

Методы оптимизации.

Семинар 4. Сопряжённые множества.

Лемма Фаркаша.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

24 сентября 2019 г.

- Внутренность и относительная внутренность выпуклого множества
- Проекция точки на множество
- Отделимость выпуклых множеств
- Опорная гиперплоскость

Сопряжённое множество

Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество X^* , что

$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Сопряжённый конус

Если $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — конус, тогда

$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Сопряжённое подпространство

Если X — линейное подпространство в \mathbb{R}^n , тогда

$$X^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Факты о сопряжённых множествах

Theorem

Пусть X — произвольное множество в \mathbb{R}^n . Тогда

$$X^{**} = \overline{\operatorname{conv}(X \cup \{0\})}.$$

Theorem

Пусть X — замкнутое выпуклое множество, включающее 0 . Тогда $X^{**} = X$.

Theorem

Пусть $X_1 \subset X_2$, тогда $X_2^* \subset X_1^*$.

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант: \mathbb{R}_+^n
2. Конус положительных полуопределённых матриц: \mathbf{S}_+^n
3. $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$
4. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq r\}$
5. $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq t\}$

Лемма Фаркаша

Лемма (Фаркаш)

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1) \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

$$2) \mathbf{p}^T \mathbf{A} \geq 0, \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$$

Важное следствие

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1) \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$2) \mathbf{p}^T \mathbf{A} = 0, \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0, \mathbf{p} \geq 0$$

Применение

Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём снизу, то задача имеет решение.

Геометрия леммы Фаркаша

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ при $x \geq 0$ означает, что \mathbf{b} лежит в конусе, натянутым на столбцы матрицы \mathbf{A}

$\mathbf{p}^T \mathbf{A} \geq 0$, $\langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором \mathbf{b} и конусом из столбцов матрицы \mathbf{A} .

- Сопряжённые множества
- Свойства сопряжённых множеств
- Лемма Фаркаша