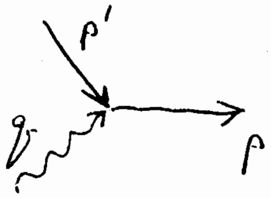
11 семинар

Температурная зав-ть электропроводности металлов

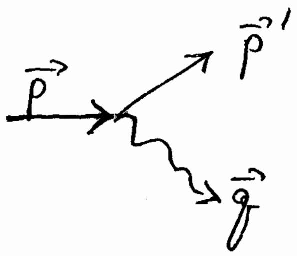
1. Электрон-фононный интеграл столкновений

Д1



$$w(p',q\to p)\,\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}-\hbar\omega_q)\,f_{p'}(1-f_p)\,n_q^B$$

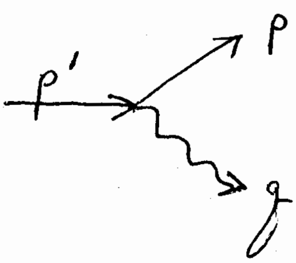
Д2



$$w(p\to p',q)\,\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}-\hbar\omega_q)\,f_p(1-f_{p'})[1+n_q^B]$$

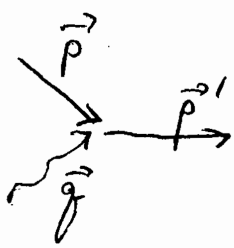
$$w(p',q\to p)=w(p\to p',q)$$

Д3



$$w(p'\to p,q)\,\delta(\varepsilon_p+\hbar\omega_q-\varepsilon_{p'})\,f_{p'}(1-f_p)[1+n_q^B]$$

Д4



$$w(p,q\to p')\,\delta(\varepsilon_p+\hbar\omega_q-\varepsilon_{p'})\,f_p(1-f_{p'})\,n_q^B$$

$$w(p'\to p,q)=w(p,q\to p')$$

Интеграл столкновений

$$\hat{I}_{ct} f=\int\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\left[Д1-Д2+Д3-Д4\right]$$

$$\hat{I}_{ст} f = \int \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3} \Big[w(p \to p', q)\, \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} - \hbar\omega_q) \times$$

$$\times \left\{ f_{p'}(1-f_p)\, n_q^{\beta} - f_p(1-f_{p'})[1+n_q^{\beta}] \right\} +$$

$$+ w(p, q \to p')\, \delta(\varepsilon_p + \hbar\omega_q - \varepsilon_{p'}) \times$$

$$\times \left\{ f_{p'}(1-f_p)[1+n_q^{\beta}] - f_p(1-f_{p'})\, n_q^{\beta} \right\} \Big]$$

Следует также просуммировать по всем ветвям фононного спектра, что мы для краткости не делаем.

З-кон сохранения квазиимпульса:

Д1, Д2 : $\vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{q} + \vec{b}$

Д3, Д4 : $\vec{p}\,' = p + \vec{q} + \vec{b}$

$\vec{b}$ – вектор обратной решётки

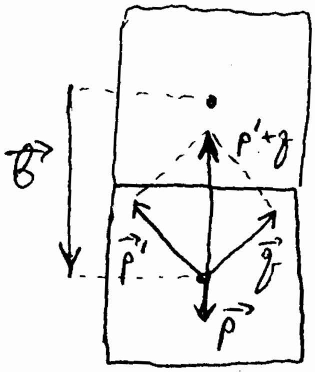
$\{\vec{b}\}$ – набор векторов трансляций в обратной решётке

(векторы $\vec{b}$ соединяют центр 1ой зоны Бриллюэна с центрами всех остальных зон Бриллюэна)

Процессы с $\vec{b} \neq 0$ называются процессами переброса (U-процессы)

Процессы с $\vec{b} = 0$ называются нормальными процессами (N-процессы)

Пример процесса с перебросом



Далее, считаем, что

1) $w(p \to p', q) = w(p, q \to p') = w(q)$

2) рассматриваем вз-твие только с акустическими фононами ($\lambda \gg a$)

$$\hbar\omega_q \simeq c|\vec{q}|, \quad q \ll \frac{2\pi\hbar}{a}$$

Тогда,

$$w(q) \sim q$$

Такая аппроксимация означает, что мы не учитываем процессы переброса

вводим для краткости определения

$$E_+ = \varepsilon_p + \hbar\omega_q - \varepsilon_{p'}$$

$$E_- = \varepsilon_p - \varepsilon_{p'} - \hbar\omega_q$$

Итак, переписываем интеграл столкновений в виде

$$\hat{I}_{st} f = \int \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3} w(q) \Big[f_{p'}(1-f_p)\big\{ n_q^B \delta(E_-) + [1+n_q^B]\delta(E_+) \big\} - f_p(1-f_{p'})\big\{ [1+n_q^B]\delta(E_-) + n_q^B \delta(E_+) \big\} \Big]$$

Фононы мы считаем находятся в равновесии, поэтому

$$n_q^B = n_B(\hbar\omega_q) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{T}} - 1}$$

2. Св-ва равновесных Ферми- и Бозе-распределений (

$$\left[\begin{array}{l} e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{T}} f_p^0 = 1-f_p^0 \\ e^{-\frac{\varepsilon_p-\mu}{T}}(1-f_p^0) = f_p^0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} e^{\frac{\hbar\omega_\gamma}{T}} n_\gamma^B = 1+n_\gamma^B \\ e^{-\frac{\hbar\omega_\gamma}{T}}[1+n_\gamma^B] = n_\gamma^B \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$f_{p'}^0(1-f_p^0)\, n_\gamma^B\, \delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}-\hbar\omega_\gamma) =$$

$$= e^{-\frac{\varepsilon_{p'}-\mu}{T}}(1-f_{p'}^0)\, e^{\frac{\varepsilon_p-\mu}{T}} f_p^0\, e^{-\frac{\hbar\omega_\gamma}{T}}[1+n_\gamma^B]\, \delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}-\hbar\omega_\gamma)$$

$$= f_p^0(1-f_{p'}^0)[1+n_\gamma^B]\, e^{\frac{\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}-\hbar\omega_\gamma}{T}}\, \delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}-\hbar\omega_\gamma) =$$

$$= f_p^0(1-f_{p'}^0)[1+n_\gamma^B]\, \delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}-\hbar\omega_\gamma)$$

Итак,

1) $f_{p'}^0(1-f_p^0)\, n_\gamma^B\, \delta(E_-) = f_p^0(1-f_{p'}^0)[1+n_\gamma^B]\,\delta(E_-)$

Аналогично,

2) $f_{p'}^0(1-f_p^0)[1+n_\gamma^B]\,\delta(E_+) = f_p^0(1-f_{p'}^0)\, n_\gamma^B\, \delta(E_+)$

<u>Следствие</u>

$$\hat{I}_{ст} f^{(0)} = 0$$

3 Линеаризуем интеграл столкновений

Будем использовать св-ва, которые следуют из (1) и (2)

1') $$\frac{f_{p'}^0}{1-f_{p'}^0}\,\frac{n_\gamma^B}{1+n_\gamma^B}\,\delta(E_-) = \frac{f_p^0}{1-f_p^0}\,\delta(E_-)$$

2') $$\frac{f_{p'}^0}{1-f_{p'}^0}\,\delta(E_+) = \frac{f_p^0}{1-f_p^0}\,\frac{n_\gamma^B}{1+n_\gamma^B}\,\delta(E_+)$$

Отклонение от равновесия ищем в виде

$$f_p = f_p^{(0)} + f_p^{(1)}, \quad f_p^{(1)} = \left(\frac{-\partial f^0}{\partial \varepsilon_p}\right) T \chi_p = $$

$$= f_p^0(1-f_p^0)\,\chi_p$$

Имеем:

$$\frac{f_p}{1-f_p} = \frac{f_p^0 + f_p^1}{1-f_p^0-f_p^1} = \frac{f_p^0+f_p^1}{(1-f_p^0)\left(1-\frac{f_p^1}{1-f_p^0}\right)} =$$

$$= \frac{f_p^0+f_p^1}{(1-f_p^0)}\left(1+\frac{f_p^1}{1-f_p^0}\right) = \frac{f_p^0+f_p^1}{1-f_p^0} + \frac{f_p^0+f_p^{(1)}}{1-f_p^0}\cdot\frac{f_p^{(1)}}{1-f_p^0}$$

$$= \frac{f_p^0}{1-f_p^0} + \frac{f_p^1}{1-f_p^0} + \frac{f_p^0 f_p^{(1)}}{(1-f_p^0)^2} = \frac{f_p^0}{1-f_p^0} + \left(\frac{1}{1-f_p^0} + \frac{f_p^0}{(1-f_p^0)^2}\right) f_p^{(1)}$$

$$= \frac{f_p^0}{1-f_p^0} + \frac{1}{(1-f_p^0)^2} f_p^{(1)} = \frac{f_p^0}{1-f_p^0} + \frac{f_p^0(1-f_p^0)\chi_p}{(1-f_p^0)^2} =$$

$$= \frac{f_p^0}{1-f_p^0} + \frac{f_p^0}{1-f_p^0}\chi_p = \frac{f_p^0}{1-f_p^0}\left[1+\chi_p\right]$$

Итак,

$$\frac{f_p}{1-f_p} = \frac{f_p^0}{1-f_p^0}\left[1+\chi_p\right]$$

Аналогично,

$$\frac{f_{p'}}{1-f_{p'}} = \frac{f_{p'}^0}{1-f_{p'}^0}\left[1+\chi_{p'}\right]$$

Далее, в интеграле столкновений из квадратных скобок [...] берём следующую часть

$$\left(f_{p'}(1-f_p)\,n_\gamma^B - f_p(1-f_{p'})[1+n_\gamma^B]\right)\delta(E_-) =$$

$$= (1-f_p)(1-f_{p'})[1+n_\gamma^B]\left(\frac{f_{p'}}{1-f_{p'}}\,\frac{n_\gamma^B}{1+n_\gamma^B} - \frac{f_p}{1-f_p}\right)\delta(E_-) =$$

$$= (1-f_p)(1-f_{p'})[1+n_\gamma^B]\left(\frac{f_{p'}^0}{1-f_{p'}^0}\,[1+\chi_{p'}]\,\frac{n_\gamma^B}{1+n_\gamma^B} - \frac{f_p^0}{1-f_p^0}[1+\chi_p]\right)\delta(E_-)$$

используя (1'

$$= (1-f_p)(1-f_{p'})[1+n_\gamma^B]\,\frac{f_p^0}{1-f_p^0}\left([1+\chi_{p'}] - [1+\chi_p]\right)\delta(E_-) =$$

$$= (1-f_p)(1-f_{p'})[1+n_\gamma^B]\,\frac{f_p^0}{1-f_p^0}\left(\chi_{p'}-\chi_p\right)\delta(E_-) =$$

здесь следует удерживать члены нулевого порядка

$$= (1-f_p^0)(1-f_{p'}^0)[1+n_\gamma^B]\,\frac{f_p^0}{1-f_p^0}\left(\chi_{p'}-\chi_p\right)\delta(E_-) =$$

$$= f_p^0(1-f_{p'}^0)[1+n_\gamma^B]\left(\chi_{p'}-\chi_p\right)\delta(E_-)$$

Аналогично, берём из квадратных скобок $[\dots]$ в интеграле столкновений оставшуюся часть

$$\left(f_{p'}(1-f_p)[1+n_\gamma^B] - f_p(1-f_{p'})\,n_\gamma^B\right)\delta(E_+) =$$

$$= (1-f_p)(1-f_{p'})[1+n_\gamma^B]\left(\frac{f_{p'}}{1-f_{p'}} - \frac{f_p}{1-f_p}\,\frac{n_\gamma^B}{1+n_\gamma^B}\right)\delta(E_+) =$$

$$= (1-f_p)(1-f_{p'})[1+n_\gamma^B]\left(\frac{f_{p'}^0}{1-f_{p'}^0}[1+\chi_{p'}] - \frac{f_p^0}{1-f_p^0}[1+\chi_p]\,\frac{n_\gamma^B}{1+n_\gamma^B}\right)\delta(E_+) =$$

используем (2')

$$= (1-f_p)(1-f_{p'})[1+n_\gamma^B]\,\frac{f_p^0}{1-f_p^0}\,\frac{n_\gamma^B}{1+n_\gamma^B}\left([1+\chi_{p'}] - [1+\chi_p]\right)\delta(E_+) =$$

$$= (1-f_p)(1-f_{p'})[1+n^B_q]\,\frac{f^0_p}{1-f^0_p}\,\frac{n^B_q}{1+n^B_q}\,(\chi_{p'}-\chi_p)\,\delta(E_+) =$$

$$= f^0_p(1-f^0_{p'})\,n^B_q\,(\chi_{p'}-\chi_p)\,\delta(E_+)$$

Итак, квадратная скобка в интеграле столкновений принимает вид

$$[\ldots] = (\chi_{p'}-\chi_p)\,f^0_p(1-f^0_{p'})\left\{[1+n^B_q]\,\delta(E_-) + n^B_q\,\delta(E_+)\right\}$$

Итак, линеаризованный интеграл электрон-фононных столкновений имеет вид

$$\hat{I}^{(L)}_{ст} f = \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\, w(q)(\chi_{p'}-\chi_p)\,f^0_p(1-f^0_{p'}) \times$$
$$\times\left\{[1+n^B_q]\,\delta(E_-) + n^B_q\,\delta(E_+)\right\}$$

Это линейный интегральный оператор, действующий на ф-цию χ_p.

Вводим линейный оператор

$$\hat{\Omega} : \chi_p \longrightarrow \hat{\Omega}\chi_p$$

определением

$$\hat{\Omega}\chi_p = -\hat{I}^{(L)}_{ст} f$$

Итак,

$$\hat{\Omega}\chi_p = \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\, w(q)\,(\chi_p-\chi_{p'})\,f^0_p(1-f^0_{p'}) \times$$
$$\times\left\{[1+n^B_q]\,\delta(E_-) + n^B_q\,\delta(E_+)\right\}$$

4. Метод моментов

Рассматриваем задачу электросопротивления.

Ур-ние Больцмана

$$e\vec{E}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \hat{I}_{ст} f$$

Линеаризованное ур-ние Больцмана имеет вид

$$e\vec{E}\,\frac{\partial f^0}{\partial \vec{p}} = \hat{I}_{ст}^{(L)} f$$

Домножаем на (-1), получим

$$e\vec{E}\left(\frac{-\partial f^0}{\partial \vec{p}}\right) = -\hat{I}_{ст}^{(L)} f$$

$$\underbrace{e\vec{E}\,\vec{v}_p\left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon_p}\right) = \hat{\Omega}\,\chi_p}\qquad (3)$$

$X_p = \hat{\Omega}\chi_p$.

Вводим скалярное произведение

$$\langle \varphi_p | \psi_p \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\,\varphi_p \psi_p$$

Вводим набор базисных ф-ций (моментов), который вообще говоря может быть неортогональным

$$\{\varphi_\ell(\vec{p})\} \text{ — моменты}$$
$$\ell = 1, 2, \dots N$$

Ищу мою неизвестную ф-цию в виде разложения по базисным ф-циям

$$\chi_p = \sum_\ell \xi_\ell\, \varphi_\ell(\vec{p}),$$

где ξ_ℓ — неизвестные коэффициенты разложения

Проектируем ур-ние (3) на момент $\varphi_\ell(\vec{p})$

$$\langle \varphi_\ell(\vec{p})| \; * \; (3)$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\, \varphi_l(\vec p)\, e\vec E \vec v_p \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon_p}\right) = \langle \varphi_l | \hat\Omega \chi_p \rangle =$$

$\langle \psi_i(p) | \chi_p \rangle \cdot \langle \psi_i(p) | -i\chi_p \rangle$

$$= \sum_{l'} \xi_{l'} \langle \varphi_l | \hat\Omega | \varphi_{l'} \rangle$$

В матричном виде

$$\chi_l = \Omega_{ll'}\, \xi_{l'}$$

Получили систему линейных ур-ний (N-го порядка) на определение коэффициентов $\xi_{l'}$. Решив которую находим ф-цию χ_p.

Пусть $\vec E \parallel x$, тогда

$$\chi_l = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\, \varphi_l(\vec p)\, e E v_p^x \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon_p}\right)$$

$$\Omega_{ll'} = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\, w(q)\, \varphi_l(\vec p) \left(\varphi_{l'}(\vec p) - \varphi_{l'}(\vec p\,')\right) \times$$

$$\times f_p^0 (1 - f_{p'}^0) \left\{ [1 + n_q^B]\, \delta(E_-) + n_q^B\, \delta(E_+) \right\}$$

Рассмотрим $\Omega_{ll'}$. Поменяем местами переменные интегрирования

$$p \to p', \quad p' \to p$$

Тогда,

$$\Omega_{ll'}(\ldots \varphi_l(\vec p) \ldots) \to \Omega_{ll'}(\ldots - \varphi_l(\vec p\,') \ldots)$$

При этом мы учитываем, что выражение

$$f_p^0 (1 - f_{p'}^0) \left\{ [1 + n_q^B]\, \delta(E_-) + n_q^B\, \delta(E_+) \right\}$$

не меняется.

Возьмём полусумму

$$\frac{1}{2}\left(\Omega_{ll'}(\ldots\varphi_l(\vec{p})\ldots) + \Omega_{ll'}(\ldots -\varphi_l(p')\ldots) \right)$$

Тогда получаем явно симметричную матрицу

$$\Omega_{ll'} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2} w(q) \left(\varphi_l(\vec{p}) - \varphi_l(\vec{p}\,')\right)\left(\varphi_{l'}(p) - \varphi_{l'}(p')\right)$$

$$\times f_p^0 (1 - f_{p'}^0)\left\{ [1+n_q^B]\, \delta(E_-) + n_q^B\, \delta(E_+) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega_{ll'} = \Omega_{l'l}$$

5. Одномоментное приближение

Выбираем

$$\varphi_{l=1}(\vec{p}) = v_p^x$$

Тогда,

$$X_1 = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\, eE (v_p^x)^2 \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon_p} \right)$$

Имеем:

$$X_1 = \frac{eE}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\, \vec{v}_p^{\,2} \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon_p} \right) =$$

$$= \frac{eE}{3} \frac{1}{gV} \frac{2}{m} \int \frac{gV_0\, d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}\, \varepsilon_p \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon_p} \right) =$$

$$= \frac{eE}{3} \frac{1}{gV} \frac{2}{m} \int_0^{+\infty} \varepsilon\, \nu(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon_p} \right) d\varepsilon =$$

$$= \frac{eE}{3} \frac{1}{gV} \frac{2}{m}\, \varepsilon_F\, \nu(\varepsilon_F) = \frac{eE}{3} \frac{1}{gV} \frac{2}{m} \frac{3N}{2} =$$

$$= \frac{eEn}{gm}$$

Итак,

$$X_1 = \frac{eEn}{gm}$$

Далее, в одномоментном приближении

$$\chi_p = \xi_1 \varphi_1(\vec p) = \xi_1 v_p^x$$

$$X_1 = \Omega_{11} \xi_1 \;, \Rightarrow \; \xi_1 = \frac{X_1}{\Omega_{11}}$$

Сравниваем с ответом задачи в τ-приближении

$$f_p^{(1)} = \tau e E v_p^x \left(\frac{-\partial f^0}{\partial \varepsilon_p} \right) = \frac{\tau e E v_p^x}{T} f_p^0 (1 - f_p^0) \,,$$

т.е. в τ-приближении

$$\chi_p = \frac{\tau e E}{T} v_p^x$$

Следовательно,

$$\boxed{\xi_1 = \frac{\tau e E}{T}}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{eE}{T} \frac{1}{\xi_1} = \frac{eE}{T} \frac{\Omega_{11}}{X_1} = \frac{eE}{T} \frac{\Omega_{11}}{\frac{eEn}{gm}} =$$

$$= \frac{gm}{nT} \Omega_{11}$$

Итак, обратное время релаксации

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{gm}{nT} \Omega_{11}} \quad \Rightarrow \rho = \frac{m}{ne^2} \frac{1}{\tau} = \frac{m}{ne^2} \frac{gm}{nT} \Omega_{11}$$

$$\boxed{\rho = \frac{g m^2}{n^2 e^2} \frac{\Omega_{11}}{T}}$$

Отметим, что выражение для $\Omega_{ee'}$ ещё можно упростить. А именно, разбиваем на два слагаемых

$$\int \ldots f_p^0 (1 - f_{p'}^0) [1 + n_g^B] \delta(E_-) +$$

$$+ \int \ldots f_p^0 (1 - f_{p'}^0) n_g^B \delta(E_+)$$

В первом слагаемом делаем замену

$$p \to p', \; p' \to p$$

тогда это сводится ко второму

$$f^0_p(1-f^0_{p'})[1+n^B_q]\,\delta(E_-) \to f^0_p(1-f^0_{p'})\,n^B_q\,\delta(E_+)$$

Итак,

$$\Omega_{ll'} = \int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\,w(q)\left(\varphi_l(\vec{p})-\varphi_l(\vec{p}')\right)\left(\varphi_{l'}(p)-\varphi_{l'}(p')\right)$$

$$\times\; f^0_p(1-f^0_{p'})\,n^B_q\,\delta(E_+)$$

Далее, учтём, что

$$f^0_p = f^0(\varepsilon_p), \quad f^0_{p'} = f^0(\varepsilon_{p'})$$

и рассеиваются электроны в узком слое $\sim T$ на поверхности Ферми

$$\varepsilon_{p'} = \varepsilon_p \pm \hbar\omega_q$$

$$\hbar\omega_q < \Theta_D \ll \varepsilon_F$$

Тогда неупругостью в множителе $f^0_p(1-f^0_{p'})$ можно пренебречь, т.е. считать $\varepsilon_{p'} \simeq \varepsilon_p$, тогда

$$f^0_p(1-f^0_{p'}) \simeq f^0(\varepsilon_p)(1-f^0(\varepsilon_p)) = T\left(\frac{-\partial f^0}{\partial\varepsilon_p}\right) = T\,\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_F)$$

Итак,

$$\Omega_{ll'} \simeq T\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\,w(q)\left(\varphi_l(p)-\varphi_l(p')\right)\left(\varphi_{l'}(p)-\varphi_{l'}(p')\right)\times$$

$$\times\;\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_F)\,n^B_q\,\delta(\varepsilon_p+\hbar\omega_q-\varepsilon_{p'})$$

Далее, используем, что

$$\varphi_1(\vec{p}) = v^x_p = \frac{1}{m}p^x$$

$$\varphi_1(\vec{p}') = v^x_{p'} = \frac{1}{m}p'^x$$

Тогда

$$\Omega_{11} = \frac{T}{m^2}\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\, w(q)\,(p^x-p'^x)^2\,\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_F)\,n_q^B\,\delta(\varepsilon_p+\hbar\omega_q-\varepsilon_{p'}) \quad (13)$$

Ввиду изотропности рассеяния

$$w(\vec q) = w(|q|)$$

можно заменить

$$(p^x-p'^x)^2 \longrightarrow \frac{1}{3}\vec q^{\,2}$$

Итак,

$$\Omega_{11} = \frac{T}{3m^2}\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\, w(q)\,\vec q^{\,2}\,\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_F)\,n_q^B\,\delta(\varepsilon_p+\hbar\omega_q-\varepsilon_{p'})$$

Возвращаясь к времени релаксации

$$\frac{1}{\tau} = \frac{g}{3mn}\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\, w(q)\,\vec q^{\,2}\,\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_F)\,n_q^B\,\delta(\varepsilon_p+\hbar\omega_q-\varepsilon_{p'})$$

Электросопротивление

$$\rho = \frac{m}{\tau n e^2}$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{g}{3n^2e^2}\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\, w(q)\,\vec q^{\,2}\,\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_F)\,n_q^B\,\delta(\varepsilon_p+\hbar\omega_q-\varepsilon_{p'})$$

Рассмотрим различные предельные случаи.

а) случай высоких температур

$$T \gtrsim \Theta_D$$

(на самом деле достаточно $T > 0.2\,\Theta_D$)

Распределение Бозе-Эйнштейна принимает вид

$$n_q^B = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{T}}-1} \simeq \frac{1}{1+\frac{\hbar\omega_q}{T}-1} = \frac{T}{\hbar\omega_q} \quad (14$$

Сопротивление пропорционально температуре

$$\rho \sim T$$

б) случай низких температур

$$T \ll \Theta_D$$

Примем модель Дебая при которой все три акустические ветви имеют одинаковую скорость звука. Тогда, суммируя в интеграле столкновений по трём поляризациям получаем для сопротивления ф-лу

$$\rho = \frac{3}{n^2 e^2}\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}\, w(q)\, q^2\, \delta(\varepsilon_p-\varepsilon_F)\, n_q^B\, \delta(\varepsilon_p+\hbar\omega_q-\varepsilon_{p'})$$

Далее, учитывая, что $\vec{p}\,' = \vec{p} + \vec{q}$

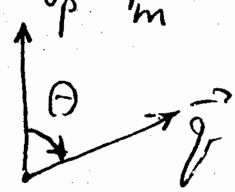
$$\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} = \varepsilon_p - \varepsilon_{p+q} = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec{p}}\vec{q} = -\vec{v}_p\vec{q}$$

$$\delta(\varepsilon_p+\hbar\omega_q-\varepsilon_{p'}) = \delta(\hbar\omega_q - \vec{v}_p\vec{q}) = \delta(cq - v_p q\cos\Theta)$$

$$= \delta(cq - v_F q\cos\Theta)$$

↑ поскольку интегрирование идёт по поверхности Ферми

$\vec{v}_p = \frac{\vec{p}}{m}$



Далее, учитывая, что

$$\frac{g V d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \nu(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\pi q^2 dq\, d\cos\Theta}{(2\pi\hbar)^3}$$

получаем

$$\rho = \frac{1}{n^2e^2}\frac{1}{V}\int \nu(\varepsilon)d\varepsilon\, \delta(\varepsilon-\varepsilon_F)\Big)\int \frac{2\pi q^2 dq\, d\cos\theta}{(2\pi\hbar)^3}\times$$ (15

$$\times\, w(q)\, q^2\, \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{T}}-1}\quad \delta(cq - v_F q\cos\theta)\Big)$$

Т. к.

$$\int \delta(cq - v_F q\cos\theta)\, d\cos\theta = \int_{-1}^{+1}\delta(cq - v_F q x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{v_F q}\int_{-1}^{+1}\delta\left(x-\frac{c}{v_F}\right)dx = \frac{1}{v_F q}$$

$$0<\frac{c}{v_F}<1 \quad \left(\begin{array}{c} c\sim 10^6\ \text{см/с} \\ v_F\sim 10^8\ \text{см/с} \\ c\ll v_F\end{array}\right)$$

То получаем

$$\rho = \frac{\nu(\varepsilon_F)}{n^2e^2V}\int \frac{2\pi q^2 dq}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{1}{v_F q}\,\frac{w(q)\,q^2}{e^{\frac{cq}{T}}-1}$$

Вспоминаем теперь, что $w(q) = w\cdot|\vec{q}|$. Тогда,

$$\rho = \frac{\nu(\varepsilon_F)}{n^2e^2V}\,\frac{w}{v_F}\,\frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{q_D}\frac{q^4 dq}{e^{\frac{cq}{T}}-1}$$

Вводим

$$x = \frac{cq}{T}$$

Тогда,

$$q = \frac{T}{c}x\,,\quad dq = \frac{T}{c}dx$$

Отсюда,

$$\rho = \frac{\nu(\varepsilon_F)}{n^2 e^2 V} \frac{w}{v_F} \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{T}{c}\right)^5 \int_0^{\frac{cq_D}{T}} \frac{x^4 dx}{e^x - 1} \qquad (4)$$

Т. к. $\frac{cq_D}{T} = \frac{\hbar\omega_D}{T} = \frac{\Theta_D}{T} \gg 1$, то

$$\rho = \frac{\nu(\varepsilon_F)}{n^2 e^2 V} \frac{w}{v_F} \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{T}{c}\right)^5 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{e^x - 1}}_{K_4 \approx 25}$$

Итак,

$$\rho \sim T^5 \quad (\text{з-кон Блоха – Грюнайзена})$$

Отметим, что ф-лой (4) можно пользоваться и для высоких температур. В этом случае $\frac{\Theta_D}{T} \ll 1$ и

$$\int_0^{\frac{\hbar c q_D}{T}} \frac{x^4 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^4 dx}{e^x - 1} \approx \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^4 dx}{x} = \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} x^3 dx = \left(\frac{\Theta_D}{T}\right)^4$$

$\Rightarrow \rho \sim T$ при $T \gg \Theta_D$

При низких тем-рах становится существенным рассеяние на примесях

$$\rho(T \to 0) = \rho_{imp}$$