№5 ДЗ 3 1

H_k — положит опр $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \hookrightarrow x^T H_k x > 0$

$(Hx, x) > 0$

$$(H_{k+1}x, x) = (H_k x, x) - \frac{x^T H_k y_k y_k^T H_k x}{\langle H_k y_k, y_k\rangle} + \frac{x^T s_k s_k^T x}{(y_k, s_k)} \qquad \langle , \rangle = (,)$$

$$(H_{k+1}x, x) = \underbrace{(H_k x, x) - \frac{\langle H_k y_k, x\rangle^2}{\langle H_k y_k, y_k\rangle}}_{\geq 0\ ?} + \underbrace{\frac{\langle s_k, x\rangle^2}{\langle y_k, s_k\rangle}}_{\geq 0 \text{ всегда, очев.}}$$

- $$\langle H_k x, x\rangle - \frac{\langle H_k y_k, x\rangle^2}{\langle H_k y_k, y_k\rangle} = \frac{\langle H_k x, x\rangle\langle H_k y_k, y_k\rangle - \langle H_k y_k, x\rangle^2}{\langle H_k y_k, y_k\rangle}$$

- Воспользуемся неравенством КБШ. для этого зададим ч/з H_k скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle = \langle Hx, y\rangle \qquad \|x\| = \sqrt{\langle Hx, x\rangle}$$

$\Rightarrow$ /Коши/ $\langle Hy_k, x\rangle^2 \leq \langle Hy_k, y_k\rangle \cdot \langle Hx, x\rangle$ // $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

$\Rightarrow$ ≥ 0 (т.к числитель ≥ 0)

- Проверка на $\langle H_{k+1}x, x\rangle = 0$

- если $\langle s_k, x\rangle \neq 0 \Rightarrow \langle H_{k+1}x, x\rangle > 0$

- случай $\langle s_k, x\rangle = 0$ - Тогда $\langle H_{k+1}x, x\rangle = 0$, когда $\langle Hy_k, x\rangle^2 = \langle Hy_k, y_k\rangle \cdot \langle Hx, x\rangle$

т.е когда y_k коллинеар x - ~~$y = \alpha x$~~ $y_k \parallel x \Leftarrow y_k = \alpha x$

Но! тогда противоречие с условием на $\langle y_k, s_k\rangle > 0$

ЧТД