2. ЗАДАНИЕ 2

2.19. (C) а) Решить уравнение Линдблада для эволюции матрицы плотности двухуровневой системы, где релаксационный член описывает потери на спонтанную эмиссию (естественная ширина спектральной линии). б) Пусть теперь релаксационный член описывает дефазировку, что изменится в решении, какая фаза сбивается? с) Рассмотреть некогерентную накачку в качестве линдбладиана. д) Рассмотреть задачу (а), но с дополнительными членами в уравнении Линдблада, соответствующими когерентной накачке. Вывести уравнения Блоха. (*) Найти форму спектральной линии. Что такое молловский триплет? е)* Вывести уравнение Максвелла-Блоха для одномодового лазера из уравнений Линдблада. Обсудить условия лазерной генерации. (+1 балл за работу в семестре)

Решение.

Уравнение Линдблада.

Уравнение для матрицы плотности в виде квантового уравнения Лиувилля (уравнения фон Неймана) $i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H},\hat{\rho}]$ является как мощным инструментом исследования функции распределения, так и источником противоречий. Убедимся в том, что согласно ему энтропия замкнутой квантовой системы $S = -\mathrm{Sp}\{\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\}$ сохраняется. Прямым дифференцированием получаем $-\dot{S} = \mathrm{Sp}\{\dot{\hat{\rho}}\ln\hat{\rho}\} + \mathrm{Sp}\,\dot{\hat{\rho}}$. Подставляя в первое слагаемое $\dot{\hat{\rho}}$ из уравнения фон Неймана $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}]$ и используя циклическую перестановку под знаком следа, получаем $\mathrm{Sp}\{\hat{H}\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\} - \mathrm{Sp}\{\hat{\rho}\hat{H}\ln\hat{\rho}\} = 0$. Второе слагаемое также равно нулю из-за нормировки матрицы плотности условием $\mathrm{Sp}\,\hat{\rho} = 1$. Таким образом, энтропия замкнутой системы не возрастает, $dS/dt = 0$, и она не сможет прийти к равновесию. Выход из этого противоречия заключается в том, чтобы учесть, что замкнутых систем не бывает и рассмотреть открытую систему. Открытая квантовая система взаимодействует с окружением (резервуаром). Динамика открытой квантовой системы неэрмитова и описывается уравнением Линдблада:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H},\hat{\rho}] + \hat{\mathscr{L}}\hat{\rho}.$$

Это уравнение описывает релаксацию системы к равновесному гиббсовскому состоянию. Конкретный вид релаксационного оператора Линдблада $\hat{\mathscr{L}}$ зависит от характера взаимодействия системы и резервуара. В отличие от уравнения фон Неймана, описывающего эрмитову динамику, уравнение Линдблада совместимо с началами термодинамики. Оно позволяет объяснить релаксацию к распределению Гиббса $\exp\{(F-\hat{H})/T\}$, второе начало термодинамики (закон возрастания энтропии) и т. д.

Мы не будем останавливаться на строгом выводе этого уравнения, а дадим лишь качественные соображения, на основе которых оно может быть получено. Для того, чтобы описать релаксацию открытой квантовой системы, воспользуемся золотым правилом Ферми. Оно позволяет вычислить вероятность перехода из состояния дискретного спектра в состояние непрерывного спектра.

Пусть в начальный момент времени открытая система S находилась в одном из возбужденных состояний $|S_i\rangle$, а резервуар R находился в равновесном состоянии. Резервуар так велик, что содержит континуум мод и его спектр непрерывен. Взаимодействие между системой и резервуаром имеет вид: $\hat{H}_{SR} = \lambda \hat{S}\hat{R}$, где λ – размерный параметр, а операторы $\hat{S}$ и $\hat{R}$ описывают систему и резервуар соответственно. Тогда вероятность перехода из начального состояния системы и резервуара $|S_i, R_i\rangle$ с энергией системы E_i в конечное состояние $|S_f, R_f\rangle$ с энергией системы E_f и числом конечных состояний резервуара в интервале от ν_f до $\nu_f + d\nu_f$ дается выражением

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle S_f, R_f|\hat{H}_{SR}|S_i, R_i\rangle\right|^2 \delta(E_i - E_f - \hbar\omega_{if})d\nu_f.$$

Мы считаем, что квант возбуждения системы $\hbar\omega_{if} = E_i - E_f$ перешел в резервуар. Если теперь просуммировать по всем возможным конечным состояниям резервуара, которые имеют энергию $\hbar\omega_{if}$, то мы получим полную вероятность перехода в единицу времени системы из состояния $|S_i\rangle$ в состояние $|S_f\rangle$ вне зависимости от конечного состояния резервуара. Без ограничения общности эта полная скорость перехода w_{fi} может быть представлена в виде $w_{fi} = \gamma_{if}|\langle f|\hat{S}|i\rangle|^2 \equiv \gamma_{if}|S_{fi}|^2$, где мы в явном виде выделили матричный элемент перехода одной только системы из состояния $|S_i\rangle$ в состояние $|S_f\rangle$. Вся информация о резервуаре после усреднения по его степеням свободы содержится в γ_{if}.

По своему определению, величина вероятности перехода в единицу времени означает, что диагональный элемент матрицы плотности ρ_{ii} заселения состояния $|S_i\rangle$ меняется по закону $\dot{\rho}_{ii} = -\gamma_{if}|\langle f|\hat{S}|i\rangle|^2\rho_{ii}$. В то же время, вероятность заселенности ρ_{ff} состояния $|S_f\rangle$ будет меняться как $\dot{\rho}_{ff} = \gamma_{if}|\langle f|\hat{S}|i\rangle|^2\rho_{ii}$, поскольку суммарная вероятность должна сохраняться.

Полученный результат очевидным образом обобщается на динамику вероятностей заселенностей всех собственных состояний системы $|k\rangle$, когда их больше двух. Собственные состояния определяются из уравнения Шредингера $\hat{H}_S|k\rangle = E_k|k\rangle$. Результирующая система уравнений имеет вид

$$\dot{\rho}_{k_1k_1} = -\rho_{k_1k_1}\sum_{k_2=1}^{N}\gamma_{k_1k_2}|S_{k_1k_2}|^2 + \sum_{k_2=1}^{N}\rho_{k_2k_2}\gamma_{k_2k_1}|S_{k_2k_1}|^2, \quad \left[\sum_{k_1=1}^{N}\dot{\rho}_{k_1k_1} = \frac{d}{dt}\sum_{k_1=1}^{N}\rho_{k_1k_1} = 0\right]$$

где учтены переходы между всеми собственными состояниями. Полученная система уравнений называется уравнениями Паули. Они описывают динамику диагональных элементов матрицы плотности.

Какова будет динамика недиагональных элементов матрицы плотности? Строгое рассмотрение показывает, что любой процесс перехода из одного собственного состояния в другое сопровождается затуханием недиагональных элементов. При релаксации к равновесию каждый недиагональный элемент эволюционирует как $\dot{\rho}_{fi} =$

$= -\frac{1}{2}(\gamma_{fi}|\langle f|\hat{S}|i\rangle|^2 + \gamma_{if}|\langle i|\hat{S}|f\rangle|^2)\rho_{fi}$. Если учесть переходы из каждого состояния в каждое, то получаем

$$\dot{\rho}_{k_1k_2} = -\frac{1}{2}\sum_{k'}(\gamma_{k'k_1}|S_{k'k_1}|^2 + \gamma_{k'k_2}|S_{k'k_2}|^2)\rho_{k_1k_2}.$$

Два уравнения для диагональных и недиагональных элементов можно переписать в виде одного уравнения на матрицу плотности открытой системы:

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}] + \sum_k \frac{\gamma_k}{2}(2\hat{S}_k\hat{\rho}\hat{S}_k^+ - \hat{S}_k^+\hat{S}_k\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{S}_k^+\hat{S}_k),$$

где суммирование ведется по всевозможным парам собственных состояний $k = \{k_1, k_2\}$.

Такое уравнение называется *уравнением Линдблада.* Его более строгий вывод показывает, что оно справедливо только при выполнении двух приближений: *борновского и марковского.* Борновское приближение означает, что система не меняет состояние резервуара. Марковское приближение означает, что мы можем описывать динамику системы локальным по времени уравнением. Уравнение Линдблада является модельным и приближенным. Его достоинством является то, что оно позволяет описать релаксацию открытой системы к равновесию и совместимо с началами термодинамики. Его стандартный вид следующий:

$$\frac{\partial\hat{\rho}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}] + \frac{1}{2}\sum_k\left(\left[\hat{L}_k\hat{\rho},\hat{L}_k^+\right] + \left[\hat{L}_k,\hat{\rho}\hat{L}_k^+\right]\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{i\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}] + \frac{1}{2}\sum_k\left(2\hat{L}_k\hat{\rho}\hat{L}_k^+ - \hat{L}_k^+\hat{L}_k\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{L}_k^+\hat{L}_k\right),$$

где $\hat{L}_k$ – операторы Линдблада. Уравнение Линдблада является наиболее общим уравнением, описывающим неунитарную эволюцию матрицы плотности открытой квантовой подсистемы. Его еще называют квантовым марковским уравнением.

Спонтанное излучение атома в свободном пространстве и некогерентная накачка.

Рассмотрим атом как двухуровневую систему (ДУС). В нашем случае роль резервуара выполняет континуум мод электромагнитного поля свободного пространства. Гамильтониан ДУС с основным состоянием $|g\rangle$ с нулевой энергией и возбужденным состоянием $|e\rangle$ с энергией $\hbar\omega_0$ можно представить в виде $\hat{H}_S = \hbar\omega_0\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}$, где оператор $\hat{\sigma}$ – понижающий оператор, $\hat{\sigma}|e\rangle = |g\rangle$, а оператор $\hat{\sigma}^+$ – повышающий оператор, $\hat{\sigma}^+|g\rangle = |e\rangle$.

Используя в качестве операторов Линдблада $\hat{L}_k$ операторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}^+$, можно получить следующее уравнение Линдблада для матрицы плотности ДУС:

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_S,\hat{\rho}] + \gamma_{\text{diss}}(1+N_{\omega_0})\Big(\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma}^+ - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}\Big) +$$

$$+ \gamma_{\text{diss}}N_{\omega_0}\Big(\hat{\sigma}^+\hat{\rho}\hat{\sigma} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}\hat{\sigma}^+\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\sigma}^+\Big),$$

где $\gamma_{\text{diss}} = 4\omega_0^3|\mathbf{d}_{eg}|^2/(3\hbar c^3)$ и $N_\omega = (\exp(\hbar\omega/T) - 1)^{-1}$.

Запишем это уравнение в базисе собственных состояний гамильтониана ДУС: $|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{pmatrix}$. Проводя несложные матричные вычисления, получаем уравнения для диагональных и недиагональных элементов матрицы плотности ДУС:

$$\frac{\partial \rho_{ee}}{\partial t} = -\gamma_{\text{diss}}(N_{\omega_0}+1)\rho_{ee} + \gamma_{\text{diss}} N_{\omega_0}\rho_{gg}, \quad \frac{\partial \rho_{eg}}{\partial t} = -i\omega_0\rho_{eg} - \frac{\gamma_{\text{diss}}(2N_{\omega_0}+1)\rho_{eg}}{2},$$
$$\frac{\partial \rho_{ge}}{\partial t} = i\omega_0\rho_{ge} - \frac{\gamma_{\text{diss}}(2N_{\omega_0}+1)\rho_{ge}}{2}, \quad \frac{\partial \rho_{gg}}{\partial t} = -\gamma_{\text{diss}} N_{\omega_0}\rho_{gg} + \gamma_{\text{diss}}(N_{\omega_0}+1)\rho_{ee}.$$

Для диагональных элементов мы получили по существу кинетические уравнения, которые сохраняют полную вероятность $\rho_{ee} + \rho_{gg} = \text{const} = 1$, то есть след матрицы плотности сохраняется во все моменты времени. Величины γ_{diss} и $\gamma_{\text{diss}} N_{\omega_0}$ являются аналогами коэффициентов Эйнштейна, относящихся к спонтанному и индуцированному переходам соответственно. Видно, что в релаксацию вносят вклад как спонтанные, так и индуцированные процессы в то время как в накачку – только индуцированные переходы. Таким образом, слагаемое, пропорциональное $\gamma_{\text{diss}}(N_{\omega_0}+1)$, описывает релаксацию энергии в резервуар за счёт как спонтанных, так и индуцированных процессов, а пропорциональное $\gamma_{\text{diss}} N_{\omega_0}$ описывает накачку системы резервуаром только за счёт индуцированных процессов. Решения уравнений для диагональных элементов с учетом их нормировки имеют простой вид:

$$\rho_{ee}(t) = \frac{N_{\omega_0}}{2N_{\omega_0}+1} - Ce^{-\gamma_{\text{diss}}(2N_{\omega_0}+1)t}, \quad \rho_{gg}(t) = \frac{N_{\omega_0}+1}{2N_{\omega_0}+1} + Ce^{-\gamma_{\text{diss}}(2N_{\omega_0}+1)t},$$

где $C = \frac{N_{\omega_0}}{2N_{\omega_0}+1} - \rho_{ee}(0) \equiv \rho_{gg}(0) - \frac{N_{\omega_0}+1}{2N_{\omega_0}+1}$. Проиллюстрируем выполнение начал термодинамики. У системы не существует интеграла движения, то есть оператора, который коммутирует одновременно с гамильтонианом $\hat{H}_S$ и оператором взаимодействия системы с резервуаром. Поэтому стационарным решением системы уравнений является распределение Гиббса:

$$\rho_{ee} = \frac{N_{\omega_0}}{2N_{\omega_0}+1}, \quad \rho_{gg} = \frac{N_{\omega_0}+1}{2N_{\omega_0}+1}, \quad \frac{\rho_{ee}}{\rho_{gg}} = \frac{N_{\omega_0}}{N_{\omega_0}+1} = \exp\Big(-\frac{\hbar\omega_0}{T}\Big).$$

Недиагональные элементы эволюционируют следующим образом:

$$\rho_{ge}(t) = \rho_{ge}(0)e^{i\omega_0 t}e^{-(\gamma_{\text{diss}}(2N_{\omega_0}+1)/2)t}, \quad \rho_{eg}(t) = \rho_{ge}(0)e^{-i\omega_0 t}e^{-(\gamma_{\text{diss}}(2N_{\omega_0}+1)/2)t},$$

то есть экспоненциально затухают. Отметим, что иногда скорость релаксации энергии (диагональных элементов) называют скоростью продольной релаксации, а скорость затухания дипольного момента (недиагональных элементов) – скоростью поперечной релаксации. Для рассматриваемого резервуара скорость продольной релаксации $\gamma_{\shortparallel} = \gamma_{\text{diss}}(2N_{\omega_0}+1)$, а скорость поперечной релаксации $\gamma_{\perp} = \gamma_{\text{diss}}(2N_{\omega_0}+1)/2$. Отметим, что для рассматриваемого резервуара скорости поперечной и продольной релаксации относятся как один к двум.

Можно отметить, что для оптических переходов при комнатной температуре уравнение Линдблада может быть упрощено. Так как энергия оптического кванта много больше комнатной температуры, то можно считать, что температура резервуара равна нулю. Как следствие, $N_{\omega_0} = 0$ и имеют место только спонтанные процессы, отвечающие за релаксацию. Уравнение Линдблада упрощается до

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + \gamma_{\text{diss}}\Big(\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma}^+ - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}\Big).$$

Таким образом, даже в отсутствие квантов возбуждения в резервуаре релаксация возбужденной системы (в данном случае двухуровневого атома) всё равно происходит. Это связано с наличием нулевых колебаний энергии резервуара даже тогда, когда он находится при нулевой температуре. В этом случае скорость продольной релаксации равна $\gamma_{\shortparallel} = \gamma_{\text{diss}}$, а скорость поперечной релаксации $\gamma_{\perp} = \gamma_{\text{diss}}/2$.

Релаксация двухуровневого атома в дефазирующий резервуар.

Ранее был рассмотрен пример гамильтониана взаимодействия с резервуаром, когда происходит релаксация энергии системы. Однако в некоторых системах могут иметь место процессы, которые приводят только к сбою фазы системы но не меняют её энергию. Такие процессы называют дефазировкой, или декогеренцией. Скорость дефазировки может на несколько порядков превосходить скорость диссипации энергии. Ниже приведен простейший пример резервуара, который приводит к сбою фазы системы, но не меняет её энергию. Рассмотрим резервуар из гармонических осцилляторов с гамильтонианом $\hat{H}_R = \hbar\sum_k \omega_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k$. Примем, что гамильтониан двухуровневой системы имеет обычный вид, а взаимодействие ДУС с таким резервуаром описывается гамильтонианом $\hat{H}_{SR} = \hbar\sum_k \gamma_k \hat{\sigma}_z(\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k) \equiv \hbar\lambda\hat{S}\hat{R}$, где $\hat{S} \equiv \hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $\hat{R} = \sum_k(\gamma_k/\lambda)(\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k)$. Этот гамильтониан описывает процесс поглощения и испускания кванта возбуждения резервуара таким образом, что энергия системы не меняется. Иными словами, он описывает процесс упругого рассеяния возбуждения резервуара на системе.

Используя в качестве оператора Линдблада $\hat{L}_k$ оператор $\hat{\sigma}_z$, получаем уравнение Линдблада:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + \frac{\gamma_{\text{deph}}}{2}\Big(\hat{\sigma}_z\hat{\rho}\,\hat{\sigma}_z - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_z\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\,\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_z\Big) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + \frac{\gamma_{\text{deph}}}{2}(\hat{\sigma}_z\hat{\rho}\,\hat{\sigma}_z - \hat{\rho}),$$

поскольку $\hat{\sigma}_z^2 = \hat{I}$. Отметим, что для подавляющего большинства оптических систем имеет место существенное превышение скорости дефазировки над скоростью релаксации энергии (в реальных системах это отношение может достигать пяти порядков). Для компонент матрицы плотности уравнения запишутся так:

$$\frac{\partial \rho_{ee}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho_{gg}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho_{eg}}{\partial t} = -i\omega_0\rho_{eg} - \gamma_{\text{deph}}\rho_{eg}, \quad \frac{\partial \rho_{ge}}{\partial t} = i\omega_0\rho_{ge} - \gamma_{\text{deph}}\rho_{ge},$$

Отметим как важное свойство этих уравнений, что нет связи между диагональными элементами матрицы плотности. Это и означает, что энергия системы остаётся постоянной, $\langle\hat{\sigma}_z\rangle \equiv \mathrm{Sp}(\hat{\sigma}_z\hat{\rho}) = \rho_{ee} - \rho_{gg} = \text{const} = \langle\hat{\sigma}_z(0)\rangle$. Недиагональные же элементы матрицы плотности затухают экспоненциально. Стационарной матрицей плотности будет $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(0) & 0 \\ 0 & \rho_{gg}(0) \end{pmatrix}$. Таким образом, дефазирующий резервуар приводит к занулению недиагональных матричных элементов, при сохранении диагональных. Поэтому такой процесс называют и процессом дефазировки (есть только поперечная релаксация, но нет продольной). Естественно, что в реальных системах присутствуют сразу оба вида релаксации, поэтому рассмотрение только одного дефазирующего резервуара всегда является приближением.

Уравнения Блоха и их обобщения.

Рассмотрим динамику ДУС, взаимодействующей с классической монохроматической электромагнитной волной. Впервые решение задачи о стационарном состоянии ДУС во внешнем монохроматическом поле было получено при помощи феноменологических *оптических уравнений* Блоха

$$\frac{d\langle\hat{\sigma}\rangle}{dt} = -i\omega_0\langle\hat{\sigma}\rangle - \frac{i}{2}\Omega e^{-i\omega t}\langle\hat{\sigma}_z\rangle - \gamma_\perp\langle\hat{\sigma}\rangle, \quad \frac{d\langle\hat{\sigma}^+\rangle}{dt} = i\omega_0\langle\hat{\sigma}^+\rangle + \frac{i}{2}\Omega e^{i\omega t}\langle\hat{\sigma}_z\rangle - \gamma_\perp\langle\hat{\sigma}^+\rangle,$$
$$\frac{d\langle\hat{\sigma}_z\rangle}{dt} = i\Omega\{\langle\hat{\sigma}^+\rangle e^{-i\omega t} - \langle\hat{\sigma}\rangle e^{i\omega t}\} - \gamma_{\shortparallel}(\langle\hat{\sigma}_z\rangle + 1),$$

где $\langle\ldots\rangle$ есть среднее значение операторов, ω – частота внешней монохроматической волны, $\Omega = (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{eg})/\hbar$ – частота Раби, которая определяет взаимодействие ДУС с внешним переменным электрическим полем с амплитудой $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{d}_{eg}$ – матричный элемент дипольного перехода ДУС, $\gamma_{\shortparallel}$ – скорость продольной релаксации и $\gamma_\perp$ – скорость поперечной релаксации, феноменологически введенные для описания процессов релаксаци в ДУС. В наших прежних обозначениях, $\langle\hat{\sigma}\rangle \equiv \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{\sigma}) = \rho_{eg}$, $\langle\hat{\sigma}^+\rangle \equiv \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{\sigma}^+) = \rho_{ge}$, $\langle\hat{\sigma}_z\rangle \equiv \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_z) = \rho_{ee} - \rho_{gg}$.

Применим уравнения Линдблада для вывода (обоснования) уравнений Блоха. Наличие внешней монохроматической волны учтем добавлением дополнительного члена в гамильтониан ДУС, который описывает дипольное взаимодействие ДУС с внешним полем: $\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{E}(t) = -\mathbf{d}_{eg}(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^+)\mathbf{E}_0\cos\omega t = -\mathbf{d}_{eg}(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^+)\mathbf{E}_0(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})/2$. *В приближении вращающейся волны* он превратится в $\hat{V} = -\frac{\mathbf{d}_{eg}\mathbf{E}_0}{2}(\hat{\sigma}^+e^{-i\omega t} + \hat{\sigma}e^{i\omega t}) = -\frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{\sigma}^+e^{-i\omega t} + \hat{\sigma}e^{i\omega t})$, вклад взаимодействия в гамильтониан $\hat{H}_S$, который описывает дипольное взаимодействие ДУС с внешним полем. В итоге получается гамильтониан системы $\hat{H}_S(t) = \hbar\omega_0\hat{\sigma}^+\hat{\sigma} - \frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{\sigma}^+e^{-i\omega t} + \hat{\sigma}e^{i\omega t})$ и феноменологическое уравнение Линдблада

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + \gamma_{\mathrm{diss}}(1 + N_{\omega_0})\Big(\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma}^+ - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}\Big) +$$
$$+ (\gamma_{\mathrm{diss}}N_{\omega_0} + \gamma_{\mathrm{pump}})\Big(\hat{\sigma}^+\hat{\rho}\hat{\sigma} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}\hat{\sigma}^+\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\sigma}^+\Big) + \frac{\gamma_{\mathrm{deph}}}{2}(\hat{\sigma}_z\hat{\rho}\,\hat{\sigma}_z - \hat{\rho}),$$

где γ_{diss} и γ_{deph} – скорости диссипации и дефазировки соответственно, введённые ранее, а также добавлена γ_{pump}, которую называют скоростью некогерентной накачки ДУС каким-то внешним полем. В результате мы получим уравнения для компонент матрицы плотности, которые обобщают уравнения, полученные нами ранее:

$$\frac{\partial\rho_{ee}}{\partial t} = \frac{i}{2}\Omega(e^{-i\omega t}\rho_{ge} - e^{i\omega t}\rho_{eg}) - \gamma_{\mathrm{diss}}(N_{\omega_0} + 1)\rho_{ee} + (\gamma_{\mathrm{diss}}N_{\omega_0} + \gamma_{\mathrm{pump}})\rho_{gg},$$
$$\frac{\partial\rho_{eg}}{\partial t} = -\frac{i}{2}\Omega e^{-i\omega t}(\rho_{ee} - \rho_{gg}) - i\omega_0\rho_{eg} - \frac{\{\gamma_{\mathrm{diss}}(2N_{\omega_0} + 1) + \gamma_{\mathrm{pump}}\}\rho_{eg}}{2} - \gamma_{\mathrm{deph}}\rho_{eg},$$
$$\frac{\partial\rho_{ge}}{\partial t} = \frac{i}{2}\Omega e^{i\omega t}(\rho_{ee} - \rho_{gg}) + i\omega_0\rho_{ge} - \frac{\{\gamma_{\mathrm{diss}}(2N_{\omega_0} + 1) + \gamma_{\mathrm{pump}}\}\rho_{ge}}{2} - \gamma_{\mathrm{deph}}\rho_{ge},$$
$$\frac{\partial\rho_{gg}}{\partial t} = -\frac{i}{2}\Omega(e^{-i\omega t}\rho_{ge} - e^{i\omega t}\rho_{eg}) - (\gamma_{\mathrm{diss}}N_{\omega_0} + \gamma_{\mathrm{pump}})\rho_{gg} + \gamma_{\mathrm{diss}}(N_{\omega_0} + 1)\rho_{ee}.$$

Видно, что уравнения для недиагональных компонент в точности совпадут с соответствующими уравнениями Блоха, если принять $\gamma_\perp = \frac{\gamma_{\rm diss}(2N_{\omega_0}+1)+\gamma_{\rm pump}}{2} + \gamma_{\rm deph}$. В то же время соответствующее уравнение для разностей населенностей верхнего и нижнего уровней $\langle\hat\sigma_z\rangle = \rho_{ee} - \rho_{gg}$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\langle\hat\sigma_z\rangle}{\partial t} &= i\Omega(e^{-i\omega t}\rho_{ge} - e^{i\omega t}\rho_{eg}) - 2\gamma_{\rm diss}(N_{\omega_0}+1)\rho_{ee} + 2(\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm pump})\rho_{gg} = \\ &= i\Omega(e^{-i\omega t}\rho_{ge} - e^{i\omega t}\rho_{eg}) - (2\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump})\langle\hat\sigma_z\rangle - \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump},\end{aligned}$$

и совпадение с соответствующим вышеприведенным уравнением Блоха будет лишь в том случае, если $N_{\omega_0} = 0$ и $\gamma_{\rm pump} = 0$, и тогда $\gamma_{\shortparallel} = \gamma_{\rm diss}$.

Отметим одну важную особенность введенной некогерентной накачки. Пусть внешнее монохроматическое поле отсутствует: $\Omega = 0$. Тогда рассмотрим стационарное решение уравнений для диагональных элементов матрицы плотности, обобщающее полученное нами ранее:

$$\rho_{ee} - \rho_{gg} = \frac{\gamma_{\rm pump} - \gamma_{\rm diss}}{2\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump}}, \quad \rho_{ee} + \rho_{gg} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\rho_{ee} = \frac{\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm pump}}{2\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump}}, \ \rho_{gg} = \frac{\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss}}{2\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump}}, \ \frac{\rho_{ee}}{\rho_{gg}} = \frac{N_{\omega_0} + \frac{\gamma_{\rm pump}}{\gamma_{\rm diss}}}{N_{\omega_0}+1}.$$

Видно, что даже если $N_{\omega_0} = 0$, некогерентная накачка приводит к заселению верхнего уровня ДУС, а также в общем случае при $\gamma_{\rm pump} > \gamma_{\rm diss}$ имеет место инверсное заселение верхнего уровня, то есть $\rho_{ee} > \rho_{gg}$.

Теперь рассмотрим стационарное решение уравнений для матрицы плотности в присутствии когерентной монохроматической накачки, при $\Omega \neq 0$. Решение будем искать в виде $\rho_{eg}(t) = \tilde\rho_{eg}e^{-i\omega t}$, $\rho_{ge}(t) = \tilde\rho_{ge}e^{i\omega t}$, причем $\tilde\rho_{eg}$, $\tilde\rho_{ge}$, ρ_{ee} и ρ_{gg} будем считать независящими от времени. Тогда из уравнений для недиагональных элементов матрицы плотности легко находим, что $\tilde\rho_{eg} = \frac{\Omega(\rho_{ee}-\rho_{gg})}{2(\omega-\omega_0+i\gamma_\perp)}$, $\tilde\rho_{ge} = (\tilde\rho_{eg})^*$, где $\gamma_\perp$ была определена ранее. Из уравнения для $\langle\hat\sigma_z\rangle$ получаем, что $i\Omega(\tilde\rho_{ge} - \tilde\rho_{eg}) = = \gamma_{\rm diss} - \gamma_{\rm pump} + (2\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump})(\rho_{ee} - \rho_{gg})$, откуда мы находим, что

$$\rho_{ee} - \rho_{gg} = \frac{\gamma_{\rm pump} - \gamma_{\rm diss}}{2\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump} + \frac{\Omega^2\gamma_\perp}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma_\perp^2}}.$$

Учитывая это, а также то, что $\rho_{ee} + \rho_{gg} = 1$, окончательно находим, что

$$\rho_{ee} = \frac{\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm pump} + \frac{\Omega^2\gamma_\perp}{2[(\omega-\omega_0)^2+\gamma_\perp^2]}}{2\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump} + \frac{\Omega^2\gamma_\perp}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma_\perp^2}}, \ \rho_{gg} = \frac{\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \frac{\Omega^2\gamma_\perp}{2[(\omega-\omega_0)^2+\gamma_\perp^2]}}{2\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump} + \frac{\Omega^2\gamma_\perp}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma_\perp^2}},$$

$$\frac{\rho_{ee}}{\rho_{gg}} = \frac{N_{\omega_0} + \frac{\gamma_{\rm pump}}{\gamma_{\rm diss}} + \frac{\Omega^2\gamma_\perp/\gamma_{\rm diss}}{2[(\omega-\omega_0)^2+\gamma_\perp^2]}}{N_{\omega_0} + 1 + \frac{\Omega^2\gamma_\perp/\gamma_{\rm diss}}{2[(\omega-\omega_0)^2+\gamma_\perp^2]}}, \quad \tilde\rho_{eg} = \frac{(\gamma_{\rm pump} - \gamma_{\rm diss})\Omega/[2(\omega-\omega_0+i\gamma_\perp)]}{\left(2\gamma_{\rm diss}N_{\omega_0} + \gamma_{\rm diss} + \gamma_{\rm pump} + \frac{\Omega^2\gamma_\perp}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma_\perp^2}\right)}.$$

Из этого решения видно, что и в случае действия монохроматической электромагнитной волны на двухуровневую систему инверсная заселенность может быть только тогда, когда есть некогерентная накачка с $\gamma_{\rm pump} > \gamma_{\rm diss}$. С помощью только одной монохроматической волны в ДУС нельзя создать стационарную инверсную заселенность.

*Нестационарное решение уравнений Блоха. Спектр резонансной флюоресценции и триплет Моллоу.

Рассмотрим нестационарное (общее) решение уравнений для матрицы плотности в присутствии когерентной монохроматической накачки, при $\Omega \neq 0$. Решение будем искать в виде $\rho_{eg}(t) = \tilde{\rho}_{eg}(t)e^{-i\omega t}$, $\rho_{ge}(t) = \tilde{\rho}_{ge}(t)e^{i\omega t}$, то есть $\tilde{\rho}_{eg}$, $\tilde{\rho}_{ge}$, ρ_{ee} и ρ_{gg} будем считать зависящими от времени. Для них получим систему линейных уравнений

$$\frac{\partial \rho_{ee}}{\partial t} = \frac{i}{2}\Omega(\tilde{\rho}_{ge} - \tilde{\rho}_{eg}) - \gamma_{\shortparallel e}\rho_{ee} + \gamma_{\shortparallel g}\rho_{gg}, \qquad \frac{\partial \tilde{\rho}_{ge}}{\partial t} = \frac{i}{2}\Omega(\rho_{ee} - \rho_{gg}) - i(\omega-\omega_0)\tilde{\rho}_{ge} - \gamma_\perp\tilde{\rho}_{ge},$$
$$\frac{\partial \tilde{\rho}_{eg}}{\partial t} = -\frac{i}{2}\Omega(\rho_{ee} - \rho_{gg}) + i(\omega-\omega_0)\tilde{\rho}_{eg} - \gamma_\perp\tilde{\rho}_{eg}, \quad \frac{\partial \rho_{gg}}{\partial t} = -\frac{i}{2}\Omega(\tilde{\rho}_{ge} - \tilde{\rho}_{eg}) - \gamma_{\shortparallel g}\rho_{gg} + \gamma_{\shortparallel e}\rho_{ee},$$

где мы ещё для краткости обозначили $\gamma_{\shortparallel e} = \gamma_{\text{diss}}(N_{\omega_0} + 1)$ и $\gamma_{\shortparallel g} = (\gamma_{\text{diss}}N_{\omega_0} + \gamma_{\text{pump}})$. С обозначением отстройки $\Delta = \omega - \omega_0$ частоты поля от частоты ДУС, её характеристическое уравнение (полагая для всех компонент зависимость $\sim e^{-\lambda t}$) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda - \gamma_{\shortparallel e} & -i\Omega/2 & i\Omega/2 & \gamma_{\shortparallel g} \\ -i\Omega/2 & \lambda + i\Delta - \gamma_\perp & 0 & i\Omega/2 \\ i\Omega/2 & 0 & \lambda - i\Delta - \gamma_\perp & -i\Omega/2 \\ \gamma_{\shortparallel e} & i\Omega/2 & -i\Omega/2 & \lambda - \gamma_{\shortparallel g} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 2\lambda \\ 0 & \lambda + i\Delta - \gamma_\perp & 2\lambda - 2\gamma_\perp & 0 \\ i\Omega/2 & 0 & \lambda - i\Delta - \gamma_\perp & 0 \\ \gamma_{\shortparallel e} & i\Omega/2 & 0 & \lambda - \gamma_{\shortparallel g} + \gamma_{\shortparallel e} \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda\{\lambda^3 - \lambda^2(2\gamma_\perp + \gamma_{\shortparallel}) + \lambda(\Delta^2 + \Omega^2 + \gamma_\perp^2 + 2\gamma_\perp\gamma_{\shortparallel}) - (\Omega^2\gamma_\perp + \Delta^2\gamma_{\shortparallel} + \gamma_\perp^2\gamma_{\shortparallel})\} = 0,$$

где $\gamma_{\shortparallel} = \gamma_{\shortparallel e} + \gamma_{\shortparallel g}$. Если релаксацией полностью пренебречь, то уравнение сведется к уравнению $\lambda^2(\lambda^2 + \Delta^2 + \Omega^2) = 0$ с четырьмя корнями $\lambda_{1,2} = 0$ и $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$. В общем случае $\lambda_1 = 0$, а для нахождения остальных трех корней можно воспользоваться аналитической формулой Кардано решения кубического уравнения. Но и оно в общем случае выглядит громоздко. В сильном монохроматическом поле однако можно считать релаксацию слабой и учесть её в линейном приближении по константам $\gamma_{\shortparallel}$ и $\gamma_\perp$. В этом приближении

$$\lambda_2 \approx \frac{\Omega^2\gamma_\perp + \Delta^2\gamma_{\shortparallel}}{\Delta^2 + \Omega^2} \equiv \Gamma_1, \quad \lambda_{3,4} \approx \pm i\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} + \frac{\Delta^2\gamma_\perp + \Omega^2\frac{\gamma_\perp + \gamma_{\shortparallel}}{2}}{\Delta^2 + \Omega^2} \equiv \pm i\widetilde{\Omega} + \Gamma_2,$$

где введено обозначение $\widetilde{\Omega} = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$, и введены константы релаксации Γ_1 и Γ_2.

Поэтому, если в присутствии монохроматического электромагнитного поля вывести двухуровневую систему из её стационарного состояния, определяемого значениями матрицы плотности $\rho_{ee} = \rho_{ee}^{\text{ст.}}$, $\rho_{gg} = \rho_{gg}^{\text{ст.}}$, $\tilde{\rho}_{eg} = \tilde{\rho}_{eg}^{\text{ст.}}$ и $\tilde{\rho}_{ge} = \tilde{\rho}_{ge}^{\text{ст.}}$, найденными ранее, то впоследствии она снова срелаксирует к этому состоянию по закону

$$\rho_{gg}(t) = \rho_{gg}^{\text{ст.}} + C_1 e^{-\Gamma_1 t} + C_2 e^{-i\widetilde{\Omega}t - \Gamma_2 t} + C_2^* e^{i\widetilde{\Omega}t - \Gamma_2 t}, \quad \rho_{ee}(t) = 1 - \rho_{gg}(t),$$
$$\rho_{eg}(t) = \tilde{\rho}_{eg}^{\text{ст.}} e^{-i\omega t} + C_3 e^{-i\omega t - \Gamma_1 t} + C_4 e^{-i(\omega + \widetilde{\Omega})t - \Gamma_2 t} + C_5 e^{-i(\omega - \widetilde{\Omega})t - \Gamma_2 t}, \quad \rho_{ge}(t) = (\rho_{eg}(t))^*,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – константы (в общем случае комплексные), определяемые из уравнений и начальных условий. Интенсивность резонансной флюоресценции на частоте ω_{rf} определяется квадратом модуля амплитуды фурье дипольного момента ДУС $\left|\int_0^{+\infty} \rho_{eg}(t)e^{i\omega_{\text{rf}}t}dt\right|^2$, и она будет содержать очевидный δ-функционный пик на частоте $\omega_{\text{rf}} = \omega$ от первого члена, и *три уширенных пика* с лоренцевской формой линии на частотах $\omega_{\text{rf}} = \omega$ и $\omega_{\text{rf}} = \omega \pm \widetilde{\Omega} \equiv \omega \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$ с ширинами Γ_1 и Γ_2 соответственно. Последние три пика образуют так называемый триплет Моллоу (Mollow).