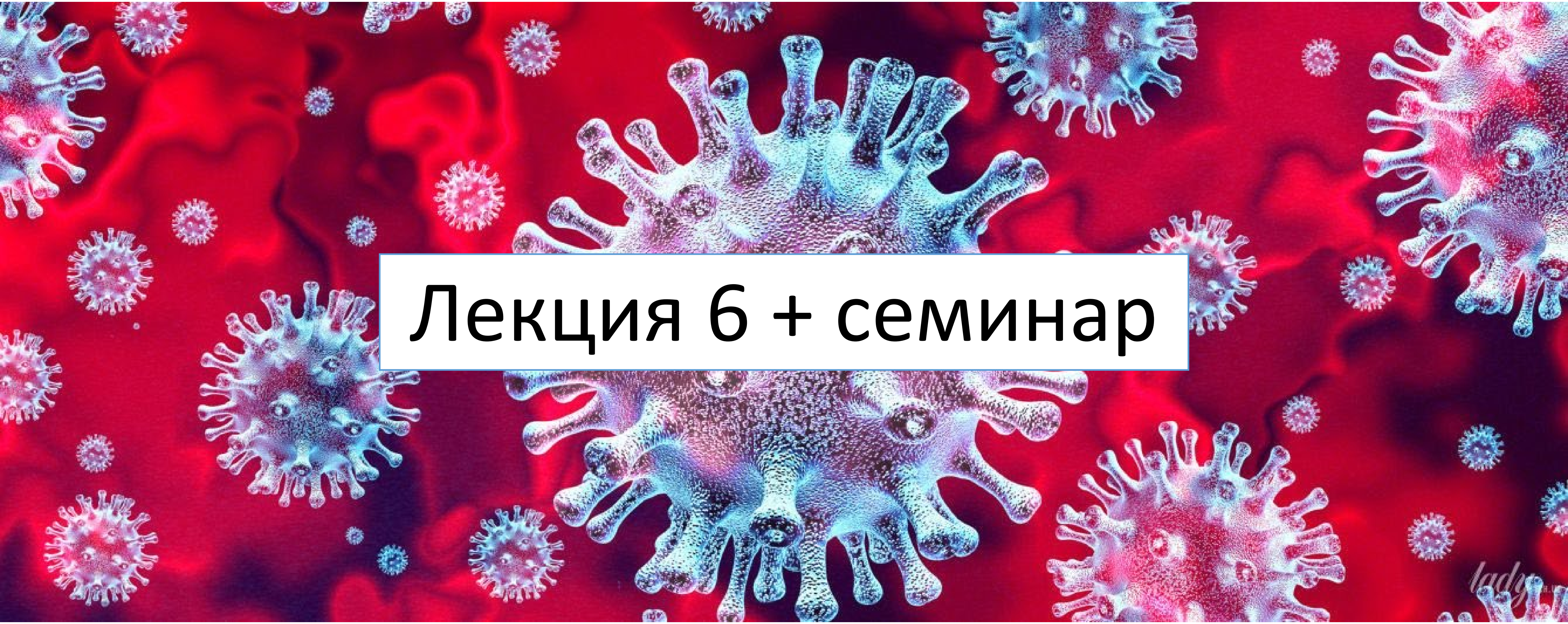
Лекция 6 + семинар



Рассеяние электронов на примесях

Рассмотрим задачу.
Имеется электронный газ, а в нем случайно разбросаны неподвижные примеси, на которых электроны упруго рассеиваются. Речь, конечно, идет о металле. Известно сечение рассеяния электрона на одной примеси. Необходимо найти проводимость.

Lecture Notes on Solid State Physics, Daniel Arovas, стр. 21

https://lectoriy.mipt.ru/lecture/TherPhys-PhysKinet-L02-Maksimov-140215.01

В общем случае кинетическое уравнение для электронов имеет вид:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}f(r,p,t)+v(p)\frac{\partial}{\partial r}\big(f(r,p,t)\big)+F(r,t)\frac{\partial}{\partial p}\big(f(r,p,t)\big)=\\&=\sum_{p'}\big(W(p\,|\,p')f(r,p',t)-W(p'\,|\,p)f(r,p,t)\big)=\big(\mathrm{St}\,f\big)_{\mathrm{in}}-\big(\mathrm{St}\,f\big)_{\mathrm{out}}\,.\end{aligned}}$$

- Вероятности перехода в единицу времени, *W,* можно найти, используя золотое правило Ферми.

В общем случае кинетическое уравнение для электронов имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(r,p,t) + v(p)\frac{\partial}{\partial r}\big(f(r,p,t)\big) + F(r,t)\frac{\partial}{\partial p}\big(f(r,p,t)\big) =$$
$$= \sum_{p'}\big(W(p\,|\,p')f(r,p',t) - W(p'\,|\,p)f(r,p,t)\big) = (\mathrm{St}\,f)_{\mathrm{in}} - (\mathrm{St}\,f)_{\mathrm{out}}\,.$$

- Чтобы этот процесс рассеяния произошел, надо, чтобы в состоянии p находился электрон, а состояние p’ было свободным. Поэтому суммарная вероятность ухода электрона из точки p должна иметь вид:

$$(\mathrm{St}\,f)_{\mathrm{out}} = \sum_{p'} W(p'\,|\,p) f(r,p,t) = w_{p\to p'} f(r,p,t)\big(1 - f(r,p',t)\big).$$

$$(\mathrm{St}\,f)_{in} = \sum_{p'} W(p\,|\,p') f(r,p',t) = w_{p'\to p} f(r,p',t)\big(1 - f(r,p,t)\big).$$

Через несколько слайдов мы докажем:

$$\boxed{w_{p'\to p} = w_{p\to p'}.}$$

$$(\mathrm{St}\,f)_{\mathrm{in}} - (\mathrm{St}\,f)_{\mathrm{out}} = \sum_{p'} w_{p'\to p}\Big(f(r,p',t)\big(1-f(r,p,t)\big) - f(r,p,t)\big(1-f(r,p',t)\big)\Big) =$$

$$= \sum_{p'} w_{p'\to p}\big(f(r,p',t) - f(r,p,t)\big).$$

Что мы знаем о *w*?

Lecture Notes on Solid State Physics, Daniel Arovas, стр. 21

Согласно золотому правилу Ферми:

$$w_{p'\to p} = w_{p\to p'} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|U_{pp'}\right|^2 \delta\left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}\right) = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle p'\middle|U\middle|p\right\rangle\right|^2 \delta\left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}\right)$$

Здесь *U(*r) – потенциал, создаваемый (всеми!) примесями.

$$U(r) = \sum_{j=1}^{N_{imp}} u(r - r_j)$$

Здесь *u(*r) – потенциал, создаваемый одной примесью в точке r_j.

Что мы знаем о *w*?

$$w_{p'\to p} = w_{p\to p'} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|U_{pp'}\right|^2 \delta\left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}\right) = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle p'|U|p\rangle\right|^2 \delta\left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}\right)$$

Здесь *U*(r) – потенциал, создаваемый (всеми!) примесями.

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{imp}} u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

Здесь *u*(r) – потенциал, создаваемый одной примесью в точке r_j.

Перейдем в Фурье базис плоских волн:

$$\left|\langle p'|U|p\rangle\right|^2 = \frac{1}{V^2}\left|u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\right|^2 \left|\sum_{j=1}^{N_{imp}} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j}\right|^2, \quad u(\mathbf{q}) = \int u(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3 r.$$

Примеси распределены случайно. Усредним по беспорядку. Возьмем много копий (реплик) системы, в каждой реплике свое распределение примесей. Усредним по копиям (репликам):

Что мы знаем о *w*?

Перейдем в Фурье базис плоских волн:

$$\left|\left\langle p'\middle|U\middle|p\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{V^2}\left|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\right|^2\left|\sum_{j=1}^{N_{imp}} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j}\right|^2, \quad u(\mathbf{q}) = \int u(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{qr}}d^3r.$$

Примеси распределены случайно. Усредним по беспорядку. Возьмем много копий (реплик) системы, в каждой реплике свое распределение координат примесей. Усредним по копиям (репликам):

$$\overline{\left|\sum_{j=1}^{N_{imp}} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j}\right|^2} = N_{imp} + N_{imp}\left(N_{imp}-1\right)\delta_{\mathbf{p}-\mathbf{p}',0}$$

$$\overline{\left|\left\langle p'\middle|U\middle|p\right\rangle\right|^2} = \frac{N_{imp}}{V^2}\left|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\right|^2 + \frac{N_{imp}\left(N_{imp}-1\right)}{V^2}\left|u(0)\right|^2\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$$

Упражнение.
Доказать, что

$$\overline{\left|\sum_{j=1}^{N_{imp}} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}_j}\right|^2} = N_{imp} + N_{imp}\left(N_{imp}-1\right)\delta_{\mathbf{p}-\mathbf{p}',0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \mathbf{v}(\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \mathbf{F}(\mathbf{r},t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) =$$

$$= \sum_{\mathbf{p}'} w_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} \left(f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t) - f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{p}'} \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{N_{imp}}{V^2} \left| u(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \right|^2 + \frac{N_{imp}\left(N_{imp}-1\right)}{V^2} \left| u(0) \right|^2 \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \right) \delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} \right) \left(f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t) - f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{p}'} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{N_{imp}}{V^2} \left| u(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \right|^2 \delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} \right) \left(f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t) - f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} n_{imp} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \left| u(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \right|^2 \delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} \right) \left(f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t) - f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \right),$$

n_{imp} – концентрация примесей. Здесь мы использовали:

$$\sum_{\mathbf{p}'} (\ldots) = \int \frac{d^3 r d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} (\ldots) = V \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} (\ldots).$$

Подведем итоги. Мы получили интеграл столкновений электронов на примесях:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \mathbf{v}(\mathbf{p})\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + e\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) =$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} n_{imp} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \left|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\right|^2 \delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}\right)\left(f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t) - f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\right),$$

n_{imp} – концентрация примесей.

Вспомним квантовую механику…
Борновское приближение в теории рассеяния...

В Борновском приближении, <u>дифференциальное</u> сечение рассеяния равно:

$$\sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\right|^2, \text{ где } \theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \text{ угол между } \mathbf{p}, \mathbf{p}'$$

m – масса электрона.

Подведем итоги. Мы получили интеграл столкновений электронов на примесях:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \mathbf{v}(\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + e\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) =$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^2 n_{imp} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}) \delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}\right) \left(f(\mathbf{r},\mathbf{p}',t) - f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \right),$$

$n_{imp} = \dfrac{N_{imp}}{V}$ – концентрация примесей.

остаточное сопротивление металла

Найдем теперь остаточное сопротивление металла (за пределами tau-приближения…)

$$\boxed{eE_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} f(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{p}'} w_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} \big(f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p}) \big).}$$

Будем искать решение:

$$\boxed{\begin{aligned} f &\approx f^{(0)} + f^{(1)} + \ldots, \\ f^{(1)} &= -\tau e E_\alpha \, \mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}. \end{aligned}}$$

Остаточное сопротивление (за пределами tau-приближения…)

$$\boxed{\begin{aligned} f &\approx f^{(0)} + f^{(1)} + \ldots, \\ f^{(1)} &= -\tau e E_\alpha \mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}. \end{aligned}}$$

$$\boxed{eE_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} f^{(0)} = eE_\alpha \mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)} = \sum_{\mathbf{p}'} w_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} \left(f^{(1)}(\mathbf{p}') - f^{(1)}(\mathbf{p}) \right).}$$

$$\boxed{eE_\alpha \mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)} = \tau e E_\alpha \sum_{\mathbf{p}'} w_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} \left(\mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}(\varepsilon) - \mathrm{v}'_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon'} f^{(0)}(\varepsilon') \right).}$$

$$\boxed{eE_\alpha \mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)} = \tau eE_\alpha \sum_{\mathbf{p}'} w_{\mathbf{p}\to\mathbf{p}'} \left(\mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}(\varepsilon) - \mathrm{v}'_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon'} f^{(0)}(\varepsilon') \right).}$$

$$\Downarrow$$

$$eE_\alpha \mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)} = \tau eE_\alpha \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^2 n_{imp} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}) \delta\left(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'}\right) \left(\mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}(\varepsilon) - \mathrm{v}'_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon'} f^{(0)}(\varepsilon') \right).$$

$$\Downarrow$$

$$eE_\alpha \mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)} = \tau eE_\alpha \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^2 n_{imp} \int g(\varepsilon') d\varepsilon' \frac{d\Omega_\theta}{4\pi} \sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}) \delta\left(\varepsilon - \varepsilon'\right) \left(\mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}(\varepsilon) - \mathrm{v}'_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon'} f^{(0)}(\varepsilon') \right) =$$

$$= \tau eE_\alpha \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^2 n_{imp} g(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}(\varepsilon) \int \frac{d\Omega_\theta}{4\pi} \sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}) \left(\mathrm{v}_\alpha - \mathrm{v}'_\alpha \right).$$

$g(\varepsilon)$ – плотность состояний, Ω -- телесный угол.

Итак,

$$eE_\alpha \,\mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)} = \tau e E_\alpha \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp}\, g(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}(\varepsilon)\int \frac{d\Omega_\theta}{4\pi}\sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'})\left(\mathrm{v}_\alpha - \mathrm{v}'_\alpha\right).$$

$$E_\alpha \,\mathrm{v}_\alpha = \tau E_\alpha \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp}\, g(\varepsilon)\int \frac{d\Omega_\theta}{4\pi}\sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'})\left(\mathrm{v}_\alpha - \mathrm{v}'_\alpha\right).$$

$$E_\alpha \mathrm{v}_\alpha = \tau E_\alpha \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp} g(\varepsilon)\int \frac{d\Omega_\theta}{4\pi}\sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'})\left(\mathrm{v}_\alpha - \mathrm{v}'_\alpha\right).$$

В этом интегральном уравнении модули скоростей равны, меняются только направления. Уравнение справедливо для любого направления электрического поля.

Направления скорости

$$1 = \tau \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp} g(\varepsilon)\int \frac{d\Omega_\theta}{4\pi}\sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'})\left(1 - \mathbf{n}_\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}\right) =$$

$$= \tau \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp} g(\varepsilon)\int \frac{d\Omega_\theta}{4\pi}\sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'})\left(1 - \cos\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\right).$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^2 n_{imp}\, g(\varepsilon)\int \frac{d\Omega_\theta}{4\pi}\sigma(\theta)\left(1-\cos\theta\right).$$

$$g(\varepsilon) = \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3\,\mathrm{v}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = n_{imp}\mathrm{v}\int d\Omega_\theta\sigma(\theta)\left(1-\cos\theta\right) = n_{imp}\mathrm{v}\int\left(1-\cos(\theta)\right)d\sigma = n\mathrm{v}\;\sigma_{\mathrm{tr}}.}$$

Подведем итоги.

Мы искали решение кинетического уравнения, как для tau-приближения, но с неизвестным tau.

$$\boxed{\begin{aligned} & f \approx f^{(0)} + f^{(1)} + \ldots, \\ & f^{(1)} = -\tau e E_\alpha \mathrm{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f^{(0)}. \end{aligned}}$$

Анзац подошел и для tau мы получили формулу:

$$\frac{1}{\tau} = n_{imp} \mathrm{v} \int d\Omega_\theta \sigma(\theta) \left(1 - \cos\theta\right) = n_{imp} \mathrm{v} \int \left(1 - \cos(\theta)\right) d\sigma = n_{imp} \mathrm{v}\ \sigma_{\mathrm{tr}}.$$

Для проводимости получится формула Друде… Но tau в ней – не феноменологический параметр, а конкретный функционал от сечения рассеяния электрона на примеси.

$$g(\varepsilon) = \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3\,\mathrm{v}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = n\mathrm{v}_F \int \left(1 - \cos(\theta)\right) d\sigma = n\mathrm{v}_F \sigma_{\mathrm{tr}}.}$$

Множитель (1−cosθ) отражает влияние обратных столкновений.

Главный вывод:

$$\frac{1}{\tau} = n_{imp}\mathrm{v} \int d\Omega_{\theta}\sigma(\theta)\left(1-\cos\theta\right) = n_{imp}\mathrm{v}\int\left(1-\cos(\theta)\right)d\sigma = n_{imp}\mathrm{v}\ \sigma_{\mathrm{tr}}.$$

$$\boxed{\text{проводимость} = \frac{ne^2\tau}{m}.}$$

Транспортное сечение рассеяния

$$\int\left(1-\cos(\theta)\right)d\sigma = \sigma_{\mathrm{tr}}.$$

Важно, что время tau в формуле друде выражено не через сечение рассеяния, а через транспортное сечение!!!
Теплопроводность, к-ты Пельте, и т.п. будут тоже выражаться через транспортное сечение!

Задача 3
из задания

(C) Электроны рассеиваются на кулоновских центрах; потенциал взаимодействия $U(r) = -e^{-r/\lambda}\frac{Ze^2}{r}$, $U(q) = \frac{4\pi Z^2 e^2}{q^2+\lambda^{-2}}$. Показать, что сечение рассеяния равно

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{Ze^2}{4E_F}\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\theta + (2k_F\lambda)^{-2}}\right)^2$$

и удельное сопротивление $\rho = \frac{m}{ne^2\tau_{\mathrm{tr}}} = Z^2 R_q a_B \frac{n_{\mathrm{imp}}}{n} F(\zeta)$. Здесь $R_q = \frac{(2\pi\hbar)^2}{e^2} \approx 25.813$ kOм, $a_B = \hbar^2/me^2 \approx 0.529$Å, $\zeta = \frac{4}{\pi}k_F^2\lambda^2$, $F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^3}\left\{\ln(1+\pi\zeta) - \frac{\pi\zeta}{1+\pi\zeta}\right\}$. Сравнить σ и σ_{tr}. [Д.Ю. Протасов и др. Физика и техника полупроводников. Т. 47(1), 36 (2013); D. Arovas, Lecture Notes on Condensed Matter Physics (University of California, San Diego), Sec.(1.5.2).]

$$u(q)=\frac{4\pi Z^2 e^2}{q^2+\lambda^{-2}}$$

$$\sigma(\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'})=\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\left|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\right|^2,$$ где $\theta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ угол между $\mathbf{p},\mathbf{p}'$

$m -$ масса электрона.

$$q^2=(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2=2p^2-2\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'=2p^2(1-\cos\theta)=4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

$$\sigma(\theta)=\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\left|\frac{4\pi Z^2e^2}{\left(4\left(p/\hbar\right)^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)+\lambda^{-2}}\right|^2=\left|\frac{2mZ^2e^2}{p^2 4}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\left(2p\lambda/\hbar\right)^{-2}}\right|^2.$$

$$\sigma(\theta)=\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\left|\frac{4\pi Z^2e^2}{\left(4\left(p/\hbar\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\lambda^{-2}}\right|^2=\left|\frac{2mZ^2e^2}{p^2 4}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\left(2p\lambda/\hbar\right)^{-2}}\right|^2.$$

$$\sigma_{tr}=2\pi\int_0^{\pi}\sigma(\theta)\left(1-\cos(\theta)\right)\sin(\theta)d\theta,$$

$$\sigma_{tot}=2\pi\int_0^{\pi}\sigma(\theta)\sin(\theta)d\theta.$$

$$In[1] := \quad \text{Integrate}\left[\frac{\sin[\theta]\left(1-\cos[\theta]\right)}{\left(\sin\left[\theta/2\right]^2+a^{-2}\right)^2}, \{\theta, 0, \pi\}, Assumptions \to a > 0\right]$$

$$Out[1] := 4\left(-1+\frac{1}{1+a^2}+\log\left[1+a^2\right]\right)$$

$$In[2] := \quad \text{Integrate}\left[\frac{\sin[\theta]}{\left(\sin\left[\theta/2\right]^2+a^{-2}\right)^2}, \{\theta, 0, \pi\}, Assumptions \to a > 0\right],$$

$$Out[2] := \frac{2a^4}{1+a^2}.$$

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_{tot}} = \frac{\int_0^\pi \sigma(\theta)\left(1-\cos(\theta)\right)\sin(\theta)d\theta}{\int_0^\pi \sigma(\theta)\sin(\theta)d\theta} = \frac{4\left(-1+\dfrac{1}{1+a^2}+\log\left[1+a^2\right]\right)}{\dfrac{2a^4}{1+a^2}}, \quad a = 2k_F\lambda.$$

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_{tot}} \approx 1, \quad a \to 0.$$

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_{tot}} \approx \frac{4\ln(a)-2}{a^2} \ll 1, \quad a \to \infty.$$

Большое “а” чаще реализуется! Благодаря нетривиальной «транспортной» (1-cos(theta)), сопротивление оказывается значительно меньше, чем дали бы наивные оценки времени свободного пробега через полное сечение!!!

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = n_{imp}\mathrm{v} \int d\Omega_\theta \sigma(\theta)\left(1-\cos\theta\right) = n_{imp}\mathrm{v}\int\left(1-\cos(\theta)\right)d\sigma = n\mathrm{v}\ \sigma_{\mathrm{tr}}.}$$

Удельное сопротивление равно

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau(\varepsilon_F)}.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tau(\varepsilon_{\mathrm{F}})} &= 2\pi n_{\mathrm{imp}} v_{\mathrm{F}} \left(\frac{Ze^2}{4\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta \, (1-\cos\vartheta) \, \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\vartheta + (2k_{\mathrm{F}}\lambda)^{-2}}\right)^2 \\
&= 2\pi n_{\mathrm{imp}} v_{\mathrm{F}} \left(\frac{Ze^2}{2\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2 \left\{ \ln(1+\pi\zeta) - \frac{\pi\zeta}{1+\pi\zeta} \right\} \, , \qquad \zeta = \frac{4}{\pi} k_{\mathrm{F}}^2 \lambda^2
\end{aligned}
$$

Задача 3 решена

Задача 6

6. (C) Модель Лоренца. Показать, что в отсутствие внешних сил в τ приближении распределение по скоростям $\delta n(\mathbf{v},t) = \int \delta f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)d\mathbf{r}$ релаксирует экспоненциально, а не диффузионным образом. Модифицируем τ – приближение: $\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\tau}\left(f - \langle f \rangle\right)$, где $\langle \ldots \rangle$ – усреднение по направлениям скорости. Показать, что в этом случае на больших временах решение уравнения Больцмана имеет диффузионный вид: $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = (4\pi Dt)^{-3/2} e^{-r^2/4Dt} \frac{\delta(|\mathbf{v}| - |\mathbf{v}_0|)}{4\pi v_0^2}\theta(t)$. Начальное условие: $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \delta(\mathbf{r})\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$, где $D = \frac{1}{3}v_0^2\tau$.

[D. Arovas, Lecture Notes on Nonequilibrium Statistical Physics (University of California, San Diego), Sec.(5.6.1).]

Задача подробно решена в D. Arovas, Lecture Notes on Nonequilibrium Statistical Physics (University of California, San Diego), Sec.(5.6.1)

Смысл этой задачи продемонстрировать ущербность tau-приближения.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)f=-\frac{f-f^0}{\tau}.$$

Распределение частиц в пространстве скоростей (рассматриваем классический газ)

$$\tilde{n}(\mathbf{v},t)=\int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{r}$$

Проинтегрируем обе части ур. Больцмана по r:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{n}=-\frac{\tilde{n}-\tilde{n}^0}{\tau}.$$

$\tilde{n}^0$ -- распределение Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{n} = -\frac{\tilde{n} - \tilde{n}^0}{\tau}.$$

Таким образом, получаем чисто релаксационное уравнение, где система стремиться к равновесию экспоненциально…

$$\tilde{n} - \tilde{n}^0 \propto \exp\left(-t/\tau\right).$$

И никакой диффузии…

Чуть-чуть модифицируем tau-приближение…

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)f=-\frac{f-\mathrm{P}\,f}{\tau},$$

$$\mathrm{P}\,f=\int\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{4\pi}f(\mathbf{r},\mathbf{v},t),\quad \hat{\mathbf{v}}-\text{ направление скорости.}$$

Такую задачу можно асимптотически решить в общем виде с помощью преобразования Лапласа. Подробности подробно изложены в Arovas… Здесь будет диффузионное решение! НО! Асимптотически, в пределе больших времен.

Можно и нужно задавать вопросы на мой скайп chtchelkatchev и на электронную почту shchelkachev.nm@mipt.ru

Успехов и не болейте!