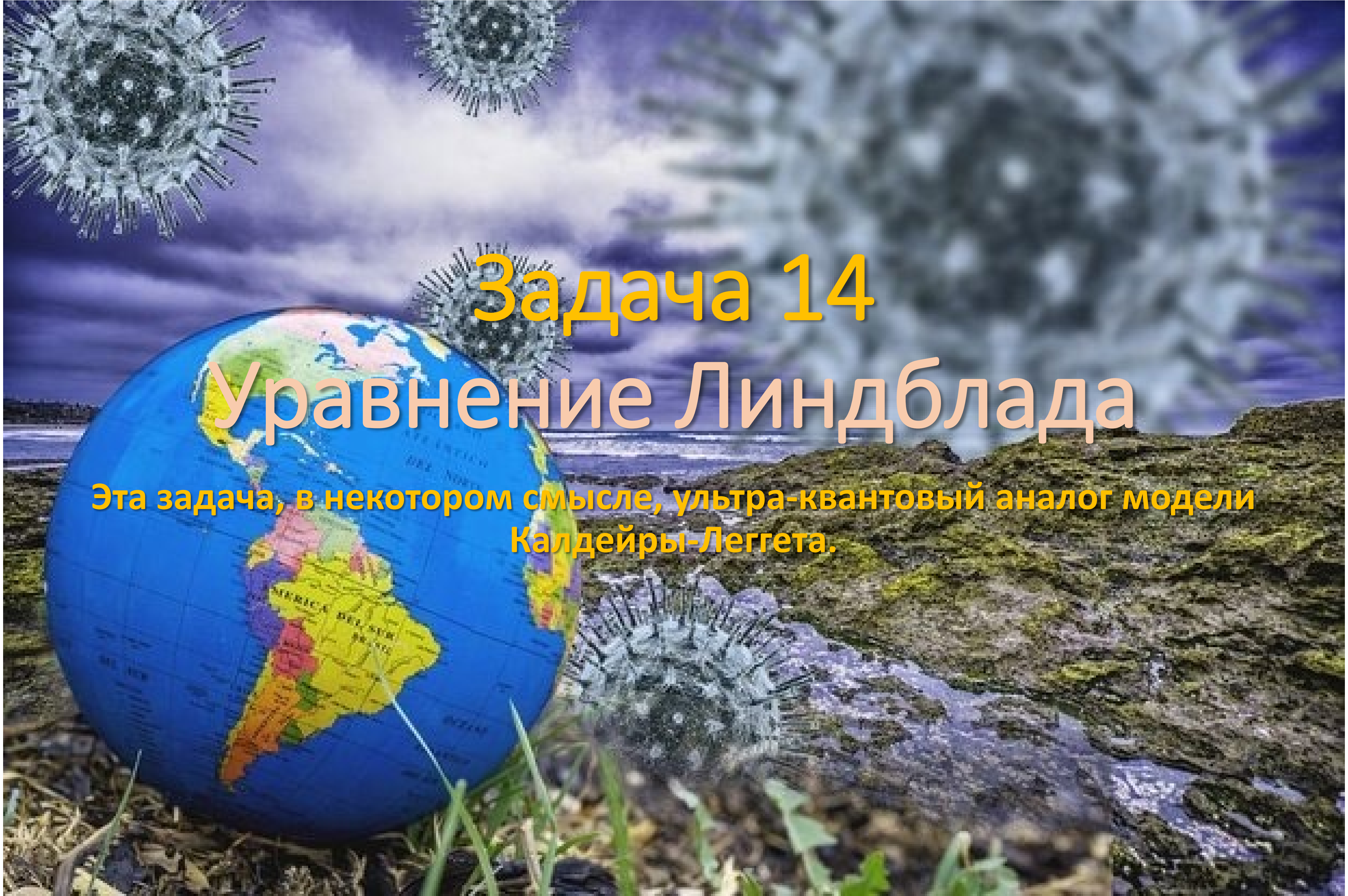

Задача 14
Уравнение Линдблада

Эта задача, в некотором смысле, ультра-квантовый аналог модели Калдейры-Леггета.

Постановка задачи

$$H = H_s + H_r + H_{sr}$$

Гамильтониан Системы (system)

Гамильтониан Резервуара (reservoir)

Гамильтониан взаимодействия

$$H = H_s + H_r + H_{sr}$$

Постановка задачи

$$H = H_s + H_r + H_{sr}$$

Гамильтониан Системы (system)

Гамильтониан Резервуара (reservoir)

Гамильтониан взаимодействия

ρ – матрица плотности всей системы

O – оператор наблюдаемой, относящийся к системе

$$\langle O \rangle = \mathrm{tr}(\rho O) = \mathrm{tr}_s\left(\mathrm{tr}_r(\rho O)\right) = \mathrm{tr}_s\left(\mathrm{tr}_r(\rho) O\right) = \mathrm{tr}_s(\rho_s O),$$

$\rho_s = \mathrm{tr}_r(\rho)$ – редуцированная матрица плотности.

Что такое редуцированная матрица плотности?

$$\rho = \sum_{i,j;\alpha\beta} \rho_{ij,\alpha\beta} \left| e_i^{(s)} \right\rangle \left\langle e_j^{(s)} \right| \left| e_\alpha^{(r)} \right\rangle \left\langle e_\beta^{(r)} \right|,$$

$$\rho_s = \mathrm{tr}_r \rho = \sum_\gamma \left\langle e_\gamma^{(r)} \right| \left(\sum_{i,j;\alpha\beta} \rho_{ij,\alpha\beta} \left| e_i^{(s)} \right\rangle \left\langle e_j^{(s)} \right| \left| e_\alpha^{(r)} \right\rangle \left\langle e_\beta^{(r)} \right| \right) \left| e_\gamma^{(r)} \right\rangle =$$

$$= \sum_\gamma \left(\sum_{i,j;\alpha\beta} \rho_{ij,\alpha\beta} \left| e_i^{(s)} \right\rangle \left\langle e_j^{(s)} \right| \right) \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\gamma\beta} = \sum_{i,j;\gamma} \rho_{ij,\gamma\gamma} \left| e_i^{(s)} \right\rangle \left\langle e_j^{(s)} \right|.$$

Как считать средние?

$$O=\sum_{n,m;\chi}O_{nm}\left|e_n^{(s)}\right\rangle\left\langle e_m^{(s)}\right|\left|e_\chi^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\chi^{(r)}\right|,\quad \sum_{\chi}\left|e_\chi^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\chi^{(r)}\right|=1^{(r)},$$

$$\langle O\rangle=\mathrm{tr}\left(\rho O\right)=\sum_{k,\lambda}\left\langle e_k^{(s)}\right|\left\langle e_\lambda^{(r)}\right|\left(\sum_{n,m;\chi}O_{nm}\left|e_n^{(s)}\right\rangle\left\langle e_m^{(s)}\right|\left|e_\chi^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\chi^{(r)}\right|\right)\left(\sum_{i,j;\alpha\beta}\rho_{ij,\alpha\beta}\left|e_i^{(s)}\right\rangle\left\langle e_j^{(s)}\right|\left|e_\alpha^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\beta^{(r)}\right|\right)\left|e_\lambda^{(r)}\right\rangle\left|e_k^{(s)}\right\rangle=$$

$$=\sum_{k}\left\langle e_k^{(s)}\right|\left(\sum_{n,m}O_{nm}\left|e_n^{(s)}\right\rangle\left\langle e_m^{(s)}\right|\right)\sum_{\lambda}\left\langle e_\lambda^{(r)}\right|\left(\sum_{i,j;\alpha\beta}\rho_{ij,\alpha\beta}\left|e_i^{(s)}\right\rangle\left\langle e_j^{(s)}\right|\left|e_\alpha^{(r)}\right\rangle\left\langle e_\beta^{(r)}\right|\right)\left|e_\lambda^{(r)}\right\rangle\left|e_k^{(s)}\right\rangle=$$

$$=\sum_{k}\left\langle e_k^{(s)}\right|\left(\sum_{n,m;\chi}O_{nm}\left|e_n^{(s)}\right\rangle\left\langle e_m^{(s)}\right|\right)\left(\rho_s\right)_{ij}\left|e_i^{(s)}\right\rangle\left\langle e_j^{(s)}\right|\left|e_k^{(s)}\right\rangle=\mathrm{tr}_s\left(\rho_s O\right).$$

Вывод

необходимо получить уравнение на редуцированную матрицу плотности

Вывод уравнения на редуцированную матрицу плотности

Е. С. Андрианов
А. П. Виноградов
А. А. Пухов

ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ

МОСКВА
МФТИ
2018

Нужна страница 102.
В книжке много «неточностей». Рекомендую читать презентации, где неточности большей части устранены.
Студенты, которые найдут в книге «серьёзные неточности», могут увеличить свой бал на экзамене, сообщив мне о найденных «серьёзных неточностях».

Уравнение на матрицу плотности

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H] = \frac{i}{\hbar}[\rho, H_s + H_r + H_{sr}]$$

Перейдем в
представление взаимодействия:
https://en.wikipedia.org/wiki/Interaction_picture

$$\tilde{\rho} = \exp\left(i\left(H_s + H_r\right)t/\hbar\right)\rho\exp\left(-i\left(H_s + H_r\right)t/\hbar\right)$$

$$\dot{\tilde{\rho}} = \frac{i}{\hbar}\left[\tilde{\rho}, \tilde{H}_{sr}(t)\right]$$

$$\dot{\tilde{\rho}} = \frac{i}{\hbar}\left[\tilde{\rho}, \tilde{H}_{sr}(t)\right] \qquad (*)$$

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t_0) + \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\left[\tilde{\rho}(t'), \tilde{H}_{sr}(t')\right]dt' \qquad (**)$$

Подставляем (**) обратно в (*):

$$\boxed{\dot{\tilde{\rho}}(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\tilde{\rho}(t_0), \tilde{H}_{sr}(t)\right] + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t}\left[\left[\tilde{\rho}(t'), \tilde{H}_{sr}(t')\right], \tilde{H}_{sr}(t)\right]dt'.}$$

Это уравнение равносильно (*).

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\tilde{\rho}(t_0), \tilde{H}_{sr}(t)\right] + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} \left[\left[\tilde{\rho}(t'), \tilde{H}_{sr}(t')\right], \tilde{H}_{sr}(t)\right] dt'.$$

Первое слагаемое может быть исключено. Положим $t_0 \to -\infty$.
При $t_0 \to -\infty$ взаимодействие равно нулю, а матрица плотности соответствует распределению Гиббса.
Таким образом, при $t_0 \to -\infty$:

$$H = \tilde{H} = H_s + H_r$$

$$\rho = \tilde{\rho}(-\infty) = Z^{-1} \exp\left(-H / T\right).$$

Мы будем считать, что взаимодействие медленно (адиабатически) включается, при $t > t_0 = -\infty$. См. АГД или учебник «Левитов-Шитов».

Далее мы будем брать след от матрицы плотности по степеням свободы резервуара. Такой след от Гамильтониана взаимодействия (мы эго так выберем) будет тождественно равен нулю. Поэтому мы можем «забыть» про первое слагаемое в ур. на матрицу плотности:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = \cancel{\frac{i}{\hbar}\left[\tilde{\rho}(t_0), \tilde{H}_{sr}(t)\right]} + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} \left[\left[\tilde{\rho}(t'), \tilde{H}_{sr}(t')\right], \tilde{H}_{sr}(t)\right] dt'.$$

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} \left[\left[\tilde{\rho}(t'), \tilde{H}_{sr}(t')\right], \tilde{H}_{sr}(t)\right] dt'.$$

Будем считать взаимодействие между системой и резервуаром слабое:

$$\boxed{\tilde{\rho}(t) \approx \tilde{\rho}_s(t) \otimes \tilde{\rho}_r(t)}$$

Поправки к этому «борновскому» приближению второго порядка по H_{sr}

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} \left[\left[\tilde{\rho}(t'), \tilde{H}_{sr}(t')\right], \tilde{H}_{sr}(t)\right] dt'. \qquad (**)$$

Будем считать взаимодействие между системой и резервуаром слабое и резервуар находится в термодинамическом равновесии:

$$\boxed{\tilde{\rho}(t) \approx \tilde{\rho}_s(t) \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty)} \qquad (*)$$

Подставим (*) в (**):

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty) \approx \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} \left[\left[\tilde{\rho}_s(t') \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty), \tilde{H}_{sr}(t')\right], \tilde{H}_{sr}(t)\right] dt',$$

Конкретизируем гамильтонианы

$$H_s = \hbar\omega_s s^+ s, \quad H_r = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha b_\alpha^+ b_\alpha,$$

$$H_{sr} = \sum_\alpha \hbar\gamma_\alpha \left(b_\alpha^+ s + s^+ b_\alpha\right).$$

Конкретизируем гамильтонианы

$$H_s = \hbar\omega_s s^+ s, \quad H_r = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha b_\alpha^+ b_\alpha,$$

$$H_{sr} = \sum_\alpha \hbar\gamma_\alpha \left(b_\alpha^+ s + s^+ b_\alpha\right).$$

$$\tilde{H}_{sr}(t) = \sum_\alpha \hbar\gamma_\alpha \left(b_\alpha^+ s e^{-i(\omega_s - \omega_\alpha)t} + s^+ b_\alpha e^{i(\omega_s - \omega_\alpha)t}\right).$$

Докажите, что

$$\tilde{b}_\alpha(t) = e^{iH_r t/\hbar} b_\alpha e^{-iH_r t/\hbar} = b_\alpha e^{-i\omega_\alpha t/\hbar},$$

$$\tilde{s}(t) = e^{iH_s t/\hbar} s e^{-iH_s t/\hbar} = s e^{-i\omega_s t/\hbar}$$

$$\tilde{H}_{sr}(t) = \sum_{\alpha} \hbar \gamma_{\alpha} \left(b_{\alpha}^{+} s e^{-i(\omega_s - \omega_{\alpha})t} + s^{+} b_{\alpha} e^{i(\omega_s - \omega_{\alpha})t} \right).$$

Введем обозначение:

$$F(t) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} b_{\alpha} e^{i(\omega_s - \omega_{\alpha})t}.$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{H}_{sr}(t) = \hbar \left(F^{+}(t) s + F(t) s^{+} \right).$$

$$\tilde{H}_{sr}(t) = \hbar\left(F^{+}(t)s + F(t)s^{+}\right). \qquad (*)$$

$$F(t) = \sum_{\alpha}\gamma_{\alpha}b_{\alpha}e^{i(\omega_s-\omega_{\alpha})t}.$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t)\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty) \approx \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{-\infty}^{t}\left[\left[\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty), \tilde{H}_{sr}(t')\right], \tilde{H}_{sr}(t)\right]dt',$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{-\infty}^{t}\mathrm{tr}_r\left(\left[\left[\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty), \tilde{H}_{sr}(t')\right], \tilde{H}_{sr}(t)\right]\right)dt',$$

Подставим сюда в (*)

$$\tilde{H}_{sr}(t) = \hbar\left(F^{+}(t)s + F(t)s^{+}\right).$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r\left(\left[\left[\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty), \tilde{H}_{sr}(t')\right], \tilde{H}_{sr}(t)\right]\right)dt',$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx -\int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r\left(\left[\left[\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty), \left(F^{+}(t')s + F(t')s^{+}\right)\right], \left(F^{+}(t)s + F(t)s^{+}\right)\right]\right)dt' =$$

$$= -\int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r\left(\left[\left(\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\left(F^{+}(t')s + F(t')s^{+}\right) - \left(F^{+}(t')s + F(t')s^{+}\right)\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\right), \left(F^{+}(t)s + F(t)s^{+}\right)\right]\right)dt' =$$

$$= -\int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r\left(\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\left(F^{+}(t')s + F(t')s^{+}\right)\left(F^{+}(t)s + F(t)s^{+}\right)\right)dt' +$$

$$+\int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r\left(\left(F^{+}(t')s + F(t')s^{+}\right)\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\left(F^{+}(t)s + F(t)s^{+}\right)\right)dt' +$$

$$+\int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r\left(\left(F^{+}(t)s + F(t)s^{+}\right)\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\left(F^{+}(t')s + F(t')s^{+}\right)\right)dt' -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r\left(\left(F^{+}(t)s + F(t)s^{+}\right)\left(F^{+}(t')s + F(t')s^{+}\right)\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\right)dt'$$

$$-\int_{-\infty}^{t}\mathrm{tr}_r\left(\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\left(F^+(t')s+F(t')s^+\right)\left(F^+(t)s+F(t)s^+\right)\right)dt'=-\int_{-\infty}^{t}\mathrm{tr}_r\left(\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\left(F^+(t')F(t)ss^+ +F(t')F^+(t)s^+s\right)\right)dt'=$$

$$=-\int_{-\infty}^{t}\left(\left\langle F^+(t')F(t)\right\rangle_r\tilde{\rho}_s(t')ss^+ +\left\langle F(t')F^+(t)\right\rangle\tilde{\rho}_s(t')s^+s\right)dt'.$$

Здесь мы использовали, что

$$\left\langle F(t')F(t)\right\rangle=\left\langle F^+(t')F^+(t)\right\rangle=0$$

$$F(t)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha b_\alpha e^{i(\omega_s-\omega_\alpha)t},\qquad \left\langle b_\alpha b_\beta\right\rangle=0.$$

Аналогично найдем, что

$$-\int_{-\infty}^{t}\mathrm{tr}_r\left(\left(F^+(t)s+F(t)s^+\right)\left(F^+(t')s+F(t')s^+\right)\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\right)dt'=-\int_{-\infty}^{t}\mathrm{tr}_r\left(\left(F^+(t)F(t')ss^+ +F(t)F^+(t')s^+s\right)\tilde{\rho}_s(t')\otimes\tilde{\rho}_r(-\infty)\right)dt'=$$

$$=-\int_{-\infty}^{t}\left(\left\langle F^+(t)F(t')\right\rangle_r ss^+\tilde{\rho}_s(t')+\left\langle F(t)F^+(t')\right\rangle_r s^+s\tilde{\rho}_s(t')\right)dt'.$$

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r \left(\left(F^+(t')s + F(t')s^+ \right) \tilde{\rho}_s(t') \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty) \left(F^+(t)s + F(t)s^+ \right) \right) dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r \left(F^+(t')s\tilde{\rho}_s(t') \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty)F(t)s^+ + F(t')s^+\tilde{\rho}_s(t') \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty)F^+(t)s \right) dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r \left(s\tilde{\rho}_s(t')s^+ \otimes F^+(t')\tilde{\rho}_r(-\infty)F(t) + s^+\tilde{\rho}_s(t')s \otimes F(t')\tilde{\rho}_r(-\infty)F^+(t) \right) dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r \left(s\tilde{\rho}_s(t')s^+ \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty)F(t)F^+(t') + s^+\tilde{\rho}_s(t')s \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty)F^+(t)F(t') \right) dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \left(s\tilde{\rho}_s(t')s^+ \left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle_r + s^+\tilde{\rho}_s(t')s \left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r \right) dt'.$$

Далее найдем последнее слагаемое:

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r \left(\left(F^+(t)s + F(t)s^+ \right) \tilde{\rho}_s(t') \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty) \left(F^+(t')s + F(t')s^+ \right) \right) dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r \left(F^+(t)s\tilde{\rho}_s(t') \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty)F(t')s^+ + F(t)s^+\tilde{\rho}_s(t') \otimes \tilde{\rho}_r(-\infty)F^+(t')s \right) dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{tr}_r \left(s\tilde{\rho}_s(t')s^+ \otimes F^+(t)\tilde{\rho}_r(-\infty)F(t') + s^+\tilde{\rho}_s(t')s \otimes F(t)\tilde{\rho}_r(-\infty)F^+(t') \right) dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle_r s\tilde{\rho}_s(t')s^+ + \left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r s^+\tilde{\rho}_s(t')s \right) dt'.$$

Итак:

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx \int_{-\infty}^{t} \begin{pmatrix} \left(\left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle_r + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle_r \right) s\tilde{\rho}_s(t')s^+ + \\ + \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r + \left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \right) s^+\tilde{\rho}_s(t')s \end{pmatrix} dt' -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \tilde{\rho}_s(t')ss^+ + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle_r \tilde{\rho}_s(t')s^+s \right) dt' -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r ss^+\tilde{\rho}_s(t') + \left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle_r s^+s\tilde{\rho}_s(t') \right) dt'$$

Найдем корреляторы:

$$\left\langle F^{+}(t)F(t')\right\rangle_{r}$$

Найдем корреляторы:

$$F(t)=\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha}b_{\alpha}e^{i(\omega_s-\omega_{\alpha})t}.$$

$$\left\langle F^{+}(t)F(t')\right\rangle_r=\left\langle\sum_{\alpha,\beta}b_{\beta}^{+}b_{\alpha}\right\rangle_r\gamma_{\beta}^{*}\gamma_{\alpha}e^{-i\left(\omega_s-\omega_{\beta}\right)t+i\left(\omega_s-\omega_{\alpha}\right)t'}=\sum_{\alpha}n_{\alpha}\left|\gamma_{\alpha}\right|^{2}e^{-i\left(\omega_s-\omega_{\alpha}\right)(t-t')},$$

$$\left\langle F(t)F^{+}(t')\right\rangle_r=\sum_{\alpha}\left(n_{\alpha}+1\right)\left|\gamma_{\alpha}\right|^{2}e^{i\left(\omega_s-\omega_{\alpha}\right)(t-t')},$$

$$n_{\alpha}=\frac{1}{\exp\left(\hbar\omega_{\alpha}/T\right)-1}.$$

Найдем корреляторы:

$$\left\langle F^+(t)F(t')\right\rangle_r = \left\langle \sum_{\alpha,\beta} b_\beta^+ b_\alpha \right\rangle_r \gamma_\beta^* \gamma_\alpha e^{-i\left(\omega_s-\omega_\beta\right)t+i\left(\omega_s-\omega_\alpha\right)t'} = \sum_\alpha n_\alpha \left|\gamma_\alpha\right|^2 e^{-i\left(\omega_s-\omega_\alpha\right)(t-t')},$$

$$\left\langle F(t)F^+(t')\right\rangle_r = \sum_\alpha \left(n_\alpha+1\right)\left|\gamma_\alpha\right|^2 e^{i\left(\omega_s-\omega_\alpha\right)(t-t')}, \qquad n_\alpha = \frac{1}{\exp\left(\hbar\omega_\alpha/T\right)-1}.$$

Введем плотность «фононных состояний»:

$$D\left(\omega\right) = \sum_\alpha \delta\left(\omega-\omega_\alpha\right)$$

$$\left\langle F^+(t)F(t')\right\rangle_r = \int_0^\infty D\left(\omega\right)\left|\gamma(\omega)\right|^2 n(\omega) e^{-i\left(\omega_s-\omega\right)(t-t')} d\omega,$$

$$\left\langle F(t)F^+(t')\right\rangle_r = \int_0^\infty D\left(\omega\right)\left|\gamma(\omega)\right|^2 \left(n(\omega)+1\right) e^{i\left(\omega_s-\omega\right)(t-t')} d\omega.$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx \int_{-\infty}^{t} \left(\left(\left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle_r + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle_r \right) s\tilde{\rho}_s(t')s^+ + \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r + \left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \right) s^+\tilde{\rho}_s(t')s \right) dt' -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \tilde{\rho}_s(t')ss^+ + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle \tilde{\rho}_s(t')s^+s \right) dt' -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r ss^+\tilde{\rho}_s(t') + \left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle s^+s\tilde{\rho}_s(t') \right) dt'$$

Марковское приближение: матрица плотности меняется медленнее, чем корреляторы F. Тогда

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx \int_{-\infty}^{t} \left(\left(\left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle_r + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle_r \right) s\tilde{\rho}_s(t)s^+ + \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r + \left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \right) s^+\tilde{\rho}_s(t)s \right) dt' -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \tilde{\rho}_s(t)ss^+ + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle \tilde{\rho}_s(t)s^+s \right) dt' -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r ss^+\tilde{\rho}_s(t) + \left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle s^+s\tilde{\rho}_s(t) \right) dt'$$

Марковское приближение…

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx \int_{-\infty}^{t} \left(\left(\left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle_r + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle_r \right) s\tilde{\rho}_s(t)s^+ + \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r + \left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \right) s^+\tilde{\rho}_s(t)s \right) dt' -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \tilde{\rho}_s(t)ss^+ + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle \tilde{\rho}_s(t)s^+s \right) dt' -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r ss^+\tilde{\rho}_s(t) + \left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle s^+s\tilde{\rho}_s(t) \right) dt'$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx s\tilde{\rho}_s(t)s^+ \int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle_r + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle_r \right) dt' + s^+\tilde{\rho}_s(t)s \int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r + \left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \right) dt' -$$

$$-\tilde{\rho}_s(t)ss^+ \int_{-\infty}^{t} \left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r dt' - \tilde{\rho}_s(t)s^+s \int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle dt' -$$

$$-ss^+\tilde{\rho}_s(t) \int_{-\infty}^{t} \left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r dt' - s^+s\tilde{\rho}_s(t) \int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle dt'.$$

Итак:

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx s\tilde{\rho}_s(t)s^+ \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F(t)F^+(t')\right\rangle_r + \left\langle F(t')F^+(t)\right\rangle_r \right) dt' +$$

$$+s^+\tilde{\rho}_s(t)s \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t)F(t')\right\rangle_r + \left\langle F^+(t')F(t)\right\rangle_r \right) dt' -$$

$$-\tilde{\rho}_s(t)ss^+ \int\limits_{-\infty}^{t} \left\langle F^+(t')F(t)\right\rangle_r dt' - \tilde{\rho}_s(t)s^+s \int\limits_{-\infty}^{t} \left\langle F(t')F^+(t)\right\rangle dt' -$$

$$-ss^+\tilde{\rho}_s(t) \int\limits_{-\infty}^{t} \left\langle F^+(t)F(t')\right\rangle_r dt' - s^+s\tilde{\rho}_s(t) \int\limits_{-\infty}^{t} \left\langle F(t)F^+(t')\right\rangle dt'.$$

Найдем интегралы от корреляторов <FF>.

Найдем интегралы:

$$\int_{-\infty}^{t}\left\langle F^{+}(t)F(t')\right\rangle_r dt' = \int_{-\infty}^{t}\int_{0}^{\infty} D(\omega)\left|\gamma(\omega)\right|^2 n(\omega)e^{-i(\omega_s-\omega)(t-t')}d\omega dt' =$$

$$= \int_{0}^{\infty} D(\omega)\left|\gamma(\omega)\right|^2 n(\omega)\int_{-\infty}^{0} e^{i(\omega_s-\omega-i0)\tau}d\tau d\omega = \int_{0}^{\infty} D(\omega)\left|\gamma(\omega)\right|^2 n(\omega)\frac{1}{i(\omega_s-\omega-i0)}d\omega =$$

$$= \int_{0}^{\infty} D(\omega)\left|\gamma(\omega)\right|^2 n(\omega)\left(\pi\delta(\omega_s-\omega)+P\frac{1}{i(\omega_s-\omega)}\right)d\omega = \pi D(\omega_s)\left|\gamma(\omega_s)\right|^2 n(\omega_s)+i\Delta_1,$$

$$\int_{-\infty}^{t}\left\langle F(t)F^{+}(t')\right\rangle_r dt' = \int_{-\infty}^{t}\int_{0}^{\infty} D(\omega)\left|\gamma(\omega)\right|^2 \left(n(\omega)+1\right)e^{i(\omega_s-\omega)(t-t')/\hbar}d\omega dt =$$

$$= \pi D(\omega_s)\left|\gamma(\omega_s)\right|^2\left(n(\omega_s)+1\right)+i\left(\Delta_1+\Delta_2\right).$$

$$\Delta_1 = P\int_{0}^{\infty} D(\omega)\left|\gamma(\omega)\right|^2 n(\omega)\frac{1}{\omega-\omega_s}d\omega, \qquad \Delta_2 = P\int_{0}^{\infty} D(\omega)\left|\gamma(\omega)\right|^2 \frac{1}{\omega-\omega_s}d\omega.$$

Итак:

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t)F^{+}(t')\right\rangle_r dt' = \pi D\left(\omega_s\right)\left|\gamma(\omega_s)\right|^2 \left(n(\omega_s)+1\right)+i\left(\Delta_1+\Delta_2\right),$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t')F^{+}(t)\right\rangle_r dt' = \pi D\left(\omega_s\right)\left|\gamma(\omega_s)\right|^2 \left(n(\omega_s)+1\right)-i\left(\Delta_1+\Delta_2\right),$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F^{+}(t)F(t')\right\rangle_r dt' = \pi D\left(\omega_s\right)\left|\gamma(\omega_s)\right|^2 n(\omega_s)+i\Delta_1,$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F^{+}(t')F(t)\right\rangle_r dt' = \pi D\left(\omega_s\right)\left|\gamma(\omega_s)\right|^2 n(\omega_s)-i\Delta_1.$$

Итак:

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t)F^{+}(t')\right\rangle_r dt' = \gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)+i\left(\Delta_1+\Delta_2\right),$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t')F^{+}(t)\right\rangle_r dt' = \gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)-i\left(\Delta_1+\Delta_2\right),$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F^{+}(t)F(t')\right\rangle_r dt' = \gamma_s n(\omega_s)+i\Delta_1,$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F^{+}(t')F(t)\right\rangle_r dt' = \gamma_s n(\omega_s)-i\Delta_1.$$

$$\gamma_s = \pi D\left(\omega_s\right)\left|\gamma(\omega_s)\right|^2.$$

Упростим уравнение на матрицу плотности

То, что мы выше получили:

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx s\tilde{\rho}_s(t)s^+ \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle_r + \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle_r \right) dt' +$$

$$+ s^+\tilde{\rho}_s(t)s \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r + \left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r \right) dt' -$$

$$- \tilde{\rho}_s(t)ss^+ \int\limits_{-\infty}^{t} \left\langle F^+(t')F(t) \right\rangle_r dt' - \tilde{\rho}_s(t)s^+s \int\limits_{-\infty}^{t} \left\langle F(t')F^+(t) \right\rangle dt' -$$

$$- ss^+\tilde{\rho}_s(t) \int\limits_{-\infty}^{t} \left\langle F^+(t)F(t') \right\rangle_r dt' - s^+s\tilde{\rho}_s(t) \int\limits_{-\infty}^{t} \left\langle F(t)F^+(t') \right\rangle dt'.$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t)F^{+}(t')\right\rangle_r dt' = \gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right) + i\left(\Delta_1+\Delta_2\right),$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t')F^{+}(t)\right\rangle_r dt' = \gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right) - i\left(\Delta_1+\Delta_2\right).$$

Первые два слагаемые:

$$\int_{-\infty}^{t} \left(\left\langle F(t)F^{+}(t')\right\rangle_r + \left\langle F(t')F^{+}(t)\right\rangle_r\right) dt' =$$

$$= \left(\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right) + i\left(\Delta_1+\Delta_2\right)\right) + \left(\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right) - i\left(\Delta_1+\Delta_2\right)\right) =$$

$$= 2\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right).$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F^+(t)F(t')\right\rangle_r dt' = \gamma_s n(\omega_s) + i\Delta_1, \quad \int_{-\infty}^{t} \left\langle F^+(t')F(t)\right\rangle_r dt' = \gamma_s n(\omega_s) - i\Delta_1,$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t)F^+(t')\right\rangle_r dt' = \gamma_s \left(n(\omega_s)+1\right) + i\left(\Delta_1 + \Delta_2\right), \quad \int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t')F^+(t)\right\rangle_r dt' = \gamma_s \left(n(\omega_s)+1\right) - i\left(\Delta_1 + \Delta_2\right),$$

Третья строчка:

$$\int_{-\infty}^{t} \left\langle F^+(t')F(t)\right\rangle_r dt' - \tilde{\rho}_s(t) s^+ s \int_{-\infty}^{t} \left\langle F(t')F^+(t)\right\rangle dt' =$$

$$= -\tilde{\rho}_s(t) s s^+ \left(\gamma_s n(\omega_s) + i\Delta_1\right) - \tilde{\rho}_s(t) s^+ s \left(\gamma_s n(\omega_s) - i\Delta_1\right).$$

$$\int_{-\infty}^{t}\left\langle F^{+}(t)F(t')\right\rangle_{r}dt' = \gamma_s n(\omega_s)+i\Delta_1, \quad \int_{-\infty}^{t}\left\langle F^{+}(t')F(t)\right\rangle_{r}dt' = \gamma_s n(\omega_s)-i\Delta_1,$$

$$\int_{-\infty}^{t}\left\langle F(t)F^{+}(t')\right\rangle_{r}dt' = \gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)+i\left(\Delta_1+\Delta_2\right), \quad \int_{-\infty}^{t}\left\langle F(t')F^{+}(t)\right\rangle_{r}dt' = \gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)-i\left(\Delta_1+\Delta_2\right),$$

Четвертая строчка:

$$-ss^{+}\tilde{\rho}_s(t)\int_{-\infty}^{t}\left\langle F^{+}(t)F(t')\right\rangle_{r}dt' - s^{+}s\tilde{\rho}_s(t)\int_{-\infty}^{t}\left\langle F(t)F^{+}(t')\right\rangle dt' =$$

$$= -ss^{+}\tilde{\rho}_s(t)\left(\gamma_s n(\omega_s)+i\Delta_1\right) - s^{+}s\tilde{\rho}_s(t)\left(\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)+i\left(\Delta_1+\Delta_2\right)\right).$$

Найдем уравнение на матрицу плотности:

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx 2\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)s\tilde{\rho}_s(t)s^+ + 2\gamma_s n(\omega_s)s^+\tilde{\rho}_s(t)s -$$

$$-\left(\gamma_s n(\omega_s) - i\left(\Delta_1+\Delta_2\right)\right)\tilde{\rho}_s(t)ss^+ - \left(\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right) - i\left(\Delta_1+\Delta_2\right)\right)\tilde{\rho}_s(t)s^+s -$$

$$-\left(\gamma_s n(\omega_s) + i\left(\Delta_1+\Delta_2\right)\right)ss^+\tilde{\rho}_s(t) - \left(\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right) + i\left(\Delta_1+\Delta_2\right)\right)s^+s\tilde{\rho}_s(t) =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left[\tilde{\rho}_s(t), \hbar\left(\Delta_1+\Delta_2\right)\left(ss^+ + s^+s\right)\right] +$$

$$+\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)\left(2s\tilde{\rho}_s(t)s^+ - \left\{\tilde{\rho}_s(t), s^+s\right\}\right) + \gamma_s n(\omega_s)\left(2s^+\tilde{\rho}_s(t)s - \left\{\tilde{\rho}_s(t), ss^+\right\}\right).$$

Подведем итоги:

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) \approx \frac{i}{\hbar}\left[\tilde{\rho}_s(t), \hbar(\Delta_1 + \Delta_2)\left(ss^+ + s^+s\right)\right] +$$

$$+\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)\left(2s\tilde{\rho}_s(t)s^+ - \left\{\tilde{\rho}_s(t), s^+s\right\}\right) +$$

$$+\gamma_s n(\omega_s)\left(2s^+\tilde{\rho}_s(t)s - \left\{\tilde{\rho}_s(t), ss^+\right\}\right).$$

Перейдем обратно, в Шредингеровское представление

$$\dot{\rho}_s(t) \approx \frac{i}{\hbar}\left[\rho_s(t), H_s + \hbar(\Delta_1 + \Delta_2)\left(ss^+ + s^+s\right)\right] +$$

$$+\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)\left(2s\rho_s(t)s^+ - \left\{\rho_s(t), s^+s\right\}\right) +$$

$$+\gamma_s n(\omega_s)\left(2s^+\rho_s(t)s - \left\{\rho_s(t), ss^+\right\}\right).$$

Таким образом, взаимодействие нашей системы (квантового осциллятора) с резервуаром из бесконечного числа квантовых осцилляторов, привело к перенормировке Гамильтониана системы. Новый Гамильтониан:

$$H_s = \hbar\omega_s s^+ s \to \hbar\omega_s s^+ s + \hbar\left(\Delta_1 + \Delta_2\right)\left(ss^+ + s^+ s\right) =$$

$$= \left(\hbar\omega_s + 2\hbar\left(\Delta_1 + \Delta_2\right)\right) s^+ s + \hbar\left(\Delta_1 + \Delta_2\right).$$

Лембовские сдвиги

Если $T \ll \hbar\omega_s$, то $\mathrm{n}(\omega_s) \ll 1$

$$\dot{\rho}_s(t) \approx \frac{i}{\hbar}\left[\rho_s(t), H_s + \hbar\left(\Delta_1 + \Delta_2\right)\left(ss^+ + s^+s\right)\right] +$$

$$+\gamma_s\left(2s\rho_s(t)s^+ - \left\{\rho_s(t), s^+s\right\}\right).$$

Упражнение: доказать, что диссипативное уравнение на матрицу плотности сохраняет норму матрицы плотности.

$$\operatorname{tr}\dot{\rho}_s(t) = \frac{d}{dt}\operatorname{tr}\rho_s(t) \approx \frac{i}{\hbar}\operatorname{tr}\left[\rho_s(t), H_s + \hbar(\Delta_1 + \Delta_2)\left(ss^+ + s^+s\right)\right] +$$

$$+\gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)\operatorname{tr}\left(2s\rho_s(t)s^+ - \left\{\rho_s(t), s^+s\right\}\right) +$$

$$+\gamma_s n(\omega_s)\operatorname{tr}\left(2s^+\rho_s(t)s - \left\{\rho_s(t), ss^+\right\}\right) = 0,$$

$$\operatorname{tr}\left(2s\rho_s(t)s^+ - \left\{\rho_s(t), s^+s\right\}\right) = \operatorname{tr}\left(2\rho_s(t)s^+s - \rho_s(t)s^+s - s^+s\rho_s(t)\right) = 0$$

…

Упражнения для самопроверки:

- Доказать, что распределение Гиббса является стационарным решением ур. Линблада.
- Найти в общем случае из уравнения Линдблада зависимость среднего числа квантов в осцилляторе, как функцию времени.
- Найти, как меняется средняя величина амплитуды колебаний осциллятора.
- Модифицировать связь системы с термостатом осцилляторов, чтобы диссипатор содержал

слагаемые вида $s^{+}\rho s^{+}$.

Спасибо за внимание!