

Тест. Векторное дифференцирование.

1. (1 балл) Посчитайте $df(x)$ и $\nabla f(x)$ для функции $f(x) = \log(x^\top Ax)$ и выберите правильный вариант ответа.

- ☐ $\nabla f(x) = \frac{2(A+A^\top)x}{x^\top Ax}, df(x) = \frac{x^\top 2(A+A^\top)dx}{x^\top Ax}$
☐ $\nabla f(x) = \frac{(A+A^\top)x}{x^\top Ax}, df(x) = \frac{x^\top (A+A^\top)dx}{x^\top Ax}$
☐ $\nabla f(x) = \frac{x^\top (A+A^\top)dx}{x^\top Ax}, df(x) = \frac{(A+A^\top)x}{x^\top Ax}$
☐ $\nabla f(x) = \frac{x^\top 2(A+A^\top)dx}{x^\top Ax}, df(x) = \frac{2(A+A^\top)x}{x^\top Ax}$

2. (1 балл) Посчитайте $df(x)$, $d^2f(x)$ и $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$ для функции $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|_2^p$, $p > 1$ и выберите все правильные результаты.

- ☐ $\nabla f(x) = \|x\|_2^{p-1}x$
☐ $df(x) = \|x\|_2^{p-2}x^\top dx$
☐ $\nabla^2 f(x) = (p-2)\|x\|_2^{p-4}x^\top x + \|x\|_2^{p-2}$
☐ $\nabla^2 f(x) = (p-1)\|x\|_2^{p-3}xx^\top + \|x\|_2^{p-1}I$
☐ $d^2f(x) = dx^\top ((p-2)\|x\|_2^{p-4}xx^\top + \|x\|_2^{p-2}I) dx$
☐ $d^2f(x) = dx^\top ((p-1)\|x\|_2^{p-3}xx^\top + \|x\|_2^{p-1}I) dx$

3. (1 балл) Верно ли, что у функции $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + \exp(a_i^\top x)) + \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\mu > 0$,

гессиан $\nabla^2 f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\exp(a_i^\top x)}{(1+\exp(a_i^\top x))^2} a_i a_i^\top + \frac{\exp(a_i^\top x)}{1+\exp(a_i^\top x)} a_i a_i^\top \right) + \mu I$

- ☐ Да
☐ Нет

4. (1 балл) Какие из следующих преобразований неверны?

- ☐ $\det(A) = \sum \text{eig}(A)$
☐ $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$
☐ $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$
☐ $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)$
☐ $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^\top)$

5. (1 балл) Установите соответствие между функциями матричного аргумента $f(X)$ и градиентами $\nabla f(X)$. Ответ дайте в виде последовательности чисел, порядок в которой соответствует порядку следования функций.

- (a) $f(X) = \text{Tr} X$
 - (b) $f(X) = \text{Tr} X^{-1}$
 - (c) $f(X) = \det X$
 - (d) $f(X) = \ln \det X$

 - (1) $\nabla f(X) = X^{-1}$
 - (2) $\nabla f(X) = I$
 - (3) $\nabla f(X) = \det(X) \cdot (X^{-1})^\top$
 - (4) $\nabla f(X) = -(X^{-2})^\top$
6. (1 балл) Посчитайте $df(X)$ для функции $f(X) = \|AX - B\|_F$ и выберите неправильный результат.
- ☐ $df(X) = \|AX - B\|_F^{-1} \langle AX - B, AdX \rangle$
 - ☐ $df(X) = \|AX - B\|_F^{-1} \text{Tr} ((AdX)^\top (AX - B))$
 - ☐ $df(X) = \langle \|AX - B\|_F^{-1} A^\top (AX - B), dX \rangle$
 - ☐ $df(X) = \|AX - B\|_F^{-1} \text{Tr} ((AX - B) AdX)$