№4 $\boxed{Д/З\ 1}$

$\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ возр и вып; $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ выпук $g(x)=\varphi(f(x))$ - вып f и g дважды диф

1. $f(x)\to\min$ (1)

$\overset{?}{\Leftrightarrow}$

$g(x)\to\min$ (2)

По следствию из теоремы Ферма в субдиф (f - вып и диф в т x_0 тогда x_0 min $\Longleftrightarrow f'(x_0)=0$

$g'(x)=\underbrace{\varphi'(f)}_{>0\uparrow \text{ по услов}} f'(x) \Rightarrow g'=0 \Leftrightarrow f'=0 \Rightarrow$ Задачи эквивалентны.

2.

• Градиентный метод

$x_{k+1}=x_k-\overbrace{\alpha_k\nabla f(x_k)}^{h_k}$ для f

$\tilde{x}_{k+1}=\tilde{x}_k-\underbrace{\tilde{\alpha}_k\varphi'(f)\nabla f(\tilde{x}_k)}_{\tilde{h}_k}$ для g

$h_k, \tilde{h}_k$ - направление град метода для двух задач

Наискорейший спуск: $\alpha_k=\arg\min\limits_{\alpha\geq0}[f(x_k-\alpha\nabla f(x_k))]$

Так ищем $\min f(x)$ (чтоб $f'(\tilde{x}_k)=0 \Rightarrow \min e(\tilde{x}_k)$

$\tilde{\alpha}_k=\arg\min\limits_{\alpha\geq0}[f(\tilde{x}-\alpha\varphi'(f)\nabla f(\tilde{x})]$

Отсюда логично следует, что $\tilde{\alpha}_k=\dfrac{\alpha_k}{\varphi'(f)}$

и делаем одинаковый итерационный процесс, т.е (при одинаковом Н.У) совпадают методы

• Метод Ньютона

$$x_{k+1}=x_k-[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}\nabla f(x_k)$$

$\nabla g(x)=\varphi'(f)\nabla f(x)$

$\nabla(\varphi'_f(f(x))\nabla f(x))=\varphi''(\nabla f(x))^2+\varphi'(f)\nabla^2 f(x)=\nabla^2 g$

Второй dif не инвариантен

$\tilde{x}_{k+1}=\tilde{x}_k-[\varphi''(f)(\nabla f(\tilde{x}_k))^2+\varphi'(f)\nabla^2 f(\tilde{x}_k)]\cdot\varphi'(f)\nabla f(\tilde{x}_k)$

т.е. методы для $f(x)$ и $g(x)$ отличаются

Пример $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ $\quad \varphi(f) = e^f$ $\quad \nabla f = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= \|x\|^2_{R_2}$ $\quad \varphi' = e^f$

- $f \to \min$ наискорейшим спуском $\quad \nabla g = 2e^{x_1^2+x_2^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) = \begin{pmatrix} x_{k_1} - \alpha_k 2x_{k_1} \\ x_{k_2} - \alpha_k 2 x_{k_2} \end{pmatrix}$ $\quad \alpha_k = \underset{\alpha > 0}{\operatorname{argmin}} \|\bar{x} - 2\alpha\bar{x}\|^2$

$= \operatorname{argmin} \|x\|^2 (1-2\alpha)^2$

— сходится за 1 шаг (кв. ф-ия) $\quad \boxed{\alpha_k = \frac{1}{2} - \text{точн}}$

- $g \to \min$

$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k - \tilde{\alpha}_k \varphi'(f) \nabla f(x_k) = \tilde{x}_k - \tilde{\alpha}_k e^f 2\tilde{x}_k = \tilde{x}_k(1 - 2\alpha e^{f(\tilde{x}_k)})$

$\alpha_k = \underset{\alpha > 0}{\operatorname{argmin}} \left[\|x\|^2_2 (1 - 2\alpha e^{f(\tilde{x}_k)})^2 \right]$

$2(1 - 2\alpha e^{f(\tilde{x}_k)}) \cdot 2\alpha e^{f(x_k)} \cdot 2x$ $\quad \cancel{\alpha = 1/2e^f}$

тогда получаем то же. Сходится за 1 шаг. $\quad$ то $\alpha = \frac{1}{2e^f}$

Ньютон $f(x_1) = x_1^2 = x^2$ $\quad$ // R^1 для простоты $\quad \nabla f = 2x$

$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2} 2x_k = 0$ $\quad \nabla^2 f = 2$ $\quad \varphi = e^f$

$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k - \frac{1}{e^{x^2}[2 + 4\tilde{x}_k^2]} e^{x^2} \cdot 2\tilde{x} = \frac{2\tilde{x}_k - 2\tilde{x}_k + 4\tilde{x}_k^3}{2 + 4x_k^2} \neq$ $\quad \varphi'' = e^{x^2} \ldots$

$\neq 0$ Отличается, уже не сходится за 1 шаг $\quad \nabla^2 g = e^{x^2} 4x^2 + e^{x^2} \cdot 2$