Методы оптимизации. Семинар 8. Разные конусы.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

28 июня 2018 г.

Напоминание

- Субдифференциал
- Условный субдифференциал
- Нормальный конус

Конус возможных направлений

Определение

Конусом возможных направлений для множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}_0 \in G$ будем называть такое множество $\Gamma(\mathbf{x}_0|G) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{s} \in G,\ 0 \leq \alpha \leq \overline{\alpha}(\mathbf{s})\}$, где $\overline{\alpha}(\mathbf{s}) > 0$.

Определение для выпуклого множества

Конусом возможных направлений для *выпуклого* множества $X \subset \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}_0 \in X$ будем называть такое множество
$\Gamma(\mathbf{x}_0|X) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{s} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),\ \lambda > 0, \forall \mathbf{x} \in X\}$.

Какая связь между нормальным конусом и конусом возможных направлений?

Пример

Полезный факт

Пусть $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = \overline{0, n-1};\ \varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i = 0,\ i = \overline{n, m}\}$. Тогда если $\varphi_i(\mathbf{x})$ выпуклы и множество G регулярно, то

$$\Gamma(\mathbf{x}_0|G) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n | \nabla\varphi_i(\mathbf{x}_0)^\mathsf{T}\mathbf{s} \leq 0, i \in I, \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{s} = 0, i = \overline{n, m}\}$$

и

$$\Gamma^*(\mathbf{x}_0|G) = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \middle| \mathbf{p} = \sum_{i=n}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i - \sum_{i \in I} \mu_i \nabla\varphi_i(\mathbf{x}_0)\right\},$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\mu_i \geq 0$, $\mathbf{x}_0 \in G$ и $I = \{i : \varphi_i(\mathbf{x}_0) = 0,\ i = \overline{0, n-1}\}$.

Найти $\Gamma(\mathbf{x}_0|X)$ и $\Gamma^*(\mathbf{x}_0|X)$ следующих множества:
$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + 2x_2^2 \leq 3,\ x_1 + x_2 = 0\}$.

Касательный конус

Определение

Касательным конусом к множеству G в точке $\mathbf{x}_0 \in \overline{G}$ называется следующее множество $T(\mathbf{x}_0|G) = \{\lambda \mathbf{z} | \lambda > 0, \ \exists \{\mathbf{x}_k\} \subset G, \ \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0, \ \lim\limits_{k \to \infty} \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|_2} = \mathbf{z}\}$

Пояснение

Касательный конус состоит из всех направлений, по которым можно сходиться к точке $\mathbf{x}_0$ по последовательностям из множества G.

Лемма

Если G — выпуклое множество, то $T(\mathbf{x}_0|G) = \Gamma(\mathbf{x}_0|G)$.

Полезный факт

Пусть множество
$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \overline{0, n-1}\ \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, i = \overline{n, m}\}$
регулярно, тогда
$T(\mathbf{x}_0|G) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n | \nabla\varphi_i^\top(\mathbf{x}_0)\mathbf{z} \leq 0, i \in I,\ \nabla\varphi_i^\top(\mathbf{x}_0)\mathbf{z} = 0, i = \overline{n, m}\}$
и

$$T^*(\mathbf{x}_0|G) = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \middle| \mathbf{p} = \sum_{i=n}^{m} \lambda_i \nabla\varphi_i(\mathbf{x}_0) - \sum_{i \in I} \mu_i \nabla\varphi_i(\mathbf{x}_0)\right\},$$

где $\mu_i \geq 0,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ I = \{i | \varphi_i(\mathbf{x}_0) = 0, i = \overline{0, n-1}\}$
Пример: найти $T(\mathbf{x}_0|G)$ и $T^*(\mathbf{x}_0|G)$ для множества
$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1^2 + 2x_2^2 = 1\}$

Острый экстремум

Определение

Точка $\mathbf{x}^*$ — точка острого минимума функции f на множестве G, если существует $\gamma > 0$:
$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2, \ \forall x \in G$.

Лемма

Пусть f — дифференцируемая функция на $G \subset \mathbb{R}^n$. Точка $\mathbf{x}^*$ — точка острого минимума функции f на множестве G тогда и только тогда, когда существует такое $\alpha > 0$, что
$\nabla f^\top(\mathbf{x}^*)\mathbf{z} \geq \alpha > 0, \ \mathbf{z} \in T(\mathbf{x}^* | G), \|\mathbf{z}\|_2 = 1$.

Примеры

- $x_1^2 + x_2^2 \to \mathrm{extr}_G, \ G = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + 2x_2^2 = 2, \ x_1 + x_2 \leq 1\}$
- $x_1 + 2x_2 \to \mathrm{extr}_G$

Резюме

- Конус возможных направлений
- Касательный конус
- Острый экстремум