Введение. Выпуклые, аффинные, конические множества и их свойства. Семинар 1. 3 сентября 2019 г.

Семинарист: Данилова М.

Организационные вопросы

1. Семинар и лекция раз в неделю.
2. Большие контрольные работы на семинарах: промежуточная в середине семестра (midterm) и финальная в конце; мини контрольные в течение семестра.
3. 4(5) домашних задания в течение семестра.
4. Оценка за семестр ставится по результата Вашей работы на семинарах, в частности из оценок за контрольные и домашние задания.

Программа курса

1. Введение. Выпуклые, аффинные и конические множества.
2. Выпуклые функции
3. Выпуклые задачи оптимизации.
4. Векторное дифференцирование.
5. Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера.
6. Теория двойственности.
7. Субдифференциалы.
8. Сопряженные функции.
9. Проекция точки на выпуклое множество.
10. Отделимость выпуклых множеств.

Литература

1. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe. Convex Optimization.
2. Б.Т. Поляк. Введение в оптимизацию.
3. Ю.Е. Нестеров. Методы выпуклой оптимизации.
4. А.В. Гасников. Современные численные методы оптимизации.
5. В.Г. Жадан. Методы оптимизации.
6. А.Г. Сухарев. Курс методов оптимизаци.
7. Matrixcookbook.
8. Sébastien Bubeck. Convex Optimization: Algorithms and Complexity.

Введение

Постановка задачи оптимизации

Задачу оптимизации можно описать следующим образом:

$$\min_{x \in \mathrm{G}} f(x) \tag{1}$$

- $f(x)$ - целевая функция
- $\mathrm{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ - допустимое множество
- $x_* \in \mathbb{R}^n$ - искомый вектор
- f_*- оптимальное значение целевой функции $f_* = \min\limits_{x_* \in \mathrm{G}} f(x_*)$

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. определение целевой функции $f(x)$;
2. определение допустимого множества решений G;
3. постановка и анализ оптимизационной задачи;
4. выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи;
5. реализация алгоритма и проверка его корректности.

Классы экстремальных задач

1. Задача одномерной минимизации: G - подмножество действительной прямой $\mathbb{R}$
2. Задача безусловной минимизации: $\mathrm{G} = \mathbb{R}^n$, т.е допустимое множество совпадает со всем подпространством.
3. Задача условной минимизации: G - собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. (задачи математического, линейного, квадратичного, нелинейного программирования)
   (a) задача математического программирования, если
   $\mathrm{G} = \{x \mid f_i(x) \leq 0 \ \ i = \overline{1,m};\ f_j(x) = 0 \ \ j = \overline{m+1,l}\}$
   (b) задача линейного программирования, если
   $f_0(x),\ f_i(x),\ f_j(x)$ - линейные функции
   (c) задача квадратичного программирования, если
   $f_i(x),\ f_j(x)$ - линейные функции, а $f_0(x)$ - квадратичная функция
   (d) и.т.д.

Основные определения и замечания

- Точка $x_* \in \mathrm{G}$ называется:
  1. точкой глобального минимума f на G, если $\forall x \in \mathrm{G} \quad f(x_*) \leq f(x)$;
  2. точкой локального минимума f на G, если $\forall x \in \mathrm{G} \cap U_\epsilon(x_*) \quad f(x_*) \leq f(x)$;
     где $\mathrm{U}_\epsilon(x_*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_*|| \leq \epsilon\}$;
  3. точкой строгого глобального (локального) минимума, если неравенства в 1), 2) выполняются как строгие.
- **Существование решения**

  Теорема 1. Теорема Вейерштрасса.

  Пусть X - компакт, f - непрерывная функция на X Тогда точка глобального минимума функции f на X существует.
- Задача $f(x) \to \max,\ x \in G$ эквивалентна $-f(x) \to \min,\ x \in G$

  в том смысле, что множества решений этих задач совпадают.
- Если множество X - открытое или неограниченное, то задача может не иметь решения.

  В таком случае корректно рассматривать задачу
  $$f_* = \inf_{x \in \mathrm{G}} f(x).$$
- Когда функция $f(x)$ не ограничена снизу на G, полагают
  $$f_* = -\infty.$$

.

Аффинное множество

Определение 1. Множество $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ - **аффинное**, если вместе с любой парой точек $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ оно содержит все точки вида $x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$ при $\theta \in \mathbb{R}^1$.

(т.е. вместе с каждой парой точек, во множестве содержится и вся прямая их соединяющая)

Примеры:

- все пространство $\mathbb{R}^n$
- прямая, гиперплоскость
- точка
- $\varnothing$ - пустое множество

Аффинные множества имеют простую структуру, они являются сдвигами линейных подпространств. Пусть X - произвольное аффинное множество и пусть $x_0 \in \mathrm{X}$. Рассмотрим множество $\mathrm{L} = \mathrm{X} - x_0$. Данное множество также является аффинным. Возьмем $x_1, x_2 \in \mathrm{L},\ \theta \in \mathbb{R}$. Имеем $x_1 = y_1 - x_0, x_2 = y_2 - x_0$, где $y_1, y_2 \in \mathrm{X}$. Тогда

$$x_\theta = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 = \theta y_1 + (1-\theta)y_2 - x_0 \in \mathrm{L},$$

так как из-за аффинности множества X следует $\theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in \mathrm{X}$. Множество L - линейное подпространство, параллельное аффинному множеству X. Оно определяется единственным образом (не зависит от выбора $x_0 \in \mathrm{X}$).

Определение 2. Пусть $x_1, .., x_k \in \mathrm{G}$, тогда при $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1$ точка $\theta_1 x_1 + .. + \theta_k x_k$ - **аффинная комбинация точек** $x_1, .., x_k$.

Определение 3. Множество всех аффинных комбинаций точек $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in \mathrm{G},\ \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \right\}$ - **аффинная оболочка множества** ($\mathbf{aff}(\mathrm{G})$). Аффинная оболочка $\mathbf{aff}(\mathrm{G})$ - наименьшее аффинное множество, содержащее множество G.

Утверждение 1. Множество является аффинным $\Longleftrightarrow$, когда в него входят все аффинные комбинации его точек.

Утверждение 2. Пересечение (конечное или бесконечное) аффинных множеств - аффинное множество.

Упражнение 1. Покажите, что решение системы линейных уравнений

$\mathrm{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{A}x = b\},\ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m$ - аффинное множество.

Решение. Пусть $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$, то есть $\mathrm{A}x_1 = b, \mathrm{A}x_2 = b$. Тогда для любого $\theta \in \mathbb{R}^1$ мы имеем

$$\mathrm{A}\left(\theta x_1 + (1-\theta)x_2\right) = \theta \mathrm{A}x_1 + (1-\theta)\mathrm{A}x_2 = \theta b + (1-\theta)b = b.$$

$\square$

Утверждение 3. Любое аффинное множество можно представить в виде

$\mathrm{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{A}x = b\}$.

Относительная внутренность выпуклого множества

Определение 4. Внутренность множества X:

$$\mathrm{intX} = \{x \in \mathrm{X} \mid \exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq \mathrm{X}\},$$

где $\mathrm{B}(x, \epsilon) = \{y \mid \|x - y\| \le \varepsilon\}$

Определение 5. Относительная внутренность множества X:

$$\mathrm{riX} = \{x \in \mathrm{X} \mid \exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap \mathrm{aff}(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{X}\},$$

Определение 6. Множество X - открытое (относительно открытое), если $\mathrm{intX} = \mathrm{X}$ ($\mathrm{riX} = \mathrm{X}$)

Определение 7. Совокупность всех предельных точек множества X называется замыканием и обозначается clX или $\bar{\mathrm{X}}$. (Точка $x \in \mathbb{R}^n$ - предельная точка множества X, если $\exists\{x_k\}$ из X, которая сходится к x)

Определение 8. Граница $\partial \mathrm{X}$ (относительная граница $r\partial \mathrm{X}$) множества X - это $\mathrm{clX} \setminus \mathrm{intX}$ ($\mathrm{clX} \setminus \mathrm{riX}$)

Теорема 2 (Теорема). Любое непустое выпуклое множество $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую относительную внутренность riX

Зачем нужна концепция относительной внутренности? Часто оказывается, что внутренность выпуклого множества пуста. Например, если взять отрезок в двумерном пространстве, то все его точки не являются внутренними. Однако интуитивно понятно, что точки отличные от концевых точек отрезка, обладают определенными свойствами, присущими внутренней точке. Надо только погрузить данный отрезок в его аффинную оболочку, и забыть об остальных точках двумерного пространства $\mathbb{R}^2$. Поэтому вводят понятие относительной внутренности.

Замечание 1. Если $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ лежит в пространстве меньшей размерности чем n, то каждая точка X - граничная.

Утверждение 4. Если X - аффинное, то либо $\mathrm{intX} = \varnothing$, либо $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$.

Утверждение 5. Если $\mathrm{intX} \neq \varnothing$, то $\mathrm{riX} = \mathrm{intX}$.

Утверждение 6. $\mathrm{riX} \subseteq \mathrm{X} \subseteq \mathrm{clX}$

Упражнение 2. Найдем относительную внутренность следующих множеств:

1. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ri}X = X = \bar{X}$;
2. $X = [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}^n$ - отрезок в $\mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ri}X = (a, b)$ – интервал в $\mathbb{R}^n$;
3. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \le x \le b\}$, – параллелепипед в $\mathbb{R}^n \quad \Rightarrow$
$$\mathrm{ri}X = \mathrm{int}X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < x < b\} \text{ – открытый параллелепипед в } \mathbb{R}^n;$$
4. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \le 1,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ – эллипсоид в $\mathbb{R}^n \quad \Rightarrow$
$$\mathrm{ri}X = \mathrm{int}X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 < 1,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\} \text{ – открытый эллипсоид в } \mathbb{R}^n;$$
5. $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 = 1,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ri}X = \mathrm{int}X = \varnothing$;
6. $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x_1 \le 1,\ -1 \le x_2 \le 1,\ x_3 = 0\} \quad \Rightarrow$
$$\mathrm{int}X = \varnothing, \quad \mathrm{ri}X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x_1 < 1,\ -1 < x_2 < 1,\ x_3 = 0\};$$
7. $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x_1 \le 1,\ -1 \le x_2 \le 1\} \quad \Rightarrow$
$$\mathrm{int}X = \mathrm{ri}X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1 < 1,\ -1 < x_2 < 1\}.$$

Сумма (разность) Минковского

Определение 9. Алгебраической суммой Минковского двух множеств A, B из $\mathbb{R}^n$ называется множество вида
$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Определение 10. Алгебраической суммой Минковского двух множеств A, B из $\mathbb{R}^n$ называется множество вида
$$A - B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x + B \subset A\}$$

Упражнение 3. Определите сумму(разность) следующих множеств.

1. $A + B,\ A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty \le 1\},\ B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \le \frac{1}{4}\right\}$
2. $A + B,\ A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \le -1, x_1 < 0\},\ B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \ge 1, x_1 > 0\}$
3. $A - B,\ A = B_R(a) \subset \mathbb{R}^n,\ B = B_R(b) \subset \mathbb{R}^n,\ R > r$
4. $A - B,\ A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \le 2\},\ B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$

Выпуклое множество

Определение 11. Множество $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ - **выпуклое**, если вместе с любой парой точек $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ оно содержит все точки вида $x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$ при $\theta \in [0,1]$.

(т.е. вместе с каждой парой точек, во множестве содержится и весь отрезок их соединяющий)

Примеры:

- любое аффинное множество
- луч, отрезок
- гиперплоскость
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = b,\ a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\},\ b \in \mathbb{R}\}$$
- полупространство
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \leq b,\ a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\},\ b \in \mathbb{R}\}$$
- полиэдр
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{A}x \preceq b,\ \mathrm{C}x = d\},$$
где $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}^{p\times n},\ d \in \mathbb{R}^p$, символ $\preceq$ – поэлементное неравенство $\leq$

  (полиэдр представляет собой пересечение конечного числа полупространств и гиперплоскостей)
- стандартный симплекс (частный случай полиэдра)
$$\triangle_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \succeq 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}$$
- шар в произвольной норме $\mathbb{R}^n$
$$\mathrm{B}(r, x_c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_c\| \leq r\}$$
- эллипсоид
$$\mathcal{E}(x_c, \mathrm{P}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-x_c)^\top \mathrm{P}^{-1}(x-x_c) \leq 1\right\},$$
где $\mathrm{P} = \mathrm{P}^\top \succ 0$ - симметричная и положительно определенная матрица
- решение системы линейных неравенств $\{x \mid \mathrm{A}x \leq b\},\ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m$

Определение 12. Пусть $x_1, .., x_k \in \mathrm{G}$, тогда при $\sum\limits_{i=1}^k \theta_i = 1,\ \theta_i \geq 0$ точка $\theta_1 x_1 + .. + \theta_k x_k$ - **выпуклая комбинация точек** $x_1, .., x_k$.

Определение 13. Множество всех выпуклых комбинаций точек $\left\{\sum\limits_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in \mathrm{G},\ \sum\limits_{i=1}^k \theta_i = 1,\ \theta_i \geq 0\right\}$ - **выпуклая оболочка множества** ($\mathbf{conv}(\mathrm{G})$).

Как установить выпуклость множества?

- **по определению** пусть $x_1, x_2 \in \mathrm{X},\ \theta \in [0,1]$, тогда $x_\theta = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathrm{X}$
- показать, что X получено из выпуклых множеств с помощью **операций, сохраняющих выпуклость**

Операции, сохраняющие выпуклость:

Пусть $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$ - выпуклые, тогда

1. $\alpha\mathrm{X} = \{\alpha x,\ x \in \mathrm{X}\},\ \alpha \in \mathbb{R}^1$ – выпукло
2. $\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \{x + y \mid x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y}\}$ – выпукло (сумма Минковского)
3. $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \{(x, y) \mid x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y}\}$ – выпукло (Декартово произведение)
4. пересечение $\mathrm{X} = \bigcap\limits_i \mathrm{X}_i$ любого конечного или бесконечного числа выпуклых множеств - выпуклое множество
5. аффинное отображение
6. перспективное отображение
7. дробно-линейное отображение

Пример 1. Сумма Минковского

Рассмотрим два множества в пространстве $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

$$\mathrm{X}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \in [-1, 1]\}$$

Их сумма $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ - выпукла как сумма выпуклых множеств. X - увеличенный прямоугольник с закругленными углами.

Пример 2. Декартово произведение

Рассмотрим цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{X} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_3 \in [-1, 1]\},$$

X - выпукло как декартово произведение выпуклых множеств (единичного круга и отрезка).

Упражнение 4. Покажите, что пересечение любого числа выпуклых множеств - выпукло.

Доказательство. Пусть I - произвольное множество индексов, а $\mathrm{X} = \bigcap\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$.

- $\mathrm{X}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ - выпуклое множество $\forall i \in \mathrm{I}$
- если $\mathrm{X} = \varnothing$, то X выпукло по определению

- если $X \neq \varnothing$, тогда $\exists\ x_1, x_2 \in X \ \rightarrow\ x_1, x_2 \in X_i\ \forall i \in I$
- так как X_i - выпуклое, то $\forall \theta \in [0, 1]$

$$x_\theta = \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in X_i \quad \forall i \in I$$

- $x_\theta \in X \ \rightarrow\ X -$ выпукло

$\square$

Аффинное отображение

- Аффинная функция: $f(x) = Ax + b$, где $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m$
- Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - выпуклое множество
  Образ $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ - выпуклое множество
- Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^m$ - выпуклое множество
  Прообраз $f^{-1}(G) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in G\}$ - выпуклое множество
- растяжение, проекция, перенос

Пример 3. Аффинное отображение

- Эллипсоид в $\mathbb{R}^n$

$$f(X) = \{Lx + a \mid x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 \leq 1\}$$

- $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - невырожденная матрица, $a \in \mathbb{R}^n$
- $f(x) = Lx + a$ - аффинная функция
- $f(X)$ - выпукло как образ выпуклого множества (единичного шара) при аффинном преобразовании $f(x)$

Перспективное отображение

- Перспективная функция

$$P(x, t) = \frac{x}{t}$$

$$P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- образ и прообраз - выпуклые множества

Линейно-дробное отображение

- Линейно-дробная функция

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}x + b}{c^\top x + d}, \quad f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\mathrm{dom} f = \left\{ x \mid c^\top x + d > 0 \right\}$$

- образ и прообраз - выпуклые множества

Теорема 3. Теорема Каратеодори.

Пусть $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ - произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда любую точку из $\mathbf{conv}(\mathrm{X})$ можно представить в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ точек из X.

Упражнение 5. Покажите, что G - выпукло $\Longleftrightarrow$, когда $\mathrm{G} = \mathbf{conv}(\mathrm{G})$.

Упражнение 6. Шар по норме в $\mathbb{R}^n \ : \ \mathrm{B}(r, x_c) = \{x \mid \|x - x_c\| \le r\}$ - выпуклое множество.

Решение. Покажем, что выпуклая комбинация точек множества принадлежит множеству: $x_\theta \in \mathrm{B}(x_c, r)$?

- пусть $x_1, x_2 \in \mathrm{B}(x_c, r), \ \theta \in [0, 1]$
- $\|x_\theta - x_c\| = \|\theta x_1 + (1-\theta) x_2 - x_c\| \le \|\theta(x_1 - x_c) + (1-\theta)(x_2 - x_c)\| \le$
  $\le \theta\|x_1 - x_c\| + (1-\theta)\|x_2 - x_c\| \le r$
- $x_\theta \in \mathrm{B}(x_c, r) \ \to \ \mathrm{B}(x_c, r) -$ выпукло

□

Замечание 2. Открытый шар $\{x \mid \|x - x_c\| < r\}$ также является выпуклым множеством.

Упражнение 7. Докажите по определению выпуклость следующих множеств:

- $\mathrm{M}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{A}x \le b\}$
- $\mathrm{M}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{A}x = b\}$
- $\mathrm{M}_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{A}_1 x \le b_1, \ \mathrm{A}_2 x \le b_2\}$
- $\mathrm{M}_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \le x_2\}$
- $\mathrm{M}_5 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\mathrm{T} x \le 1\right\}$

Упражнение 8. Выполните следующие упражнения.

- Покажите, что множество выпукло тогда и только тогда, когда его пересечение с любой прямой выпукло.
- Покажите, что множество аффинно тогда и только тогда, когда его пересечение с любой прямой аффинно.

- Являются ли выпуклыми множества:

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \quad \min x_i = 1 \quad i = 1, .., n\};$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \quad \min x_i \geq 1 \quad i = 1, .., n\}?$$

- Является ли выпуклым множество:

$$\{a \in \mathbb{R}^k \quad | \quad p(0) = 1, \quad |p(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]\},$$

если

$$p(t) = a_1 + a_2 t + ... + a_k t^{k-1}?$$

.

Упражнение 9. Являются ли следующие множества выпуклыми?

1. $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq a^\top x \leq \beta\right\}$
2. $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i x_i \leq \beta_i, \ i = 1, \ldots, n\}$
3. $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^\top x \leq b_1, \ a_2^\top \leq b_2\right\}$
4. $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leq \|x - y\|_2 \ \forall y \in \mathrm{S}, \ \mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^n\}$
   множество точек, которые лежат ближе к точке x_0, чем к множеству S
5. $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, \mathrm{S}) \leq \operatorname{dist}(x, \mathrm{T}), \ \mathrm{S}, \mathrm{T} \subseteq \mathbb{R}^n\}$,
   где $\operatorname{dist}(x, \mathrm{S}) = \inf\{\|x - z\|_2 \mid z \in \mathrm{S}\}$
6. $\{x \mid x + \mathrm{S}_2 \subseteq \mathrm{S}_1, \ \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^n\}$,
   где S_1 – выпуклое множество

Упражнение 10. Пусть $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^n, \ \|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^n, \ a \geq 0$, рассмотрим множество S_a:

$$\mathrm{S}_a = \{x \mid \operatorname{dist}(x, \mathrm{S}) \leq a\},$$

где $\operatorname{dist}(x, \mathrm{S}) = \inf\limits_{y \in \mathrm{S}} \|x - y\|$.

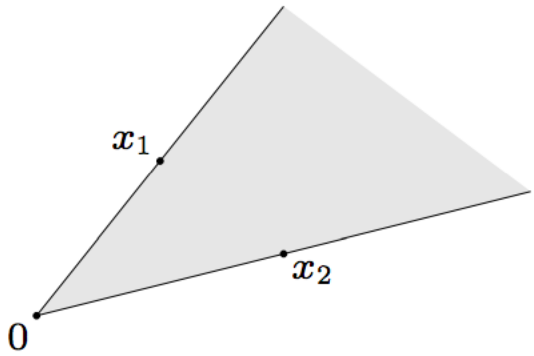
Покажите, что если S – выпукло, то S_a также является выпуклым множеством.

Коническое множество (конус)

Определение 14. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - **конус**, если вместе с любой точкой $x \in X$, оно содержит все точки вида θx, при $\theta \in \mathbb{R}_+$.

(т.е. вместе с каждой точкой, во множестве содержится и луч из нуля в направлении x).

Определение 15. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - **выпуклый конус**, если вместе с любыми точками $x_1, x_2 \in X$, оно содержит все точки вида $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$, при $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}_+$.



Определение 16. Пусть K – конус. Тогда множество

$$K^* = \left\{ y \mid x^\top y \geq 0 \quad \forall x \in K \right\}$$

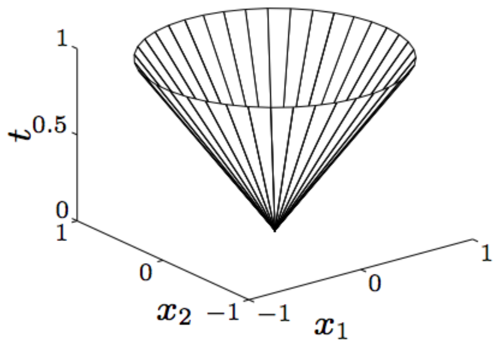
называется **двойственным конусом** для K.

Определение 17. Конус K – называется **proper cone**, если

- K – выпуклое,
- K – замкнутое,
- K имеет непустую внутренность,
- K – заостренный, что значит не содержит прямых.

Примеры:

- $\mathbb{R}^n$, 0, $\varnothing$, луч, линейные подпространства
- $\left\{ (x, |x|) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ – конус, но невыпуклый конус
- $\left\{ (x, t) \mid \|x\| \leq t \right\}$ – нормальный конус



(в l_2 называется конусом второго порядка или Лоренцевым конусом)

- решение системы линейных неравенств $\mathrm{A}x \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^n$, если все компоненты матрицы A имеют один и тот же знак
- пространство симметричных матриц (векторное пространство размерности $n(n+1)/2$)

$$\mathbb{S}^n = \left\{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathrm{X} = \mathrm{X}^\top\right\}$$

- конус симметричных положительно полуопредленных матриц (в векторном пространстве размерности $n(n+1)/2$)

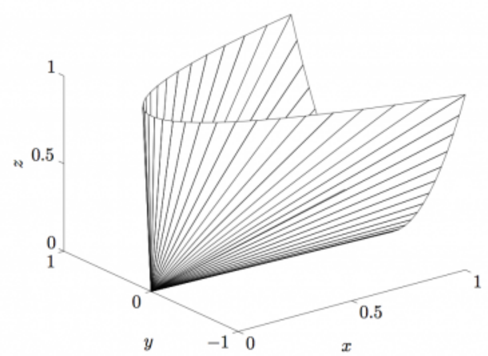
$$\mathbb{S}^n_+ = \left\{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = \mathrm{X}^\top, \; \mathrm{X} \succeq 0\right\}$$

- конус симметричных положительно опредленных матриц (в векторном пространстве размерности $n(n+1)/2$)

$$\mathbb{S}^n_{++} = \left\{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathrm{X} = \mathrm{X}^\top, \; \mathrm{X} \succ 0\right\}$$

Конус симметричных положительно полуопредленных матриц в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^2_+ \iff x, z \geq 0, \; xz \geq y^2$$



Упражнение 11. В пространстве $\mathbb{S}^n$ множество $\mathbb{S}^n_+$ - выпукло.

Решение. Покажем по определению.

- пусть $\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2 \in \mathbb{S}^n_+,\ \theta \in [0,1]$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$$x^\top \mathrm{X}_\theta x = x^\top \left(\theta \mathrm{X}_1 + (1-\theta)\mathrm{X}_2\right) x = \theta x^\top \mathrm{X}_1 x + (1-\theta) x^\top \mathrm{X}_2 x \geq 0$$
-
$$\mathrm{X}_\theta \in \mathbb{S}^n_+ \ \rightarrow\ \mathbb{S}^n_+ - \text{выпукло}$$
- (аналогично множество $\mathbb{S}^n_{++}$ также является выпуклым)

□

Определение 18. Пусть $x_1, .., x_k \in \mathrm{G}$, тогда при $\theta_i \geq 0$ точка $\theta_1 x_1 + .. + \theta_k x_k$ - **коническая (неотриц.) комбинация точек** $x_1, .., x_k$.

Определение 19. Множество всех конических комбинаций точек $\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in \mathrm{G},\ \theta_i \geq 0\right\}$ - **коническая оболочка множества** (**cone**(G)).

Утверждение 7. Покажите, что

- пересечение конусов - конус;
- пересечене выпуклых конусов - выпуклый конус.