Лекция 7

Гидродинамические уравнения

Гидродинамические уравнения

Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ

ТОМ VI

ГИДРОДИНАМИКА

Очень советую открыть «Гидродинамику» и изучать лекцию с открытым учебником…

Гидродинамические уравнения, вывод которых обязательно нужно изучить

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\, \boldsymbol{V}) = 0$$

Закон сохранения количества вещества

$$\frac{\partial (\rho\, V_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

Уравнение Навье-Стокса

Тензор плотности потоков импульса:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k.$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k.$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

Релятивистская пыль…

$$T^{ik} = \rho u^i u^k$$

ρ — плотность массы (покоя), u_i— компоненты [4-скорости]

Теория поля…

$$T_{ij} = E_i D_j + B_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) = E_i D_j + B_i H_j - \delta_{ij} W,$$

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k.$$

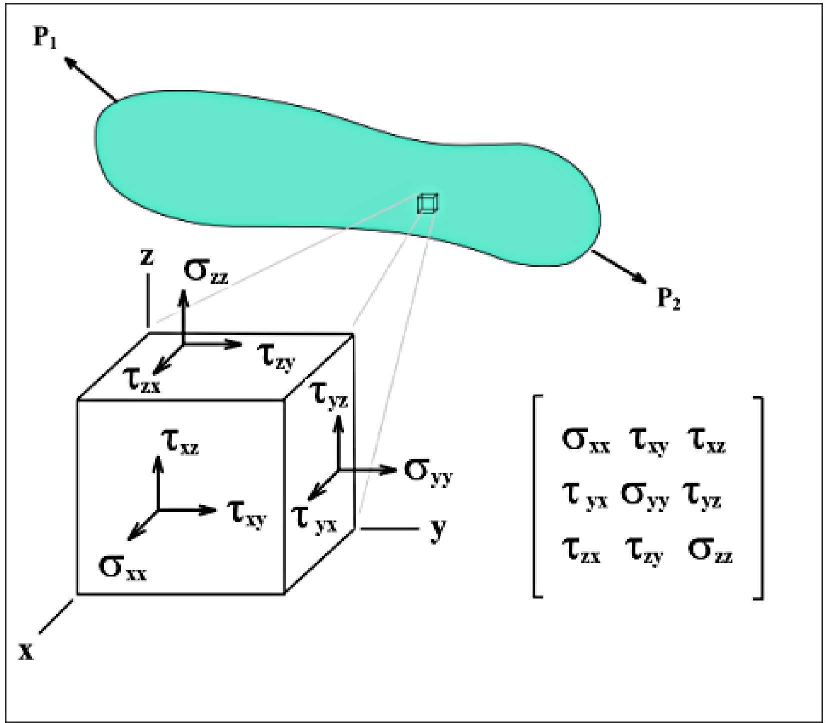
$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

Тензор напряжений и тензор вязких напряжений

механическое напряжение - тензорная величина. Компоненты тензора напряжений равны отношению компоненты силы, действующей на элементарную площадку, к её площади:

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BD%D0%B0%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta F_i}{\Delta S_j}.$$



https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BD%D0%B7%D0%BE%D1%80_%D0%BD%D0%B0%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9

Тензор напряжений и тензор вязких напряжений

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k.$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

идеальная жидкость

Уравнение Эйлера для идеальной жидкости

Выделим в жидкости некоторый объем. Полная сила, действующая на выделенный объем жидкости, равна интегралу

$$-\oint p\,d\mathbf{f},$$

взятому по поверхности рассматриваемого объема. Преобразуя его в интеграл по объему, имеем

$$-\oint p\,d\mathbf{f} = -\int \operatorname{grad} p\,dV.$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p$$

Это мы уже получили:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p$$

$$dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v}$$

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\, dt + (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$$

Баланс импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_i v_k.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_i v_k .$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}}$$

Уравнение Навье-Стокса

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

Физический смысл тензора Π_{ik}

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, dV = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \, dV.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, dV = -\oint \Pi_{ik} \, df_k$$

Таким образом, Π_{ik} есть i-я компонента количества импульса, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. Тензор Π_{ik} называют *тензором плотности потока импульса*. Поток энергии, являющейся скалярной величиной, определяется вектором; поток же импульса, который сам есть вектор, определяется тензором второго ранга.

Вязкая жидкость

В вязкой жидкости тоже справедливо уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

- Вязкость (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии еще дополнительного, необратимого, переноса импульса из мест с большей скоростью в места с меньшей.
- Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к «идеальному» потоку импульса дополнительный член, определяющий необратимый, «вязкий», перенос импульса в жидкости.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

- Вязкость (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии еще дополнительного, необратимого, переноса импульса из мест с большей скоростью в места с меньшей.
- Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к «идеальному» потоку импульса дополнительный член, определяющий необратимый, «вязкий», перенос импульса в жидкости.

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

тензор напряжений, тензор вязких напряжений.

Тензор вязких напряжений?

- Процессы внутреннего трения в жидкости возникают только в тех случаях, когда различные участки жидкости движутся с различной скоростью, так что имеет место движение частей жидкости друг относительно друга.
- Поэтому вязкий тензор должно зависеть от производных от скорости по координатам.
- Если скорость жидкости равна нулю, то вязкость не проявляется.
- Если вся жидкость как целое совершает равномерное вращение, вязкость не проявляется.

При равномерном вращении с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ скорость $\mathbf{v}$ равна векторному произведению $[\mathbf{\Omega r}]$. Линейными комбинациями производных $\partial v_i/\partial x_k$, обращающимися в нуль при $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$, являются суммы

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Поэтому σ'_{ik} должно содержать именно эти симметричные комбинации производных $\partial v_i/\partial x_k$.

Наиболее общим видом тензора второго ранга, удовлетворяющего этим условиям, является

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

$$\eta > 0,\ \ \zeta > 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}}$$

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

Уравнения Навье-Стокса

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}}$$

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}}$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)$$

Уравнения Навье-Стокса

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) =$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)$$

Вязкости не зависят от координат

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}}$$

Несжимаемая жидкость

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}$$

Вывод.
Уравнение Навье-Стокса с учетом вязкости:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}}$$

Часто именно это уравнение называют уравнением Навье-Стокса

Почему вязкость положительная?

Полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{\rho}{2}\int v^2\,dV.$$

Вычислим производную от этой энергии по времени. Для этого пишем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

и подставляем для производной $\partial v_i/\partial t$ ее выражение, согласно уравнению Навье–Стокса:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

В результате получаем

$$\boxed{v_i\sigma'_{ik}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla p + v_i\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} =$$

$$= -\rho(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right) + \operatorname{div}(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla p + v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} =$$

$$= -\rho(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + \operatorname{div}(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Здесь через $(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')$ обозначен вектор с компонентами $v_i\sigma'_{ik}$. Замечая, что в несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, можно написать первый член справа в виде дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - (\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')\right] - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho v^2}{2}\,dV = -\oint\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - (\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')\right]d\mathbf{f} - \int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,dV.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\rho v^2}{2}\, dV = -\oint\left[\rho \mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)-(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')\right] d\mathbf{f} - \int \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, dV.$$

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\int \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, dV = -\frac{1}{2}\int \sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) dV$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\frac{\eta}{2}\int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV.$$

Отсюда следует, что вязкость положительная.

Спасибо за внимание!