2ое-задание

Задача 10

Найти к-т диффузии тяжелого газа в легком. Первый способ решения (интуитивный).

Радиус тяжелых частиц МНОГО БОЛЬШЕ среднего расстояния между легкими частицами.

Тогда работает обычная гидродинамика.

Формула Стокса.

жет быть вычислен по их так называемой *подвижности*.

Предположим, что на эти частицы действует некоторая постоянная внешняя сила $\mathbf{f}$ (например, сила тяжести). В стационарном состоянии сила, действующая на каждую частицу, должна уравновешиваться силой сопротивления, испытываемой движущейся частицей со стороны жидкости. При не слишком больших скоростях сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости. Написав ее в виде $\mathbf{v}/b$, где b — постоянная, и приравнивая внешней силе $\mathbf{f}$, получим

$$\mathbf{v} = b\mathbf{f}, \tag{60.4}$$

т. е. скорость, приобретаемая частицей под влиянием внешней силы, пропорциональна этой силе. Постоянная b называется *подвижностью* и может быть, в принципе, вычислена с помощью гидродинамических уравнений. Так, для частиц, имеющих форму шариков (радиуса R), сила сопротивления равна $6\pi\eta R v$ (см. (20.14)), а потому подвижность

$$b = \frac{1}{6\pi\eta R}. \tag{60.5}$$

Что такое соотношение Эйнштейна?

Подвижность b связана с коэффициентом диффузии D простым соотношением. Для его вывода напишем диффузионный поток $\mathbf{i}$, который содержит наряду с обычным членом $-\rho D\nabla c$, связанным с градиентом концентрации (температуру предполагаем постоянной), также и член, связанный со скоростью, приобретаемой частицей под влиянием внешних сил. Этот последний член равен $\rho c\mathbf{v} = \rho cb\mathbf{f}$. Таким образом [1]),

$$\mathbf{i} = -\rho D\nabla c + \rho cb\mathbf{f}. \tag{60.7}$$

Перепишем это выражение в виде

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{(\partial\mu/\partial c)_{T,\,p}}\nabla\mu + \rho cb\mathbf{f},$$

где μ — химический потенциал взвешенных частиц (играющих роль растворенного вещества). Зависимость этого потенциала от концентрации (в слабом растворе) дается выражением

$$\mu = T\ln c + \psi(p,\,T)$$

(см. V, § 87), так что

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho Dc}{T}\nabla\mu + \rho cb\mathbf{f}.$$

В состоянии термодинамического равновесия диффузия отсутствует и поток $\mathbf{i}$ должен обращаться в нуль. С другой стороны, при наличии внешнего поля условие равновесия требует постоянства вдоль раствора суммы $\mu+U$, где U — потенциальная энергия взвешенной частицы в этом поле. Тогда $\nabla\mu = -\nabla U = -\mathbf{f}$ и из равенства $\mathbf{i} = 0$ получим

$$D = Tb. \tag{60.8}$$

Е. М. ЛИФШИЦ, Л. П. ПИТАЕВСКИЙ

ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

§ 12. Диффузия тяжелого газа в легком

Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда мала концентрация тяжелого газа в смеси. В этом случае коэффициент диффузии можно вычислить косвенным способом, не прибегая к помощи кинетического уравнения. Именно, определим так называемую *подвижность* частиц тяжелого газа, предполагая его находящимся во внешнем поле. Подвижность же b связана с коэффициентом диффузии этих же частиц известным соотношением Эйнштейна

$$D = bT \qquad (12,1)$$

(см. VI, § 59).

Подвижность есть, по определению, коэффициент пропорциональности между средней скоростью $\mathbf{V}$, приобретаемой частицей газа во внешнем поле, и действующей на частицу со стороны поля силой $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{V} = b\mathbf{f}. \qquad (12,2)$$

Скорость же $\mathbf{V}$ определяется в данном случае из условия взаимной компенсации силы $\mathbf{f}$ и силы сопротивления $\mathbf{f}_r$, испытываемой движущейся тяжелой частицей со стороны легких (столкновениями тяжелых частиц друг с другом можно пренебречь ввиду их относительной редкости). Функция распределения легких частиц является при этом максвелловской:

$$f_0 = \frac{N_1}{(2\pi m_1 T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_1 v^2}{2T}\right),$$

где m_1 — масса легкой частицы.

Рассмотрим какую-нибудь одну определенную тяжелую частицу; пусть ее скорость есть $\mathbf{V}$. Перейдем теперь к системе координат, движущейся вместе с этой частицей, и пусть $\mathbf{v}$ обозначает скорости легких частиц в этой новой системе. Функция распределения легких частиц в этой системе координат есть $f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V})$ (ср. с (6,9)). Предполагая скорость $\mathbf{V}$ малой, можем написать

$$f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V}) \approx f_0(v)\left(1-\frac{m_1\mathbf{v}\mathbf{V}}{T}\right). \qquad (12,3)$$

Искомую силу сопротивления $\mathbf{f}_r$ можно вычислить как полный импульс, передаваемый тяжелой частице легкими, которые сталкиваются с нею в единицу времени. Тяжелая частица остается при столкновении неподвижной. Легкая же частица приносит с собой импульс $m_1\mathbf{v}$; после столкновения, при котором ее импульс поворачивается на угол α, она уносит с собой импульс, равный в среднем $m_1\mathbf{v}\cos\alpha$. Поэтому импульс, передаваемый при таком столкновении тяжелой частице, равен в среднем $m_1\mathbf{v}(1-\cos\alpha)$. Умножая его на плотность потока легких частиц со скоростью $\mathbf{v}$

$$f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V}) \approx f_0(v)\left(1 - \frac{m_1 \mathbf{v}\mathbf{V}}{T}\right). \tag{12,3}$$

Искомую силу сопротивления $\mathbf{f}_r$ можно вычислить как полный импульс, передаваемый тяжелой частице легкими, которые сталкиваются с нею в единицу времени. Тяжелая частица остается при столкновении неподвижной. Легкая же частица приносит с собой импульс $m_1\mathbf{v}$; после столкновения, при котором ее импульс поворачивается на угол α, она уносит с собой импульс, равный в среднем $m_1\mathbf{v}\cos\alpha$. Поэтому импульс, передаваемый при таком столкновении тяжелой частице, равен в среднем $m_1\mathbf{v}(1-\cos\alpha)$. Умножая его на плотность потока легких частиц со скоростью $\mathbf{v}$ и на сечение $d\sigma$ такого столкновения и интегрируя, получим полный передаваемый тяжелой частице импульс:

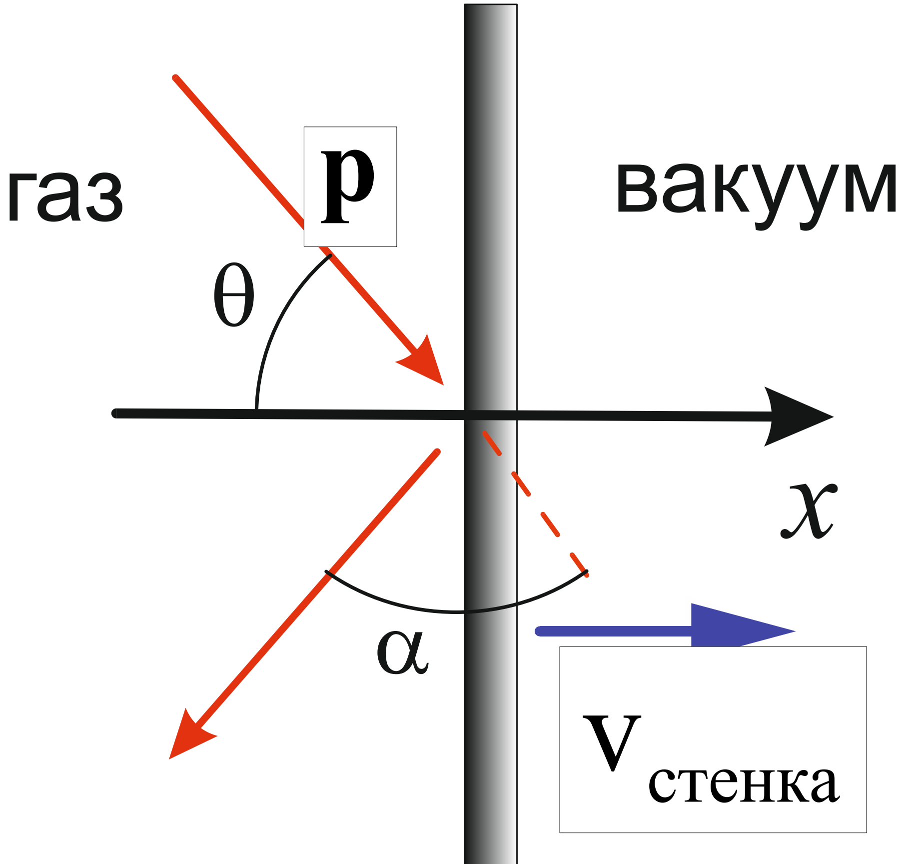
$$\mathbf{f}_r = m_1 \int f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V})\, v\mathbf{v}\sigma_t\, d^3p,$$

$$F_{стенка} = \sigma_{стенка} P_{стенка} = \sigma_{стенка} \Pi_{xx} = \sigma_{стенка} \int p_x \, \mathrm{v}_x \, f d\Gamma.$$

$$F_x = \sigma_{стенка} P_{стенка} = \sigma_{стенка} 2\Pi_{xx} = \sigma_{стенка} 2\int p_x \mathrm{v}_x f d\Gamma =$$

$$= \sigma_{стенка} 2\int p \ \mathrm{v} \cos^2\theta f d\Gamma = \int p \ \mathrm{v}\left(1-\cos\alpha\right)\sigma_{стенка} f d\Gamma =$$

$$= \int p \ \mathrm{v}\sigma_{tr} f d\Gamma = \int p \ \mathrm{v}\sigma_{tr} f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V})d\Gamma \approx F_0 + \mathbf{V}\int p \ \mathrm{v}\sigma_{tr} \ \mathrm{v}_x \frac{\partial}{\partial\varepsilon} f_0(\varepsilon)d\Gamma \ldots$$

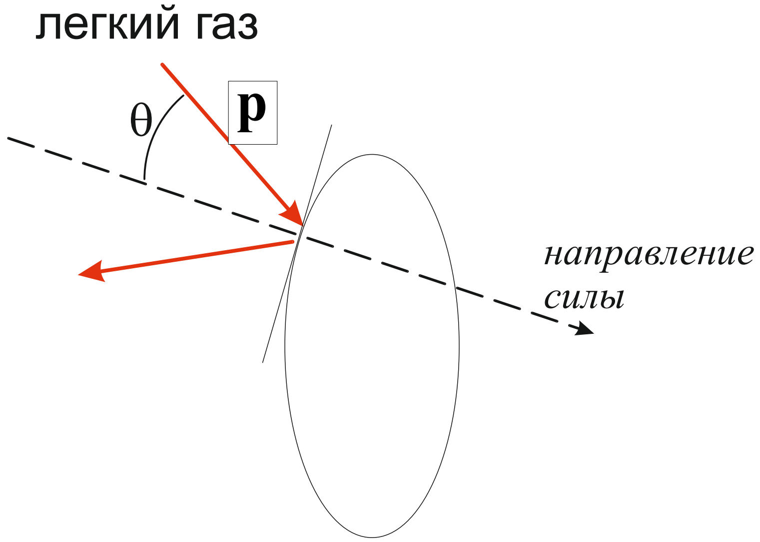


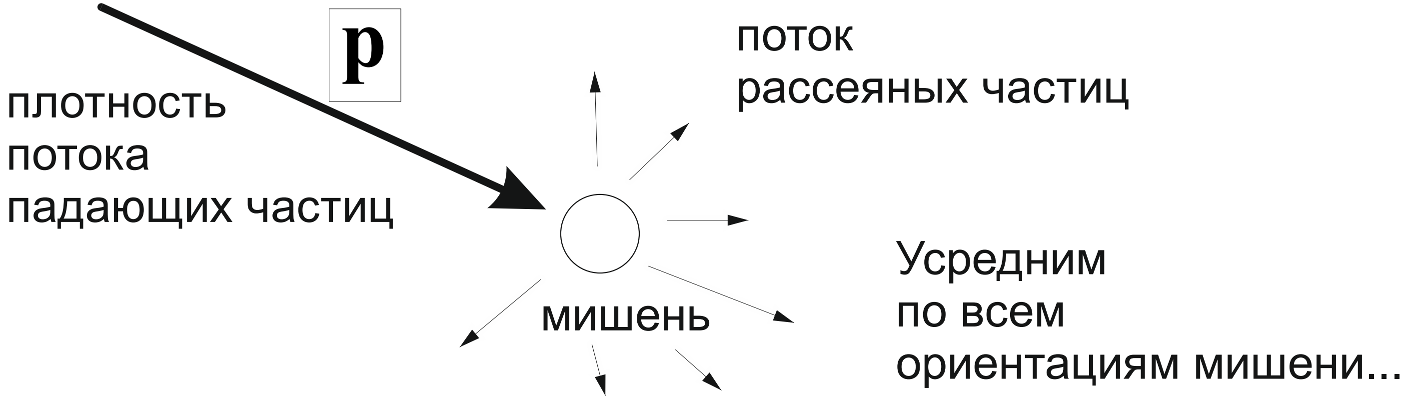
$$2\cos^2\theta = \cos\left(2\theta\right) + 1 =$$

$$= \cos\left(\pi - \alpha\right) + 1 = 1 - \cos\alpha$$

Искомую силу сопротивления $\mathbf{f}_r$ можно вычислить как полный импульс, передаваемый тяжелой частице легкими, которые сталкиваются с нею в единицу времени. Тяжелая частица остается при столкновении неподвижной. Легкая же частица приносит с собой импульс $m_1\mathbf{v}$; после столкновения, при котором ее импульс поворачивается на угол α, она уносит с собой импульс, равный в среднем $m_1\mathbf{v}\cos\alpha$. Поэтому импульс, передаваемый при таком столкновении тяжелой частице, равен в среднем $m_1\mathbf{v}(1-\cos\alpha)$. Умножая его на плотность потока легких частиц со скоростью $\mathbf{v}$ и на сечение $d\sigma$ такого столкновения и интегрируя, получим полный передаваемый тяжелой частице импульс:

$$\mathbf{f}_r = m_1 \int f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V})\, v\mathbf{v}\sigma_t\, d^3p,$$





$$\mathbf{f}_r = m_1 \int f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V})\, v\mathbf{v}\sigma_t\, d^3p,$$

где опять введено обозначение (11,4). При подстановке сюда $f_0(\mathbf{v}+\mathbf{V})$ в виде (12,3) первый член обращается в нуль (интегрированием по направлениям скорости $\mathbf{v}$), так что остается

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2}{T} \int f_0(v)\,(\mathbf{V}\mathbf{v})\,\mathbf{v}v\sigma_t\, d^3p,$$

или, усредняя по направлениям $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2}{3T}\mathbf{V} \int f_0(v)\,\sigma_t v^3\, d^3p = -N_1\frac{m_1^2}{3T}\mathbf{V}\,\langle\sigma_t v^3\rangle,$$

где угловые скобки снова обозначают усреднение по обычному максвелловскому распределению. Наконец, имея в виду, что в рассматриваемом случае $N_1 \gg N_2$, пишем $N_1 \approx N = P/T$, так что

$$\mathbf{f}_r = -\frac{m_1^2 P}{3T^2}\langle\sigma_t v^3\rangle\,\mathbf{V}.$$

Приравняв нулю сумму силы сопротивления $\mathbf{f}_r$ и внешней силы $\mathbf{f}$, получим согласно (12,2) подвижность b, а затем и искомый коэффициент диффузии

$$D = bT = \frac{3T^3}{m_1^2 P\,\langle\sigma_t v^3\rangle}. \qquad (12,4)$$