2-ое задание

Задача 11

Имеется плоская стенка, которая с небольшой скоростью движется через равновесный газ фермионов. Столкновения фермионов со стенкой носят зеркальный характер. Найти силу сопротивления, испытываемую стенкой.

То же самое сделать для бозонов.

Рекомендуется перед решением этих задач вспомнить определение тензора плотности потока импульса и обсудить его физический смысл.

Как изменится решение задачи, если стенка является полупроницаемой мембраной, т.е. с вероятностью $D<1$ частица может проходить сквозь стенку? Обсудить случай диффузного отражения от стенки.

Вспоминаем тензор плотности потоков импульса…

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(n\langle p_i\rangle\right)+\nabla_k\Pi_{ik}=nF_i+\int p_i I_{st}\,d\Gamma.}$$

С помощью функции распределения этот тензор может быть найден так:

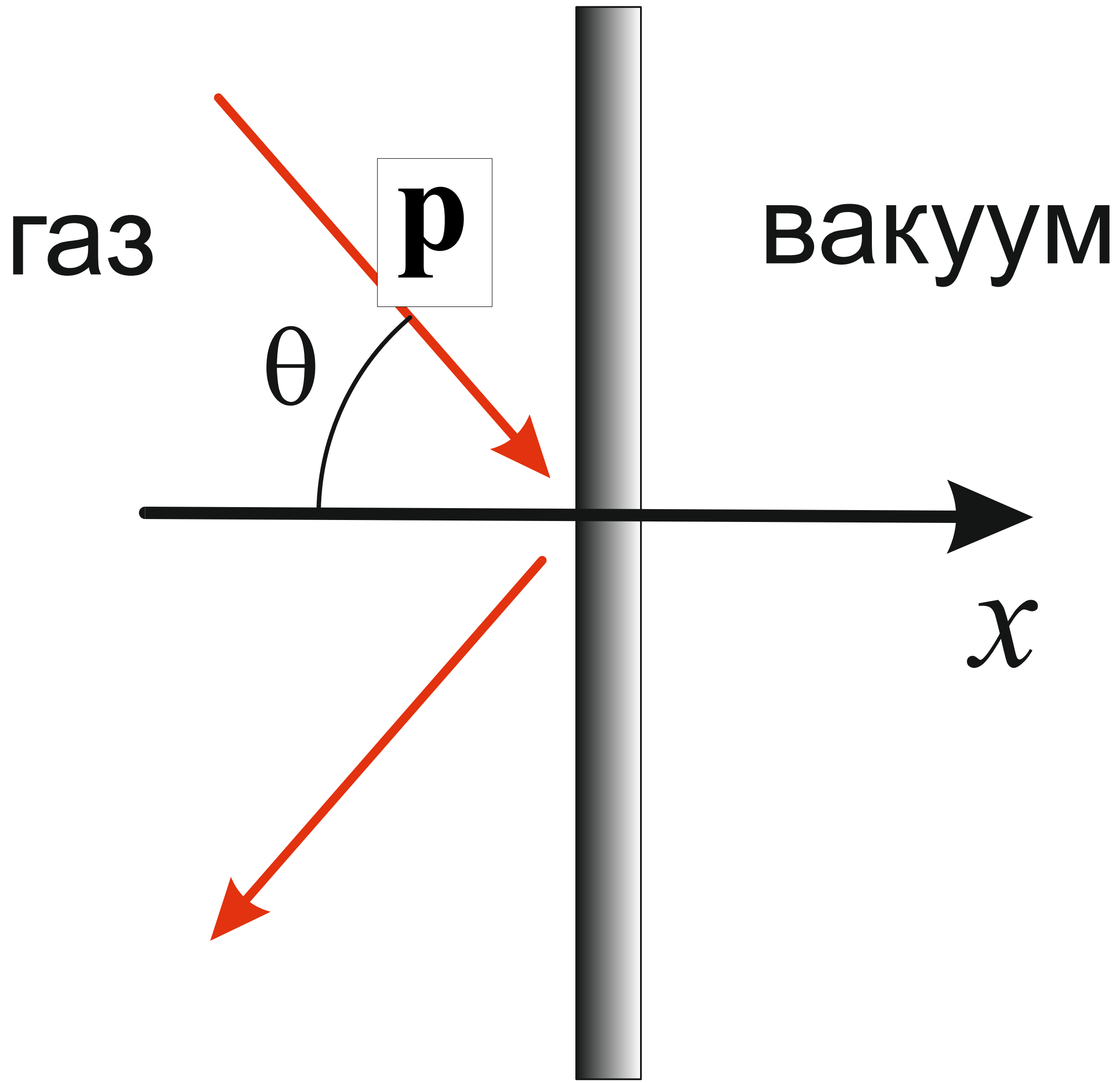
$$\Pi_{ik}=\int p_i \,\mathrm{v}_k\, f\,d\Gamma.$$

В гидродинамике было так:

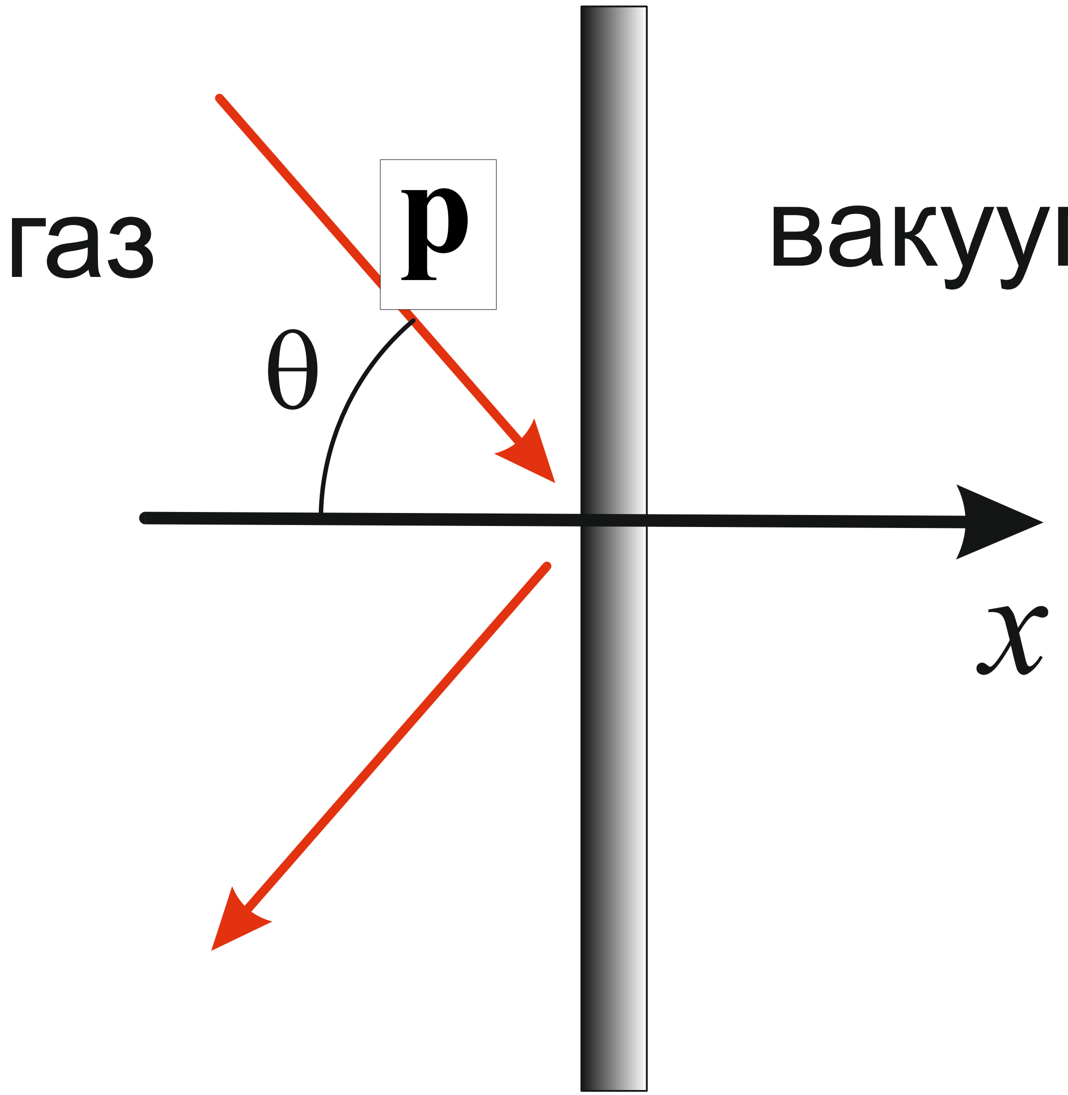
$$\Pi_{ik}=p\delta_{ik}+\rho v_i v_k-\sigma'_{ik}=-\sigma_{ik}+\rho v_i v_k.$$

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+\sigma'_{ik}$$

Решим задачу в системе отсчета,
где стенка неподвижна.



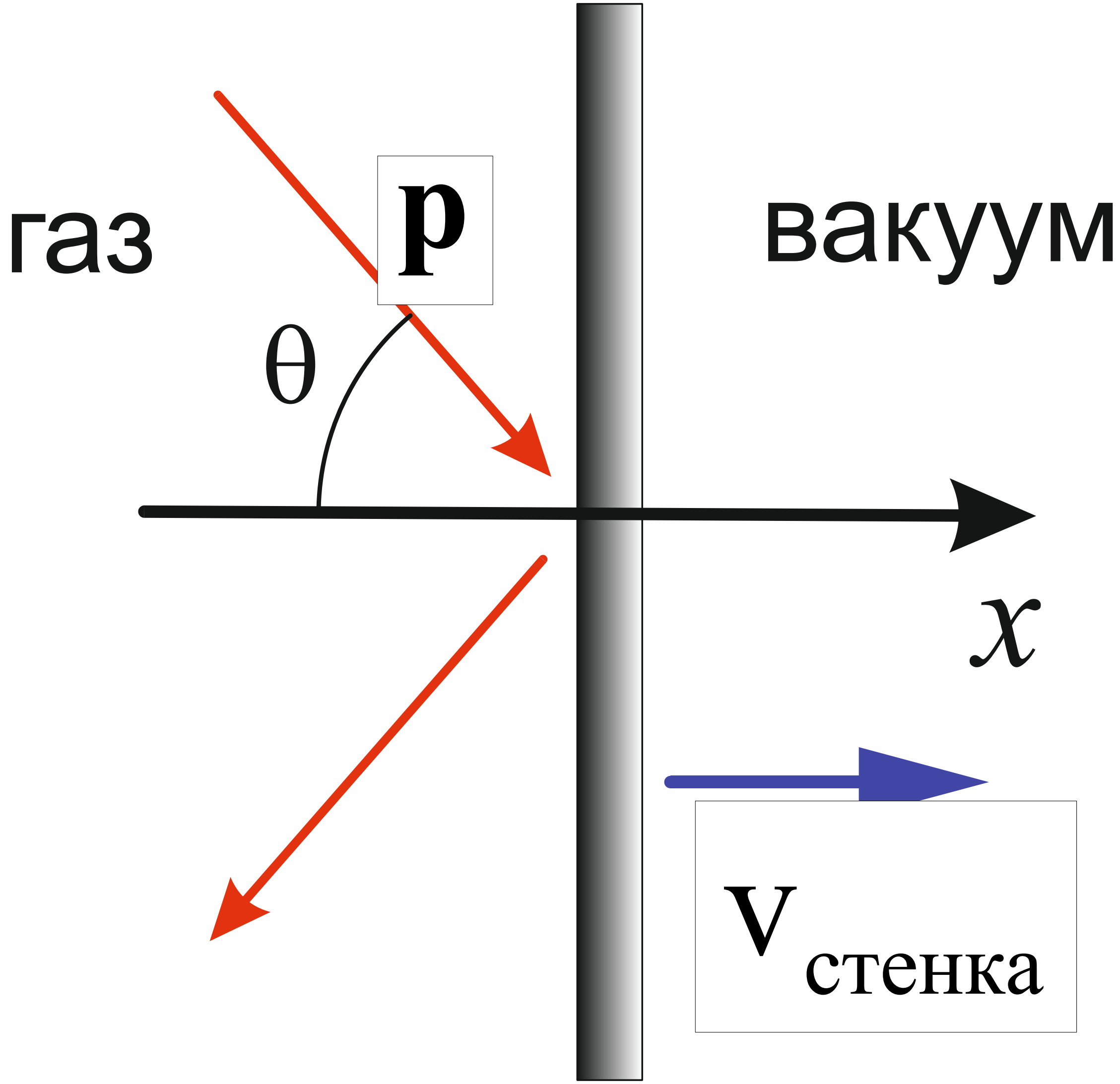
Решим задачу в системе отсчета, где стенка неподвижна.



$$P = 2\int_0^{\pi/2}\int^{\infty} m\left(\mathrm{v}_x - \mathrm{v}\right)^2 f_0 \frac{2\pi\sin\theta d\theta p^2 dp}{\left(2\pi\hbar\right)^3} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int^{\infty} p_x \mathrm{v}_x f_0\left(m\mathbf{v} + \mathbf{p}\right)\frac{2\pi\sin\theta d\theta p^2 dp}{\left(2\pi\hbar\right)^3} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int^{\infty} \frac{p^2}{m}\cos^2\left(\theta\right) f\left(p,\theta\right)\frac{2\pi\sin\theta d\theta p^2 dp}{\left(2\pi\hbar\right)^3}.$$



$$P = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} p_x \, \mathrm{v}_x \, f \, \frac{2\pi \sin\theta d\theta \, p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \frac{p^2}{m}\cos^2(\theta) f(p,\theta)\frac{2\pi \sin\theta d\theta \, p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.$$

$$f = \frac{1}{\exp\left(\frac{(p_x + \mathrm{v})^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mT} - \frac{\mu}{T}\right) + 1} =$$

$$= \frac{1}{\exp\left(\frac{(p\cos\theta + \mathrm{v})^2 + (p\sin\theta)^2}{2mT} - \frac{\mu}{T}\right) + 1}$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f &= \frac{1}{\exp\left(\dfrac{(p\cos\theta + \mathrm{v})^2 + \left(p\sin\theta\right)^2}{2mT} - \dfrac{\mu}{T}\right) + 1} \approx \\
&\approx f_{\mathrm{v}=0} + \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f_{\mathrm{v}=0}\right)\frac{p\cos\theta}{m}\mathrm{v}.
\end{aligned}
}
$$

$$\boxed{\frac{1}{d}m\langle u^2\rangle = \frac{2}{d}\langle\epsilon\rangle = \text{давление}/n}$$

$$\boxed{P = P_{\mathrm{v}=0} + \delta P = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\frac{p^2}{m}\cos^2(\theta)\left[f_{\mathrm{v}=0} + \left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f_{\mathrm{v}=0}\right)\frac{p\cos\theta}{m}\mathrm{v}\right]\frac{2\pi\sin\theta d\theta p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.}$$

$$P_{\mathrm{v}=0} = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\frac{p^2}{m}\cos^2(\theta) f_{\mathrm{v}=0}\frac{2\pi\sin\theta d\theta p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} =$$

$$= 2\int_0^{\infty}\frac{p^2}{2m}f_{\mathrm{v}=0}\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{\pi/2}\cos^2(\theta)\sin\theta d\theta = 2\int_0^{\infty}\frac{p^2}{2m}f_{\mathrm{v}=0}\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{1}s^2 ds =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\infty}\frac{p^2}{2m}f_{\mathrm{v}=0}\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2}{3}n\left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle_{\mathrm{v}=0} = \frac{2}{3}n\langle\varepsilon(p)\rangle_{\mathrm{v}=0} = \text{давление идеального газа.}$$

$$\boxed{\frac{1}{d} m\langle u^2\rangle = \frac{2}{d}\langle\epsilon\rangle = \textit{давление} / n}$$

$$\boxed{P = P_{\mathrm{v}=0} + \delta P = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \frac{p^2}{m}\cos^2(\theta)\left[f_{\mathrm{v}=0} + \left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f_{\mathrm{v}=0}\right)\frac{p\cos\theta}{m}\mathrm{v}\right]\frac{2\pi\sin\theta d\theta p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.}$$

$$\delta P = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \frac{p^2}{m}\cos^2(\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f_{\mathrm{v}=0}\right)\frac{p\cos\theta}{m}\mathrm{v}\frac{2\pi\sin\theta d\theta p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} =$$

$$= \mathrm{v}\int_0^{\pi/2}\cos^3(\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{\infty}\frac{p^3}{m^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f_{\mathrm{v}=0}\right)\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = -\frac{\mathrm{v}}{4}\int_0^{\infty}\frac{p^3}{m^2}\left(-\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f_{\mathrm{v}=0}\right)\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} =$$

$$\approx -\frac{\mathrm{v}}{4}\int_0^{\infty}\frac{p^3}{m^2}\delta(\varepsilon-\mu)\frac{4\pi p^2 \frac{dp}{d\varepsilon}}{(2\pi\hbar)^3}d\varepsilon = -\frac{\mathrm{v}}{4}\frac{p_F^3}{m^2}\frac{4\pi p_F^2}{(2\pi\hbar)^3\mathrm{v}_F} = -\frac{1}{2}\mathrm{v}\, p_F\varepsilon_F D(\varepsilon_F) \sim -P_{\mathrm{v}=0}\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_F}.$$

Если стенка является полупроницаемой мембраной с вероятность отражения R…

- Тогда ответ для давления нужно умножить на R.

Диффузную границу мы рассматривать не будем в связи коронавирусом.