Уравнение переноса энергии

Во время обсуждения контрольной сомнения вызвала формула

$$nc_V\frac{dT}{dt}+\Pi_{ik}\partial_i\frac{j_k}{n}+\partial_j q_j=0 \tag{1}$$

Она была получена в книжке Максимова (стр. 24, формула 1.38). Она и отражает перенос ВНУТРЕННЕЙ энергии. Если речь идет о получении уравнения переноса ПОЛНОЙ энергии:

$$\frac{\partial\rho^E}{\partial t}+\partial_i j_i^E=0 \tag{2}$$

то сделать это проще - достаточно домножить кинетическое уравнение на полную энергию $E$ одной молекулы и проинтегрировать по всем импульсам. В отсутствие внешних сил получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3pEf+\partial_i\int d^3pEfv_i=\int d^3pE\hat{I}_{st}[f]=0\text{ - упругие столкновения} \tag{3}$$

$$\rho^E=\int d^3pfE,\quad j_i^E=\int d^3pfv_iE$$

1. Флуктуационно-диссипационная теорема для обобщенной восприимчивости.

2. Флуктуация координат осциллятора в пределе высоких температур.

Пусть есть некоторая величина $\hat{x}$, которая флуктуирует под действием обобщенной силы $f(t)$ и $\overline{x}(t) = \hat{\alpha} f = \int_0^\infty \alpha(\tau) f(t-\tau) d\tau$, Фурье образ функции $\alpha(\tau)$ - обобщенная восприимчивость. Вычисляя диагональные матричные элементы $\hat{x}$ и используя правило Ферми и распределение Гиббса после ряда тяжелых выкладок можно получить флуктуационно-диссипационную теорему, которая связывает флуктуацию величины $x$ и обобщенную восприимчивость $\alpha(\omega)$:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m} \int_0^\infty \mathrm{Im}[\alpha(\omega)] \coth \frac{\hbar\omega}{2T} d\omega$$

Для осциллятора ($m = 1$) с трением имеем (подробнее в ответе на вопрос 9):

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}$$

В пределе высоких температур $T \gg \hbar\omega$ и $\coth \frac{\hbar\omega}{2T} \approx \frac{2T}{\hbar\omega}$, тогда

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2T}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}[\alpha(\omega)]}{\omega} d\omega = T \,\mathrm{Re}\, \alpha(0) = \frac{T}{\omega_0^2}$$

## 1 Каким условием нормирована одночастичная функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ для больцмановского газа? Элемент фазового объема $d\Gamma$?

$$\int d^3r d^3p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = N$$

$$d\Gamma = d^3p$$

## 2 Вид локально-равновесного распределения для больцмановского газа $f^{(0)}_{loc}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ и равновесного $f_0$

$$f^0_{loc} = \frac{n(r,t)}{(2\pi m T(r,t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{V}(r,t))^2}{2T(r,t)}\right)$$

$$f_0 = \frac{n_0}{(2\pi m T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T}\right)$$

## 3 Свойства интеграла столкновений $\hat{I}_{st}[f]$

1. Изменение числа молекул в единице объёма газа в единицу времени за счёт столкновений

$$\int (\hat{I}_{st} f)\ d^3p = 0$$

2. Изменение импульса всех молекул единицы объема газа в единицу времени за счёт столкновений

$$\int (\hat{I}_{st} f)\ \mathbf{p}\ d^3p = 0$$

3. Изменение энергии всех молекул единицы объема газа в единицу времени за счёт столкновений

$$\int (\hat{I}_{st} f)\ \epsilon(\mathbf{p})\ d^3p = 0$$

4. Интеграл столкновений равновесного распределения равен нулю (поскольку при упругих столкновениях $\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}_1} = \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \varepsilon_{\mathbf{p'}_1}$, а $f_0(\mathbf{p}) = f_0(\varepsilon_{\mathbf{p}})$)

$$\hat{I}_{st}[f_0] = 0$$

## 4 Чему равно $\hat{I}_{st}[f_{loc}]$? Удовлетворяет $f_{loc}$ уравнению Больцмана или нет? Почему?

$$\begin{gathered} f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \\ f_1 = f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t\right) \\ f' = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) \\ f'_1 = f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}'_1, t\right) \\ v_{\text{отн.}} = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \end{gathered}$$

$$\hat{I}_{\text{ст.}}[f] = \int d^3p_1 \int d\sigma\ v_{\text{отн.}} \left(f' f'_1 - f f_1\right), \quad \int d\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}(v_{\text{отн.}}, \theta)$$

Возьмем вид л.р.р. и подставим в интеграл. Показатели экспонент перемножатся, в силу ЗСЭ они будут равны

$$f^0_{loc} = n(r,t) \left(\frac{1}{2\pi m T(r,t)}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2mT(r,t)}\right) \mapsto \hat{I}_{\text{ст.}} f^0_{loc} = 0$$

Левая часть уравнения Больцмана:

$$I_{st}\left(f^{(0)}\right) = 0$$

в уравнении

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\right]$$

члены как в равновесном состоянии обнуляются, а остальные будут первого порядка по градиентам температуры и плотности. Т.е. уравнение Больцмана верно только **нулевым** порядкам градиентов и производных.

## 5 Вид тензора плотности потока импульса $\Pi_{ij}$, связь с тензором давлений $\mathcal{P}_{ij}$. Вид тензора $\mathcal{P}_{ij}$ в жидкости с вязкостью.

$$\Pi_{ik} = \int d^3p f(\vec{r}, \vec{p}, t) \frac{p_i p_k}{m}$$

$$\Pi_{ij} = \rho V_i V_j + \mathcal{P}_{ij}$$

$$\mathcal{P}_{ij} = P\delta_{ij} - \sigma_{ij}$$

$\sigma$ – тензор вязкости

$$\sigma_{ik} = \eta\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\vec{V}\right) + \zeta\delta_{ik}\operatorname{div}V$$

$\eta$ – сдвиговая вязкость, $\zeta$ – объемная вязкость

## 6 Выражение для вектора плотности потока тепла Q через тепловую скорость u.

$$\mathbf{Q} = \int d\Gamma\, f\mathbf{u}\left(\frac{mu^2}{2} + \varepsilon_{in}\right)$$

Плотность потока внутренней энергии в системе отсчета, где газ покоится, как целое. Если $\varepsilon_{in} = 0$, то

$$\mathbf{Q} = \frac{\rho\langle u^2\mathbf{u}\rangle}{2}$$

## 7 Выражение для плотности энергии $\rho^E$ и плотности потока энергии $\mathbf{j}^E$. Когда $\mathbf{j}^E$ совпадает с Q?

$$\rho^E = n < E >= \int d^3p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

$$\mathbf{j}^E = \int d^3p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\frac{\mathbf{p}}{m} = \rho^E\mathbf{V} + V_i\mathcal{P}_{ik} + \mathbf{Q} = (\rho^E + P)\mathbf{V} + \mathbf{Q}, \text{ если } \mathcal{P}_{ik} = P\delta_{ik}$$

Совпадают когда газ покоится как целое $\mathbf{V} = 0$

**8 Вид интеграла столкновений $\hat{I}_{st}[f]$ при рассеянии на примесях (больцановская статистика). Выражение для $\hat{I}_{st}[f]$ в терминах времени релаксации $\tau$. Связь $\tau$ с транспортным сечением рассеяния $\sigma_{tr}$. Чему равна проводимость $\sigma$ и неравновесная добавка к функции распределения $f^{(1)}$ в электрическом поле $\mathbf{E}$?**

Вид интеграла столкновений при рассеянии на примесях

$$\hat{I}_{st}[f] = n_1 \int d^3p' w_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'}(f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p}))$$

$n_1$ - число примесей на ед. объеба
Выражение для интеграла столкновений в терминах времени релаксаци $\tau$

$$\hat{I}_{st}[f] = -\frac{f^{(1)}}{\tau} = -n_1 v \sigma_{tr} f^{(1)}$$

Связь $\tau$ с сечением рассеяния

$$\tau = \frac{1}{n_1 v \sigma_{tr}}$$

Проводимость

$$\sigma = \frac{\tau n e^2}{m}$$

Неравновесная добавка к функции распределения в поле $\mathbf{E}$

$$f^{(1)} = \tau \mathbf{F}\mathbf{v}\frac{f^{(0)}}{T} = \tau e \mathbf{E}\mathbf{v}\frac{f^{(0)}}{T}$$

**9 На одномерный осциллятор $(m = 1)$ с трением $\gamma$ действует сила $f(t)$. Найти отклик $x(\omega)$, функцию отклика (восприимчивость) $\chi(\omega)$.**

Переходя к Фурье образам по времени в уравнении

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{}$$

equation* получаем

$$x(\omega)\left(-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2\right) = f(\omega)$$

Откуда получаем

$$x(\omega) = \frac{f(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}$$

функция отклика:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}$$

**10 Уравнение переноса энтропии. Чему равно производство энтропии $\sigma^S$ в процессе теплопроводности $\nabla T \neq 0$**

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}^S = \sigma^S, \quad \vec{j}^S = \frac{1}{T}\vec{j}^Q$$

$$\sigma^S = \vec{j}^Q \nabla \frac{1}{T}$$

## 11 Соотношения Онсагера. Проиллюстрировать для процесса протекания тока (j) и тепла Q под действием электрического поля E и градиента температуры $\nabla T$

Пусть термодинамические потоки $Y_i$ и термодинамические силы $X_j$ связаны следующим соотношением:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} X_j$$

Тогда матрица $L$ – симметричная, то есть $L_{ij} = L_{ji}$.

Можно это проиллюстрировать процессом протекания тока $\mathbf{j}$ и тепла $\mathbf{Q}$ под действием электрического поля $\mathbf{E}$ и градиента температуры $\nabla T$:

$$\mathbf{j} = \sigma T \frac{\mathbf{E} + \nabla\mu/e}{T} + \underline{\alpha\sigma T^2}\nabla\frac{1}{T}$$
$$\mathbf{Q}' = \underline{\alpha\sigma T^2}\frac{\mathbf{E} + \nabla\mu/e}{T} + (\alpha^2\sigma T^3 + \kappa T^2)\nabla\frac{1}{T}$$

Подчеркнутые коэффициенты равны, поэтому соотношения Онсагера выполнены (задача 5 контрольной).

## 12 Проиллюстрировать выполнение условия детального баланса.

Уравнение баланса (явно следует из условия стационарности равновесного распределения):

$$\sum_{q'} \left[ w_{q'\to q} P^{eq}(q') - w_{q\to q'} P^{eq}(q) \right] = 0$$

Уравнение детального баланса (более сильно):

$$w_{q'\to q} P^{eq}(q') = w_{q\to q'} P^{eq}(q)$$

Пример выполнения детального баланса: рассмотрим марковский процесс

$$T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad p^0 = p^\infty = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Условие очевидно выполнено.

## 13 Для броуновской частицы записать уравнение Ланжевена. Чему равен средний квадрат скорости броуновской частицы $\langle \mathbf{v}^2(t) \rangle$? Выразить его через характеристику случайной силы. Связать коэффициент трения с временным коррелятором случайной силы (флуктуационно-диссипационная теорема).

Уравнение Ланжевена:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\gamma\mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad <\mathbf{F}> = 0$$

Из него можно получить для скорости:

$$\mathbf{v}(t) = e^{-\gamma t}\mathbf{v}_0 + \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')}\mathbf{F}(t')$$

Силы коррелированы только на временах порядка $\tau_c \ll \tau_{rel}$, так что можно считать

$$K(t,t') =< F^\alpha(t), F^\alpha(t') >= F_0\delta(t-t')$$

Тогда для среднего квадрата скорости имеем:

$$< \mathbf{v}^2(t) >= e^{-2\gamma t}\mathbf{v}_0^2 + \frac{F_0}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})$$

Так как $\tau_{rel} \sim \frac{1}{\gamma}$, то при $t \gg \tau_{rel}$ имеем

$$e^{-2\gamma t} \approx 0 \rightarrow < \mathbf{v}^2(t) > \approx \frac{F_0}{2\gamma}$$

$$\langle E \rangle = \frac{m\langle \mathbf{v}^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2}T \rightarrow \gamma = \frac{m}{6T}F_0$$

Записывая $F_0$ по определению и переходя к интегрированию по полуоси, получаем флуктуационно-диссипационную теорему:

$$\gamma = \frac{m}{3T}\int_0^{+\infty} < F^\alpha(t+\tau)F^\alpha(t) > d\tau$$

## 14 Проиллюстрировать диффузию в импульсном пространстве на примере уравнения Фоккера-Планка для броуновской частицы.

Уравнение Фоккера-Планка в пространстве скоростей:

$$\frac{\partial P(\mathbf{v},t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\gamma \mathbf{v} P(\mathbf{v},t)) + D\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial v^\alpha \partial v^\alpha} P(\mathbf{v},t) \tag{4}$$

Имеет вид обобщенного уравнения диффузии в пространстве скоростей, где $D = \frac{F_0}{6\gamma^2}$-коэффициент диффузии в $\mathbf{r}$ - пространстве, а $D\gamma^2$-коэффициент диффузии в пространстве скоростей.

## 15 Проиллюстрировать соотношение Эйнштейна для коэффициента диффузии.

Пусть больцмановский газ находится в потенциальном поле $U(\mathbf{r})$. Его равновесная концентрация равна $n(\mathbf{r}) = n_0 \exp(-\frac{U(\mathbf{r})}{T})$. Тогда поток частиц с учетом диффузии и силы со стороны этого поля равен:

$$\mathbf{j} = -D\nabla n + n\mathbf{u} = \frac{Dn\nabla U}{T} + nb\mathbf{F} = \frac{Dn\nabla U}{T} - nb\nabla U$$

Пусть установилось равновесие. Тогда:

$$\mathbf{j} = \frac{Dn\nabla U}{T} - nb\nabla U = 0 \Longrightarrow D = bT$$

Таким образом, выполнено соотношение Эйнштейна.

## 16 Вид тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k},\omega)$ в плазме (разложение на продольную и поперечную части). Чему равны свертки $\varepsilon_{ii}$, $\varepsilon_{ij}\frac{k_ik_j}{k^2}$?

Тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{4\pi e^2}{\omega}\int \frac{v_\alpha \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta}}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega} d^3p$$

Разложение:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{tr}\left(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta\right) + \varepsilon^l n_\alpha n_\beta$$

Продольная:

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{4\pi e^2}{\omega} n_\alpha n_\beta \int \frac{v_\alpha \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta}}{\mathbf{kv} - \omega} d^3p$$

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}\left(1 + 3\frac{k^2 T}{m\omega^2}\right) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega\omega_{pl}^2}{k^3}\left(\frac{m}{T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\omega^2}{2k^2T}}$$

Поперечная:

$$\varepsilon^{tr} = 1 - \frac{2\pi e^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta} - n_\alpha v_\alpha n_\beta \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta}}{\mathbf{kv} - \omega} d^3p$$

Свертки:

$$\varepsilon_{ii} = 2\varepsilon^{tr} + \varepsilon^l$$

$$\varepsilon_{ij} n_i n_j = \varepsilon^l$$

## 17 Как связаны D и E для продольной волны, для поперечной волны? Чему равны B и D в продольной волне?

В продольной волне:

$$\mathbf{D} = \varepsilon^l \mathbf{E}$$

В поперечной волне:

$$\mathbf{D} = \varepsilon^{tr} \mathbf{E}$$

В продольной волне:

$$\mathbf{D} = 0 \quad \mathbf{B} = 0$$

## 18 График зависимости и аналитическое выражение для частоты продольных волн от волнового вектора $\omega_l(\mathbf{k})$. Связь между $\omega_{pl}$, $v_T$ и $r_D$.

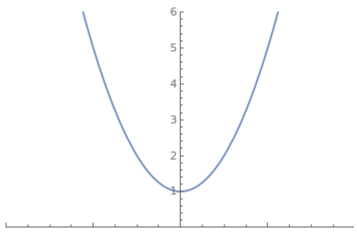
Частота продольных волн:

$$\omega_l(k) = \omega_{pl}\left(1 + \frac{3}{2}k^2 r_D^2\right)$$

Где плазменная частота и дебаевский радиус:

$$\sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} = \omega_{pl} \quad r_D = \frac{v_T}{\omega_{pl}} \quad v_T = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

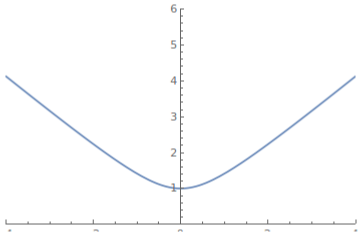
графиком будет парабола сдвинутая наверх.




## 19 График зависимости и аналитическое выражение для частоты поперечных волн от волнового вектора $\omega_{tr}(\mathbf{k})$.

$$\omega_{tr}^2 = k^2 + \omega_{pl}^2$$

График ниже.




**20 Предельный вид тензора $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ при $\mathbf{k} \to 0$ в плазме.**

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2} \right)$$