
Мини-контрольная №6

1 (3 балл)

Рассмотрим задачу минимизации выпуклой функции на единичном симплексе:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \Delta_n, \\ \Delta_n = \{ & x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \}. \end{aligned}$$

Для решения данной задачи предлагается зафиксировать первую норму $\|\cdot\|_1$ и применить метод зеркального спуска со следующей прокс-функцией:

$$d(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i.$$

1. Покажите, что данная функция удовлетворяет требованиям и действительно является прокс-функцией.
2. Вычислите дивергенцию Брэгмана для данной прокс-функции.

$$V_d(x, y) = d(x) - d(y) - \langle \nabla d(y), x - y \rangle$$

3. Запишите явно шаг метода зеркального спуска

$$x^{k+1} = \text{Mirror}(x^k, \gamma \nabla f(x^k)) = \underset{x \in \Delta_n}{\operatorname{argmin}} \left[\underbrace{\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle}_{\text{линейное приближение}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma} V_d(x, x^k)}_{\text{отвечает за проекцию на } \Delta_n} \right],$$

$\gamma > 0$ - фиксированная длина шага.

2 (2 балл)

Проверьте/докажите первые 5 свойств дивергенции Брэгмана из семинара.