момент времени в распределение вероятности в момент времени $t > 0$. Для дискретных марковских процессов это матрица переходов. Для непрерывных марковских процессов эта теорема следует из определения полной вероятности перехода.
Дифференциальное уравнение Чемпена-Колмогорова:

$$\partial_t P(n, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (W(n|m, t)P(m, t) - W(m|n, t)P(n, t))$$

где $W(n|m, t)$ - вероятность перейти из состояния m в состояние n. Уравнение Чемпена-Колмогорова справедливо для всех дискретных марковских процессов.

Пример

Рассмотрим пуассоновский процесс (Рис. 1)

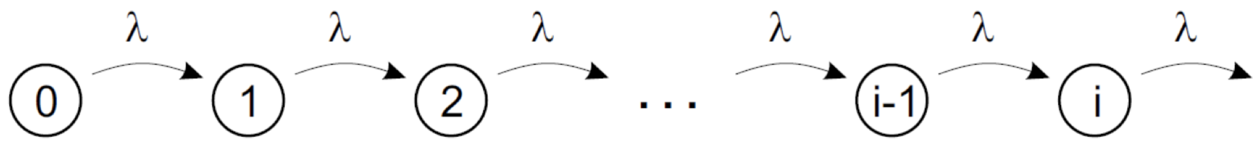

Рис. 1: Пуассоновский процесс.

$$\partial T(n, t|n', t') = \gamma T(n - 1, t|n', t') - \gamma T(n, t|n', t')$$

Чтобы найти решение, сделаем дискретное преобразование Фурье:

$$G(k,t,t') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T(n,t|n',t') \exp\{(ik(n-n'))\}$$

$$\partial_t G(k,t,t') = \gamma(\exp\{(ik)\} - 1) G(k,t,t')$$

Используем начальное условие:

$$T(n,tn],t-0) = \delta_{nn'} \Rightarrow G(k,t,t) = 1$$

$$G(k,t,t') = \exp\{(\gamma(t-t')(\exp\{(ik)\}-1))\} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{(ikn)\} \frac{\gamma^n (t-t')^n}{n!} \exp\{(-\gamma(t-t'))\} =$$

$$= \sum_{n=n'}^{\infty} \exp\{(ik(n-n'))\} \frac{\gamma^n (t-t')^{n-n'}}{(n-n')!} \exp\{(-\gamma(t-t'))\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T(n,t|n',t') \exp\{(ik(n-n'))\}$$

$$T(n,t|n',t') = \begin{cases} \frac{\gamma^n (t-t')^{n-n'}}{(n-n')!} \exp\{(-\gamma(t-t'))\}, n > n' \\ 0, n < n' \end{cases}$$

Задача

Уравнение Больцмана в тау-приближении с переменным электрическим полем:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} - e\vec{E}(t)\frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} - \frac{e}{mc}[\vec{v},\vec{B}]\frac{\partial \delta f}{\partial \vec{p}} = I = -\frac{\delta f}{\tau}$$

применим преообразование Фурье по t:

$$-i\omega \delta f(p,\omega) + eE_i(\omega)v_i \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk} p_j B_k \frac{\partial \delta f}{\partial p_i} = -\frac{\delta f}{\tau}$$

$$\delta f = \vec{p}\vec{A}(\varepsilon,\omega)$$

$$\left(-i\omega + \frac{1}{\tau}\right) p_i A_i + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk} p_j B_k \frac{\partial}{\partial p_i}(p_k A_k) = -eE_i(\omega) v_i \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$$

$$\epsilon_{ijk} p_j B_k \frac{\partial}{\partial p_i}(p_k A_k) = \epsilon_{ijk} p_j B_k (\delta_{ik} A_k + p_k \frac{\partial A_k}{\partial \varepsilon} v_i) \overset{\epsilon_{ijk} p_j j v_i = 0}{=} \epsilon_{ijk} A_i p_j B_k$$

$$\left(-i\omega + \frac{1}{\tau}\right) p_i A_i + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk} p_j B_k A_i = -\frac{e}{m} E_i(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} p_i$$

поменяем индексы во втором слагаемом и сократим на p_i

$$\left(-i\omega + \frac{1}{\tau}\right) A_i + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk} B_j A_k = -\frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} E_i(\omega)$$

$$\Gamma_{ik} A_k = -\frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} E_i(\omega)$$

где $\Gamma_{ik} = \left(-i\omega + \frac{1}{\tau}\right)\delta_{ik} + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk} B_j$

$$A_k = -\frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\Gamma^{-1}_{ik} E_i(\omega)$$

$$\delta f = -\frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} p_k \Gamma^{-1}_{ki} E_i(\omega)$$

$$j_i(\omega) = 2\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e\delta f v_i = 2e^2 \int \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) v_i v_k (\Gamma^{-1}_{ki} E_i) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} =$$
$$= e^2 \Gamma^{-1}_{ij} E_j \int_0^\infty \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) 4\pi \frac{v^2}{3} \frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = e^2 \Gamma^{-1}_{ij} E_j \int_0^\infty \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) \frac{2}{3m} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon =$$
$$= \frac{2e^2}{3m} \Gamma^{-1}_{ij} E_j \varepsilon_F g(\varepsilon_F) = \frac{e^2 n}{m} \Gamma^{-1}_{ij} E_j(\omega)$$

Пусть $\vec{B}$ направлено вдоль оси z, тогда

$$\Gamma_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} - i\omega & -\frac{eB}{mc} & 0 \\ \frac{eB}{mc} & \frac{1}{\tau} - i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} - i\omega \end{pmatrix}$$

Обозначим $\omega_0 = \frac{|e|B}{mc}$. По определению $j_i(\omega) = \sigma_{ik}(\omega) E_k(\omega)$ Тогда получаем

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1-i\omega\tau}{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_0\tau)^2} & -\frac{\omega_0\tau}{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_0\tau)^2} & 0 \\ \frac{\omega_0\tau}{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_0\tau)^2} & \frac{1-i\omega\tau}{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_0\tau)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-i\omega\tau} \end{pmatrix}$$

$$j_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \exp\{(-i\omega t)\} \sigma_{ik}(\omega) E E_k(\omega) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int d\omega \exp\{(-i\omega t)\} \int dt_1 \sigma_{ik}(t_1) \exp\{(i\omega t_1)\} \int dt_2 E_k(t_2) \exp\{(i\omega t_2)\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int dt_1 \int dt_2 \sigma_{ik}(t_1) E_k(t_2) \int d\omega \exp\{(i\omega(t_1+t_2-t))\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int dt_1 \int dt_2 \sigma_{ik}(t_1) E_k(t_2) \delta(t-(t_1+t_2)) = \int dt_1 \sigma_{ik}(t_1) E_k(t=t_1) = \int \sigma_{ik}(t-t') E_k(t') dt'$$

Вычислим $\sigma_{ik}(t)$:

$$\sigma_{ik}(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \sigma_{ik}(\omega) \exp\{(i\omega t)\}$$

Полюсы $\sigma_{ik}(\omega)$:

- $\omega_1 = \omega_0 - \frac{i}{\tau}$
- $\omega_2 = -\omega_0 - \frac{i}{\tau}$
- $\omega_3 = -\frac{i}{\tau}$

все в нижней полуплоскости, поэтому $\sigma_{ik}(t<0) = 0$. При $t > 0$ получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int \exp\{(i\omega t)\} \frac{1-i\omega\tau}{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_0\tau)^2} d\omega = \frac{\exp\{(-t/\tau)\}}{\tau} \cos\omega_0 t$$
$$\frac{1}{2\pi}\int \exp\{(i\omega t)\} \frac{\omega_0\tau}{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_0\tau)^2} d\omega = \frac{\exp\{(-t/\tau)\}}{\tau} \sin\omega_0 t$$

В результате получаем:

$$\sigma_{ik}(t) = \frac{e^2 n}{m} \exp\{(-t/\tau)\} \theta(t) \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t & -\sin\omega_0 t & 0 \\ \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, можно посчитать ток в любой момент времени:

$$j_i(t) = \int_\infty^t \sigma_{ik}(t-t') E_k(t') dt'$$

2. Детерминистический процесс как частный случай марковского случайного процесса. Оператор Лиувилля. Уравнение на пропагатор и вероятность. 4 Рассмотреть второй закон Ньютона в качестве детерминистического процесса и вывести дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию вероятности. Вывести уравнение больцмана со столкновительным членом общего вида из уравнения Чемпена-Колмогорова. Стационарные решение уравнения больцмана, условие «детального баланса». При каких ограничениях можно использовать кинетическое уравнение для описания разреженных газов? Можно ли применять уравнение Больцмана для жидкостей или плотных газов? Задача: Решить уравнение Больцмана в бесстолкновительном пределе, когда однородное магнитное поле (не зависящее от времени) направлено вдоль оси z. Найти xy-компоненту тензора проводимости.

Это пока только условие билета). Поехали по порядку с определениями.
(Взято из 5 лекции Щелкачёва)

1. **Детерминистический процесс как частный случай марковского случайного процесса.**

   Определение(вообще такого слова нет - его лектор сам придумал)мб имеется ввиду детерминированный, тогда это строго определенный процесс.(?)

   Согласно презентации это процесс, описываемый уравнениями:

   $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(x(t), t) \\ T\left(x, t | x', t'\right) = \delta\left(x - \Phi_{t-t'}\left(x'\right)\right) \end{cases} \tag{1}$$

   Где $\Phi_{t-t'}\left(x'\right)$ - решение 1 с начальным условием: $x\left(t = t'\right) = x'$, что эквивалентно $T\left(x, t+0 | x', t\right) = \delta\left(x - x'\right)$

   Формально он является «случайным процессом».

2. **Оператор Лиувилля** *получается из уравнения Лиувилля* $\frac{\partial}{\partial t} f^{(N)}(Q,t) + \left\{f^{(N)}(Q,t), H(Q,t)\right\} = 0$

   Собственно вот сам оператор: $\frac{\partial}{\partial t} f^{(N)}(Q,t) = -i\hat{L} f^{(N)}(Q,t)$.

   Если гамильтониан не зависит от времени, то $f^{(N)}(Q,t) = \exp\left(-i\hat{L}t\right) f^{(N)}(Q, t=0)$

3. **Уравнение на пропагатор и вероятность.**

   Подставим вместо $f^{(N)}(Q,t) = T\left(x, t | x', t'\right)$ и забьем на i(?), тогда

   $$\frac{\partial}{\partial t} T\left(x, t | x', t'\right) = -\hat{\mathrm{L}} \cdot T\left(x, t | x', t'\right) \tag{2}$$

   Воспользуемся свойством пропагатора:

   $$\frac{\partial}{\partial t} T\left(x, t | z, t'\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathrm{T(x}, t + \Delta t | \mathrm{z}, t) - \delta(x - z))$$

   Вспомним уравнение Чепмена-Колмогорова:

   $$T\left(x_3, t_3 | x_1, t_1\right) = \int T\left(x_3, t_3 | x_2, t_2\right) T\left(x_2, t_2 | x_1, t_1\right) dx_2$$

   Заменим некоторые переменные и $T\left(x_2, t_2 | x_1, t_1\right)$ на $\varphi(\mathrm{z})$.

   $$T\left(x, t | x', t'\right) = \int T\left(x, t | z, t'\right) \varphi(\mathrm{z}) dz$$

Наконец подставим в 2

$$\hat{\mathrm{L}}(x,t)\cdot\varphi(x) = -\int dz \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\mathrm{T}(\mathrm{x},t+\Delta t|\mathrm{z},t) - \delta(x-z))\varphi(\mathrm{z}) \tag{3}$$

Или в операторном виде:

$$\hat{\mathrm{L}}(x,t) = -\left[\frac{\partial}{\partial t}T\left(x,t|z,t'\right)\right]_{t'\to t}$$

Подставим определение 1

$$\hat{\mathrm{L}} = -\left[\frac{\partial}{\partial t}T\left(x,t|x',t'\right)\right]_{t'\to t} = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(x-\Phi_{t-t'}\left(x'\right)\right)\right]_{t'\to t} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{t-t'}\left(x'\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\left(x-\Phi_{t-t'}\left(x'\right)\right)\right]_{t'\to t} = g\left(x',t\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta\left(x-x'\right)\right)$$

Вернемся к 3, используя тождество $\left(\frac{\partial}{\partial z}\delta(x-z)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-z)\right)$

$$\hat{\mathrm{L}}T\left(x,t|x',t'\right) = \int g(z)\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-z)\right)T\left(z,t|x',t'\right)dz = -\int g(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\delta(x-z)\right)T\left(z,t|x',t'\right)dz =$$

/сначала интегрируем по частям, а затем интегрируем дельта функцию/

$$= \int \delta(x-z)\frac{\partial}{\partial z}\left(g(x)T\left(z,t|x',t'\right)\right)dz = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)T\left(x,t|x',t'\right)\right)$$

Заменим $T\left(x,t|x',t'\right)$ на плотность вероятности $p(x,t)$.

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) + \frac{d}{dx}(g(x)p(x,t)) = 0 \tag{4}$$

А если сделать еще замену $j(x,t) = g(x)p(x,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) + \operatorname{div}(j(x,t)) = 0$$

Ничего не напоминает?

4. **Рассмотреть второй закон Ньютона в качестве детерминистического процесса и вывести дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию вероятности.**

   Формула Эйлера из механики:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial r} \end{cases}$$

   Координаты заданы так $x = q = (r,p)$. Определим функцию из 4

$$g(x) = (\dot{r},\dot{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial r}\right) = (\mathrm{v}(p), F(r))$$

   Плотность вероятности обозначим $p(x,t) = f(r,p,t)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{f}(r,p,t) + \frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}(p)\mathrm{f}(r,p,t)) + \frac{\partial}{\partial p}(\mathrm{F}(r)\mathrm{f}(r,p,t)) = 0$$

   Откуда сразу следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{f}(r,p,t) + \mathrm{v}(p)\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{f}(r,p,t)) + \mathrm{F}(r)\frac{\partial}{\partial p}(\mathrm{f}(r,p,t)) = 0$$

Фактически получено уравнение Больцмана без столкновительного члена. Представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}f(r,p,t)+\hat{L}f=0,\text{ где }\hat{L}=\sum_{i=1}^{d}\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial r_i}-\frac{\partial H}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right]$$

Тогда эволюция вероятности описывается следующим уравнением со скобками Лагранжа.

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\{f,H\}$$

5. **Вывести уравнение больцмана со столкновительным членом общего вида из уравнения Чемпена-Колмогорова.**

В предыдущем пункте координата считалась непрерывной, теперь же все иначе.

Золотое правило Ферми определяет вероятность перехода в другое состояние за единицу времени так:

$$W_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle f\left|H'\right|i\right\rangle\right|^2\rho$$

Введем плотность вероятности скачка из состояния x' в состояние x за промежуток времени dt:

$$W\left(x|x',t\right)dt$$

Тогда вероятность скачка из состояния x' в какое-нибудь другое состояние(в единицу времени):

$$\Gamma\left(x',t\right)=\int dxW\left(x|x',t\right) \tag{5}$$

Есть два варианта(стула) для перехода из состояния x в состояние x' за время dt:
1) Скачок с вероятностью $W\left(x|x',t\right)dt$
2) Непрерывная эволюция $\frac{dx}{dt}=g(x(t))$ с вероятностью отсутствия скачка $1-\Gamma\left(x',t\right)dt$

Тогда вероятность перейти из состояния x' в состояние x за промежуток времени Δt имеет вид:

$$T\left(x,t+\Delta t|x',t\right)=\left(1-\Gamma\left(x'\right)\Delta t\right)\delta\left(x-x'-g\left(x'\right)\Delta t\right)+W\left(x|x'\right)\Delta t+\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)$$

Как и в 3 получим:

$$\hat{\mathrm{L}}(x,t)\cdot\varphi(x)=-\int dz\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\mathrm{T}(\mathrm{x},t+\Delta t|\mathrm{z},t)-\delta(x-z))\varphi(\mathrm{z})=$$

$$=-\int dz\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}((1-\Gamma(z,t)\Delta t)\delta(x-z-g(z)\Delta t)+W(x|z)\Delta t-\delta(x-z))\varphi(z)=$$

Интеграл разбивается на 3 части

$$=-\int dz\delta'(x-z)g(z)\varphi(z)+\int dz(\Gamma(z,t)\delta(x-z)-W(x|z))\varphi(z)=$$

По свойству дельта-функции и 5

$$=\frac{d}{dx}(g(\mathrm{x})\varphi(\mathrm{x}))+\int dz(\mathrm{W}(\mathrm{z}|\mathrm{x})\varphi(\mathrm{x})-\mathrm{W}(x|\mathrm{z})\varphi(\mathrm{z}))$$

Откуда

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x}(g(x)p(x,t))+\int dz(\mathrm{W}(x|\mathrm{z})p(\mathrm{z},t)-\mathrm{W}(z|x)p(x,t))$$

Аналогично предыдущему пункту можно заменить переменные и получить уравнение Больцмана, но теперь уже со столкновительным членом.

6. **Стационарные решение уравнения Больцмана, условие «детального баланса».**

   Условие стационарности – нулевая мода $p^*(x)$ оператора Лиувилля. Это значит: $\frac{\partial}{\partial t}p^*(x,t) = 0$
   $$\frac{\partial}{\partial x}j(x) = \int dz\left(\mathrm{W}(x|z)p^*(\mathrm{z}) - \mathrm{W}(z|x)p^*(x)\right), \text{ где } j(x) = g(x)p^*(x)$$

   Логично назвать равновесным стационарное распределение $p_{\mathrm{eq}}(x)$, когда ток равен нулю. Значит интеграл столкновений тоже равен нулю, откуда следует условие детального баланса:
   $$W(x|z)p_{\mathrm{eq}}(z) = W(z|x)p_{\mathrm{eq}}(x)$$

7. **При каких ограничениях можно использовать кинетическое уравнение для описания разреженных газов?**

   Само уравнение:
   $$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{f}(r,p,t)+\mathrm{v}(p)\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{f}(r,p,t))+\mathrm{F}(r)\frac{\partial}{\partial p}(\mathrm{f}(r,p,t)) = \int dp'\left(\mathrm{W}\left(\mathrm{p}|\mathrm{p}'\right)\mathrm{f}\left(r,\mathrm{p}',\mathrm{t}\right) - \mathrm{W}\left(\mathrm{p}'|\mathrm{p}\right)\mathrm{f}(r,\mathrm{p},\mathrm{t})\right)$$

   Золотое правило Ферми (ЗПВ) определяет вероятность перехода в единицу времени. При выводе ЗПВ рассматривался промежуток времени, много больший времени взаимодействия τ_0. W часто зависит от $f(r,p,t)$, следовательно $f(r,p,t)$ вообще не должно меняться на временах порядка τ_0. Пусть τ_3 - характерный масштаб изменения макроскопических параметров, а τ_2 – время между столкновениями частиц. Значит кинетика – наука о разреженных газах при $\tau_3 >> \tau_2 >> \tau_0$. Аналогично ограничены пространственные масштабы.

8. **Можно ли применять уравнение Больцмана для жидкостей или плотных газов?**

   Нет, по предыдущему пункту.

9. **Задача: Решить уравнение Больцмана в бесстолкновительном пределе, когда однородное магнитное поле (не зависящее от времени) направлено вдоль оси z. Найти xy-компоненту тензора проводимости.**

   Сила Лоренца $\vec{F}(p) = \frac{e}{m}\vec{p}\times\vec{B}$

   Уравнение Больцмана в бесстолкновительном пределе в виде тензоров:
   $$\frac{\partial}{\partial t}(\delta f) + eE_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i}(f^0) + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}p_jB_k\frac{\partial(\delta f)}{\partial p_i} = 0$$

   Применим преобразование Фурье по времени:
   $$-i\omega\delta f(p,\omega) + eE_i(\omega)v_i\frac{\partial f^0}{\delta\varepsilon} + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}p_jB_k\frac{\partial(\delta f)}{\partial p_i}$$

   Сделаем подстановку $\delta f = \vec{p}\vec{A}(\varepsilon,\omega) = p_iA_i(\varepsilon,\omega)$
   $$-i\omega p_iA_i + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}p_jB_k\frac{\partial}{\partial p_i}(p_kA_k) = -eE_i(\omega)v_i\frac{f^0}{\varepsilon}$$

   Преобразуем второе слагаемое
   $$\epsilon_{ijk}p_jB_k(\delta_{ik}A_k + p_k\frac{\partial A_k}{\partial\varepsilon}v_i) = \epsilon_{ijk}A_ip_jB_k, \text{ т.к. } \epsilon_{ijk}p_jv_i = 0$$
   $$-i\omega p_iA_i + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}p_jB_kA_i = -\frac{e}{m}E_i(\omega)\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}p_i$$

Это верно для $\forall p_i \Rightarrow -i\omega A_i + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}B_jA_k = -\frac{e}{m}E_i(\omega)\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}$

$$(-i\omega\delta_{ik} + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}B_j)A_k = -\frac{e}{m}E_i(\omega)\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}$$

Введем матрицу

$$\Gamma_{ik} = -i\omega\delta_{ik} + \frac{e}{mc}\epsilon_{ijk}B_j$$

Тогда

$$A_k = -\frac{e}{m}\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}\Gamma^{-1}_{ki}E_i(\omega)$$

Решение:

$$\delta f = p_kA_k = -\frac{e}{m}\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}p_k\Gamma^{-1}_{ki}E_i(\omega)$$

Подставим условие направления B вдоль оси z.

$$\Gamma_{ik} = \begin{pmatrix} -i\omega & -\frac{eB}{mc} & 0 \\ \frac{eB}{mc} & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega \end{pmatrix}$$

Обозначим за $\omega_0 = \frac{eB}{mc}$,тогда

$$\Gamma^{-1}_{ik} = \begin{pmatrix} -\frac{i\omega}{\omega_0^2-\omega^2} & -\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2} & 0 \\ \frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2} & -\frac{i\omega}{\omega_0^2-\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{i\omega} \end{pmatrix}$$

Надо найти проводимость, для этого найдем поток электронов

$$J_i(\omega) = \sigma_{ij}E_j(\omega) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int 2d^3p\ e(\delta f)v_i = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int 2d^3p\ e^2\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}v_iv_k(\Gamma^{-1}_{kj}E_j) =$$

$$= -e^2\Gamma^{-1}_{ij}E_j\int_0^{+\infty}\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}2v^2\frac{4\pi}{3}\frac{p^2dp}{(2\pi\hbar)^3} = -e^2\Gamma^{-1}_{ij}E_j\int_0^{+\infty}\frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}\frac{2}{3m}\varepsilon g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2e^2}{3m}\Gamma^{-1}_{ij}E_j\varepsilon_Fg(\varepsilon_F) =$$

$$= ne^2\Gamma^{-1}_{ij}E_j$$

Проводимость $\sigma_{ik} = ne^2\Gamma^{-1}_{ik}$

Откуда $\sigma_{xy} = -\frac{ne^3B}{mc}$

Это частный случай задачи 5 из задания, если кто-то знает лучшее решение - напишите мне

3. Тепло в кинетическом уравнении. Обосновать в локально равновесном приближении уравнение баланса энтропии. Вывести уравнение теплопроводности. Как с помощью кинетического уравнения можно найти поток тепла? Задача: найти коэффициент теплопроводности для вырожденного электронного газа в тау-приближении.

Тепло в кинетическом уравнении

Кинетическое уравнение Больцмана

В билет писать не стоит, чисто теор.введение.
Одночастичная функция распределения: $n(t, \vec{r}, \vec{p})$. Если $d\tau = \frac{d\vec{p}d\vec{r}}{(2\pi\hbar)^d} = \frac{d^dpd^dr}{(2\pi\hbar)^d}$ - число возможных состояний в элементе фазового объема, где d - рамерность пространства, то среднее число частиц:

$$dN(t, \vec{r}, \vec{p}) = n(t, \vec{r}, \vec{p})d\tau$$

Кинетическое уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial n}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial n}{\partial \vec{p}} = I(n)$$

$$\vec{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{p}}$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{r}}$$

$E(\vec{p}, \vec{r}) = E(\vec{p}) + U(\vec{r})$ - энергия частиц.
$I(n) = 0$ - называется бесстоолкновительным, тогда кинетическое уравнение переходит в Уравнение Лиувилля.
Из закона сохранения массы: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$, где ρ - плотность, $\vec{j}$ - плотность потока массы
Из закона сохранения импульса: $\frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0$, где Π_{ik} - тензон плотности потока импульса.
Из закона сохранения энергии: $\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{Q} = 0$, где $\vec{Q}$ - протность потоока энергии.
Интеграл столкновений должен удовлетворять следующим свойствам, чтобы обеспечить удовлетворение законов сохранения:

- $\int I(n)d\tau_p = 0$
- $\int \vec{p}I(n)d\tau_p = 0$
- $\int EI(n)d\tau_p = 0$

τ-приближение

При рассмотрении малых возмущений системы для состояния полного термодинамического равтовесия (n_0) $I(n_0) = 0$, а при слабом отклонении $\delta n = n - n_0$:

$$I(n) = \frac{n - n_0}{\tau}$$

$$\frac{1}{\tau} = -\left(\frac{\delta}{\delta n}I(n)\right)_{n=n_0}$$

τ - время релаксации.

Локально равновесное приближение

Локально равновесное приближение: свое термодинамическое равновесие в каждом малом $V_{\text{сред}}$ в отдельности, так что состояние среды в целом можно оохарактеризоовать температурой $T = T(\vec{r}, t)$, химическим потенциалом $\mu = \mu(\vec{r}, t)$ и другими термодинамическими переменными, зависящими от $\vec{r}$ и t.

Обосновать в локальном равновесном приближении уравнение баланса энтропии

$$\frac{\partial S(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{T(\vec{r},t)}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\mu(\vec{r},t)}{T(\vec{r},t)}\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t}$$

В приближении локального равновесия запишем основное уравнение термодинамики:

$$dE(\vec{r},t) = T(\vec{r},t)dS(\vec{r},t) + \mu(\vec{r},t)dn(\vec{r},t)$$

где $E(\vec{r},t)$ - плотность энергии, $S(\vec{r},t)$ - плотность энтропии, $n(\vec{r},t)$ - плотность числа частиц. Считая локальное равновесное состояние станционарным:

$$dS(\vec{r},t) = \frac{dE(\vec{r},t)}{T(\vec{r},t)} - \frac{\mu(\vec{r},t)}{T(\vec{r},t)}dn(\vec{r},t)$$

$$\frac{dS(\vec{r},t)}{dt} = \frac{1}{T(\vec{r})}\frac{dE(\vec{r},t)}{dt} - \frac{\mu(\vec{r},t)}{T(\vec{r})}\frac{dn(\vec{r},t)}{dt}$$

$$\frac{\partial S(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{T(\vec{r})}\frac{\partial E(\vec{r},t)}{\partial t} - \frac{\mu(\vec{r},t)}{T(\vec{r})}\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Для закона сохранение числа частиц выражение точное:

$$\frac{dE(\vec{r},t)}{dt} + \operatorname{div}\vec{J}_E = 0$$

Для закона сохранения энергии возможно еще диссипативное слагаемое в правой части, которое мы получим ниже:

$$\frac{dn(\vec{r},t)}{dt} + \operatorname{div}\vec{J}_n = 0$$

Вывод закона сохранения числа частиц:

$$n(\vec{r},t) = \sum_i \delta(r - r_i(t))$$

$$\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} = -\sum_i \frac{dr_i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial r}\delta(r - r_i(t)) = -\sum_i \vec{v}_i(t)\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\delta(r - r_i(t)) = -\operatorname{div}\vec{J}$$

$$\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0$$

$$\vec{J} = \sum_i \vec{v}_i(t)\delta(r - r_i(t)) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f((\vec{r},\vec{p},t))\vec{v}(\vec{p})$$

Вывод закона сохранения энергии:

$$\Delta E(\vec{r},t) = \sum_i \varepsilon(p_i(t))\delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\varepsilon(\vec{p})f((\vec{r},\vec{p},t))$$

$$\frac{\partial E(\vec{r},t)}{\partial t} = \sum_i v(p_i(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} p_i(t)\right) \delta(r - r_i(t)) - \sum_i \varepsilon(p_i) \left(\frac{\partial}{\partial t} r_i(t)\right) \frac{\partial}{\partial t} \delta(r - r_i(t)) =$$

$$= \sum_i v(p_i(t)) F_i \delta(r - r_i(t)) - \operatorname{div} \vec{J}_E - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\sum_i \varepsilon(\vec{p_i}) \vec{v}_i(t) \delta(r - r_i(t)) \right) =$$

$$= \sum_i v(p_i(t)) F_i \delta(r - r_i(t)) - \operatorname{div} \vec{J}_E$$

$$\vec{J}_E = \sum_i \varepsilon(\vec{p_i}) \vec{v}_i(t) \delta(r - r_i(t)) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon(\vec{p}) \vec{v}(\vec{p}) f((\vec{r}, \vec{p}, t))$$

$$\frac{\partial E(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_E = F_{ext} \vec{j}$$

Возвращаяся к основному уравнению термодинамики:

$$dE(\vec{r},t) = T(\vec{r},t) dS(\vec{r},t) + \mu(\vec{r},t) dn(\vec{r},t)$$

перенося температуру в левую часть и подставляя в уравнение законы сохранения:

$$\begin{cases} \frac{\partial E(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{j}_E + \vec{E}_e \vec{j}_e \\ \frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\operatorname{div} \vec{J}_e}{e} \end{cases}$$

Получаем выражение для потока тепла:

$$T(\vec{r},t) \frac{\partial S(\vec{r},t)}{\partial} = \frac{\partial Q(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} E(\vec{r},t) - \mu(\vec{r},t) \frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} \overset{\text{ЗС}}{=}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\vec{j}_E - \frac{\mu(\vec{r},t)}{e} \vec{J}_e \right) + \left(\vec{E}_e - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{\mu(\vec{r},t)}{e} \right) \vec{j}_e = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{j}_Q + \varepsilon \vec{j}_e$$

Получаем следующие важные соотношения:

$$\frac{\partial Q(\vec{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{j}_Q = \varepsilon \vec{j}_e$$

$$\vec{j}_Q = \vec{j}_e - \frac{\mu(\vec{r},t)}{e} \vec{j}_e$$

$$\varepsilon = E_{ext} - \frac{\nabla \mu}{e}$$

Для энтропии окончательно получаем уравнение баланса (вообще, есть подозрение, что то, что было доподстановки законов сохрания уже было уравнением балласа, но на всякий случай вот и другая формула):

$$\frac{\partial S(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_s = -\vec{J}_Q \frac{\nabla T}{T^2} + \vec{J}_e \frac{\vec{\varepsilon}}{T} = \vec{J}_Q \nabla \left(\frac{1}{T(\vec{r},t)} \right) + \vec{J}_e \frac{\varepsilon}{T(\vec{r},t)}$$

$$\vec{J}_S = \frac{\vec{J}_Q}{T(\vec{r},t)}$$

где $\vec{J}_Q$ - поток тепла, $\vec{J}_e$ - электрический ток, $\vec{\varepsilon}$ - электрическое поле.

Вывести уравнение теплопроводности

По определению теплоопроводдности:

$$\vec{J}_Q(\vec{r},t) = -\kappa(\vec{r},t)\nabla T(\vec{r},t)$$

$$\delta Q(\vec{r},t) = \rho c_p \delta T(\vec{r},t)$$

где $\kappa(\vec{r},t)$ - коэффициент теплоопроводности, c_p - коэффициент теплоемкости.
Запишем выржение длдя потока тепла из предыдущего пункта, но здесь уже будем учитывать некоторые диссипативные силы:

$$\frac{\partial Q(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J}_Q = \vec{J}_e\vec{\varepsilon} + \{\text{какие-то внешние факторы}\} = \dot{q}_v$$

Уравнение теплопроводности:

$$\rho c_p \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} - \operatorname{div}(\kappa T) = \dot{q}_v$$

Например, $\dot{q}_{v\ \text{излучение}} \sim -(T^4 - T_\theta^4)$

Как с помощью кинетического уравнения найти поток тепла?

Поток тепла:

$$\vec{J}_Q = \vec{J}_e - \mu\vec{J} = \vec{J}_e - \frac{\mu}{e}\vec{J} =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\varepsilon(p)\vec{v}(p)f(\vec{r},\vec{p},t) - \mu\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\vec{v}(p)f(\vec{r},\vec{p},t) =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}(\varepsilon(p)-\mu)\vec{v}(p)f(\vec{r},\vec{p},t)$$

Спектр $\varepsilon(p)$ определен с точностью до константы - начала отсчета энергии.

6. Интеграл столкновений при рассеянии электронов на примесях в металле. Вычисление остаточного сопротивления. Транспортное сечение рассеяния. Что такое транспортное время рассеяния и чем оно отличается от времени релаксации функции распределения. Доказательство H-теоремы.

Задача:

$$\frac{\partial S(r,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{J}_s) = -\boldsymbol{J}_Q \times \frac{\mathrm{div}\, T}{T^2} + \boldsymbol{J}_e \times \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{T}$$

Выберем термодинамические потоки так:

$$I_1 = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad I_2 = \boldsymbol{J}_Q$$

Чему равны термодинамические силы? Кинетические коэффициенты? Проиллюстрировать выполнение теорем Онзагера.

$\boxed{\textbf{Билет.}}$

1. Вывод интеграла столкновений при рассеянии на примесях.

Рассмотрим электронный газ, в котором случайным образом разбросаны неподвижные примеси. Рассеяние электронов на примесях будем считать упругим. В данном случае, кинетическое уравнение для электронов будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)}{\partial t} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p},t)\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{p}'}\big(W(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}')f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t) - W(\boldsymbol{p}'|\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)\big)$$

Примем во внимание то, что при рассеянии электрон переходит из состояния $\boldsymbol{p}$ в состояние $\boldsymbol{p}'$, то есть состояние $\boldsymbol{p}'$ должно быть свободным. Следовательно правая часть кинетического уравнения перепишется в следующем виде:

$$\sum_{\boldsymbol{p}'}\left[\omega_{\boldsymbol{p}'\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)(1-f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t)) - \omega_{\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}'} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t)(1-f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t))\right]$$

Для поиска вероятностей переходов $\omega_{\boldsymbol{p}'\to\boldsymbol{p}}$ и $\omega_{\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}'}$ воспользуемся золотым правилом Ферми:

$$\omega_{\boldsymbol{p}'\to\boldsymbol{p}} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle\boldsymbol{p}'|U|\boldsymbol{p}\rangle|^2\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})$$

Где U в данном случае - потенциал примесей, который выглядит следующим образом:

$$U(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{N_{imp}} u(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$$

Для нахождения ω осталось вычислить матричный элемент потенциала. Перепишем его в представление Фурье (базис плоских волн):

$$\hat{u}(\boldsymbol{p}) = \int d^3r u(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}$$

Тогда его вид сведется к следующему:

$$|\langle\boldsymbol{p}'|U|\boldsymbol{p}\rangle|^2 = V^{-2}|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')|^2\left|\sum_{j=1}^{N_{imp}} e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{r}_j}\right|^2,$$

где V объем твердого тела. Так как примеси распределены случайно, будем работать с их средним (то есть вычисляемые величины будем усреднять по всем возможным расположениям примесей). Посчитаем сумму:

$$\overline{\left|\sum_{j=1}^{N_{imp}} e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{r}_j}\right|^2} = \overline{\sum_{j=1}^{N_{imp}}|e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{r}_j}|^2 + \sum_{k\neq j} e^{i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')(r_j-\boldsymbol{r}_k)}} = N_{imp} + \sum_{k\neq j}\delta_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}',0} = N_{imp} + N_{imp}(N_{imp}-1)\delta_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}',0}$$

Подставляя в усреднение матричного элемента получаем следующее соотношение:

$$\overline{|\langle \boldsymbol{p'}|U|\boldsymbol{p}\rangle|^2} = \frac{N_{imp}}{V^2}|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p'})|^2 + \frac{N_{imp}(N_{imp}-1)}{V^2}|u(0)|^2\delta_{\boldsymbol{pp'}}$$

Заметим, что $\omega_{\boldsymbol{p'}\to\boldsymbol{p}} = \omega_{\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p'}}$. Тогда, подставляя в кинетическое уравнение и пренебрегая вторым членом в выражении матричного элемента (обоснование будет позже), получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{p'}} \omega_{\boldsymbol{p'}\to\boldsymbol{p}}(f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p'},t) - f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)) =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{p'}} \frac{2\pi}{\hbar}\frac{N_{imp}}{V^2}|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p'})|^2\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p'}})(f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p'},t) - f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t))$$

Перейдем от суммирования к интегрированию по фазовому пространству, то есть:

$$\sum_{\boldsymbol{p}} [\ldots] = \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3}[\ldots] = V\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}[\ldots]$$

Также, заменяя отношение числа примесей к объему на концентрацию примесей, получаем итоговое выражение для интеграла столкновений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{2\pi}{\hbar}n_{imp}\int \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p'})|^2\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p'}})(f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p'},t) - f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t))$$

Или, используя борновское приближение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + e\boldsymbol{E}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp}\int \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}\sigma(\theta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p'}})\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p'}})(f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p'},t) - f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t))$$

$$\sigma(\theta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p'}}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2|u(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p'}|^2, \quad m = m_e$$

2. Транспортное сечение рассеяния, транспортное время рассеяния

Будем искать функцию распределения в τ-приближении (в виде суммы равновесной функции распределения и малой добавки):

$$f = f^{(0)} + f^{(1)}$$

$$f^{(1)} = -\tau e\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon}$$

Будем также считать электрическое поле постоянный, то есть функция распределения будет зависить только от импульса. Тогда в борновском приближении уравнение перепишется в следующем виде:

$$e\boldsymbol{E}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = e\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varepsilon} = \tau e\boldsymbol{E}\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp}\int \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}\sigma(\theta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p'}})\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p'}})\left(\boldsymbol{v}\frac{\partial f^{(0)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \boldsymbol{v}'\frac{\partial f^{(0)}(\varepsilon')}{\partial \varepsilon}\right) =$$

$$\overset{g(\varepsilon)-\text{плотность состояний}}{=} \tau e\boldsymbol{E}\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp}\int \frac{d\Omega}{4\pi}d\varepsilon' g(\varepsilon')\sigma(\theta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p'}})\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p'}})\left(\boldsymbol{v}\frac{\partial f^{(0)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \boldsymbol{v}'\frac{\partial f^{(0)}(\varepsilon')}{\partial \varepsilon}\right) =$$

$$= \tau e\boldsymbol{E}\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp}g(\varepsilon)\frac{\partial f^{(0)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\int \frac{d\Omega}{4\pi}\sigma(\theta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p'}})\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\right)$$

В силу упругости рассения, скорость не меняется, а меняется ее направление. Поэтому левую и правую часть можно сократить на $e\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}\frac{\partial f^{(0)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$, получая:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp}g(\varepsilon)\int \frac{d\Omega}{4\pi}\sigma(\theta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p'}})(1-\cos\theta_{\boldsymbol{pp'}}) = \Big/ g(\varepsilon) = \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3 v}\Big/ =$$

$$= n_{imp}v\int d\Omega\sigma(\theta)(1-\cos\theta) = n_{imp}v\int d\sigma(1-\cos\theta) = nv\sigma_{tr},$$

где мы ввели *транспортное сечение рассеяния* σ_{tr}.
Исследуем полученное выражение. Фактор $(1-\cos\theta)$ показывает, что рассеяние "вперед"(при нулевом угле) не вносит вклада в скорость рассеяния (что оправдывает пренебрежение вторым членом в матричном элементе потенциала). Это означает, что полученная τ - есть транспортное время рассеяния. В отличии от времени релаксации, эта величина учитывает влияние обратных столкновений (т.н. приход).
Помимо этого мы получаем выражение для проводимости (обратное сопротивление):

$$G = \frac{ne^2\tau}{m}$$

H-теорема.
Запишем энтропию неравновесного ферми-газа:

$$S = -\sum_p \left(f_p \ln f_p + (1-f_p)\ln(1-f_p)\right)$$

Продиффиренцируем по времени и учтем, что полное число чатиц не изменяется:

$$\dot{S} = -\sum_p \left(\dot{f}\ln f + f\frac{\dot{f}}{f} - \dot{f}\ln(1-f) - (1-f)\frac{-\dot{(f)}}{1-f}\right) = -\sum_p \dot{f}\ln\frac{f}{1-f} + \frac{\partial}{\partial t}\sum_p \dot{f} = -\sum_p \dot{f}\ln\frac{f}{1-f}$$

Воспользуемся уравнением Больцмана:

$$\dot{S} = \sum_p \ln\frac{f}{1-f}\left(-(\boldsymbol{v}\nabla)f - \dot{\boldsymbol{p}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} - \hat{I}f\right)$$

Учтем, что при интегрировании по всему фазовому пространству, интегралы от первых двух слагаемых в скобках преобразятся в поверхностные интегралы. Полученные интегралы тождественно равны нулю, так как вне рассматриваемого объема функция распределения принимает нулевое значение (нет частиц). Поэтому остается только член с интегралом столкновения. Используя симметрию при замене $p \to p'$, получаем:

$$\dot{S} = -\sum_p \ln\frac{f}{1-f}\hat{I}f = \sum_p \omega_{pp'}\left(f(1-f') - f'(1-f)\right)\ln\frac{f}{1-f} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{pp'}\omega_{pp'}f'(1-f)\left(\frac{f}{1-f}\frac{1-f'}{f'}\right)\ln\left(\frac{f}{1-f}\frac{1-f'}{f'}\right) = \frac{1}{2}\sum_{pp'}\omega_{pp'}f'(1-f)(x-1)\ln x \geq 0$$

Таким образом, мы доказали H-теорему (о неубывании энтропии).
$\boxed{\textbf{Задача}}$
soon..

7. Парный интеграл столкновений при рассеянии электронов (электрон-электронные столкновения). Симметрия ядра интеграла столкновений. Доказать, что в равновесии интеграл столкновений обращается в нуль. Классический предел парного интеграла столкновений, его выражение через сечение рассеяния, доказательство закона возрастания энтропии. Задача: Написать интеграл столкновений, описывающий электрон-электронные столкновения в вырожденном электронном газе; доказать, что интеграл столкновения равен нулю для любого локально равновесного распределения.

Как я говорил в конфе, билет говно из жопы, так что во-первых, я пишу не по лекциям, а по Полищуку. Во-вторых, хоть я и переписал все, что было, есть ощущение, что чего-то не хватает. Я не совсем уебан, так что не забью болт и этот shit будет дополняться, только скажите мне, что бы вы хотели здесь видеть ещё. Пишите по контактам в коде теха.

0) Введение в обозначения

Мы работаем с разреженным (столкновения только двойные) газом; каждая молекула описывается неким набором квантовомеханических величин Γ. Газ формирует систему с функцией распределения $f = f(\vec{r}, \Gamma, t)$ так, что $dN = f(\vec{r}, \Gamma, t) d\Gamma dV$. Важно, что $\vec{r}$ - координата не молекулы, а бесконечно малого объема, в котором мы смотрим количество частиц. Также нам понадобятся вероятность перехода w двух сталкивающихся частиц из 2-х начальных состояний в 2 конечных в результате столкновения. С этой системой в свой время нормально потрахался Больцман и получил уравнение имени себя:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}\nabla) f = -\int d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma_1' \{w f f_1 - w' f' f_1'\} = -I_{st}$$

Тут мы впервые получаем интеграл столкновений. Здесь и далее в этом билете договоримся о следующих обозначениях:

$$f := f(\vec{r}, \Gamma, t);$$
$$f' := f(\vec{r}, \Gamma', t);$$
$$f_1 := f(\vec{r}, \Gamma_1, t);$$
$$f_1' := f(\vec{r}, \Gamma_1', t);$$
$$w := w(\Gamma\Gamma_1 \to \Gamma'\Gamma_1');$$
$$w' := w(\Gamma'\Gamma_1' \to \Gamma\Gamma_1).$$

1) Унитарность столкновений (это походу то, что у нас называется "симметрия ядра")

Закон выглядит так:

$$\int w(\Gamma\Gamma_1 \to \Gamma'\Gamma_1') d\Gamma' d\Gamma_1' = \int w(\Gamma'\Gamma_1' \to \Gamma\Gamma_1) d\Gamma' d\Gamma_1'$$

но мы будем использовать более краткую запись

$$\int w d\Gamma' d\Gamma_1' = \int w' d\Gamma' d\Gamma_1' \tag{6}$$

На языке быдла это означает следующее: вероятность того, что при столкновении двух молекул в состояниях Γ и Γ_1 получатся состояния Γ' и Γ_1', равна вероятности того, что молекулы из Γ' и Γ_1' перейдут в Γ и Γ_1.

♡

Рассмотрим вероятности перехода между состояниями системы; они образуют дискретный спектр прямо как в квантах. Сошлёмся на квантмех: "известно, что амплитуды вероятностей перехода между состояниями системы образуют унитарную матрицу S, для которой верно $SS^\dagger = 1$."Таким образом:

$$\sum_n S_{in}S^\dagger_{nk} = \sum_n S_{in}S^*_{kn} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_n |S_{in}|^2 = 1 \tag{7}$$

Здесь величина $|S_{in}|^2$ имеет смысл вероятности перехода n $\to$ i. Так как $S^\dagger S = 1$, то верно также и

$$\sum_n S^\dagger_{in}S_{ni} = \sum_n |S_{ni}|^2 = 1 \tag{8}$$

Собирая 7 и 8, получим

$$\sum_{n\neq i}|S_{ni}|^2 = \sum_{n\neq i}|S_{in}|^2$$

Ч т д. (нет ну рили эта ебучая сумма и есть то, что мы хотели получить, потому что и то, и то описывает вероятности перехода из одного состояния в другое, я сам в шоке). ♠

Одно из важных свойств унитарности - упрощение записи интеграла столкновений. Обычные лошки пишут этого крокодила вот так:

$$I_{st} = \int d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 \{wff_1 - w'f'f'_1\}$$

Но мы уже прошаренные ребята и можем записать

$$I_{st} = \int d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 w' \{ff_1 - f'f'_1\} \tag{9}$$

кто не заметил разницы, тот лох!

2) Обращение интеграла столкновений в 0 в равновесном состоянии

Если газ находится в равновесном состоянии, то $f = f^{(0)} = Ce^{-\frac{E(\Gamma)}{T}}$; $C = C(\vec{r}, t)$; $T = T(\vec{r}, t)$. Это распределение Больцмана, в учебнике так написано и походу очевидно что это то же самое, что равновесное распределение. Попробуем посчитать фигурную скобку в 9:

$$\{ff_1 - f'f'_1\} = C^2(e^{-\frac{E+E_1}{T}} - e^{-\frac{E'+E'_1}{T}}) = 0.$$

Здесь был использован закон сохранения энергии $E' + E'_1 = E + E_1$.

i) тут в учебнике еще доказывается что изменение аддитивных интегралов движения за счет столкновений равно нулю; это скорее относится к билету 9 но через эту секцию доказывается закон возрастания энтропии так что жрите

Пусть $A = A(\Gamma)$ - какая-то функция состояния одной молекулы; тогда рассмотрим интеграл

$$\int d\Gamma I_{st} A(\Gamma) = \int d^4\Gamma A(\Gamma)\{wff_1 - w'f'f'_1\}.$$

Проведём замену переменных $\Gamma \leftrightarrow \Gamma_1$; тогда $A(\Gamma) \to A(\Gamma_1)$, а w и w' переходят в себя по свойству 1. Получим

$$\int d\Gamma I_{st} A(\Gamma) = \frac{1}{2}\int d^4\Gamma \left\{(A + A_1)wff_1 - (A + A_1)w'f'f'_1\right\}$$

В первом слагаемом проведём замену переменных $\Gamma \leftrightarrow \Gamma'$, $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma'_1$, тогда $A \to A'$, $A_1 \to A'_1$, $f \to f'$, $f_1 \to f'_1$ и $w \to w'$. Второе слагамое трогать не будем. В результате получим:

$$I_{st} = \int d\Gamma_1 I_{st} A(\Gamma) = \frac{1}{2}\int d^4\Gamma \left\{(A' + A'_1 - A - A_1)w'f'f'_1\right\} \tag{10}$$

Это настолько пиздатая строчка, что из нее следует равенство нулю изменений интегралов движения. (для дебилов - у вас там A' и A'_1 сократятся с A и A_1; в A можно подставлять 1 (число частиц в ед. объема), p (импульс ед. объема) или E (энергия ед. объема); подробнее см. 9 билет). Нам же она понадобится как промежуточное вычисление в следующей секции.

3) Доказательство закона возрастания энтропии

Сейчас мы покажем, почему **благодаря столкновениям** энтропия газа может только возрастать. Напомним, полная энтропия газа по определению равна

$$S = \int dV d\Gamma f_\Gamma \ln\left(\frac{e}{f_\Gamma}\right) = \int dV s,$$

где s - плотность энтропии. Энтропия меняется со временем:

$$\frac{dS}{dt} = \int dV d\Gamma \frac{\partial}{\partial t}[f_\Gamma \ln\left(\frac{e}{f_\Gamma}\right)] = \int dV \left(\int d\Gamma \frac{\partial f_\Gamma}{\partial t} \ln\left(\frac{e}{f_\Gamma}\right)) - \int d\Gamma \frac{\partial f_\Gamma}{\partial t}\right) = -\int dV \int d\Gamma \frac{\partial f_\Gamma}{\partial t} \ln(f_\Gamma).$$

Из кинетического уравнения следует, что

$$\frac{\partial f_\Gamma}{\partial t} = -\dot{\vec{r}}\frac{\partial f_\Gamma}{\partial \vec{r}} - \dot{\vec{p}}\frac{\partial f_\Gamma}{\partial \vec{p}} - I_{st}.$$

Таким образом имеем

$$\int dV \int d\Gamma \dot{\vec{r}} \ln(f_\Gamma) \frac{\partial f_\Gamma}{\partial \vec{r}} = \int d\Gamma \int dV \frac{\partial}{\partial \vec{r}}[\dot{\vec{r}}(f_\Gamma) \ln\left(\frac{f_\Gamma}{e}\right)].$$

Последний интеграл преобразуется в равный нулю интеграл по поверхности, так как её можно выбрать произвольно (например, вне объёма, заполненного газом). Аналогично обнулится производная, связанная с потоком энтропии в пространстве импульсов (второе слагаемое), поэтому останется только член (хаха член) с I_{st}. Вновь обратимся к пиздатейшему соотношению 10, чтобы получить второй переход (внимание, мы теперь пишем не S, а s):

$$\dot{s} = +\int d\Gamma I_{st} \ln(f_\Gamma) = \frac{1}{2}\int d^4\Gamma f' f'_1 w' \ln\left(\frac{f' f'_1}{f f_1}\right).$$

Воспользуемся унитарностью (9), чтобы записать ноль в другой форме:

$$0 = \frac{1}{2}\int d\Gamma I_{st} \cdot 1 = \frac{1}{2}\int d^4\Gamma w' \{f f_1 - f' f'_1\}.$$

Поэтому изменение плотности энтропии из-за столкновений можно записать следующим образом:

$$\dot{s} = \frac{1}{2}\int d^4\Gamma w' f f_1 \left(1 - \frac{f' f'_1}{f f_1} + \frac{f' f'_1}{f f_1} \ln\left(\frac{f' f'_1}{f f_1}\right)\right).$$

Если обозначить $\frac{f' f'_1}{f f_1}$ за переменную x, то полученная функция будет неотрицательна: $x\ln(x)+1-x > 0\ \forall x > 0$. Значит, энтропия не может убывать, а по первому свойству интеграла столкновений ($I_{st} = 0$) в равновесном состоянии энтропия не изменяется.
Максимов и Полищук просят нас обратить внимание на следующие вещи:

- при выводе всей этой херни мы не использовали никаких предположений про w, кроме унитарности исходя из квантов;
- за счет столкновений энтропия действительно только возрастает **локально**, но полное изменение S в выделенном объёме может быть и меньше нуля. Для всей системы S естетвенно только возрастает.
- в стат физике закон возрастания энтропии был постулатом, а теперь мы его типа вывели. мы всех наебали? нифига, ибо мы без доказательства приняли, что при подсчёте сталкивающихся частиц можно использовать **одночастичные** функции распределения (т. е. мы пренебрегли корреляциями между сталкивающимися частицами).

4) Выражение через сечение рассеяния

Интеграл столкновений выглядит достаточно всрато и его не удобно считать на практике, в отличие от диф. сечения. Введём диф. сечение так:

$$\frac{dN}{dt} = N_1 Q d\sigma.$$

Здесь Q - поток налетающих частиц, N, N_1 - чисто рассеяных частиц и рассеивателей в ед. объёма. Можно оценить N_1 как $f_1 d\Gamma_1$, а Q как gf, где g - относительная скорость, которая равна $|\vec{v} - \vec{v_1}|$. Отсюда получим

$$\frac{dN}{dt} = g f f_1 d\Gamma_1 d\sigma; d\sigma = d\sigma(\Gamma\Gamma_1 \to \Gamma'\Gamma_1') \tag{11}$$

При этом из уравнения Больцмана (тут по сути записана половина интеграла столкновений) следует

$$\frac{dN}{dt} = w f f_1 d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma_1'; w = w(\Gamma\Gamma_1 \to \Gamma'\Gamma_1') \tag{12}$$

Сравнивая 11 и 12, получим

$$w d\Gamma_1 d\Gamma_1' = g d\sigma,$$

и тогда интеграл столкновений принимает форму

$$I_{st} = \int d\Gamma_1 \{ g d\sigma f f_1 - g' d\sigma' f' f_1' \} \tag{13}$$

Это формулу можно упростить еще больше. Запишем законы сохранения энергии и импульса для столкновения двух одинаковых частиц:

$$\vec{v} + \vec{v_1} = \vec{v'} + \vec{v_1'}$$

$$v^2 + {v_1}^2 = {v'}^2 + {v_1'}^2$$

Далее перейдём к скоростям центра инерции частиц $\vec{G} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v_1})$ (аналогично для конечного состояния, просто добавляем $'$) и относительным скоростям частиц $\vec{g} = \vec{v} - \vec{v_1}$. В этих переменных законы сохранения выглядят очень просто: $\vec{G} = \vec{G'}$, $g^2 = {g'}^2$.
Если дополнительно положить (это не всегда так), что $d\sigma' = d\sigma$, то интеграл столкновений примет совсем простой вид:

$$I_{st} = \int d\Gamma_1 g d\sigma \{ f f_1 - f' f_1' \} \tag{14}$$

5) Задача (спасибо Никите и Нурболату ♡)

Вообще говоря, может тут написана и хрень. В задании есть упражнение, которое просит обратить в нуль интеграл столкновений для локально-равновесного распределения МАКСВЕЛЛА (!). Кажется, что любое локально-равновесное распределение и есть максвелловское, потому что в методичках везде начинают решать эту задачу именно с максвелловской f. Короче говоря, мы имеем локально-равновесное распределение со средней скоростью $\vec{V}$, которое будет записываться прямо как в термодинамике. А просто равновесное распределение это вроде как р-е Больцмана, см. выше.
♡
В системе отсчёта, движущейся с заданной скоростью $\vec{V}$, кинетическая энергия записывается через скорость относительного движения $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}$. Тогда максвелловская $f(\vec{v})$ выглядит как

$$n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\vec{u})^2}{2T} \right).$$

В результате замены переменной интегрирования $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ получаем $< \vec{v} >= \vec{V}$, и тогда мы можем записать законы сохранения энергии и импульса, а потом преобразовать полученное выражение.

$$\delta(m\vec{v}+m\vec{v_1}-m\vec{v'}-m\vec{v_1'})\cdot\delta(mv^2+mv_1^2-m(v')^2-m(v_1')^2) \sim \delta(\vec{u}+\vec{u_1}-\vec{u'}-\vec{u_1'})\cdot\delta(u^2+u_1^2-(u')^2-(u_1')^2+2\vec{V}\cdot[\vec{u}+\vec{u_1}-\vec{u'}-$$

$$= \delta(\vec{u}+\vec{u_1}-\vec{u'}-\vec{u_1'})\cdot\delta(u^2+u_1^2-(u')^2-(u_1')^2).$$

Так как наши равновесные функции содержат множители $\exp\left(-\frac{m(\vec{u})^2}{2T}\right)$, то скобка $\{ff_1 - f'f_1'\}$ в интеграле столкновений занулится исходя из дельта-функции $\delta(u^2+u_1^2-(u')^2-(u_1')^2)$. Для тупых типа меня: эта дельта-функция неявно сидит в вероятности перехода между состояниями w. Выясняется, что она равна нулю, если законы сохранения ломаются.

ну че ебать всем спасибо кто читал этот высер и удачи на экзамене!

GayLord: до сих пор хз че такое классический предел, я напишу Щелкачёву

8. Феноменологическая гидродинамика. А) Идеальная жидкость: уравнения Эйлера, тензор плотности потока импульса (с выводом). Б) Вязкая жидкость: тензор вязких напряжений (обоснование), симметрии этого тензора, первая и вторая вязкость. Уравнение Навье-Стокса (с феноменологическим выводом). Как нужно модифицировать уравнение Навь-Стокса, чтобы из него можно было бы вывести формулу Друде? Привести пределы применимости гидродинамики. Какие пределы применимости кинетики? Вспомним задачу (из задания) о диффузии тяжелых частиц малой концентрации в легком газе; почему нельзя применять формулу стокса для расчета подвижности тяжелых частиц, когда размер тяжелых частиц меньше или порядка длины свободного пробега частиц легкого газа? Задача: показать, что (первая) вязкость всегда положительная.

Спойлер: в основном лекция по этой теме - копипаста ландавшица с разных страниц. Этот билет тоже. Неожиданно, правда?

А) Идеальная жидкость: уравнения Эйлера, тензор плотности потока импульса (с выводом).

Выделим в жидоксти некоторый объем. Тогда полная сила, действующая на выделенный объем жидкости, равна интегралу от давления

$$-\oint p d\mathbf{f}, \tag{15}$$

взятому по поверхности рассматриваемого объема. Преобразуем его в интеграл по объему (два варианта: либо по теореме Остроградского-Гаусса, применяя ее трижды - для каждой компоненты векторного интеграла (подставляя вместо давления вектор, одна из компонент которого равна давлению, остальные нулевые) и потом собирая результаты в вектор, либо интуитивно поняв, как связаны сила и давление, что быстрее):

$$-\oint p d\mathbf{f} = -\int \boldsymbol{\nabla} p dV. \tag{16}$$

Так как для единицы объема силу можно выразить как массу этого объема (т.е. плотность), помноженную на ускорение, то имеем:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} p. \tag{17}$$

Теперь распишем ускорение:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}}\frac{d\mathbf{x}}{t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}. \tag{18}$$

Собираем два последних уравнения в кучу и получаем уравнение Эйлера - одно из основных уравнений гидродинамики:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p \tag{19}$$

В поле тяжеси в правой части появится еще одно слагаемое - просто $\mathbf{g}$.

Рассмотрим теперь в тензорных обозначениях, как меняется импульс единицы объема (произведение плотности на скорость) во времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i. \tag{20}$$

Так как уравнение Эйлера в тензорных обозначениях имеет вид:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{21}$$

а уравнение непрерывности (которое придется вспомнить) записывается вот так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}, \tag{22}$$

то, снова собирая все в кучу, получим для изменения импульса следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_i v_k. \tag{23}$$

Вытащим из уравнения вот такой тензор:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k, \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \tag{25}$$

Это - тензор плотности потока импульса. Его физический смысл такой: это $i-$ я компонента количества импульса, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. То есть:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = -\int \Pi_{ik} df_k. \tag{26}$$

Б) Вязкая жидкость: тензор вязких напряжений (обоснование), симметрии этого тензора, первая и вторая вязкость.

Вязкая жидкость - жидкость с внутренним трением. Вязкость проявляется в наличии дополнительного (необратимого) переноса импульса из мест с большей скоростью в места с меньшей. Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, добавив к идеальному потоку импульса дополнительный член, определяющий вязкий (необратимый) перенос импульса в жидкости.
Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \tag{27}$$

остается справедливым.
Добавим поправку в тензор потока импульса:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \tag{28}$$

Здесь σ_{ik} - тензор напряжений, σ'_{ik} - тензор вязких напряжений.
Процессы внутреннего трения в жидкости возникают только в тех случаях, когда различные участки жидкости движутся с различной скоростью, так что имеет место движение частей жидкости друг относительно друга. Поэтому тензор вязких напряжений должен зависеть от производных от скорости по координатам. Если скорость жидкости равна нулу, вязкость не проявляется. Если вся жидкость как целое совершает равномерное вращение - вязкость не проявляется.
При равномерном вращении с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ скорость $\mathbf{v}$ равна векторному произведению $[\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}]$. Из проивзодных от скорости по координанат в данном случае можно составить следующие линейные комбинации, которые будут обращаться в ноль:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}. \tag{29}$$

Поэтому тензор вязких напряжений должен содержать именно эти суммы производных.
Наиболее общим видом тензора второго ранга, удовлетворяющего всем этим условиям, является тензор:

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l},\ \eta > 0,\ \zeta > 0. \tag{30}$$

Слагаемые сгруппированы так, что при свертке тензора (при $i = k$) слагаемое в скобочках обращается в ноль после суммирования (будет удвоенная сумма производных в левой части скобочки минус две трети от утроенной из-за символа Кронекера суммы производных в правой части скобочки, то есть ноль).
Коэффициенты η и ζ - соответственно, первая и вторая вязкость.

Уравнение Навье-Стокса (с феноменологическим выводом).

Полученное ранее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \tag{31}$$

называется уравнением Навье-Стокса. Часто уравнением Навье-Стокса называют это уравнение, но в полной записи (подставляем, группируем, что-то переносим через скобочки, где-то сворачиваем символ Кронекера):

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right). \tag{32}$$

Полагая вязкости не зависящими от координат, имеем в векторном виде:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\boldsymbol{\nabla}\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{33}$$

В случае несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

Как нужно модифицировать уравнение Навье-Стокса, чтобы из него можно было бы вывести формулу Друде?

Этот пункт опирается на билет 9. Если он написан вообще. А это не точно.
В общем напишем кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}f + v\frac{\partial}{\partial r}f + F\frac{\partial}{\partial \Gamma}f = I_{st},\ f = f(r, \Gamma, t). \tag{34}$$

Запишем теперь уравнение на плотность (плотность импульса, плотность энергии, и т.д.):

$$n\langle A(\mathbf{r}, t)\rangle = \int d\Gamma f(\mathbf{r}, \Gamma, t)A(\Gamma). \tag{35}$$

Домножим теперь кинетическое уравнение на A и проинтегрируем по Γ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int Af d\Gamma + \int Av\frac{\partial}{\partial r}f d\Gamma + \int AF\frac{\partial}{\partial \Gamma}f d\Gamma = \int AI_{st}d\Gamma. \tag{36}$$

Обозначив

$$\mathbf{j}_A = \int Avf d\Gamma, \tag{37}$$

заметив, что

$$\int AF\frac{\partial}{\partial \Gamma}f d\Gamma = F\int A\frac{\partial}{\partial \Gamma}f d\Gamma = -F\int f\frac{\partial}{\partial \Gamma}Ad\Gamma, \tag{38}$$

и использовав исходное уравнение на плотность, приведем проинтегрированное кинетическое уравнение к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} n\langle A\rangle + \operatorname{div}(\mathbf{j}_A) = nF\left\langle \frac{\partial A}{\partial \Gamma}\right\rangle + \int A I_{st} d\Gamma. \tag{39}$$

Рассмотрим теперь это уравнение для плотности импульса, то есть положим

$$A = p_i. \tag{40}$$

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} n\langle p_i\rangle + \nabla_j \int p_i v_j f d\Gamma = nF_j \left\langle \frac{\partial p_i}{\partial p_j}\right\rangle + \int p_i I_{st} d\Gamma. \tag{41}$$

Немножко свернем индексы:

$$\frac{\partial}{\partial t} n\langle p_i\rangle + \nabla_k \int p_i v_k f d\Gamma = nF_i + \int p_i I_{st} d\Gamma. \tag{42}$$

Теперь важно - считаем, что внешние силы отсутствуют, и что столкновения сохраняют импульс. Тогда члены в правой части уравнения обнуляются. Сравнивая оставшуюся часть уравнения с уравнением гидродинамики

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{43}$$

обнаруживаем, что:

$$\Pi_{ik} = \nabla_k \int p_i v_k f d\Gamma. \tag{44}$$

В итоге получаем модифицированное уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{\partial}{\partial t} n\langle p_i\rangle + \nabla_k \Pi_{ik} = nF_i + \int p_i I_{st} d\Gamma. \tag{45}$$

Так как плотность электрического тока

$$j_i = e\int v_i f d\Gamma, \tag{46}$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{e}{m}\nabla_k \Pi_{ik} = \frac{e^2 n}{m} E_i + \frac{e}{m}\int p_i I_{st} d\Gamma. \tag{47}$$

Остается разобраться с интегралом столкновения. Интеграл столкновений может быть двух типов - либо парные столкновения в газе, сохраняющие импульс

$$I_1 \approx -\frac{f - f_0}{\tau}, \tag{48}$$

либо столкновения на неподвижных примесях, не сохраняющие импульс

$$I_2 \approx -\frac{f - f_0(\langle \mathbf{v}\rangle = 0)}{\tau_{tr}}. \tag{49}$$

Вклад первого оказывается нулевым, для второго имеем:

$$\int p_i I_2 d\Gamma = \int p_i \left(-\frac{f - f_0(\langle \mathbf{v}\rangle = 0)}{\tau_{tr}}\right) d\Gamma = -\frac{m}{e\tau_{tr}} j_i. \tag{50}$$

То есть:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{tr}}\right)j_i+\frac{e}{m}\nabla_k\Pi_{ik}=\frac{e^2n}{m}E_i. \tag{51}$$

Так как условие применимости гидродинамики и локально-равновесного распределения требует медленного изменения скорости на микроскопических масштабах, то член с дифференцированием и член с тензором плотности потока импульса выкидываем и остается искомая формула Друде:

$$j_i=\frac{e^2n\tau_{tr}}{m}E_i=\sigma_D E_i. \tag{52}$$

Привести пределы применимости гидродинамики.

Средняя скорость должна слабо меняться на микроскопических масштабах. Но это не точно.

Какие пределы применимости кинетики?

В записи кинетического уравнения находится интеграл столкновений, который связан с вероятностями перехода, расчитанными согласно золотому правилу Ферми. При формулировке этого правила есть требование, что рассматривается промежуток времени, много больший времени взаимодействия τ_0. Таким образом, минимальное требование - функция f не должна меняться за время взаимодействия. Если τ_2 - время между столкновениями частиц в газе, то $\delta f\sim exp(-t/\tau_2)$ и получаем требование $\tau_2\gg\tau_0$. Кроме того, изменение макроскопических параметров (плотности, температура и т.д.) должно происходить за время $\tau_3\gg\tau_2\gg\tau_0$.

Вспомним задачу (из задания) о диффузии тяжелых частиц малой концентрации в легком газе; почему нельзя применять формулу Стокса для расчета подвижности тяжелых частиц, когда размер тяжелых частиц меньше или порядка длины свободного пробега частиц легкого газа?

Наверное, где-то нарушается какое-то условие применимости, и наверное лектор это говорил, но в презентациях этого нету, поэтому будем надеяться, что эти строчки не будут прочитаны кем-либо впервые во время ответа на экзамене, а то как-то неловко получится...

Задача: показать, что (первая) вязкость всегда положительная.

Полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости равна:

$$E_{\text{кин}}=\frac{\rho}{2}\int v^2dV. \tag{53}$$

Производная этой энергии по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2}=\rho v_i\frac{\partial v_i}{\partial t}. \tag{54}$$

Из уравнения Навье-Стокса подставляем:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \tag{55}$$

то есть получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2}=-\rho\mathbf{v}(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}-\mathbf{v}\nabla p+v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}=-\rho(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{v^2}{2}\frac{p}{\rho}\right)+\mathrm{div}(\mathbf{v}\sigma')-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \tag{56}$$

где обозначено

$$(\mathbf{v}\sigma')_k=v_i\sigma'_{ik}. \tag{57}$$

В несжимаемой жидкости дивергенция скорости равна нулю, поэтому в правой части формулы заносим еще один член под дивергенцию:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}\frac{p}{\rho}\right) - (\mathbf{v}\sigma')\right] - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \tag{58}$$

Интегрируем по объему, преобразуя один из интегралов в поверхностный:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho v^2}{2}dV = -\oint\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}\frac{p}{\rho}\right) - (\mathbf{v}\sigma')\right]d\mathbf{f} - \int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV. \tag{59}$$

Далее по каким-то не очень очевидным соображениям поверхностный интеграл обнуляется, и остается:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_{\text{кин}} = -\int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV = -\frac{1}{2}\int\sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)dV. \tag{60}$$

Так как в несжимаемой жидкости тензор вязких напряжений имеет вид

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right), \tag{61}$$

то имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}E_{\text{кин}} = -\frac{\eta}{2}\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV. \tag{62}$$

Отсюда следует положительность первой вязкости, иначе кинетическая энергия жидкости возрастала бы со временем из-за трения, что бред.

11. Уравнения Ланжевена. Показать, как из стохастического уравнения можно вывести уравнения Фоккера-Планка (УФП). Можно ли по виду УФП восстановить соответствующее уравнение Ланжевена? В качестве задачи рассмотреть уравнение Ланжевена, описывающее движение частицы в «вязкой среде», получить в этом случае УФП, получить соотношения Эйнштейна; преобразовать УФП из импульсного в координатное представление и опять получить соотношения Эйнштейна.

12. Бесстолкновительная классическая плазма. Написать в общем виде систему уравнений Власова. Когда плазму можно приближенно считать бесстолкновительной? Найти в этом случае диэлектрическую проницаемость классической плазмы. Почему нули продольной диэлектрической проницаемости определяют спектр возбуждений плазмы? Найти спектр продольных колебаний плазмы с учетом затухания Ландау. Как же так, плазма бесстолкновительная, а есть затухание? Куда девается энергия? Как искать спектр поперечных колебаний (обосновать)?

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузок. В 10т. Т. X. / Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. - 2-е издание., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 536 с. - ISBN 5-9221-0125-0 (Т. X).

2. Максимов Л.А., Полищук И. Я. М17 Лекции по физической кинетике: Учебное пособие. - М.: МФТИ, 2007. - 184 с.ISBN 5-7417-0170-1

3. Бурмистров С. Н. Задачи по физической кинетике: Учебное пособие / С. Н. Бурмистров - Долгопрудный: Издательский Дом "Интеллект 2016. - 192 с.

Бесстолкновительная классическая плазма

Плазма - полностью ионизированный газ. Условие применимости метода кинетического уравнения к плазме требует её достаточной разреженности. Условие слабой неидеальности плазмы записывается в виде:

$$T \gg e^2/\bar{r} \sim e^2 N^{1/3},$$

где T - температура плазмы, N - полное число частиц в единице объёма, а $\bar{r} \sim N^{-1/3}$ - среднее расстояние между ними. Данное условие выражает собой малость средней энергии взаимодействия двух ионов по сравнению с их средней кинетической энергией.
Далее плазма считается классической: температура плазмы должна быть высока по сравнению с температурой вырождения её электронной компоненты:

$$T \gg \hbar^2 N^{2/3}/m,$$

где m - масса электрона
Кинетическое уравнение для каждого сорта частиц в плазме (электронов и ионов) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{p}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = \mathsf{St} f,$$

где f - функция распределения данных частиц по координатам и импульсам, St - их интеграл столкновений (с частицами всех сортов).

Когда плазму можно приближенно считать бесстолкновительной? [1, §27]

Точные условия возможности пренебрежения столкновениями зависят от конкретной задачи. Однако необходимое условие состоит в требовании малости эффективной частоты столкновений ν (величина, обратная среднему времени свободного пробега частицы) по сравнению с частотой ω изменения макроскопических полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ в данном процесса:

$$\nu \ll \omega$$

В силу этого условия интеграл столкновений в кинетическом уравнении оказывается малым по сравнению с производной $\partial f/\partial t$. Столкновениями можно пренебречь также и в случае, если средняя длина пробега частиц $l \sim \bar{v}/\nu$ велика по сравнению с расстоянием L, на котором меняется поле ("длина волны"поля). Если обозначить $1/L \sim k$, то условие запишется в виде

$$\nu \ll k\bar{v}$$

При этом интеграл столкновений окажется малым по сравнению с членом $\boldsymbol{v}\nabla f$ в левой части кинетического уравнения

Написать в общем виде систему уравнений Власова. [1, §27]

После пренебрежения интегралом столкновений кинетические уравнения для функций распределения электронов (f_e) и ионов (f_i) принимает вид

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{r}} - e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\right)\frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{p}} = 0$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}} + ze\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\right)\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{p}} = 0$$

К этим уравнениям добавляется система усреднннных ($\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$) уравнений Максвелла

$$\mathsf{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \mathsf{div}\boldsymbol{B} = 0,$$
$$\mathsf{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \mathsf{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho,$$

где ρ и $\boldsymbol{j}$ - средние плотность зарядови плотность тока, выражающиеся через функции распределения формулами

$$\rho = e\int (zf_i - f_e)d\Gamma_p$$
$$\boldsymbol{j} = e\int (zf_i - f_e)\boldsymbol{v}d\Gamma_p,$$

где $\Gamma_p = \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$. Вышеуказанные уравнения называются уравнениями Власова. Данная система определяет как функции распределения f_i и f_e, так и поля $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$, называемые согласованными

Найти в этом случае диэлектрическую проницаемость классической плазмы [1, §29], [2, §5.3], [3, задачи 25,26; стр 135]

Будем предполагать, что в диэлектрической поляризации плазмы участвуют только электроны (то есть функция распределения f_i полагается равновесной f_{i0}). Для слабого поля функция распределения электронов ищется в виде $f = f_0 + \delta f$, где f_0 - невозмущённая полем стационарная изотропная и пространственно-однородная функция распределения, а δf - её изменение под влиянием поля. Тогда, пренебрегая вторыми порядками малости, получается:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{r}} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\right)\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}}$$

В изотропной плазме функция распределения зависит только от абсолютной величины импульса. Поэтому $\boldsymbol{v}\frac{\partial f_)}{\partial \varepsilon} = \partial f_0/\partial \boldsymbol{p} \uparrow\uparrow \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ и $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}] = 0$. Остаётся:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}}$$

В предположении, что электрическое поле содержит одну гармонику, то есть:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\omega}\exp\{(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - i\omega t)\}$$
$$\delta f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \delta f_{\boldsymbol{k},\omega}(\boldsymbol{p})\exp\{(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - i\omega t)\}$$

получается уравнение в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\delta f_{\boldsymbol{k},\omega}(\boldsymbol{p}) = ie(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\omega})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$$

Оно решается введением регуляризации с полюсом в нижней полуплоскости (обусловлено физическим смыслом: $\delta f_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega}}$ - запаздываюший отклик на внешнее воздействие $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\omega}$, поэтому эта функция должна быть аналитична в верхней полуплоскости):

$$\delta f_{\boldsymbol{k},\omega} = \frac{ie(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\omega})}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$$

Поляризация электронной компоненты $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k},\omega}$ проще всего посчитать из соотношения: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \Longrightarrow \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{k},\omega} = -i\omega \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k},\omega}$.
В невозмущённой плазме плотность зарядов электронов компенсируется в каждой точке зарядом ионов, а плотность тока равна нулю то вследствие изотропии плазмы. В результате (подставив $f_i = f_{i0}$, $f_e = f_0 + \delta f$ и приняв во внимание, что $\rho(f_{i0}, f_{e0}) = 0, \boldsymbol{j}(f_{i0}, f_{e0}) = 0$) возмущения полем в плазме плотность зарядов и плотность тока равны:

$$\rho = -e\int \delta f d^3p, \quad \boldsymbol{j} = -e\int \boldsymbol{v}\delta f d^3p$$

Получается:

$$\omega \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k},\omega} = e^2 \int \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\omega})\frac{\partial f_0/\partial\varepsilon}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta} d\Gamma_p$$

$$P_\alpha = \frac{e^2}{\omega}E_\beta \int \frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} d\Gamma_p \equiv \chi_{\alpha\beta}E_\beta,$$

где $\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$ - восприимчивость. Диэлектрическая проницаемость записывается в виде:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi\chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega}\int \frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} d\Gamma_p$$

Разделим интеграл на интегрирование по углам и по энергиям: $\Gamma_p = \Gamma_\varepsilon \frac{\Omega_p}{4\pi}$, $\Gamma_\varepsilon = \nu(\varepsilon)d\varepsilon$, где $\nu(\varepsilon)$ - плотность состояний.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega}\int \Gamma_\varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\int \frac{\Omega_p}{4\pi}\frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta} d\Gamma_p$$

Интеграл был подробно взят в [3, стр 138]. В результате получается:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_l \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \varepsilon_t\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)$$

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{l^2}\int \left(1 - \frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1+i\delta}\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\Gamma_\varepsilon$$

$$\varepsilon_t = 1 + \frac{2\pi e^2}{l^2}\int \left(1 + \frac{1-s^2}{2s}\ln\frac{s+1}{s-1+i\delta}\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\Gamma_\varepsilon$$

где ε_l - продольная компонента диэлетрической проницаемости, ε_t - поперечная компонента диэлектрической проницаемости, $s = \frac{\omega}{vk}$.
Отметим, что функция $W(s) = 1 - \frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1+i\delta}$ является действительной при $s > 1$ и имеет мнимую часть $\mathrm{Im}W = \frac{\pi s}{2}$ при $s < 1 \Longleftrightarrow v > \frac{\omega}{k}$. Мнимая часть - затухание Ландау.

Как же так, плазма бесстолкновительная, а есть затухание? Куда девается энергия? [1, §30]

Диэлектрическая проницаемость ε_l бесстолкновительной плазмы оказывается комплексной величиной, что означает наличие диссипации энергии электрического поля в среде. Об этом явлении говорят как о **затухании Ландау**. Бесстолкновительная диссипация не связана с возрастанием энтропии; представляет собой термодинамически обратимый процесс. Она возникает от электронов, скорость которых в направлении распространения электрической волны совпадает с фазовой скоростью волны ($v_x = \omega/k$); о таких электронах говорят, что они движутся в фазу с волной. По отношению к этим электронам поле стационарно и поэтому оно может производить над электронами работу, не обращающуюся в нуль при усреднении по времени.
Иначе говоря, в обмене энергии с полем участвуют частицы со скоростями v_x, близкими к w/k, причём частицы с $v_x < w/k$ получают энергию от волны, а с $x_v > w/k$ - отдают энергию волне; волна будет терять энергию, если первых несколько больше, чем вторых

Почему нули продольной диэлектрической проницаемости определяют спектр возбуждений плазмы? [1, §28,32], [3, стр. 141]

Пусть электрическое поле $\boldsymbol{E}_l(\boldsymbol{r},t) \sim \boldsymbol{E}_l \exp\{(i\boldsymbol{kr} - i\omega t)\}$ продольное, то есть $\boldsymbol{E}_l \uparrow\uparrow \boldsymbol{k}$. Тогда $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}_l = i[\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}_l] = 0$, что влечёт $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -i\omega\boldsymbol{B} = 0 \Longrightarrow \mathrm{rot}B = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -i\omega\boldsymbol{D} = 0$. Но с другой стороны $\boldsymbol{D} = \varepsilon_l\boldsymbol{E}_l = 0$, что даст нетривиальные решения только тогда, когда

$$\varepsilon_l(\omega,\boldsymbol{k}) = 0$$

Найти спектр продольных колебаний плазмы с учетом затухания Ландау [3, стр 139]

Введем некоторые обозначения: $n = \int d\Gamma_\varepsilon f_0(\varepsilon)$ - плотность элетронов; $\langle g\rangle = \frac{\int d\Gamma_\varepsilon g f_0(\varepsilon)}{\int d\Gamma_\varepsilon f_0(\varepsilon)}$. С учётом того, что для спектра $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ плотность состояний $\nu(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, имеем соотношение:

$$\int \varepsilon^r \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\Gamma_\varepsilon = -\left(r + \frac{1}{2}\right) \int \varepsilon^{r-1} f_0(\varepsilon) d\Gamma_\varepsilon$$

Будем рассматривать два приближения: $\omega \gg vk \Longleftrightarrow s \gg 1$ (область высоких частот), $\omega \ll vk \Longleftrightarrow s \ll 1$ (область низких частот).

$$\mathrm{Re}\varepsilon_l(\omega \gg vk) = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{3s^2} + \frac{1}{5s^4}\right) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \nu(\varepsilon) d\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2}{3\omega^2} \int\limits_0^{+\infty} v^2 \left(1 + \frac{3}{5}\frac{k^2 v^2}{\omega^2}\right) \nu(\varepsilon) d\varepsilon \approx$$

$$\approx 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{k^2\left\langle v^2\right\rangle}{\omega^2}\right); \;\; \Omega = \frac{4\pi n e^2}{m}$$

$$\mathrm{Im}\varepsilon_l(\omega \gg vk) = -\pi \frac{4\pi e^2}{k^2} \int\limits_{v > \frac{\omega}{k}} \frac{\omega}{2vk} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\Gamma_\varepsilon = \omega \frac{\Omega^2}{k^2} \frac{m^3}{nk} \frac{f_0}{2\pi\hbar^3} \frac{m\omega^2}{2k^2}$$

$$\varepsilon_l(\omega \ll vk) \approx 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\Gamma_\varepsilon \left(1 + \frac{i\pi s}{2}\right) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} =$$

$$= 1 + \frac{\Omega^2}{k^2}\left\langle \frac{1}{v^2}\right\rangle + i\omega \frac{\Omega^2}{k^2} \frac{m^3}{nk} \frac{f_0(\varepsilon)}{2\pi\hbar^3}$$

Спектр будет находится следующим образом:

$$\varepsilon_l(\omega,\boldsymbol{k}) = 0 \Longrightarrow 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{k^2\left\langle v^2\right\rangle}{\omega^2}\right) = 0 \Longrightarrow \omega \approx \sqrt{\Omega^2 + k^2\left\langle v^2\right\rangle} \approx \Omega + \frac{k^2\left\langle v^2\right\rangle}{2}$$

Как искать спектр поперечных колебаний (обосновать) [3, стр. 141]

Поперечные колебания электрического поля $\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t}) \sim \boldsymbol{E}_t \exp\{(i\boldsymbol{kr} - i\omega t)\}$ подразумевают равенство $\boldsymbol{kE}_t = 0$. Но $\boldsymbol{D}_t = \varepsilon_t \boldsymbol{E}_t \Longrightarrow \boldsymbol{kD}_t = 0$. Согласно уравнениям Максвелла для фурье-компонент электрического и магнитного полей мый найдём:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\boldsymbol{E}_t = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{D}_t}{\partial t}, \mathrm{div}\boldsymbol{D}_t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_t = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{kB} = 0 \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B} = -\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}_t, \boldsymbol{kD}_t = 0 \end{cases}$$

Исключая магнитное поле из этих уравнений, получим:

$$\boldsymbol{k} \times [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_t] = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{kE}_t) - k^2\boldsymbol{E}_t = \frac{\omega}{c}[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}] = -\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{D}_t = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_t \boldsymbol{E}_t$$

Для существования нетривиального решения необходимо выполнение соотношения:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_t(\omega, k)$$

Для случая $\omega \gg vk$ в силу $v \ll c$ можно положить $\varepsilon_t(\omega, k) \approx \varepsilon_t(\omega, 0) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}$. Это даёт:

$$\omega^2 = \Omega^2 + c^2k^2$$

Результат для низкочастотного случая ($\omega \ll vk$) (подробности в [3, стр 142]):

$$\omega = -i\frac{2}{\pi}\frac{c^2k^3}{\Omega^2 \langle v^{-1} \rangle}$$

13. Бесстолкновительная вырожденная плазма. Написать в общем виде систему уравнений Власова. Когда плазму можно приближенно считать бесстолкновителньой? Найти диэлектрическую проницаемость плазмы. Почему нули продольной диэлектрической проницаемости определяют спектр возбуждений плазмы? Найти спектр продольных колебаний вырожденной плазмы (без затухания Ландау). Как искать спектр поперечных колебаний (подробно обосновать)?

Примечание: данный билет существенно опирается на предыдущий! Есть предположение, что отличие только в усреднении $\left\langle v^k \right\rangle$, которое встречается при вычислении спектров продольных и поперечных колебаний.

14. Операторы Крауса. Что такое приведенная матрица плотности подсистемы? Получить операторное уравнение, описывающее эволюцию квантовой системы через операторы Крауса. Вывести уравнение Линдблада. Доказать для уравнений Линдблада аналог H-теоремы. В качестве задачи, рассмотреть спин-1/2 и вывести уравнения Блоха с затуханием из соответствующих уравнений Линдблада.

Операторы Крауса и весь стафф из этого билета постоянно используется для описания открытых квантовых систем. Дело в том, что эволюция квантовой системы, взаимодействующей с внешней средой — другой квантовой системой, называемой обычно термостатом; уже не описывается унитарной эволюцией. Мы вынуждены прибегнуть к описанию состояний с помощью матриц плотности и вполне положительных отображений. Судя по устройству лекций на вполне положительных отображениях останавливаться не нужно, вместо этого я напомню важные места с частичным следом и т.п.
Тут будет много воды, но читать это должно быть легче, чем презентации дорогого Лектора)))

Частичный след, матрицы плотности подсистемы, редуцированная матрица плотности

Мы переходим от формализма бра- и кет-векторов к матрицам плотности. Для состояния $|\psi\rangle$ матрица плотности определяется $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, очевидно, что отображения такого вида биективны с точностью до *незначащей* общей фазы (состояния $|\psi\rangle$ и $e^{i\varphi}|\psi\rangle$ физически неразличимы...). Состояния, которые можно записать как $|\psi\rangle\langle\psi|$ для некоторого ψ называются *чистыми*, остальные - *смешанными*.
Если рассмотреть свойства матриц плотности чистых состояний то мы увидим $\rho^\dagger = \rho$, $\mathrm{tr}\{\rho\} = 1$, $\rho \geq 0$. **Эти три свойства станут новым определением состояния квантовой системы.** Классический пример смешанного состояния — $\frac{I}{\mathrm{tr}\, I}$[1]. Проверить состояние на чистоту можно так: $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1 \Leftrightarrow \rho$ — чистое состояние.

Любое смешанное состояние можно представить суммой чистых: $\rho = \sum_\lambda \lambda |\lambda\rangle\langle\lambda|$ (спектральное разолжение..)

Вычисление средних:

Рассмотрим как вычисляются средние для чистых состояний: $\overline{A} = \langle\psi| A |\psi\rangle = \mathrm{tr}\{|\psi\rangle\langle\psi| A\}$, что легко доказать взяв базис, первым вектором которого является ψ, и воспользоваться инвариантностью следа.
Аналогично (это можно увидеть разложив смешанное состояние в сумму чистых) вычисляются средние величины для смешанных состояний, т.е. $\overline{A} = \mathrm{tr}\{\rho A\}$.

Мне кажется, что лектор на этом вообще не останавливался, полагая это известным из кантмеха, поэтому расписал $\pm$ подробно, на всякий случай..

Наконец, перейдем к задаче, которой посвящен весь билет: рассматривается взаимодействующие квантовые системы: одна из них относительно «простая» (мало степеней свободы — низкая размерность пространства) с индексом s и резервуар с индексом r. Резервуар может иметь размерность Гильбертова пространства, например, 10^6. Системы взаимодействуют по гамильтониану:

$$H = \underbrace{H_s}_{\text{гамильтониан системы}} + \underbrace{H_r}_{\text{гамильтониан резервуара}} + \underbrace{H_{sr}}_{\text{гамильтониан взаимодействия}}.$$

Более строго (и чуть более понятно) формулу можно написать так:

$$H = H_s \otimes I_r + I_s \otimes H_r + H_{sr},$$

[1] I - единичный оператор: $I|\psi\rangle = |\psi\rangle$

а их общая матрица плотности ρ будет эволюционировать под действием общего гамильтониана по стандартному правилу:

$$i\hbar\partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle \mapsto i\hbar\partial_t\rho = [H,\rho]\,^2,$$

возникает проблема — из-за гамильтониана взаимодействия переменные системы и резервуара запутываются, так что даже если при $t = 0$ матрица плотности представляла просто тензорное произведение состояний системы и резервуара $\rho(0) = \rho_s \otimes \rho_r$, то потом они перепутаются и разделить на подобное произведение матрицу плотности будет нельзя. Тем не менее, средние значения для системы всё еще интересны, т.е. задача состоит в вычислении $\overline{A_s \otimes I_r}$ в нужный момент времени. **И нет никакого желания вычислять эволюцию всего (огромного) оператора** ρ

Рассмотрим среднее:

$$\overline{A_s \otimes I_r} = \mathrm{tr}\{(A_s \otimes I_r)\rho\} = \mathrm{tr}\left\{(A_s \otimes I_r) \sum_{km,\alpha\beta} \rho_{km,\alpha\beta} |k\rangle |\alpha\rangle \langle m| \langle\beta| \right\},$$

здесь латинскими буквами обозначены степени свободы системы, а греческими — резервуара. Матрица плотности просто разложена по своим матричным элементам. Выбирая тот же базис вычисляем след:

$$\overline{A_s \otimes I_r} = \sum_{km,\alpha\beta} \rho_{km,\alpha\beta} \langle m| \langle\beta| A_s \otimes I_r |k\rangle |\alpha\rangle = \sum_{km,\alpha\beta} \rho_{km,\alpha\beta} \langle m| A_s |k\rangle \langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{km,\alpha} \rho_{km,\alpha\alpha} \langle m| A_s |k\rangle$$

Видим, что введение нового оператора: $\rho_s = \sum_{km,\alpha} \rho_{km,\alpha\alpha} |k\rangle\langle m|$ позволяет вычислять средние очень просто. Это и называется **приведенной матрицей плотности**. Пишут:

$$\rho_s = \mathrm{tr}_r\, \rho,$$

tr_r называется **частичным следом** по системе r, т.е. по резервуару. Как уже было показано:

$$\mathrm{tr}_r\, \rho = \sum_\alpha \Big(I_s \otimes \langle\alpha|\Big)\rho\Big(I_s \otimes |\alpha\rangle\Big),$$

иногда пишут $\mathrm{tr}_r\, \rho = \sum_\alpha \langle\alpha| \rho |\alpha\rangle$, опуская единичный оператор. Отсюда следует:

$$\mathrm{tr}\{\mathrm{tr}_r(\rho)A\} = \overline{A} \Rightarrow \mathrm{tr}\{\mathrm{tr}_r\, \rho\} = \mathrm{tr}\{\rho\}.$$

Т.е. частичный след сохраняет след. Нетрудно видеть, что он также сохраняет положительную определенность и эрмитовость. Значит частичный след от состояния — состояние! Более того:

$$\mathrm{tr}_r(A_s \otimes B_r) = \mathrm{tr}\{B_r\}A_s \quad \forall A_s, B_r.$$

Т.е. частичный след разделяет составную систему на подсистемы... Проблема в запутанных состояниях, у них $\rho \neq \mathrm{tr}_r(\rho) \otimes \mathrm{tr}_s(\rho)$, так что обращаться с ним нужно осторожно.

Операторное уравнение на эволюцию квантовой системы

Эта часть хорошо разобрана на слайдах (13 лекция), я пепрепишу с комментариями, слава mathpix! Пусть в начальный момент времени состояние сепарабельно, т.е. $\rho(0) = \rho_s(0)\rho_r(0)$, причем $\rho_r(0) = |in\rangle\langle in|$ (initial). Гамильтониан индуцирует эволюцию: $\mathcal{U}(t) = \exp\{\int -i\hbar^{-1} H \,\mathrm{d}\,\tau\}$. Тогда по определению матрица плотности системы:

$$\begin{aligned}\rho_s(t) &= \mathrm{tr}_r \Big(\mathcal{U}(t)\rho_s(0)\rho_r(0)\mathcal{U}^\dagger(t)\Big) = \\ &= \mathrm{tr}_r \Big(\mathcal{U}(t) |in\rangle \rho_s(0) \langle in| \mathcal{U}^\dagger(t)\Big)\end{aligned}$$

[2] это даже дебил докажет

Выберем некоторый базис в системе r и напишем частичный след:

$$\rho_s(t) = \sum_k \langle k| \mathcal{U}(t) |in\rangle \rho_s(0) \langle in| \mathcal{U}(t) |k\rangle = \sum_k M_k \rho_s M_k^\dagger \tag{63}$$

Операторы

$$M_k(t) = \Big(I_s \otimes \langle k| \Big) \mathcal{U} \Big(I_r \otimes |in\rangle \Big)$$

называются операторами Крауса, и описывают **неунитарную** динамику подсистемы. Это также называется представлением операторной суммы для эволюции подсистемы. Очевидное из определения свойство (поэтому-то и надо писать единичные операторы, а то не докажите):

$$\sum_k M_k^\dagger M_k = I_s.$$

Операторы Крауса существуют для любых допустимых трансформаций квантовых состояний и представляют наиболее общий способ описания квантовой динамики... Про это лектор ничего не говорил.

Вывод уравнения Линдблада:

Рассмотрим эволюцию на малом промежутке времени Δt. В зависимости от выбора базиса при вычислении частичного следа мы можем изменять операторы Крауса (— разложение не единственно..), выберем $|k=0\rangle$ так, чтобы нулевой оператор Крауса слабо отличался от единицы $M_0(\Delta t) = I_s + \Delta M_0$. Разложим M_0 как сумму эрмитового и антиэрмитового операторов (можно сделать с любым оператором) а в остальные операторы сделаем подстановку:

$$\begin{gathered} M_0 = I_s + \left(L_0 - \tfrac{iH}{\hbar}\right) \Delta t \\ M_k = L_k \sqrt{\Delta t} \quad \text{при} \quad k \neq 0 \end{gathered}$$

Здесь H и L_0 два эрмитовых оператора. Подставим эти операторы в уравнение эволюции (63), оставляя только линейные по Δt члены и записывая $\rho_s(t) \approx \rho_s(0) + \Delta\rho_s(t)$.

$$\rho_s(0) + \Delta\rho_s(t) = \rho(0) + \Delta t \left(\frac{1}{i\hbar} [H, \rho_s(0)] + \{L_0, \rho_s(0)\} + \sum_{k\neq 0} L_k \rho_s(0) L_k^\dagger \right),$$

теперь устремляем Δt к нулю, получаем диф. уравнение...

$$\partial_t \rho_s(t) = \left(\frac{1}{i\hbar} [H, \rho_s(0)] + \{L_0, \rho_s(0)\} + \sum_{k\neq 0} L_k \rho_s(0) L_k^\dagger \right),$$

H тут уже не тот же, что и из начала билета))

Казалось бы, это уравнение может даже не сохранять след (мы же обрезали решение на линейных по Δt членах). Однако, если подставить M_0, M_k в свойство нормировки операторов Крауса, получим, что

$$L_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k\neq 0} L_k^\dagger L_k,$$

прямой подстановкой этого тождества в уравнение выше, получим

$$\mathrm{tr}\{\partial_t \rho_s(t)\} \equiv 0.$$

Т.е. нормировка состояний сохраняется. Необходимо, конечно, воспользоваться тем, что $\mathrm{tr}\{[A,B]\} = 0$ и свойством цикличности следа: $\mathrm{tr}\{AB\} = \mathrm{tr}\{BA\}$.

Лектор тут вообще хуйню говорил)))

Но у этого уравнения есть преимущество: все операторы не зависят от времени (см. подстановку), что делает его относительно легким для решения. Перепишем результат в канонической форме:

$$\partial_t \rho_s(t) = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho_s(0)] + \frac{1}{2}\left(\sum_{k\neq 0}[L_k\rho_s, L_k^\dagger] + [L_k, \rho L_k^\dagger]\right)$$

Это т.н. **уравнение Линдблада**, оно описывает неунитарную эволюцию редуцированной матрицы плотности.

17. Рассмотреть запаздывающую, опережающую и келдышевскую функции Грина операторов $A(t)$ и $B(t)$ в гайзенберговском представлении.
Доказать флуктуационно-диссипативную теорему: $G^K_{AB}(\omega) = (G^r_{AB}(\omega) - G^a_{AB}(\omega)) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)$.
Доказать, что имеется связь:
а) $G^r_{AB}(\omega) = \int G^r_{AB}(t-t')e^{i\omega(t-t')}d(t-t') = \int \frac{A_{spf}(x)}{\omega - x + i0}dx$,
б) $G^a_{AB}(\omega) = \int G^a_{AB}(t-t')e^{i\omega(t-t')}d(t-t') = \int \frac{A_{spf}(x)}{\omega - x - i0}dx$,
$A_{spf}(\omega) = (\exp(-\beta E_\mu) - \exp(-\beta E_\nu)) A_{\mu\nu}B_{\nu\mu}\delta(\omega - E_\mu + E_\nu) = -\frac{1}{\pi} Im G^R_{AB}(\omega)$,
в) $G^K_{AB}(\omega) = \int G^K_{AB}(t-t')e^{i\omega(t-t')}d(t-t') = -2\pi i (\exp(-\beta E_\mu) + \exp(-\beta E_\nu)) A_{\mu\nu}B_{\nu\mu}\delta(\omega - E_\mu + E_\nu)$.
В качестве задачи рассмотреть задачу о броуновском движении частицы под действием случайной силы. Задачу решить, расцепляя систему уравнений на двухвременные функции Грина.

Запаздывающая, опережающая и келдышевская функции Грина

Пусть $A(t)$, $B(t)$ - операторы в представлении Гайзенберга. То есть если $U(t)$ - оператор эволюции, то соотношения $A(t) = U^\dagger(t)AU(t)$, $B(t) = U^\dagger(t)BU(t)$ определяют зависимость операторов от времени, а векторы состояний не эволюционируют. Определим двухвременные функции Грина:

$$G^K_{AB}(t,t') = -i\langle\{A(t), B(t')\}_+\rangle \text{ - Келдышевская функция Грина (Keldysh),}$$

$$G^r_{AB}(t,t') = -i\theta(t-t')\langle\left[A(t), B(t')\right]_-\rangle \text{ - запаздывающая функция Грина (retarded),}$$

$$G^a_{AB}(t,t') = i\theta(t'-t)\langle\left[A(t), B(t')\right]_-\rangle \text{ - опережающая функция Грина (advanced),}$$

где $\{A(t), B(t')\}_+ = A(t)B(t') + B(t')A(t)$ - антикоммутатор, $[A(t), B(t')]_- = A(t)B(t') - B(t')A(t)$ - коммутатор. Усреднение производится по некоторой матрице плотности ρ:

$$G^K_{AB}(t,t') = -i\langle\{A(t), B(t')\}_+\rangle = -iSp\left(\rho\{A(t), B(t')\}_+\right), \tag{64}$$

$$G^r_{AB}(t,t') = -i\theta(t-t')\langle\left[A(t), B(t')\right]_-\rangle = -i\theta(t-t')Sp\left(\rho\left[A(t), B(t')\right]_-\right) = \langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle \text{ (обозначение),} \tag{65}$$

$$G^a_{AB}(t,t') = i\theta(t'-t)\langle\left[A(t), B(t')\right]_-\rangle = i\theta(t'-t)Sp\left(\rho\left[A(t), B(t')\right]_-\right). \tag{66}$$

Доказательство соотношений а), б), в)

Итак, мы рассматриваем операторы в представлени Гайзенберга, так что векторы состояний и матрица плотности не зависят от времени. Будем предполагать, что:
1. Гамильтониан H не зависит от времени. Тогда $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, $A(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}Ae^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, $B(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}Be^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$.
В дальнейшем мы будем полагать постоянную Планка $\hbar = 1$ для упрощения, но её всегда можно восстановить из соображений размерности.
2. Будем усреднять по равновесной матрице плотности $\rho = Z^{-1}e^{-\beta H}$, где $\beta = \frac{1}{T}$, $Z = Sp\left(e^{-\beta H}\right)$.
Также:
3. Будем писать функции Грина в базисе собственных функций Гамильтониана $H|n\rangle = E_n|n\rangle$;
4. Будем использовать условия полноты и ортонормированности базиса: $\hat{1} = \sum\limits_n |n\rangle\langle n|$, $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$;
5. Для любого оператора A и произвольного полного ортонормированного базиса $\{|n\rangle\}$: $A = \sum\limits_{n,m} |n\rangle\langle m|A_{nm}$, $A_{nm} = \langle n|A|m\rangle$, $Sp(A) = \sum\limits_n \langle n|A|n\rangle$.

Сначала докажем соотношение а). Согласно (65) рассмотрим след

$$Sp\left(\rho\left[A(t),B(t')\right]_-\right)=Z^{-1}Sp\left(e^{-\beta H}\left[e^{iHt}Ae^{-iHt},e^{iHt'}Be^{-iHt'}\right]_-\right)=$$
$$=Z^{-1}Sp\left(e^{-\beta H}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}Be^{-iHt'}-e^{-\beta H}e^{iHt'}Be^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}\right)=$$
$$=Z^{-1}\sum_n\langle n|\Big(e^{-\beta H}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}Be^{-iHt'}-e^{-\beta H}e^{iHt'}Be^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}\Big)|n\rangle$$

Рассмотрим первое слагаемое в сумме, вставляя единичные операторы и пользуясь пунтками 3-5:

$$\sum_{n,k,m,l}\langle n|e^{-\beta H}e^{iHt}|k\rangle\langle k|A|m\rangle\langle m|e^{-iHt}e^{iHt'}|l\rangle\langle l|Be^{-iHt'}|n\rangle=$$
$$=\sum_{n,k,m,l}e^{-\beta E_n}e^{iE_nt}\delta_{nk}A_{km}e^{-iE_mt}e^{iE_mt'}\delta_{ml}\langle l|B|n\rangle e^{-iE_nt'}\delta_{mn}=\sum_{n,m}e^{-\beta E_n}e^{iE_nt}A_{nm}e^{-iE_mt}e^{iE_mt'}B_{mn}e^{-iE_nt'}.$$

Делая то же самое со вторым слагаемым, переписываем след в виде:

$$Sp\left(\rho\left[A(t),B(t')\right]_-\right)=Z^{-1}\sum_{n,m}\Big(e^{-\beta E_n}e^{iE_nt}A_{nm}e^{-iE_mt}e^{iE_mt'}B_{mn}e^{-iE_nt'}-e^{-\beta E_n}e^{iE_nt'}B_{nm}e^{-iE_mt'}e^{iE_mt}A_{mn}e^{-iE_n}$$

Теперь во втором слагаемом переобозначим индексы суммирования и приведём подобные члены:

$$Z^{-1}\sum_{n,m}\Big(e^{-\beta E_n}e^{iE_nt}A_{nm}e^{-iE_mt}e^{iE_mt'}B_{mn}e^{-iE_nt'}-e^{-\beta E_m}e^{iE_mt'}B_{mn}e^{-iE_nt'}e^{iE_nt}A_{nm}e^{-iE_mt}\Big)=$$
$$=Z^{-1}\sum_{n,m}A_{nm}B_{mn}e^{i(E_n-E_m)(t-t')}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right).$$

Тогда для запаздывающей двухвременной функции Грина мы имеем выражние

$$G^r_{AB}(t,t')\equiv\langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle=-i\theta(t-t')Z^{-1}\sum_{n,m}A_{nm}B_{mn}e^{i(E_n-E_m)(t-t')}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)=G^r_{AB}(t-t').$$

Теперь надо найти преобразование Фурье от этой корреляционной функции:

$$G^r_{AB}(\omega)=\int G^r_{AB}(t-t')e^{i\omega(t-t')}d(t-t').$$

Обозначим $\tau=t-t'$ и заменим ω на $\omega+i\delta,\delta\to+0$ для сходимости интеграла. Тогда:

$$G^r_{AB}(\omega)=-iZ^{-1}\sum_{n,m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i(E_n-E_m)\tau+i\omega\tau-\delta\tau}\theta(\tau)\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}d\tau=$$
$$=-iZ^{-1}\sum_{n,m}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i(E_n-E_m)\tau+i\omega\tau-\delta\tau}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)d\tau=$$
$$=\frac{-iZ^{-1}}{i(E_n-E_m)+i\omega-\delta}e^{i(E_n-E_m)\tau+i\omega\tau-\delta\tau}\Big|_0^{+\infty}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)=$$
$$=\frac{iZ^{-1}}{i(E_n-E_m)+i\omega-\delta}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)=\frac{Z^{-1}}{(E_n-E_m)+\omega+i\delta}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right),\tag{67}$$

где предполается суммирование по индексам n,m.

Замечание: полюс этой функции $-(E_n-E_m)-i\delta$ находится в нижней полуплоскости комплексной

переменной ω. Поэтому, если мы будем брать обратное преобразование Фурье $\int G^r_{AB}(\omega)e^{-i\omega(t-t')}\frac{d\omega}{2\pi}$, то в случае $t-t'<0$, контур нужно замыкать в верхней полуплоскости, которая не содержит полюсов функции $G^r_{AB}(\omega)$, поэтому интеграл в этом случае равен 0. Если же $t-t'>0$, то контур замыкается снизу и интеграл вычисляется с помощью вычетов. Поэтому появится нужная для запаздывающей функции Грина тэта-функция $\theta(t-t')$. Таким образом, замена ω на $\omega+i\delta, \delta\to+0$ (или просто $\omega+i0$) определяет правильное правило обхода полюсов.
Выражение (67) можно преобразовать с помощью введения дельта-функции и нового интегрирования:

$$G^r_{AB}(\omega)=\int\frac{Z^{-1}}{\omega-x+i\delta}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)\delta(x-E_m+E_n)dx=\int\frac{A_{spf}(x)}{\omega-x+i0}dx, \tag{68}$$

где мы обозначили

$$A_{spf}(x)=Z^{-1}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}\delta(x-E_m+E_n).$$

С другой стороны, пользуясь формулой Сохоцкого из курса УМФ

$$\frac{1}{\omega+(E_n-E_m)\pm i0}=\mathcal{P}\frac{1}{\omega+(E_n-E_m)}\mp i\pi\delta(\omega+(E_n-E_m)),$$

получаем из формулы (67), что

$$\mathrm{Im}G^r_{AB}(x)=-\pi Z^{-1}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)\delta(\omega-E_m+E_n).$$

Тогда окончательно имеем то, что требовалось:

$$G^r_{AB}(\omega)=\frac{Z^{-1}}{(E_n-E_m)+\omega+i\delta}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)=\int\frac{A_{spf}(x)}{\omega-x+i0}dx, \tag{69}$$

$$A_{spf}(x)=Z^{-1}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}\delta(x-E_m+E_n)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}G^r_{AB}(x). \tag{70}$$

Теперь получим соотношение б). В опережающей функции Грина стоит тот же след, что и в запаздывающей, мы его уже вычислили. Остаётся сделать преобразование Фурье ($\tau=t-t'$):

$$G^a_{AB}(\omega)=\int G^a_{AB}(t-t')e^{i\omega(t-t')}d(t-t')=$$
$$=iZ^{-1}\sum_{n,m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i(E_n-E_m)\tau+i\omega\tau}\theta(-\tau)\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}d\tau=\Big/\tau\to-\tau\Big/=$$
$$=iZ^{-1}\sum_{n,m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(E_n-E_m)\tau-i\omega\tau}\theta(\tau)\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}d\tau=$$
$$=iZ^{-1}\sum_{n,m}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-i(E_n-E_m)\tau-i\omega\tau}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}d\tau.$$

В этом случае мы должны заменить ω на $\omega-i\delta, \delta\to+0$. Тогда

$$G^a_{AB}(\omega)=iZ^{-1}\sum_{n,m}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-i(E_n-E_m)\tau-i\omega\tau-\delta\tau}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)d\tau=$$
$$=\frac{iZ^{-1}}{-i(E_n-E_m)-i\omega-\delta}e^{-i(E_n-E_m)\tau-i\omega\tau-\delta\tau}\Big|_0^{+\infty}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)=$$
$$=\frac{-iZ^{-1}}{-i(E_n-E_m)-i\omega-\delta}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)=\frac{Z^{-1}}{(E_n-E_m)+\omega-i\delta}A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right). \tag{71}$$

Так же, как и в (68) с помощью введения дельта-функции получаем соотношение б):

$$G^a_{AB}(\omega) = \int \frac{Z^{-1}}{\omega - x - i\delta} A_{nm}B_{mn}\left(e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}\right)\delta(x - E_m + E_n)dx = \int \frac{A_{spf}(x)}{\omega - x - i0}dx, \tag{72}$$

где A_{spf} определено в (70), а по индексам n, m везде предполагается суммирование.

Наконец, докажем соотношение в). Для этого нужно вычислить след, который стоит в формуле для келдышевской функции Грина (64). Это делается аналогично выше разобранному случаю:

$$Sp\left(\rho\{A(t), B(t')\}_+\right) = Z^{-1}Sp\left(e^{-\beta H}\{e^{iHt}Ae^{-iHt}, e^{iHt'}Be^{-iHt'}\}_+\right) =$$

$$= Z^{-1}Sp\left(e^{-\beta H}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}Be^{-iHt'} + e^{-\beta H}e^{iHt'}Be^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}\right) =$$

$$= Z^{-1}\sum_n \langle n|\left(e^{-\beta H}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}Be^{-iHt'} + e^{-\beta H}e^{iHt'}Be^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}\right)|n\rangle =$$

$$= Z^{-1}\sum_{n,m}\left(e^{-\beta E_n}e^{iE_nt}A_{nm}e^{-iE_mt}e^{iE_mt'}B_{mn}e^{-iE_nt'} + e^{-\beta E_n}e^{iE_nt'}B_{nm}e^{-iE_mt'}e^{iE_mt}A_{mn}e^{-iE_nt}\right) =$$

$$= Z^{-1}\sum_{n,m}\left(e^{-\beta E_n}e^{iE_nt}A_{nm}e^{-iE_mt}e^{iE_mt'}B_{mn}e^{-iE_nt'} + e^{-\beta E_m}e^{iE_mt'}B_{mn}e^{-iE_nt'}e^{iE_nt}A_{nm}e^{-iE_mt}\right) =$$

$$= Z^{-1}\sum_{n,m} A_{nm}B_{mn}e^{i(E_n - E_m)(t-t')}\left(e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}\right).$$

Делаем преобразование Фурье, где используем Фрье-представление дельта-функции $\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\frac{dk}{2\pi}$:

$$G^K_{AB}(\omega) = \int G^K_{AB}(t-t')e^{i\omega(t-t')}d(t-t') = -iZ^{-1}\sum_{n,m}A_{nm}B_{mn}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E_n-E_m)(t-t')+i\omega(t-t')}\left(e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}\right)d(t$$

$$= -2\pi i\left(e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}\delta(\omega + E_n - E_m), \tag{73}$$

что и требовалось.

Доказательство флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ)

Используя полученные соотношения (69), (70), (72) и формулу Сохоцкого, получаем

$$G^r_{AB}(\omega) - G^a_{AB}(\omega) = \int\left[\frac{A_{spf}(x)}{\omega - x + i0} - \frac{A_{spf}(x)}{\omega - x - i0}\right]dx = -2\pi i\int A_{spf}(x)\delta(\omega - x)dx = -2\pi i A_{spf}(x) = 2i\mathrm{Im}G^r_{AB}(\omega$$

(74)

Домножим полученное выражение на $\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)$ и упростим

$$(G^r_{AB}(\omega) - G^a_{AB}(\omega))\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) = 2i\mathrm{Im}G^r_{AB}(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) =$$

$$= \Big/ (70),\ \delta(\omega - y)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) = \delta(\omega - y)\coth\left(\frac{\hbar y}{2T}\right), \hbar = 1 \Big/ =$$

$$= -2\pi i Z^{-1}\left(e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}\delta(\omega - E_m + E_n)\coth\left(\frac{-E_n + E_m}{2T}\right) =$$

$$= -2\pi i Z^{-1}\left(e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}\delta(\omega - E_m + E_n)\frac{e^{\beta(E_m - E_n)} + 1}{e^{\beta(E_m - E_n)} - 1} =$$

$$= -2\pi i Z^{-1}\left(e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}\delta(\omega - E_m + E_n)\frac{e^{\beta(-E_n)} + e^{\beta(-E_m)}}{e^{\beta(-E_n)} - e^{\beta(-E_m)}} =$$

$$= -2\pi i Z^{-1}\left(e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}\right)A_{nm}B_{mn}\delta(\omega - E_m + E_n) = G^K_{AB}(\omega)$$

Итак, мы получили требуемое утверждение:

$$G^K_{AB}(\omega) = (G^r_{AB}(\omega) - G^a_{AB}(\omega))\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) = 2i\mathrm{Im}G^r_{AB}(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right). \tag{75}$$

Броуновское движение частицы со случайной силой (Задача 12, разобрана у Щелкунчика)

Исследуем смещение броуновской частицы с помощью функций Грина. Будем решать эту задачу квантовомеханически, рассматривая оператор смещения частицы в представлении Гайзенберга (считаем, что Гамильтониан не зависит от времени): $x(t) = e^{iHt}x(0)e^{-iHt}$.
Нас интересует следующий коррелятор, определяющий средний квадрат смещения:

$$\langle (x(t) - x(0))(x(t) - x(0))\rangle,$$

где усреднение производится по матрице плотности

$$\rho = Z^{-1}e^{-\beta H},\ Z = Sp(e^{-\beta H}),\ \beta = \frac{1}{T}.$$

1. Раскроем скобки

$$\langle (x(t) - x(0))(x(t) - x(0))\rangle = \langle x(t)x(t) + x(0)x(0) - x(0)x(t) - x(t)x(0)\rangle. \tag{76}$$

Покажем, что $\langle x(t)x(t)\rangle = \langle x(0)x(0)\rangle$, используя свойство цикличности следа:

$$\langle x(t)x(t)\rangle = Z^{-1}Sp(e^{-\beta H}e^{iHt}x(0)e^{-iHt}e^{iHt}x(0)e^{-iHt}) = Z^{-1}Sp(e^{-\beta H}e^{iHt}x(0)x(0)e^{-iHt}) =$$
$$= Z^{-1}Sp(e^{-iHt}e^{-\beta H}e^{iHt}x(0)x(0)) = Z^{-1}Sp(e^{-iHt}e^{iHt}e^{-\beta H}x(0)x(0)) = Z^{-1}Sp(e^{-\beta H}x(0)x(0)) = \langle x(0)x(0)\rangle.$$

Мы также пользуемся тем, что экспоненты можно переставлять друг с другом $e^{-\beta H}e^{iHt} = e^{iHt}e^{-\beta H}$, т.к. их можно разложить в ряд, а Гамильтониан коммутирует с любой своей степенью: $[H^k, H^n] = 0$.
Тогда из (76) получаем:

$$\langle (x(t) - x(0))(x(t) - x(0))\rangle = 2\langle x(0)x(0)\rangle - \langle x(0)x(t) + x(t)x(0)\rangle. \tag{77}$$

2. Вводим корреляторы в соответствии с (64),(65):

$$iG^K_{A,B}(t) = \langle x(0)x(t) + x(t)x(0)\rangle, \tag{78}$$

$$G^r_{A,B}(t) = -i\theta(t)\langle [x(t), x(0)]\rangle \equiv \langle\langle x(t)|x(0)\rangle\rangle. \tag{79}$$

Чтобы найти интересующий нас коррелятор (78), сначала найдём (79), а потом воспользуемся ФДТ.

а) Продифференцируем по времени запаздывающую функцию Грина (79) с учётом того, что матрица плотности не зависит от времени, и производную можно заносить под знак среднего:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle x(t)|x(0)\rangle\rangle = -i\theta(t)\langle[\dot{x}(t), x(0)]\rangle - i\delta(t)\langle[x(t), x(0)]\rangle = -i\theta(t)\langle[\dot{x}(t), x(0)]\rangle - i\delta(t)\langle[x(0), x(0)]\rangle = -i\theta(t)\langle[\dot{x}(t),$$
$$= \langle\langle \dot{x}(t)|x(0)\rangle\rangle$$

где мы также учли, что $\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = \delta(t)$.
б) Продифференцируем по времени полученное равенство ещё раз:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle\langle x(t)|x(0)\rangle\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle\langle \dot{x}(t)|x(0)\rangle\rangle = \langle\langle \ddot{x}(t)|x(0)\rangle\rangle - i\delta(t)\langle[\dot{x}(t), x(0)]\rangle = \langle\langle \ddot{x}(t)|x(0)\rangle\rangle - i\delta(t)\langle[\dot{x}(0), x(0)]\rangle$$

Наконец, перепишем полученные соотношения в Фурье-представлении, учитывая $\int \delta(t)e^{i\omega t}dt = 1$:

$$\begin{cases} -i\omega\langle\langle x|x\rangle\rangle_\omega = \langle\langle \dot{x}|x\rangle\rangle_\omega, \\ -i\omega\langle\langle \dot{x}|x\rangle\rangle_\omega = \langle\langle \ddot{x}|x\rangle\rangle_\omega - i\langle[\dot{x}(0), x(0)]\rangle, \\ ... \end{cases} \tag{80}$$

где

$$\langle\langle x|x\rangle\rangle_\omega = G^r_{xx}(\omega) = \int G^r_{xx}(t-t')e^{i(\omega+i\delta)(t-t')}d(t-t') = \int \langle\langle x(t)|x(0)\rangle\rangle e^{i(\omega+i\delta)t}dt,$$

$$\langle\langle \dot{x}|x\rangle\rangle_\omega = G^r_{\dot{x}x}(\omega) = \int G^r_{\dot{x}x}(t-t')e^{i(\omega+i\delta)(t-t')}d(t-t') = \int \langle\langle \dot{x}(t)|x(0)\rangle\rangle e^{i(\omega+i\delta)t}dt,$$

$$\langle\langle \ddot{x}|x\rangle\rangle_\omega = G^r_{\ddot{x}x}(\omega) = \int G^r_{\ddot{x}x}(t-t')e^{i(\omega+i\delta)(t-t')}d(t-t') = \int \langle\langle \ddot{x}(t)|x(0)\rangle\rangle e^{i(\omega+i\delta)t}dt.$$

Замечание.
△ Так как мы показали в первой части билета, что функции Грина зависят только от разности времён, то можно писать

$$G^K_{AB}(t,t') = -i\langle\{A(t)|B(t')\}_+\rangle = G^K_{AB}(t-t') = -i\langle\{A(t-t')|B(0)\}_+\rangle,$$

$$G^r_{AB}(t,t') = -i\langle\{A(t)|B(t')\}_+\rangle = -i\langle\{A(t-t')|B(0)\}_+\rangle.$$

Это также можно показать с помощью свойства цикличности следа $Sp(AB) = Sp(BA)$:

$$\begin{gathered} G^K_{AB}(t,t') = -i\langle\{A(t)|B(t')\}_+\rangle = -iSp\left(\rho\{A(t), B(t')\}_+\right) = \\ = -iZ^{-1}Sp\left(e^{-\beta H}\{e^{iHt}Ae^{-iHt}, e^{iHt'}Be^{-iHt'}\}_+\right) = \\ = -iZ^{-1}Sp\left(e^{-\beta H}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}Be^{-iHt'} + e^{-\beta H}e^{iHt'}Be^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}\right) = \\ = \Big/ \text{переставляем во 2ом слагаемом } e^{-\beta H}e^{iHt'} = e^{iHt'}e^{-\beta H} \Big/ = \\ = -iZ^{-1}Sp\left(e^{-iHt'}e^{-\beta H}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}B + e^{iHt'}e^{-\beta H}Be^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}\right) = \\ = -iZ^{-1}Sp\left(e^{-\beta H}e^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}B + e^{-\beta H}Be^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}\right) = \\ = -iZ^{-1}Sp\left(e^{-\beta H}\left(e^{iH(t-t')}Ae^{-iH(t-t')}B + Be^{iH(t-t')}Ae^{-iH(t-t')}\right)\right) = -i\langle\{A(t-t')|B(0)\}_+\rangle \end{gathered}$$

и аналогично для $G^r_{AB}(t,t')$. □
3. Для вычисления $\langle\langle \ddot{x}|x\rangle\rangle_\omega$ из (80), воспользуемся уравнением Ланжевена:

$$\ddot{x} = -\nu\dot{x} + f(t),$$

где ν - сила трения, а $f(t)$ - ланжевеновский источник, т.е. случайная сила, такая, что $\langle f(t)f(t')\rangle \sim \delta(t-t')$. Тогда

$$\langle\langle \ddot{x}|x\rangle\rangle_\omega = -\nu\langle\langle \dot{x}|x\rangle\rangle_\omega + \langle\langle f|x\rangle\rangle_\omega.$$

Но $\langle\langle f(t)|x(t')\rangle\rangle = 0$:

$$\langle\langle f(t)|x(t')\rangle\rangle = -i\theta(t-t')\langle[f(t)|x(t')]_-\rangle = 0,$$

т.к. при $t > t'$ коррелятор равен 0 в силу принципа причинности (сила не действует на частицу "из будущего"), а если $t < t'$, то $\theta(t-t') = 0$. Тогда и $\langle\langle f|x\rangle\rangle_\omega = 0$. Итого

$$\langle\langle \ddot{x}|x\rangle\rangle_\omega = -\nu\langle\langle \dot{x}|x\rangle_\omega.$$

Подставим это во второе уравнение системы (80), а также воспользуемся коммутационным соотношением и квантовой механики $[\dot{x}, x] = -\frac{i\hbar}{m}$:

$$\begin{cases} -i\omega\langle\langle x|x\rangle\rangle_\omega = \langle\langle \dot{x}|x\rangle\rangle_\omega \\ -i\omega\langle\langle \dot{x}|x\rangle\rangle_\omega = -\nu\langle\langle \dot{x}|x\rangle_\omega - \frac{\hbar}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -i\omega\langle\langle x|x\rangle\rangle_\omega = \langle\langle \dot{x}|x\rangle\rangle_\omega \\ \langle\langle \dot{x}|x\rangle\rangle_\omega = \frac{\hbar}{m}\frac{1}{i\omega-\nu} \end{cases} \tag{81}$$

Тогда из первого уравнения системы получаем

$$\langle\langle x|x\rangle\rangle_\omega = \frac{\hbar}{m}\frac{i}{\omega(i\omega-\nu)} = -i\hbar\frac{1}{m}\frac{\nu+i\omega}{\omega(\omega^2+\nu^2)}$$

Положим для удобства $m = 1$ (в ответе можно будет дописать массу в знаменатель коррелятора). Применим ФДТ:

$$G^K_{A,B}(\omega) = -i\langle x(0)x(t) + x(t)x(0)\rangle_\omega = 2i\mathrm{Im}\langle\langle x|x\rangle\rangle_\omega \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) = -2i\frac{\nu\hbar}{\omega(\omega^2+\nu^2)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right),$$

откуда находим

$$\langle x(0)x(t) + x(t)x(0)\rangle_\omega = \frac{2\nu\hbar}{\omega(\omega^2+\nu^2)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).$$

Делаем обратное преобразование Фурье:

$$\langle x(0)x(t) + x(t)x(0)\rangle = \int \frac{2\nu\hbar}{\omega(\omega^2+\nu^2)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

При $t = 0$ имеем

$$2\langle x(0)x(0)\rangle = \int \frac{2\nu\hbar}{\omega(\omega^2+\nu^2)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Тогда для искомого квадрата смещения из выражения (77) получаем

$$I(t) = \langle (x(t)-x(0))(x(t)-x(0))\rangle = \int \frac{2\nu\hbar}{\omega(\omega^2+\nu^2)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\left(1-e^{-i\omega t}\right)\frac{d\omega}{2\pi} \tag{82}$$

Т.к. интеграл вещественный по смыслу, то можно экспоненту заменить на косинус:

$$I(t) = \int \frac{2\nu\hbar}{\omega(\omega^2+\nu^2)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)(1-\cos(\omega t))\frac{d\omega}{2\pi}$$

Вычислим этот интеграл в пределе высоких температур $T \to +\infty$, $\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \to \frac{2T}{\hbar\omega}$:

$$I(t) = \frac{2T}{\pi}\int \frac{\nu}{\omega^2(\omega^2+\nu^2)}(1-\cos(\omega t))\,d\omega.$$

Во-первых, заметим, что $I(0) = 0$. Вычислим производную этого интеграла по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t) = \frac{2T}{\pi}\int \frac{\nu}{\omega(\omega^2+\nu^2)}\sin(\omega t)d\omega \tag{83}$$

При $t \to +\infty$ можно вычислить:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}I(t) = \frac{2T}{\pi}\int \frac{\nu}{\omega(\omega^2+\nu^2)}\sin(\omega t)d\omega = \Big/ z = \omega t \Big/ = \\ = \frac{2T}{\pi}\int \frac{\nu}{\frac{z}{t}\left(\left(\frac{z}{t}\right)^2+\nu^2\right)}\sin(z)d\frac{z}{t} = \\ = \frac{2T}{\pi}\int \frac{\nu}{z\left(\left(\frac{z}{t}\right)^2+\nu^2\right)}\sin(z)dz \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2T}{\pi\nu}\int\frac{\sin(z)}{z}dz = \frac{2T}{\pi\nu}\pi = \frac{2T}{\nu}, \end{gathered} \tag{84}$$

где мы воспользовались табличным интегралом (интегральный синус).
Вторая производная интеграла по времени:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}I(t) = \frac{2T}{\pi}\int\frac{\nu}{(\omega^2+\nu^2)}\cos(\omega t)d\omega = \frac{2T}{\pi}\int\frac{\nu}{(\omega^2+\nu^2)}e^{i\omega t}d\omega = \frac{2T}{\pi}\int\frac{\nu}{(\omega+i\nu)(\omega-i\nu)}e^{i\omega t}d\omega.$$

Этот интеграл вычисляется замыканием в верхней полуплоскости (считаем $t > 0$):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}I(t) = \frac{2T}{\pi}\int\frac{\nu}{(\omega+i\nu)(\omega-i\nu)}e^{i\omega t}d\omega = \frac{2T}{\pi}2\pi i\frac{\nu e^{-\nu t}}{2i\nu} = \frac{2T}{\pi}\pi e^{-\nu t} = 2Te^{-\nu t}. \tag{85}$$

Проинтегрируем равенство (85) с учётом граничного условия (84):

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t) = -\frac{2T}{\nu}e^{-\nu t} + \frac{2T}{\nu}.$$

Проинтегрируем ещё раз с учётом условия $I(0) = 0$:

$$I(t) = \frac{2T}{\nu^2}e^{-\nu t} + \frac{2T}{\nu}t - \frac{2T}{\nu^2} = \frac{2T}{\nu}t - \frac{2T}{\nu^2}(1-e^{-\nu t}).$$

Итак, мы нашли средний квадрат смещения (восстановим массу частицы):

$$\langle(x(t)-x(0))(x(t)-x(0))\rangle = \frac{2T}{m\nu^2}e^{-\nu t} + \frac{2T}{m\nu}t - \frac{2T}{m\nu^2} = \frac{2T}{m\nu}t - \frac{2T}{m\nu^2}(1-e^{-\nu t}). \tag{86}$$

Исследуем полученное выражение.
1) В пределе малых времён t получим баллистическое движение

$$\langle(x(t)-x(0))(x(t)-x(0))\rangle \simeq \frac{2T}{m\nu}t - \frac{2T}{m\nu^2}(1-1+\nu t-\frac{(\nu t)^2}{2}) = \frac{T}{m}t^2.$$

или для трёхмерного случая, в котором $\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(\Delta y)^2} = \overline{(\Delta z)^2} = \frac{\overline{(\Delta r)^2}}{3}$:

$$\overline{(\Delta r)^2} \simeq \frac{3T}{m}t^2$$

2) В пределе больших времён t вторым слагаемым в (86) можно пренебречь и мы получаем диффузию

$$\langle(x(t)-x(0))(x(t)-x(0))\rangle \simeq \frac{2T}{m\nu}t,$$

или в трёхмерном случае:

$$\langle(x(t)-x(0))(x(t)-x(0))\rangle \simeq \frac{6T}{m\nu}t = Dt.$$

18. Представление взаимодействия и теория линейного отклика. (͡° ͜ʖ ͡°)

Замечания: Я не ставлю шляпки над операторами, чтобы не усложнять себе жизнь. Формулы и так должна быть понятны. С этой же целью $\hbar = 1$. Когда дело доходит до представления взаимодействия, индекс I я не пишу, так как все операторы и так в нем записаны и это не должно приводить к путанице. Все вопросы, пожелания, предложения, угрозы писать в личку.
Используемая литература

- Представление взаимодействия очень подробно описано в книге Mahan G. D. «Many-Particle Physics», пункт 2.1, стр. 82.

- Про матрицу плотности в представлении взаимодействия подробно написано в книге Колоколов И. В. «Физическая кинетика», пункт 10.2, стр. 100 (сто).

- Про адиабатическое включение взаимодействия можно прочитать в АГД (Абрикосов, Горьков, Дзялошинский) «Методы квантовой теории поля в статистической физике», стр. 82 (но лучше не надо).

18.1 Что такое представление взаимодействия? Измеримыми в квантовой механике являются средние от операторов. Описывать изменение средних можно двумя способами:
Представление Шредингера: Состояния зависят от времени, их эволюция описывается УШ:

$$|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle, \quad i\partial_i |\psi(r)\rangle = H |\psi(t)\rangle .$$

Операторы же от времени не зависят. Это уравнение имеет тривиальное решение:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle .$$

Тогда для эволюции среднего получаю:

$$\langle O\rangle (t) = \langle\psi(t)| O |\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)| e^{iHt} O e^{-iHt} |\psi(0)\rangle .$$

Представление Гейзенберга: Пусть теперь состояния не зависят времени и от времени зависят только операторы, причем для системы с гамильтонианом H их зависимость описывается как

$$O(t) = e^{iHt} O(0) e^{-iHt}.$$

Посчитаю среднее в таком предположении:

$$\langle O\rangle (t) = \langle\psi| O(t) |\psi\rangle = \langle\psi| e^{iHt} O(0) e^{-iHt} |\psi\rangle .$$

Из различных подходов получен один и тот же результат.
Представление взаимодействия: Рассмотрю теперь систему с гамильтонианом

$$H = H_0 + V.$$

Какое бы из двух представлений, описанных выше, я не выбрал, заранее знаю, что получу

$$\langle O\rangle (t) = \langle\psi(0)| e^{i(H_0+V)t} O e^{-i(H_0+V)t} |\psi(0)\rangle .$$

Рассматриваю общий случай, в котором $[H_0, V] \neq 0$, то есть

$$e^{H_0+V} \neq e^{H_0} e^{V}.$$

Тривиальными преобразованиями, выражение можно переписать как

$$\langle O\rangle (t) = \langle\psi(0)| e^{iHt} O e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)| e^{iHt} e^{-iH_0t} \left(e^{iH_0t} O e^{-iH_0t}\right) e^{iH_0t} e^{-iHt} |\psi(0)\rangle .$$

Оказывается, к такому же результату для среднего можно было прийти, сказав, что от времени зависят как состояния, так и операторы. Причем, зависимость эта имеет следующий вид:

$$|\psi(t)\rangle = e^{iH_0 t} e^{-iHt} |\psi(0)\rangle, \quad O(t) = e^{iH_0 t} O e^{-iH_0 t}.$$

Эволюция операторов происходит за счет части H_0 гамильтониана. Исследую зависимость состояний от времени. Для этого продифференцирую $|\psi(t)\rangle$ по времени:

$$\partial_t |\psi(t)\rangle = ie^{iH_0 t}(H_0 - H)e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = -ie^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} \left(e^{iH_0 t} e^{-iHt} |\psi(0)\rangle\right) = -iV(t) |\psi(t)\rangle .$$

Таким образом, эволюция состояний описывается уравнением типа Шредингера, где вместо гамильтониана стоит его часть V. Осталось научиться решать данное уравнение. Для этого, определю оператор эволюции как

$$U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}, \quad |\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle .$$

Еще если интересует эволюция не от $t = 0$, а от $t = t_0$, удобно определить S-матрицу как

$$S(t, t_0) = U(t)U^\dagger(t_0), \quad |\psi(t)\rangle = S(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle .$$

Очевидно, что $U(0) = 1$. Составлю дифференциальное уравнение на этот оператор. Его дифференцирование дает:

$$\partial_t U(t) = ie^{iH_0 t}(H_0 - H)e^{-iHt} = -i \left(e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}\right) e^{iH_0 t} e^{-iHt} = -iV(t)U(t).$$

Для решения этого уравнения, проинтегрирую его от 0 до t:

$$U(t) - U(0) = -i \int_0^t dt_1\, V(t_1)U(t_1).$$

Подставляя $U(0)$ и перенеся его в правую часть:

$$U(t) = 1 - i \int_0^t dt_1\, V(t_1)U(t_1).$$

Далее решаю уравнение итеративно. То есть подставляю вместо $U(t_1)$ в правой части выражение через интеграл. Это позволяет получить выражение для $U(t)$ в виде ряда:

$$U(t) = 1 - i \int_0^t dt_1\, V(t_1) + (-i)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, V(t_1)V(t_2) + \dots$$

В общем виде же

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n).$$

Оказывается, это выражение можно записать в удобной форме, если ввести так называемый оператор T-упорядочения. Он упорядочивает операторы, зависящие от времени, отправляя самые ранние моменты времени вправо. Например:

$$T\left[V(t_1)V(t_2)\right] = \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1).$$

Если взглянуть на полученный ряд еще раз, можно обнаружить, что операторы уже упорядочены, так как $t_1 > t_2 > \dots$. Тут на помощь приходит свойство T-упорядочения, которое позволяет переставлять операторы в его аргументе как угодно, так как под действием упорядочения, они все равно будут хронологически упорядочены. Выражение для ряда можно тождественно переписать:

$$U(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, T\left[V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n)\right].$$

Осталась последняя деталь: интегрировать до t_n не очень удобно. Нетрудно заметить, что интегрирование ведется по симплексу (если вас пугают эти страшные слова, просто посмотрите в книгу Махана, где проделаны выкладки для первых нескольких порядков). Используя то, что операторы можно переставлять под аргументом упорядочения, интегрирование по симплексу могу заменить на интегрирование по многомерному кубу. (то есть все интегралы, которые шли до t_1, t_2 и т.д., продлить до t). Однако, таким образом, я учту намного большую область. Нетрудно показать, что полученный интеграл будет в $n!$ больше требуемого. Учтя это, записываю итоговый ответ:

$$U(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots \int_0^t dt_n \, T\left[V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n)\right].$$

Это выражение называют T-экспонентой и записывают как

$$U(t) = T\exp\left[-i\int_0^t dt_1\, V(t_1)\right].$$

Выражение для S-матрицы имеет вид

$$S(t,t_0) = T\exp\left[-i\int_{t_0}^t dt_1\, V(t_1)\right].$$

Вопрос: Чего мы добились?
Ответ: Мы смогли перейти к представлению, в котором эволюция состояния происходит за счет части V гамильтониана, а эволюция операторов — за счет части H_0.
Вопрос: Зачем нам это нужно?
Ответ: Это помогает писать теорию возмущений в случае, если мы знаем точное решение для гамильтониана H_0.

18.2 Матрицы плотности и представление взаимодействия. Рассмотрю описание эволюции матрицы плотности в представлении взаимодействия. Если вернуться к истокам и вспомнить определение, можно получить, что

$$\rho(t) = \sum_{nm} |\psi_n(t)\rangle\, \rho_{nm}\, \langle\psi_m(t)| = S(t,t_0)\left(\sum_{nm} |\psi_n(t_0)\rangle\, \rho_{nm}\, \langle\psi_m(t_0)|\right) S^\dagger(t,t_0) = S(t,t_0)\rho(t_0)S^\dagger(t,t_0).$$

Чтобы получить уравнение, которому удовлетворяет матрица плотности в представлении взаимодействия, продифференцирую ее по времени:

$$\begin{aligned}\partial_t\rho(t) &= \left[\left(\partial_t S(t,t_0)\right)\rho(t_0)S^\dagger(t,t_0) + S(t,t_0)\rho(t_0)\left(\partial_t S(t,t_0)\right)^\dagger\right] = \\ &= \left[-iV(t)\hat\rho(t) + i\rho(t)V(t)\right] = i\left[\rho(t), V(t)\right].\end{aligned}$$

Постановка задачи: Далее H_0 будет рассматриваться как невозмущенный гамильтониан, а V — как возмущение. Задача будет рассматриваться в случае адиабатически медленного включения взаимодействия. Иными словами, в бесконечном прошлом возмущения не было, или $V(-\infty) = 0$ + система находилась в термодинамическом равновесии. Это нужно для того, чтобы теорию возмущений можно было свести к эволюции из бесконечно далекого момента времени. Вообще это удобно при построении диаграммной техники, но здесь от этого нужно понимать только то, что везде дальше $t_0 = -\infty$. гамильтониан H_0 не зависит от времени. Доказать, что в линейном порядке по возмущению,

$$\rho_I(t) \approx \rho_0 + \frac{1}{i}\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \,\left[V_I(t'), \rho_0\right], \quad \rho_0 = \frac{1}{Z}e^{-\beta H_0}, \quad \beta = \frac{1}{T},$$

можно двумя способами, продемонстрирую каждый из них.
Первый способ: Действуем, исходя из определения, и раскладываем экспоненты:

$$\rho(t) = S(t,-\infty)\rho_0 S(-\infty,t) = T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{t} dt_1\, V(t_1)\right)\rho_0 T\exp\left(i\int_{-\infty}^{t} dt_1\, V(t_1)\right) \approx$$

$$\approx \left(1 - i\int_{-\infty}^{t} dt_1\, V(t_1)\right)\rho_0\left(1 + i\int_{-\infty}^{t} dt_1\, V(t_1)\right) \approx \rho_0 - i\int\limits_{-\infty}^{t} dt_1\, \left[V(t_1),\rho_0\right].$$

Второй способ: Проинтегрируем дифференциальное уравнение от $-\infty$ до t:

$$\rho(t) = \rho_0 + i\int\limits_{-\infty}^{t} dt_1\, \left[\rho(t_1), V(t_1)\right].$$

Далее уравнение можно решить в каком угодно порядке точности методом последовательных приближений. Меня интересует первый порядок по возмущению. Так как V уже в правой части присутствует, первый шаг метода последовательных приближений эквивалентен замене $\rho(t_1)$ на ρ_0:

$$\rho(t) = \rho_0 + i\int\limits_{-\infty}^{t} dt_1\, \left[\rho_0, V(t_1)\right].$$

Таким образом, получился один и тот же результат двумя разными способами (sick!).
18.3 Формула Кубо. Теперь найду выражение для эволюции среднего для произвольного оператора:

$$\langle x\rangle(t) = \mathrm{Tr}\left[\rho(t)x(t)\right] = \mathrm{Tr}\left[S(t,-\infty)\rho_0 S(-\infty,t)x(t)\right] \approx \mathrm{Tr}\left[\left(1 - i\int_{-\infty}^{t} dt_1\, V(t_1)\right)\rho_0\left(1 + i\int_{-\infty}^{t} dt_1\, V(t_1)\right)x(t)\right]$$

$$\approx \mathrm{Tr}\left(\rho_0 x(t)\right) + i\,\mathrm{Tr}\left\{\int_{-\infty}^{t} dt_1\, \left[\rho_0 V(t_1)x(t) - V(t_1)\rho_0 x(t)\right]\right\} = \langle x\rangle_{\rho_0}(t) - i\int\limits_{-\infty}^{t} dt_1\, \Big\langle\, [x(t),V(t_1)]\, \Big\rangle_{\rho_0} =$$

$$= \langle x\rangle_{\rho_0}(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_1\, \langle\langle x(t)|V(t_1)\rangle\rangle\,, \quad \langle\langle x(t)|V(t_1)\rangle\rangle = -i\theta(t-t_1)\Big\langle\, [x(t),V(t_1)]\, \Big\rangle_{\rho_0}.$$

Чтобы осознать результат, потребуется приложить определенное умственное усилие. Получилась почти формулу Кубо. Пусть ставится задача о поиске обобщенной восприимчивости. А именно, пусть приложено некоторое (пусть однородное) поле $f(t)$. Пусть имеются две измеримые величины $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$. Пусть приложенное поле действует на систему посредством величины $\hat{y}(t)$, то есть возмущение имеет вид

$$\hat{V} = -f(t)\hat{y}(t).$$

Можно сразу привести пример: если $f(t)$ — электрическое поле, то $\hat{y}(t)$ — оператор плотности заряженных частиц. Нас интересует изменение величины $\hat{x}(t)$, в момент времени t, вызванное приложенным полем $f(t)$. Ответ, вообще говоря, зависит от значений поля $f(t)$ во все моменты времени в прошлом. Поэтому, в общем случае, ответ записывается как

$$\delta x(t) = \int dt_1\, f(t_1)\chi_{xy}(t,t_1).$$

Величина $\chi_{xy}(t,t_1)$ называется обобщенной восприимчивостью. Вернусь теперь к полученному ранее уравнению и подставлю $V(t) = -f(t)y(t)$. Это приводит к

$$\delta x(t) = i\theta(t-t_1)\int dt_1\, f(t_1)\Big\langle\, [x(t), y(t_1)]\,\Big\rangle_{\rho_0}.$$

Сравнивая это выражение с определением обобщенной восприимчивости, прихожу к формуле Кубо:

$$\chi_{xy}(t,t_1) = i\theta(t-t_1)\Big\langle\, [x(t), y(t_1)]\,\Big\rangle_{\rho_0}.$$

Стоит также отметить, что $\chi_{xy}(t,t_1)$ всегда равна нулю при $t_1 > t$, так как система, реагируя на внешнее воздействие, не может знать каким оно будет в моменты времени, которые еще не наступили (свойство причинности).

18.4 Что-то там про высокие температуры