2. ЗАДАНИЕ 2

2.11. (С) Имеется плоская стенка, которая с небольшой скоростью движется через равновесный газ фермионов. Столкновения фермионов со стенкой носят зеркальный характер. Найти силу сопротивления, испытываемою стенкой. То же самое сделать для бозонов. Рекомендуется перед решением этих задач вспомнить определение тензора плотности потока импульса и обсудить его физический смысл. Как изменится решение задачи, если стенка является полупроницаемой мембраной, т.е., с вероятностью $D < 1$ частица может проходить сквозь стенку? Обсудить случай диффузного отражения от стенки.

Решение.

В квантовых жидкостях и кристаллах, как правило, длина свободного пробега элементарных возбуждений очень быстро растет с понижением температуры и может стать такой большой, что превысит все остальные характерные длины в системе, такие, например, как размер кристалла или длина волны кристаллизационных волн. В этих условиях, которые называются баллистическими или бесстолкновительными, для описания конденсированной среды можно воспользоваться представлениями об элементарных возбуждениях, которые можно описать с помощью функции распределения $n(\mathbf{p})$. При низких температурах ($T \lesssim 0.5$ K) в сверхтекучем ^{4}He основной вид элементарных возбуждений – это фононы с дисперсией $\varepsilon = up$, где u – скорость звука. Здесь плоской движущейся стенкой может быть плоская граница между кристаллической и сверхтекучей фазами ^{4}He. Пусть в процессе фазового превращения жидкой фазы в твердую фазу плоская граница кристалл-сверхтекучий ^{4}He растет с постоянной скоростью $\mathbf{V}$, которая направлена внутрь жидкой фазы (*в положительном направлении оси* z). Ниже мы будем искать силу, действующую на границу раздела со стороны фононных возбуждений как импульс, передаваемый фононами сверхтекучей фазы ^{4}He границе раздела в единицу времени, считая для простоты, что фононы из сверхтекучей фазы с вероятностью единица зеркально отражаются от границы кристалл–сверхтекучая жидкость. Эта сила содержит как вклад давления, так и дополнительный вклад силы сопротивления $\mathbf{f}$, пропорциональный скорости движения стенки $\mathbf{V}$.

Вычисление силы $\mathbf{f}$ удобно провести в системе отсчета K', в которой граница раздела фаз покоится, а сверхтекучая фаза обладает относительной скоростью $-\mathbf{V}$, которая перпендикулярна плоскости раздела фаз и направлена уже *в отрицательном направлении оси* z. Поскольку сверхтекучая фаза движется как целое со скоростью $-\mathbf{V}$, то необходимо также учесть, что согласно принципу Галилея энергия элементарных возбуждений (фононов) в системе отсчета K' подвергается доплеровскому сдвигу: $\varepsilon(\mathbf{p}) \to \varepsilon(\mathbf{p}) - \mathbf{pV}$. Условие зеркальности отражения фононов от границы означает, что при таком их взаимодействии с границей компоненты импульса отдельного фонона, параллельные плоскости границы остаются неизменными, а компонента импульса, перпендикулярная к границе меняет свое направление на противоположное. Таким образом, после отражения фонона от межфазной границы для его энергии будем иметь следующее соотношение: $\varepsilon(\mathbf{p}) - p_z V \to \varepsilon(\mathbf{p}) + p_z V$. Перейдем теперь к вычислению силы, действующей на границу раздела фаз. Из симметрии задачи следует, что результирующая сила должна быть направлена по нормали к поверхности раздела фаз по оси z. Напишем поток импульса, приносимый фононами в единицу времени на единицу площади поверхности:

$$\Pi_{\text{пад}} = \int_{u_z<0} u_z p_z n(\varepsilon(p) - p_z V)\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \approx \int_{u_z<0} u_z p_z n(\varepsilon(p))\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} - V\int_{u_z<0} u_z p_z^2 \frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

где u_z – z-компонента скорости фонона $\mathbf{u}$ и $n(\varepsilon) = 1/(e^{\varepsilon/T} - 1)$ – равновесная планковская функция распределения фононов при температуре T. Аналогичный поток импульса, уносимый фононами после отражения, будет равен

$$\Pi_{\text{отр}} = \int_{u_z>0} u_z p_z n(\varepsilon(p) + p_z V)\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \approx \int_{u_z>0} u_z p_z n(\varepsilon(p))\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} + V\int_{u_z>0} u_z p_z^2 \frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Полная сила F, производимая фононами на границу раздела фаз, определяется суммой потоков $\Pi_{\text{пад}}$ и $\Pi_{\text{отр}}$ и состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое, независящее от скорости роста межфазной границы, представляет собой дополнительное давление, производимое газом фононов,

$$P_{\text{ph}}(T) = \int_{u_z<0} u_z p_z n(\varepsilon(p))\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} + \int_{u_z>0} u_z p_z n(\varepsilon(p))\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\pi^2}{90}\frac{T^4}{u^3\hbar^3},$$

и оно не представляет здесь для нас интереса, так как является поправкой к разности химических потенциалов между твердой и жидкой фазами. Второе слагаемое, пропорциональное скорости роста твердой фазы V ($V \ll u$),

$$f = -V\int_{u_z<0} u_z p_z^2 \frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} + V\int_{u_z>0} u_z p_z^2 \frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

и представляет собой искомую силу сопротивления, имеющую диссипативный характер и препятствующую росту твердой фазы. Замечая, что первый интеграл равен второму интегралу с обратным знаком, мы получим с учетом спектра фононов $\varepsilon(p) = up$ (и с правильным отрицательным знаком)

$$\mathbf{f} = -2\mathbf{V}\int_0^\infty \frac{2\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \cos^3\theta \frac{up^2}{T}\frac{e^{up/T}}{(e^{up/T}-1)^2} = -\mathbf{V}\frac{T^4}{8\pi^2u^4\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^4 e^x dx}{(e^x-1)^2} = -\mathbf{V}\frac{\pi^2}{30}\frac{T^4}{u^4\hbar^3}.$$

Случай зеркального отражения для фермионов.

Для фермионов с массой m вывод остается без изменений, только меняется функция распределения (и надо учесть фактор спинового вырождения g). Полная сила F, производимая фермионами на движущуюся стенку, определяется суммой потоков $\Pi_{\text{пад}}$ и $\Pi_{\text{отр}}$ и состоит также из двух слагаемых. Первое слагаемое, независящее от скорости стенки, представляет собой давление, производимое газом фермионов,

$$P = \int_{v_z<0} v_z p_z n(\varepsilon(p))\frac{gd^3p}{(2\pi\hbar)^3} + \int_{v_z>0} v_z p_z n(\varepsilon(p))\frac{gd^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{gp_F^5}{30\pi^2 m\hbar^3} \equiv \frac{2}{5}n\varepsilon_F,$$

(при $T = 0$), и оно опять не представляет здесь для нас интереса, так как является просто равновесным давлением ферми-газа. Второе слагаемое, пропорциональное скорости стенки V ($V \ll v_F$),

$$f=-V\int_{v_z<0}v_z p_z^2\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\frac{gd^3p}{(2\pi\hbar)^3}+V\int_{v_z>0}v_z p_z^2\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\frac{gd^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

и представляет собой искомую силу сопротивления. Замечая, что первый интеграл равен второму интегралу с обратным знаком, мы получим с учетом спектра фермионов $\varepsilon(p)=p^2/(2m)$ и их функции распределения при $T=0$

$$\mathbf{f}=-2\mathbf{V}\int_0^\infty\frac{2\pi gp^2dp}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\cos^3\theta\frac{p^3}{m}\delta\left(\frac{p^2}{2m}-\varepsilon_F\right)=-\mathbf{V}\frac{gp_F^4}{8\pi^2\hbar^3}=-\frac{3}{4}np_F\mathbf{V}.$$

Диффузное отражение для фермионов.

Рассмотрим случай полной аккомодации частиц на стенке, когда сталкивающиеся со стенкой частицы приходят в полное тепловое равновесие со стенкой, имеющей ту же температуру, что и сам газ. Функция распределения фермионов до столкновения представляет собой функцию Ферми $n(\varepsilon'(p))$ с энергией $\varepsilon'(p)=\varepsilon(\mathbf{p})-\mathbf{pV}$ с температурой T. Что касается фермионов, покидающих *покоющуюся стенку*, то при полной аккомодации они обладают равновесной функцией Ферми $An(\varepsilon(p))$ с той же температурой T, но с $V{=}0$. Последняя функция должна быть нормирована так, чтобы число падающих фермионов в единицу времени равнялось бы числу фермионов, покидающих стенку за то же время. Таким образом, фактор A определяется из равенства падающего и отраженного потоков фермионов $\int_{v_z>0}v_zAn(\varepsilon(p))d\Gamma=$ $=-\int_{v_z<0}v_zn(\varepsilon(\mathbf{p})-\mathbf{pV})d\Gamma$, где $d\Gamma=gd^3p/(2\pi\hbar)^3$. Учитывая, что скорость $\mathbf{V}$ направлена вдоль оси z, получим

$$\int_{v_z>0}v_zAn(\varepsilon(p))d\Gamma=\int_{v_z>0}v_zn(\varepsilon(p)+p_zV)d\Gamma\approx\int_{v_z>0}v_zn(\varepsilon(p))d\Gamma+V\int_{v_z>0}v_zp_z\left(\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\right)d\Gamma.$$

После интегрирования по углу найдем: $A-1=-\frac{2}{3}V\frac{\int vp(-\partial n/\partial\varepsilon)d\Gamma}{\int vn(\varepsilon)d\Gamma}\approx-\frac{8}{3}\frac{V}{v_F}$. Поток импульса, приносимый фермионами в единицу времени на единицу площади стенки, есть $\Pi_{\text{пад}}=\int_{v_z<0}p_zv_zn(\varepsilon(p)-p_zV)d\Gamma\approx\int_{v_z<0}p_zv_zn(\varepsilon(p))d\Gamma-V\int_{v_z<0}v_zp_z^2\left(\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\right)d\Gamma$, а уносимый поток импульса от стенки в единицу времени: $\Pi_{\text{отр}}=\int_{v_z>0}p_zv_zAn(\varepsilon(p))d\Gamma$. Полная сила $F=P+f$, действующая на стенку, определяется суммой потоков $\Pi_{\text{пад}}$ и $\Pi_{\text{отр}}$ и состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое, независящее от скорости стенки представляет собой обычное давление P, производимое газом фермионов,

$$P=\int_{v_z<0}v_zp_zn(\varepsilon(p))\frac{gd^3p}{(2\pi\hbar)^3}+\int_{v_z>0}v_zp_zn(\varepsilon(p))\frac{gd^3p}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{2}{5}n\varepsilon_F.$$

Второе слагаемое – сила сопротивления f, пропорциональная скорости движения стенки V:

$$f=-V\int_{v_z<0}v_zp_z^2\left(\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\right)d\Gamma+(A-1)\int_{v_z>0}p_zv_zn(\varepsilon(p))d\Gamma,$$

которое после интегрирования по пространственному углу сводится к следующему выражению:

$$f=-\frac{V}{16}\frac{gp_F^4}{\pi^2\hbar^3}+\frac{A-1}{6}\int pvn(\varepsilon(p))\frac{gd^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Несложное вычисление даст искомую силу сопротивления:

$$f=-\frac{V}{16}\frac{gp_F^4}{\pi^2\hbar^3}+\frac{A-1}{6}\frac{gv_Fp_F^4}{10\pi^2\hbar^3}=-\frac{3}{8}np_FV-\frac{4}{15}np_FV=-\frac{77}{120}np_FV.$$

2.12. (C) (а) Найти среднеквадратичное отклонение броуновской частицы, исходя из уравнения Ланжевена. Найти временной коррелятор скоростей броуновской частицы. Получить соответствующее уравнение Фоккера–Планка. б) Показать, что в жидкости коэффициент самодиффузии в общем случае интегрально выражается через временной коррелятор скорости частиц. с) Исходя из качественного анализа решений уравнения Навье–Стокса, показать, что временной коррелятор скорости частиц в жидкости или плотном газе имеет не экспоненциальную, как в модельной задаче (а), а универсальную степенную асимптотику на больших временах: $\propto 1/t^{d/2}$, где d – это размерность пространства. Можно ли определить коэффициент самодиффузии в двумерной однокомпонентной жидкости?

Решение.

Уравнение Ланжевена и движение броуновской частицы.

Уравнение Ланжевена описывает броуновское движение тяжелой частицы массы M в газе легких частиц с учетом случайной силы $\mathbf{F}^{(\text{сл})}$, действующей на тяжелую частицу со стороны молекул газа:

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{(\text{сл})}(t) + \mathbf{F}(t)\,,$$

где $\mathbf{F}(t)$ – регулярная внешняя сила, которая также может действовать на частицу. В частности, $\mathbf{F}^{(\text{сл})}(t)$ ответственна за трение. Усредним это уравнение (по времени или по ансамблю), так что

$$M\frac{d\langle\mathbf{v}\rangle}{dt} = \langle\mathbf{F}^{(\text{сл})}(t)\rangle + \mathbf{F}(t)\,.$$

Мы знаем, что если $\mathbf{F} = \text{const}$, то и $\langle\mathbf{v}\rangle = \text{const}$, причем $\langle\mathbf{v}\rangle = b\mathbf{F}$, где b – подвижность тяжелой частицы (в гидродинамическом режиме для плотных газов и жидкостей $b = 1/(6\pi\eta R)$, где η – вязкость газа и R – радиус тяжелой частицы, а в свободно-молекулярном режиме для разреженных газов $b = 1/(m\nu_{\text{эфф}})$, где эффективная частота столкновений тяжелой частицы с легкими частицами $\nu_{\text{эфф}} = \langle v_a^2\nu(v_a)\rangle/\langle v_a^2\rangle$, и где частота столкновений $\nu(v_a) = n_{\text{газа}}v_a\sigma_t$, а v_a и m – скорость и масса легких частиц). Но если $\langle\mathbf{v}\rangle = \text{const}$, то суммарная средняя сила должна занулиться: $\langle\mathbf{F}^{(\text{сл})}(t)\rangle + \mathbf{F}(t) = 0$, то есть должно быть $\langle\mathbf{F}^{(\text{сл})}(t)\rangle = -\mathbf{F}(t) = -\langle\mathbf{v}\rangle/b$. По этой причине давайте писать случайную силу в виде

$$\mathbf{F}^{(\text{сл})}(t) = -\frac{\mathbf{v}(t)}{b} + \mathbf{f}^{(\text{сл})}(t)\,;$$

тогда по определению $\langle\mathbf{f}^{(\text{сл})}(t)\rangle \equiv 0$, причем это должно быть верно и для общего случая $\mathbf{F}(t) \neq \text{const}$, поскольку $\mathbf{F}^{(\text{сл})}(t)$ не должна зависеть от того, какова регулярная сила $\mathbf{F}(t)$, по крайней мере пока $\langle\mathbf{v}\rangle \ll v_T^{(a)}$ – тепловой скорости легких частиц.

Таким образом, мы получаем следующее уравнение движения тяжелой частицы в газе:

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{v}}{b} + \mathbf{f}^{(\text{сл})}(t) + \mathbf{F}(t)\,, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma\mathbf{v} + \frac{1}{M}\left\{\mathbf{f}^{(\text{сл})}(t) + \mathbf{F}(t)\right\},$$

где $\gamma = 1/(bM) = \frac{m}{M}\nu_{\text{эфф}}$ – коэффициент трения (для случая тяжелой частицы в разреженном газе). Пусть $\tau_{\text{ст}}$ – характерное время самого столкновения, и пусть $\tau_{\text{ст}} \ll 1/\nu_{\text{эфф}}$, где $1/\nu_{\text{эфф}}$ – характерное время между двумя соседними столкновениями. В таком случае естественно считать столкновения статистически независимыми. Тогда корреляция значений случайной силы $\mathbf{f}^{(\text{сл})}(t)$ должна иметь место только на временах порядка $\tau_{\text{ст}}$, однако такие масштабы времен недоступны для нашего статистического описания движения тяжелой частицы, так что этот масштаб времен можно считать нулевым, и тогда естественно считать случайную силу δ-коррелированной, то есть считать, что коррелятор случайной силы имеет вид

$$\langle f_i^{(\text{сл})}(t) f_k^{(\text{сл})}(t')\rangle = \varkappa\,\delta_{ik}\,\delta(t-t')\,,$$

где $\varkappa$ – коэффициент, который нам нужно будет ещё определить. Физически эта запись и означает, что корреляция случайной силы имеет место только во время самого столкновения, масштаб которого мы считаем бесконечно малым по отношению ко времени между двумя соседними столкновениями.

Будем далее считать, что сила $\mathbf{F}(t)$ носит осциллирующий характер, так что при усреднении по времени $\langle\mathbf{F}(t)\rangle = 0$, и обозначим полную суммарную силу, действующую на частицу, как $\mathbf{f}^{(\text{полн})}(t) = \mathbf{f}^{(\text{сл})}(t) + \mathbf{F}(t)$, так что $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma\mathbf{v} + \frac{1}{M}\mathbf{f}^{(\text{полн})}(t)$. Решение этого уравнения имеет очевидный вид

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\gamma(t-t_0)} + \frac{1}{M}e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t} e^{\gamma t'}\mathbf{f}^{(\text{полн})}(t')\,dt',$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$, причем видно, что при $t_0 \to -\infty$ влияние начальной скорости $\mathbf{v}_0$ полностью исчезает, так что при временах $t - t_0 \gg 1/\gamma$ можно считать, что $\mathbf{v}(t) = \frac{1}{M}e^{-\gamma t}\int_{-\infty}^{t} e^{\gamma t'}\mathbf{f}^{(\text{полн})}(t')\,dt'$. Разлагая скорость и силу в интеграл Фурье,

$$\mathbf{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{v}_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}, \quad \mathbf{f}^{(\text{полн})}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{f}_\omega^{(\text{полн})} e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi},$$

для отдельных фурье-компонент получим, что

$$\mathbf{v}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{e^{-\gamma t}}{M}\int_{-\infty}^{t} e^{\gamma t'}\mathbf{f}_\omega^{(\text{полн})} e^{-i\omega t'}dt' = \frac{e^{-\gamma t}}{M}\mathbf{f}_\omega^{(\text{полн})}\frac{e^{\gamma t - i\omega t}}{\gamma - i\omega} \equiv \frac{e^{-i\omega t}}{M(\gamma - i\omega)}\mathbf{f}_\omega^{(\text{полн})} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v}_\omega = \frac{\mathbf{f}_\omega^{(\text{полн})}}{M(\gamma - i\omega)}\,, \quad \mathbf{r}_\omega = \frac{\mathbf{v}_\omega}{-i\omega} = -\frac{\mathbf{f}_\omega^{(\text{полн})}}{i\omega M(\gamma - i\omega)} \equiv \chi(\omega)\mathbf{f}_\omega^{(\text{полн})}\,,$$

где

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{i\omega M(\gamma - i\omega)} \equiv \frac{-1 + i\gamma/\omega}{M(\gamma^2 + \omega^2)}\,.$$

Здесь мы ввели смещение тяжелой частицы согласно $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$. Для фурье-компонент имеем, что $\mathbf{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{v}_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{r}_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty}(-i\omega)\mathbf{r}_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$, откуда и следует связь между фурье-компонентами скорости и смещения.

Если мы это соотношение усредним (при наличии сторонней силы), то оно будет выражать связь между фурье-компонентой сторонней силы и фурье-компонентой средней скорости (или смещения) под действием этой силы, причем $\chi(\omega)$ играет роль динамического отклика (динамической восприимчивости) системы (тяжелой частицы) на эту силу. С другой стороны, если нет сторонней силы, то возникающее движение частицы под действием случайной силы есть не что иное, как тепловые флуктуации координат частицы, и в этом случае $\chi(\omega)$ выражает связь между спектральной характеристикой флуктуаций координат (или скорости) и спектром случайной силы. Поскольку в обоих случаях фигурирует одна и та же величина $\chi(\omega)$, то это означает наличие тесной связи между линейным откликом системы на внешнюю силу и спектром тепловых флуктуаций.

Для выяснения этой связи рассмотрим какую-то одну случайную величину $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$. Тогда $\langle x(t)x(t')\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle x_\omega x_{\omega'}\rangle e^{-i\omega t-i\omega' t'}\frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}$. Для того, чтобы коррелятор в условиях однородности времени зависел бы только от разности времен $t-t'$, необходимо, чтобы в интеграле было бы $\omega'=-\omega$, и это может быть достигнуто только, лишь если $\langle x_\omega x_{\omega'}\rangle = 2\pi(x^2)_\omega\delta(\omega+\omega') \sim \delta(\omega+\omega')$. При этом,

$$\langle x(t)x(t')\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi(x^2)_\omega\delta(\omega+\omega')e^{-i\omega t-i\omega' t'}\frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^2)_\omega e^{-i\omega(t-t')}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Это соотношение выражает собой теорему Винера–Хинчина, причем для вещественной величины $x(t)$ естественно должно быть $(x^2)_\omega = (x^2)_{-\omega}$. При $t=t'$ получаем, что $\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^2)_\omega\frac{d\omega}{2\pi}$. Если $(x^2)_\omega = \mathrm{const} = A$, то $\langle x(t)x(t')\rangle = A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega(t-t')}\frac{d\omega}{2\pi} = A\delta(t-t')$. Последнее условие верно и в обратную сторону. Случайная величина с такой δ-функционной функцией корреляции и с такой постоянной спектральной плотностью $(x^2)_\omega$ определяет так называемый белый шум. Обобщение этих формул на случай нескольких случайных величин очевидно. Применим эти формулы для описания флуктуаций скорости тяжелой частицы и случайной силы, действующей на броуновскую частицу, движение которой описывается уравнением Ланжевена.

Во-первых, ясно, что если мы рассматриваем движение только под действием случайной силы, то

$$(v_iv_k)_\omega = -i\omega\chi(\omega)\cdot i\omega\chi(-\omega)(f_i^{(\text{сл})}f_k^{(\text{сл})})_\omega = \omega^2\chi(\omega)\chi^*(\omega)(f_i^{(\text{сл})}f_k^{(\text{сл})})_\omega \equiv \omega^2|\chi(\omega)|^2(f_i^{(\text{сл})}f_k^{(\text{сл})})_\omega,$$

и тогда

$$\langle v_i(t)v_k(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}(v_iv_k)_\omega\frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2|\chi(\omega)|^2(f_i^{(\text{сл})}f_k^{(\text{сл})})_\omega\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Учитывая, что для равновесного теплового движения тяжелой частицы $\langle v_i(t)v_k(t)\rangle = (T/M)\delta_{ik}$, и что для δ-коррелированной случайной силы должно быть $(f_i^{(\text{сл})}f_k^{(\text{сл})})_\omega = \varkappa\delta_{ik}$, получим, что $\frac{T}{M}\delta_{ik} = \varkappa\,\delta_{ik}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2|\chi(\omega)|^2\frac{d\omega}{2\pi}\;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \frac{T}{M} = \varkappa\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\frac{1+\gamma^2/\omega^2}{M^2(\gamma^2+\omega^2)^2}\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\varkappa}{2\pi M^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{\gamma^2+\omega^2} = \frac{\varkappa}{2\pi M^2}\cdot\frac{\pi}{\gamma} = \frac{\varkappa}{2\gamma M^2},$$

откуда следует, что должно выполняться соотношение $\varkappa = 2\gamma MT$. Таким образом, мы нашли, что временной коррелятор случайной силы, действующей на тяжелую частицу в разреженном газе имеет вид

$$\langle f_i^{(\text{сл})}(t)f_k^{(\text{сл})}(t')\rangle = 2\gamma MT\delta_{ik}\delta(t-t') = \frac{2T}{b}\delta_{ik}\delta(t-t') = 2Tm\nu_{\text{эфф}}\delta_{ik}\delta(t-t').$$

Для спектральных плотностей флуктуаций скоростей и координат теперь можно написать, что $(v_i v_k)_\omega = \omega^2 |\chi(\omega)|^2 \cdot 2\gamma M T \delta_{ik}$, $\quad (x_i x_k)_\omega = |\chi(\omega)|^2 \cdot 2\gamma M T \delta_{ik}$, причем $|\chi|^2 = 1/[M^2\omega^2(\gamma^2+\omega^2)]$, $\mathrm{Im}\,\chi = \gamma/[M\omega(\gamma^2+\omega^2)]$, так что $|\chi|^2 = \mathrm{Im}\,\chi/(M\omega\gamma)$. Следовательно,

$$(v_i v_k)_\omega = 2T\omega\,\mathrm{Im}\,\chi(\omega)\cdot\delta_{ik}\,, \quad (x_i x_k)_\omega = \frac{2T}{\omega}\mathrm{Im}\,\chi(\omega)\cdot\delta_{ik}.$$

Эти формулы составляют содержание флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) в применении к данному случаю. Временной же коррелятор скоростей броуновской частицы есть

$$\langle v_i(t) v_k(t')\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (v_i v_k)_\omega e^{-i\omega(t-t')}\frac{d\omega}{2\pi} = \delta_{ik}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2T\gamma e^{-i\omega(t-t')}}{M(\gamma^2+\omega^2)}\frac{d\omega}{2\pi} = \delta_{ik}\frac{T}{M}e^{-\gamma|t-t'|}\,,$$

причем $\int_{t'}^{+\infty}\langle v_i(t)v_k(t')\rangle dt = \delta_{ik}T/(M\gamma) = \delta_{ik}Tb \equiv D\delta_{ik}$.

Теперь рассмотрим смещение частицы за время t, именно, $\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0+t) - \mathbf{r}(t_0)$, где t_0 – произвольно выбранный начальный момент времени. Для квадрата смещения имеем, что $(\Delta\mathbf{r}(t))^2 = (\mathbf{r}(t_0+t)-\mathbf{r}(t_0))^2 = \mathbf{r}^2(t_0+t) + \mathbf{r}^2(t_0) - 2(\mathbf{r}(t_0+t)\cdot\mathbf{r}(t_0))$, откуда

$$\langle(\Delta\mathbf{r}(t))^2\rangle = \langle\mathbf{r}^2(t_0+t)\rangle + \langle\mathbf{r}^2(t_0)\rangle - 2\langle(\mathbf{r}(t_0+t)\cdot\mathbf{r}(t_0))\rangle = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left(1-e^{-i\omega t}\right)(\mathbf{r}^2)_\omega =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left(1-e^{-i\omega t}\right)\frac{6T}{\omega}\mathrm{Im}\,\chi(\omega) = \frac{6T\gamma}{M\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega\,(1-e^{-i\omega t})}{\omega^2(\omega+i\gamma)(\omega-i\gamma)} =$$

$$= \frac{6T\gamma}{M\pi}\cdot(2\pi i)\cdot(-1)\left\{\frac{1-e^{-\gamma t}}{(-\gamma^2)(-2i\gamma)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{it}{\gamma^2}\right\} = \frac{6Tt}{M\gamma}\left(1 - \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t}\right).$$

При вычислении этого интеграла мы замкнули контур интегрирования в нижней полуплоскости и учли полный вычет при $\omega = -i\gamma$ и полувычет при $\omega = 0$. Вспоминая, что $\gamma = 1/(bM)$, находим, что $1/(M\gamma) = b$. И поскольку $bT = D$, окончательно получаем, что

$$\langle(\Delta\mathbf{r}(t))^2\rangle = 6Dt\left(1 - \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t}\right).$$

В случае $\gamma t \ll 1$ получаем, что $\langle(\Delta\mathbf{r}(t))^2\rangle \approx 6Dt\cdot(\gamma t)/2 = 6bT/(bM)\cdot t^2/2 = (3T/M)t^2 = \langle\mathbf{v}^2\rangle t^2$. Это есть случай свободного движения частицы с тепловой средней скоростью. В обратном случае $\gamma t \gg 1$ очевидно, что $\langle(\Delta\mathbf{r}(t))^2\rangle \approx 6Dt$. Очевидно, что $\langle\Delta x_\alpha(t)\Delta x_\beta(t)\rangle \approx 2Dt\delta_{\alpha\beta}$. Это есть случай диффузионного движения.

Уравнение Фоккера–Планка для броуновского движения.

Выведем уравнение Фоккера–Планка для броуновской частицы, рассматривая в качестве фоккер-планковской переменной координату частицы $\mathbf{r}$, которая мало меняется в процессе одного столкновения с легким газом, а в качестве функции распределения по координате возьмем плотность частиц $n(\mathbf{r},t)$. Тогда, согласно общему принципу написания уравнения Фоккера-Планка, его вид в этом конкретном случае должен быть таким: $\frac{\partial n(t,\mathbf{r})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\widetilde{A}_\alpha n + \frac{\partial(B_{\alpha\beta}n)}{\partial x_\beta}\right\}$, $B_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{\delta t} x_\alpha x_\beta}{2\delta t} = D\delta_{\alpha\beta}$, $j^{(0)}_\alpha = -\widetilde{A}_\alpha n^{(0)} - \frac{\partial(B_{\alpha\beta}n^{(0)})}{\partial x_\beta} = \big(-\widetilde{A}_\alpha - \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\big)n^{(0)} - B_{\alpha\beta}\frac{\partial n^{(0)}}{\partial x_\beta} = 0$, если $n^{(0)}(\mathbf{r},t) = n_0 e^{-U(\mathbf{r})/T}$ – равновесное распределение плотности частиц в потенциальном поле. Поэтому $\widetilde{A}_\alpha = (B_{\alpha\beta}/T)\nabla_\beta U(\mathbf{r}) = (D/T)\nabla_\alpha U(\mathbf{r}) = b\nabla_\alpha U(\mathbf{r})$, и мы опять получаем уравнение $\frac{\partial n}{\partial t} - \mathrm{div}(bn\boldsymbol{\nabla}U) - D\triangle n = 0$, то есть уравнение Смолуховского, которое играет в этом случае роль уравнения Фоккера–Планка.

Коррелятор скоростей в гидродинамике.

Рассмотрим флуктуации скорости течения жидкости в гидродинамике, и для этого выпишем первые два гидродинамических уравнения – уравнение непрерывности и уравнение Навье–Стокса (без внешней силы):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})=0,\quad \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}\equiv\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}=-\boldsymbol{\nabla}P+\eta\,\Delta\mathbf{u}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}.$$

Нас будут интересовать здесь небольшие отклонения от равновесия (при $\mathbf{u}_{\text{равн.}}\equiv 0$), и поэтому линеаризуем эти уравнения, записав их в виде

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\quad \rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}P+\eta\,\Delta\mathbf{u}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}.$$

Разделим скорость на продольную и поперечную части, согласно определению $\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(l)}+\mathbf{u}^{(t)}$, так что $\operatorname{div}\mathbf{u}^{(t)}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{u}^{(l)}=0$. Тогда получаем, что

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\mathbf{u}^{(l)}=0,\quad \rho\frac{\partial\mathbf{u}^{(l)}}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}P+\eta\,\Delta\mathbf{u}^{(l)}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}^{(l)},\quad \rho\frac{\partial\mathbf{u}^{(t)}}{\partial t}=\eta\,\Delta\mathbf{u}^{(t)}.$$

Уравнение для поперечных компонент оказалось независимым от остальных и совпадающим с уравнением диффузии. Только его мы и рассмотрим, обозначив $\nu=\eta/\rho$. Для корреляционной функции флуктуаций поперечной скорости имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u_i^{(t)}(\mathbf{r},t)u_k^{(t)}(0,0)\rangle-\nu\,\Delta\langle u_i^{(t)}(\mathbf{r},t)u_k^{(t)}(0,0)\rangle=0.$$

Умножив его на $e^{i\omega t}$ и проинтегрировав по t от 0 до $+\infty$ (одностороннее преобразование Фурье!) получим уравнение

$$-i\omega\langle u_i^{(t)}(\mathbf{r})u_k^{(t)}(0)\rangle_\omega^{(+)}-\nu\,\Delta\langle u_i^{(t)}(\mathbf{r})u_k^{(t)}(0)\rangle_\omega^{(+)}=\langle u_i^{(t)}(\mathbf{r})u_k^{(t)}(0)\rangle,$$

где справа стоит *одновременная* корреляционная функция. После преобразования Фурье по координатам очевидно получим, что

$$\langle u_i^{(t)}u_k^{(t)}\rangle_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}=\frac{\langle u_i^{(t)}u_k^{(t)}\rangle_{\mathbf{k}}}{\nu k^2-i\omega}\quad\Rightarrow\quad\langle u_i^{(t)}u_k^{(t)}\rangle_{\omega\mathbf{k}}=\langle u_i^{(t)}u_k^{(t)}\rangle_{\omega\mathbf{k}}^{(+)}+\langle u_i^{(t)}u_k^{(t)}\rangle_{-\omega\mathbf{k}}^{(+)}=\frac{2\nu k^2\langle u_i^{(t)}u_k^{(t)}\rangle_{\mathbf{k}}}{\nu^2k^4+\omega^2}.$$

Поскольку $\langle u_i(\mathbf{r})u_k(0)\rangle=\delta_{ik}\frac{TV}{mN}\delta(\mathbf{r})\equiv\frac{T}{\rho}\delta_{ik}\delta(\mathbf{r})$, то её фурье-образ $\langle u_iu_k\rangle_{\mathbf{k}}=\frac{T}{\rho}\delta_{ik}$ и, соответственно, $\langle u_i^{(t)}u_k^{(t)}\rangle_{\mathbf{k}}=\frac{T}{\rho}\left(\delta_{ik}-k_ik_k/k^2\right)$. Окончательно получим, что (при $t>0$)

$$\langle u_i^{(t)}u_k^{(t)}\rangle_{\omega\mathbf{k}}=\frac{2T}{\rho}\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{k^2}\right)\frac{\nu k^2}{\nu^2k^4+\omega^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\langle u_i^{(t)}(\mathbf{r},t)u_k^{(t)}(0,0)\rangle=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{2T}{\rho}\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{k^2}\right)\frac{\nu k^2e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}}{\nu^2k^4+\omega^2}=$$

$$=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{T}{\rho}\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{k^2}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\nu k^2t}\;\Rightarrow\;\langle u_i^{(t)}(0,t)u_k^{(t)}(0,0)\rangle=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{T}{\rho}\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{k^2}\right)e^{-\nu k^2t}=$$

$$=\frac{T}{\rho}\delta_{ik}\left(1-\frac{1}{d}\right)\frac{(\sqrt{\pi})^d}{(2\pi)^d(\sqrt{\nu t})^d}=\frac{(d-1)T}{d\rho}\frac{\delta_{ik}}{(4\pi\nu t)^{d/2}}\sim\frac{1}{t^{d/2}}.$$

Здесь d – размерность пространства (важны лишь значения $d=3$ и $d=2$). В двумерном случае коррелятор ведет себя как $\sim 1/t$), и интеграл от него логарифмически расходится на больших временах.