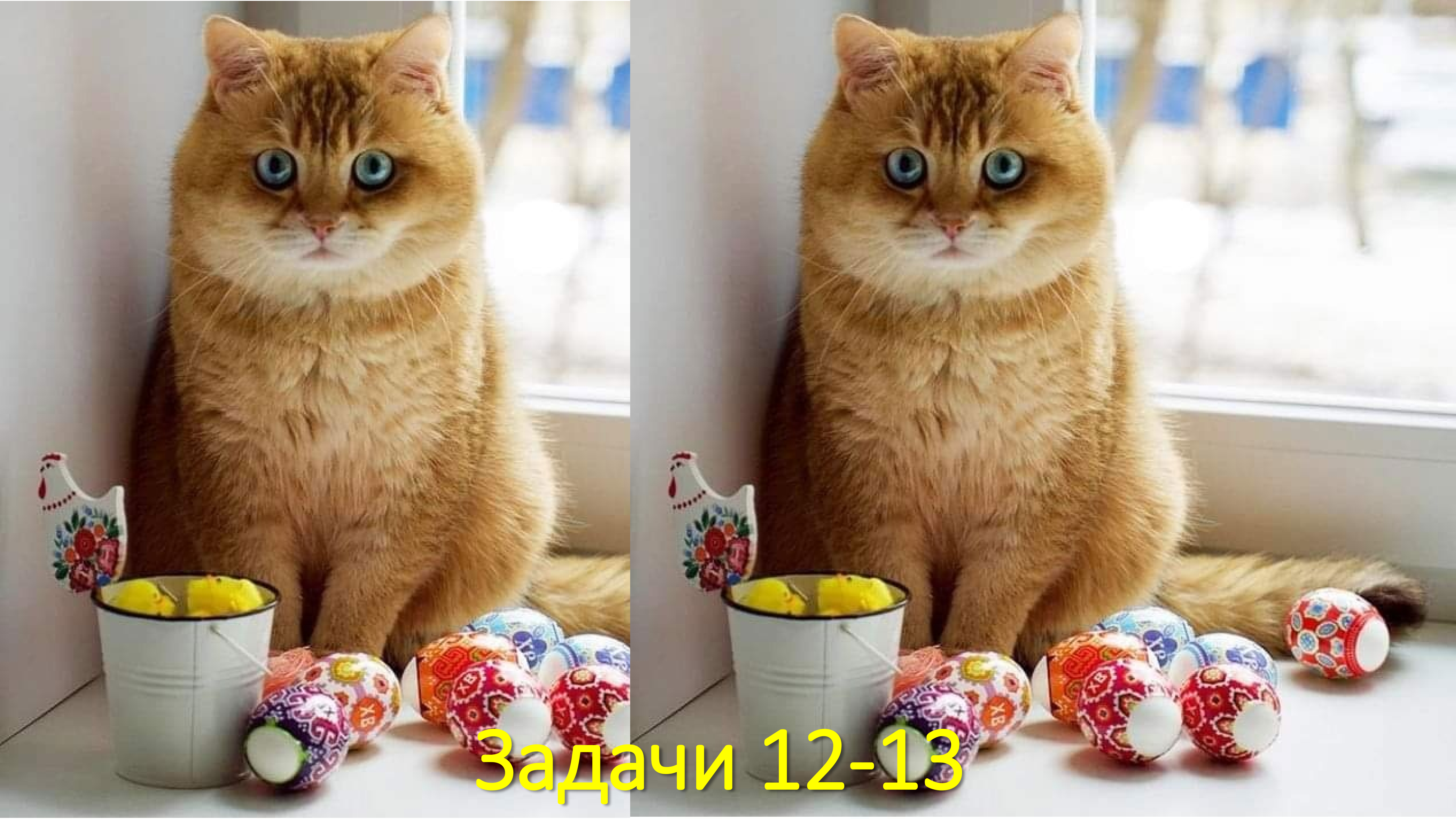

Задачи 12-13

Уравнение Ланжевена (m=1)

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} = f(t)$$

ν – сила трения

$f(t)$ – случайная сила

Нас интересует коррелятор

$$\left\langle \left(\hat{x}(t) - \hat{x}(0) \right) \left(\hat{x}(t) - \hat{x}(0) \right) \right\rangle$$

Усреднение понимается так:

$$\langle \ldots \rangle = \mathrm{tr}\left(\hat{\rho} \ldots \right), \quad \hat{\rho} = \frac{\exp\left(-\hat{H} / T\right)}{Z}, \quad Z = \mathrm{tr}\left(\exp\left(-\hat{H} / T\right) \right).$$

Раскроем скобки

$$\left\langle\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle=\left\langle\hat{x}(t)\hat{x}(t)+\hat{x}(0)\hat{x}(0)-\hat{x}(0)\hat{x}(t)-\hat{x}(t)\hat{x}(0)\right\rangle$$

$$\boxed{\left\langle\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle=2\left\langle\hat{x}(0)\hat{x}(0)\right\rangle-\left\langle\hat{x}(0)\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(0)\right\rangle}$$

Здесь $\hbar = 1$

$$\hat{x}(t)=e^{i\hat{H}t}\hat{x}(0)e^{-i\hat{H}t},$$

$$\hat{x}(t)\hat{x}(t)=e^{i\hat{H}t}\hat{x}(0)e^{-i\hat{H}t}e^{i\hat{H}t}\hat{x}(0)e^{-i\hat{H}t}=e^{i\hat{H}t}\hat{x}(0)\hat{x}(0)e^{-i\hat{H}t},$$

$$\left\langle\hat{x}(t)\hat{x}(t)\right\rangle=Z^{-1}\,\mathrm{tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}e^{i\hat{H}t}\hat{x}(0)\hat{x}(0)e^{-i\hat{H}t}\right)=$$

$$=Z^{-1}\,\mathrm{tr}\left(e^{-i\hat{H}t}e^{-\beta\hat{H}}e^{i\hat{H}t}\hat{x}(0)\hat{x}(0)\right)=Z^{-1}\,\mathrm{tr}\left(e^{-i\hat{H}t}e^{i\hat{H}t}e^{-\beta\hat{H}}\hat{x}(0)\hat{x}(0)\right)=$$

$$=Z^{-1}\,\mathrm{tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\hat{x}(0)\hat{x}(0)\right)=\left\langle\hat{x}(0)\hat{x}(0)\right\rangle=\left\langle\hat{x}^2(0)\right\rangle$$

Раскроем скобки

$$\boxed{\left\langle \left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle = 2\left\langle \hat{x}(0)\hat{x}(0)\right\rangle - \left\langle \hat{x}(0)\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(0)\right\rangle}$$

Вывод:

$$\boxed{\left\langle \left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle \neq \left\langle \left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)^2 \right\rangle}$$

Введем обозначение для корреляционных функций двух операторов (в представлении гейзенберга):

$$G_{AB}^{K}(t,t') = -i\left\langle \left\{ A(t), B(t') \right\}_{+} \right\rangle,$$

$$G_{AB}^{r}(t,t') = -i\theta(t-t')\left\langle \left[A(t), B(t') \right]_{-} \right\rangle = \left\langle\left\langle A(t) \mid B(t') \right\rangle\right\rangle.$$

Введем обозначение для корреляционных функций двух операторов (в представлении гейзенберга):

$$G_{AB}^{K}(t,t') = -i\left\langle \left\{ A(t), B(t') \right\}_{+} \right\rangle,$$

$$G_{AB}^{r}(t,t') = -i\theta(t-t')\left\langle \left[A(t), B(t') \right]_{-} \right\rangle = \left\langle\left\langle A(t) \mid B(t') \right\rangle\right\rangle.$$

При усреднении по равновесной матрице плотности:

$$G_{AB}^{K}(t-t') = -i\left\langle \left\{ A(t), B(t') \right\}_{+} \right\rangle,$$

$$G_{AB}^{r}(t-t') = -i\theta(t-t')\left\langle \left[A(t), B(t') \right]_{-} \right\rangle = \left\langle\left\langle A(t) \mid B(t') \right\rangle\right\rangle.$$

$$\boxed{G_{AB}^{K}(t-t')\,?=?-i\left\langle\left\{A(t),B(t')\right\}_{+}\right\rangle}$$

На этом слайде $\hbar = 1$

$$G_{AB}^{K}(t,t') = -i\left\langle\left\{A(t),B(t')\right\}_{+}\right\rangle = -i\,\mathrm{tr}\left(\rho\left\{e^{-iHt}Ae^{-iHt},e^{iHt'}Be^{-iHt'}\right\}_{+}\right) =$$

$$= -i\,\mathrm{tr}\left(\rho\left(e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}Be^{-iHt'}+e^{iHt'}Be^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}\right)\right) =$$

$$= -iZ^{-1}\,\mathrm{tr}\left(e^{-\beta H}\left(e^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}B+Be^{-iHt'}e^{iHt}Ae^{-iHt}e^{iHt'}\right)\right) =$$

$$= -iZ^{-1}\,\mathrm{tr}\left(e^{-\beta H}\left(e^{iH(t-t')}Ae^{-iH(t-t')t}B+Be^{iH(t-t')t}Ae^{-iH(t-t')t}\right)\right) =$$

$$= -i\left\langle\left\{A(t-t'),B(0)\right\}_{+}\right\rangle = G_{AB}^{K}(t-t').$$

$$G_{AB}^{K}(t-t')=-i\left\langle\left\{A(t),B(t')\right\}_{+}\right\rangle,$$

$$G_{AB}^{r}(t-t')=-i\theta(t-t')\left\langle\left[A(t),B(t')\right]_{-}\right\rangle=\left\langle\left\langle A(t)\,|\,B(t')\right\rangle\right\rangle.$$

$$G_{AB}^{K}(\omega)=-i\int dt\left\langle\left\{A(t),B(0)\right\}_{+}\right\rangle e^{i\omega t},$$

$$G_{AB}^{r}(\omega)=\int dt\left\langle\left\langle A(t)\,|\,B(0)\right\rangle\right\rangle e^{i\omega t}.$$

$$G_{AB}^{K}(\omega)=2i\,\mathrm{Im}\left(G_{AB}^{r}(\omega)\right)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).$$

$$G^K_{AB}(t-t')=-i\left\langle\left\{A(t),B(t')\right\}_+\right\rangle,$$

$$G^r_{AB}(t-t')=-i\theta(t-t')\left\langle\left[A(t),B(t')\right]_-\right\rangle=\left\langle\left\langle A(t)\,|\,B(t')\right\rangle\right\rangle.$$

$$G^K_{AB}(\omega)=-i\int dt\left\langle\left\{A(t),B(0)\right\}_+\right\rangle e^{i\omega t},$$

$$G^r_{AB}(\omega)=\int dt\left\langle\left\langle A(t)\,|\,B(0)\right\rangle\right\rangle e^{i\omega t}.$$

ФДТ --
Флуктуационно Диссипативная Теорема
(д-во на лекции):

$$\boxed{G^K_{AB}(\omega)=2i\,\mathrm{Im}\left(G^r_{AB}(\omega)\right)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).}$$

Вернемся к задаче про коррелятор координаты броуновской частицы

$$\boxed{\left\langle \left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle = 2\left\langle \hat{x}(0)\hat{x}(0)\right\rangle - \left\langle \hat{x}(0)\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(0)\right\rangle}$$

Исследуем поведение корреляторов:

$$\left\langle \hat{x}(0)\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(0)\right\rangle = iG^K_{xx}(t)$$

$$-i\theta(t)\left\langle [\hat{x}(t),\hat{x}(0)]\right\rangle = G^R_{xx}(t)$$

$$-i\theta(t)\langle[x(t),x(0)]\rangle = G^R_{xx}(t) = \langle\langle x(t)\,|\,x(0)\rangle\rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle x(t)\,|\,x(0)\rangle\rangle = -i\theta(t)\langle[\dot{x}(t),x(0)]\rangle - i\delta(t)\langle[x(t),x(0)]\rangle =$$

$$= \langle\langle \dot{x}(t)\,|\,x(0)\rangle\rangle - i\delta(t)\langle[x(0),x(0)]\rangle = \langle\langle \dot{x}(t)\,|\,x(0)\rangle\rangle.$$

$$\Downarrow$$

$$-i\omega G^R_{xx}(\omega) = G^R_{\dot{x}x}(\omega).$$

$$\boxed{-i\omega\langle\langle x(\omega)\,|\,x\rangle\rangle = \langle\langle \dot{x}(\omega)\,|\,x\rangle\rangle.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle x(t)\,|\,x(0)\rangle\rangle=\langle\langle \dot{x}(t)\,|\,x(0)\rangle\rangle.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle\langle x(t)\,|\,x(0)\rangle\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle \dot{x}(t)\,|\,x(0)\rangle\rangle=\langle\langle \ddot{x}(t)\,|\,x(0)\rangle\rangle-i\delta(t)\langle[\dot{x}(0),x(0)]\rangle$$

$$-i\omega\langle\langle \dot{x}(\omega)\,|\,x\rangle\rangle=\langle\langle \ddot{x}(\omega)\,|\,x\rangle\rangle-i\langle[\dot{x},x]\rangle.$$

В итоге,

$$\begin{cases} -i\omega\left\langle\left\langle x(\omega)\,|\,x\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle \dot{x}(\omega)\,|\,x\right\rangle\right\rangle, \\ -i\omega\left\langle\left\langle \dot{x}(\omega)\,|\,x\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle \ddot{x}(\omega)\,|\,x\right\rangle\right\rangle - i\left\langle[\dot{x}, x]\right\rangle, \\ \ldots \end{cases}$$

Поверим в то, что квантовые операторы тоже удовлетворяют ур. Ланжевена

$$\ddot{x}+\nu\dot{x}=f(t)\Rightarrow\ddot{x}=f(t)-\nu\dot{x}.$$

$$\begin{cases}-i\omega\langle\langle x\,|\,x\rangle\rangle_\omega=\langle\langle\dot{x}\,|\,x\rangle\rangle_\omega\,,\\ -i\omega\langle\langle\dot{x}\,|\,x\rangle\rangle_\omega=\langle\langle\ddot{x}\,|\,x\rangle\rangle_\omega-i\langle[\dot{x},x]\rangle.\end{cases}$$

$$[\dot{x},x]=-i,$$

$$\langle\langle f(t)\,|\,x(t')\rangle\rangle=-i\theta(t-t')\langle[f(t),x(t')]_-\rangle=0.$$

Поверим в то, что квантовые операторы тоже удовлетворяют ур. Ланжевена

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} = f(t) \Rightarrow \ddot{x} = f(t) - \nu \dot{x}.$$

$$\begin{cases} -i\omega \left\langle\left\langle x \mid x \right\rangle\right\rangle_\omega = \left\langle\left\langle \dot{x} \mid x \right\rangle\right\rangle_\omega, \\ -i\omega \left\langle\left\langle \dot{x} \mid x \right\rangle\right\rangle_\omega = \left\langle\left\langle \ddot{x} \mid x \right\rangle\right\rangle_\omega - i\left\langle [\dot{x}, x] \right\rangle. \end{cases}$$

$$[\dot{x}, x] = -i,$$

$$\left\langle\left\langle f(t) \mid x(t') \right\rangle\right\rangle = -i\theta(t - t')\left\langle [f(t), x(t')]_- \right\rangle = 0.$$

Поверим в то, что квантовые операторы тоже удовлетворяют ур. Ланжевена

$$\ddot{x}+\nu\dot{x}=f(t)\Rightarrow\ddot{x}=f(t)-\nu\dot{x}.$$

$$\begin{cases}-i\omega\langle\langle x\,|\,x\rangle\rangle_{\omega}=\langle\langle\dot{x}\,|\,x\rangle\rangle_{\omega},\\ -i\omega\langle\langle\dot{x}\,|\,x\rangle\rangle_{\omega}=\langle\langle\ddot{x}\,|\,x\rangle\rangle_{\omega}-i\langle[\dot{x},x]\rangle=-\nu\langle\langle\dot{x}\,|\,x\rangle\rangle_{\omega}-\hbar.\end{cases}$$

$$[\dot{x},x]=-i\hbar,$$

$$\langle\langle f(t)\,|\,x(t')\rangle\rangle=-i\theta(t-t')\langle[f(t),x(t')]_{-}\rangle=0.$$

$$\begin{cases} -i\omega \langle\langle x \mid x \rangle\rangle_\omega = \langle\langle \dot{x} \mid x \rangle\rangle_\omega, \\ -i\omega \langle\langle \dot{x} \mid x \rangle\rangle_\omega = -\nu \langle\langle \dot{x} \mid x \rangle\rangle_\omega - \hbar. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle\langle \dot{x} \mid x \rangle\rangle_\omega = \frac{\hbar}{i\omega - \nu}.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle\langle x \mid x \rangle\rangle_\omega = \frac{1}{-i\omega} \frac{\hbar}{i\omega - \nu}.}$$

$$\langle\langle x \mid x \rangle\rangle_\omega = \frac{1}{-i\omega}\frac{\hbar}{i\omega - \nu}.$$

$$\boxed{\operatorname{Im}\langle\langle x \mid x \rangle\rangle_\omega = -\frac{\hbar\nu}{\omega\left(\omega^2+\nu^2\right)}.}$$

$$\boxed{G^K_{AB}(\omega) = 2i\operatorname{Im}\langle\langle A \mid B \rangle\rangle_\omega \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).}$$

ФДТ:

$$G_{AB}^{K}(\omega) = 2i\,\mathrm{Im}\langle\langle A \,|\, B \rangle\rangle_{\omega} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).$$

$$\mathrm{Im}\langle\langle x \,|\, x \rangle\rangle_{\omega} = -\frac{\hbar\nu}{\omega\left(\omega^{2}+\nu^{2}\right)}.$$

$$-i\langle x(t)x(0) + x(0)x(t) \rangle_{\omega} = 2i\frac{-\hbar\nu}{\omega\left(\omega^{2}+\nu^{2}\right)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right),$$

$$\langle x(t)x(0) + x(0)x(t) \rangle_{\omega} = \frac{2\hbar\nu}{\omega\left(\omega^{2}+\nu^{2}\right)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).$$

Подведем Итоги:

$$\left\langle x(t)x(0)+x(0)x(t)\right\rangle_{\omega}=\frac{2\hbar\nu}{\omega\left(\omega^{2}+\nu^{2}\right)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).$$

$$\boxed{\left\langle\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle=2\left\langle\hat{x}(0)\hat{x}(0)\right\rangle-\left\langle\hat{x}(0)\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(0)\right\rangle}$$

Тогда получим:

$$\left\langle x(t)x(0)+x(0)x(t)\right\rangle_{\omega}=\frac{2\hbar\nu}{\omega\left(\omega^{2}+\nu^{2}\right)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\left\langle\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle=2\left\langle\hat{x}(0)\hat{x}(0)\right\rangle-\left\langle\hat{x}(0)\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(0)\right\rangle=\\&=\int\frac{2\nu\hbar}{\omega\left(\omega^{2}+\nu^{2}\right)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\left(1-e^{-i\omega t}\right)\frac{d\omega}{2\pi}\end{aligned}}$$

По своему физическому смыслу, интеграл вещественный. Поэтому нас интересует интеграл

$$\left\langle \left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle = \int \frac{2\nu\hbar}{\omega\left(\omega^2+\nu^2\right)}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\left(1-\cos(\omega t)\right)\frac{d\omega}{2\pi}$$

В пределе высоких температур,

$$\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\to\frac{2T}{\hbar\omega}.$$

$$\boxed{\left\langle \left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle = \int \frac{4\nu T}{\omega^2\left(\omega^2+\nu^2\right)}\left(1-\cos(\omega t)\right)\frac{d\omega}{2\pi}}$$

$$I(t) = \left\langle \left(\hat{x}(t) - \hat{x}(0) \right) \left(\hat{x}(t) - \hat{x}(0) \right) \right\rangle = \int \frac{4\nu T}{\omega^2 \left(\omega^2 + \nu^2 \right)} \left(1 - \cos(\omega t) \right) \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int \frac{4\nu T}{\omega \left(\omega^2 + \nu^2 \right)} \sin(\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{2\nu T}{\pi} \int \frac{\sin(z)}{z \left(\nu^2 + (z/t)^2 \right)} dz \to_{t\to\infty}$$

$$\to \frac{2T}{\pi\nu} \int \frac{\sin(z)}{z} dz = \frac{2T}{\nu}.$$

$$I(t)=\left\langle\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle=\int\frac{4\nu T}{\omega^2\left(\omega^2+\nu^2\right)}\left(1-\cos(\omega t)\right)\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}I(t)=\int\frac{4\nu T}{\omega^2+\nu^2}\cos(\omega t)\frac{d\omega}{2\pi}=\int\frac{4\nu T}{\omega^2+\nu^2}e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=2Te^{-\nu|t|}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}I(t)=-\frac{2T}{\nu}e^{-\nu t}+\frac{2T}{\nu}.}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} I(t) = -\frac{2T}{\nu} e^{-\nu t} + \frac{2T}{\nu}.}$$

$$\boxed{I(t) = \frac{2T}{\nu^2} e^{-\nu t} + \frac{2T}{\nu} t - \frac{2T}{\nu^2} = \frac{2T}{\nu} t - \frac{2T}{\nu^2}\left(1 - e^{-\nu t}\right).}$$

$$I(t) = \left\langle \left(\hat{x}(t) - \hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t) - \hat{x}(0)\right) \right\rangle$$

В пределе малых t получаем баллистическое движение…

$$I(t)=\frac{2T}{\nu^2}e^{-\nu t}+\frac{2T}{\nu}t-\frac{2T}{\nu^2}=\frac{2T}{\nu}t-\frac{2T}{\nu^2}\left(1-e^{-\nu t}\right).$$

$$\left\langle\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\left(\hat{x}(t)-\hat{x}(0)\right)\right\rangle\approx\frac{2T}{\nu}t-\frac{2T}{\nu^2}\left(1-1+\nu t-\frac{(\nu t)^2}{2}\right)=Tt^2=\left\langle \mathrm{v}_x^2\right\rangle t^2.$$

$\left\langle \mathrm{v}_x^2\right\rangle=T,$ так как $m=1$

В пределе больших t получаем диффузию

$$I(t) = \frac{2T}{\nu^2} e^{-\nu t} + \frac{2T}{\nu} t - \frac{2T}{\nu^2} = \frac{2T}{\nu} t - \frac{2T}{\nu^2}\left(1 - e^{-\nu t}\right).$$

$$\left\langle \left(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)\right)\left(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)\right) \right\rangle \approx \frac{6T}{\nu} t = Dt.$$

$$D = 6T/\nu = 6T\tau.$$

Подведем итоги:

$$\left\langle \left(x(t) - x(0) \right)\left(x(t) - x(0) \right) \right\rangle = \frac{2T}{\nu^2} e^{-\nu t} + \frac{2T}{\nu} t - \frac{2T}{\nu^2} = \frac{2T}{\nu} t - \frac{2T}{\nu^2}\left(1 - e^{-\nu t} \right),$$

$$\left\langle \left(r(t) - r(0) \right)\left(r(t) - r(0) \right) \right\rangle = 3\left(\frac{2T}{\nu} t - \frac{2T}{\nu^2}\left(1 - e^{-\nu t} \right) \right).$$

Найдем коррелятор скорости (классический предел)

$$\left\langle \dot{x}(t)\dot{x}(0) \right\rangle.$$

$$\left\langle \left(x(t)-x(t')\right)\left(x(t)-x(t')\right)\right\rangle = 2\left\langle \hat{x}(0)\hat{x}(0)\right\rangle - \left\langle \hat{x}(t')\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(t')\right\rangle ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}\left\langle \left(x(t)-x(t')\right)\left(x(t)-x(t')\right)\right\rangle = -\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}\left(\left\langle \hat{x}(t')\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(t')\right\rangle\right) =$$

$$= -\left\langle \dot{x}(t)\dot{x}(t')+\dot{x}(t')\dot{x}(t)\right\rangle .$$

Корреляторы зависят от t-t’!!!

$$\left\langle \left(x(t)-x(t')\right)\left(x(t)-x(t')\right)\right\rangle = 2\left\langle \hat{x}(0)\hat{x}(0)\right\rangle - \left\langle \hat{x}(t')\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(t')\right\rangle,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}\left\langle \left(x(t)-x(t')\right)\left(x(t)-x(t')\right)\right\rangle = -\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}\left(\left\langle \hat{x}(t')\hat{x}(t)+\hat{x}(t)\hat{x}(t')\right\rangle\right) =$$

$$= -\left\langle \dot{x}(t)\dot{x}(t')+\dot{x}(t')\dot{x}(t)\right\rangle.$$

Корреляторы зависят от t-t’!!!

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}\left\langle \left(x(t)-x(t')\right)\left(x(t)-x(t')\right)\right\rangle = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\langle \left(x(t)-x(t')\right)\left(x(t)-x(t')\right)\right\rangle =$$

$$= -\left\langle \dot{x}(t)\dot{x}(t')+\dot{x}(t')\dot{x}(t)\right\rangle.$$

Итак, коррелятор скорости равен

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big\langle\big(x(t)-x(0)\big)\big(x(t)-x(0)\big)\Big\rangle=\Big\langle\dot{x}(t)\dot{x}(0)+\dot{x}(0)\dot{x}(t)\Big\rangle.$$

В нашей задаче:

$$\Big\langle\big(x(t)-x(0)\big)\big(x(t)-x(0)\big)\Big\rangle=\frac{2T}{\nu^2}e^{-\nu t}+\frac{2T}{\nu}t-\frac{2T}{\nu^2}=\frac{2T}{\nu}t-\frac{2T}{\nu^2}\Big(1-e^{-\nu t}\Big),$$

$$\frac{1}{2}\Big\langle\dot{x}(t)\dot{x}(0)+\dot{x}(0)\dot{x}(t)\Big\rangle=Te^{-\nu t}=\Big\langle \mathrm{v}_x^2\Big\rangle e^{-\nu t}.$$

Итак, коррелятор скорости равен

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\langle \left(x(t)-x(0)\right)\left(x(t)-x(0)\right)\right\rangle = \left\langle \dot{x}(t)\dot{x}(0)+\dot{x}(0)\dot{x}(t)\right\rangle.$$

Заметим, что (это проверьте сами):

$$D=\int_0^\infty \left\langle \mathbf{v}(t)\mathbf{v}(0)+\mathbf{v}(0)\mathbf{v}(t)\right\rangle dt.$$

Задача 13

С.Н. БУРМИСТРОВ

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

Задача 13

29. Запишем действие S для полной физической системы: частица + среда

$$S[q(t), x_\alpha(t)] = \int \left[\frac{M\dot{q}^2}{2} - U_0(q) + \sum_\alpha \left(\frac{m\dot{x}_\alpha^2}{2} - \frac{m\omega_\alpha^2 x_\alpha^2}{2} \right) - q \sum_\alpha C_\alpha x_\alpha \right] dt.$$

Последнее слагаемое отвечает за взаимодействие частицы со средой. Уравнения движения для частицы и фононов имеют вид

$$M\ddot{q} + U_0'(q) = -\sum_\alpha C_\alpha x_\alpha,$$

$$m\ddot{x}_\alpha + m\omega_\alpha^2 x_\alpha = -qC_\alpha.$$

$$M\ddot{q} + U_0'(q) = -\sum_\alpha C_\alpha x_\alpha,$$

$$m\ddot{x}_\alpha + m\omega_\alpha^2 x_\alpha = -qC_\alpha.$$

Решение линейного уравнения на $x_\alpha(t)$ представим в виде суммы вынужденных и свободных колебаний

$$x_\alpha(t) = -C_\alpha \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin\omega_\alpha(t-s)}{m\omega_\alpha} q(s)\,ds + x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha^R(t-s)q(s)\,ds + x_\alpha^{(\text{св})}(t),$$

где мы распространили интегрирование по всему возможному интервалу времени, а также ввели *функцию запаздывающего отклика* K_α^R

$$K_\alpha^R(t) = -\vartheta(t)\frac{C_\alpha \sin\omega_\alpha t}{m\omega_\alpha}$$

$$M\ddot{q} + U_0'(q) = -\sum C_\alpha x_\alpha,$$

$$x_\alpha(t) = -C_\alpha \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\sin\omega_\alpha(t-s)}{m\omega_\alpha} q(s)\,ds + x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha t =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\alpha^R(t-s)q(s)\,ds + x_\alpha^{(\text{св})}(t)$$

Суммарная сила $F(t)$, действующая на частицу, определяется соотношением

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^R(t-s)\,q(s)\,ds + f(t),$$

$$f(t) = -\sum_\alpha C_\alpha \left(x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha t \right).$$

$$M\ddot{q} + U_0'(q) = -\sum C_\alpha x_\alpha,$$

$$x_\alpha(t) = -C_\alpha \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\sin\omega_\alpha(t-s)}{m\omega_\alpha} q(s)\,ds + x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha t =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\alpha^R(t-s)q(s)\,ds + x_\alpha^{(\text{св})}(t)$$

Суммарная с

$$K^R(t) = -\sum_\alpha C_\alpha K_\alpha^R(t) = \vartheta(t)\sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\sin\omega_\alpha t}{m\omega_\alpha}.$$

ляется соотношением

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^R(t-s)\,q(s)\,ds + f(t),$$

$$f(t) = -\sum_\alpha C_\alpha\left(x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha t\right).$$

$$K^R(t) = -\sum_\alpha C_\alpha K_\alpha^R(t) = \vartheta(t) \sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\sin \omega_\alpha t}{m\omega_\alpha}.$$

Ее фурье-компонента легко находится и может быть выражена через спектральную плотность $J(\Omega)$

$$K^R(\omega) = \sum_\alpha \frac{C_\alpha^2}{m\left[\omega_\alpha^2 - (\omega + i\delta)^2\right]} \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Omega}{\Omega^2 - (\omega + i\delta)^2} J(\Omega)\, d\Omega.$$

$$\boxed{J(\Omega) = \sum_\alpha \frac{\pi}{2m} C_\alpha^2 \delta(\Omega - \omega_\alpha)}$$

Окончательно, мы получим следующее уравнение движения частицы

$$M\ddot{q} + U_0'(q) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^R(t-s)\, q(s)\, ds + f(t).$$

$$K^R(t) = -\sum_\alpha C_\alpha K_\alpha^R(t) = \vartheta(t) \sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\sin \omega_\alpha t}{m\omega_\alpha}\,.$$

Ее фурье-компонента легко находится и может быть выражена через спектральную плотность $J(\Omega)$

$$K^R(\omega) = \sum_\alpha \frac{C_\alpha^2}{m\left[\omega_\alpha^2 - (\omega + i\delta)^2\right]} \equiv \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\Omega}{\Omega^2 - (\omega + i\delta)^2} J(\Omega)\, d\Omega.$$

$$f(t) = -\sum_\alpha C_\alpha \left(x_\alpha(0) \cos \omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha} \sin \omega_\alpha t \right)$$

$$K^R(\omega) = \sum_\alpha \frac{C_\alpha^2}{m\left[\omega_\alpha^2 - (\omega + i\delta)^2\right]} \equiv \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Omega}{\Omega^2 - (\omega + i\delta)^2} J(\Omega)\, d\Omega.$$

Разобъем функцию отклика K^R на две части, одна из которых K_0 — частотно-независимая

$$K_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(\Omega)}{\Omega} d\Omega = \sum_\alpha \frac{C_\alpha^2}{m\omega_\alpha},$$

а другая ее часть K_1^R — частотно-зависимая $\boxed{J(\Omega) = \sum_\alpha \frac{\pi}{2m} C_\alpha^2 \delta(\Omega - \omega_\alpha)}$

$$K_1^R(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(\Omega)}{\Omega} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - (\omega + i\delta)^2} d\Omega,$$

так что $K^R(\omega) = K_0 + K_1^R(\omega)$. Если $J(\Omega) = \eta\Omega$, то легко убедиться, что

Разобъем функцию отклика K^R на две части, одна из которых K_0 — частотно-независимая

$$K_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(\Omega)}{\Omega}d\Omega = \sum_\alpha \frac{C_\alpha^2}{m\omega_\alpha},$$

$$\boxed{J(\Omega) = \sum_\alpha \frac{\pi}{2m} C_\alpha^2 \delta(\Omega - \omega_\alpha)}$$

а другая ее часть K_1^R — частотно-зависимая

$$K_1^R(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(\Omega)}{\Omega}\frac{\omega^2}{\Omega^2 - (\omega + i\delta)^2}d\Omega,$$

так что $K^R(\omega) = K_0 + K_1^R(\omega)$. Если $J(\Omega) = \eta\Omega$, то легко убедиться, что

$$K_1^R(\omega) = i\omega\eta \quad \text{и} \quad K^R(\omega) = K_0 + i\omega\eta.$$

ча рых K_0 —

$$K_1^R(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(\Omega)}{\Omega}\frac{\omega^2}{\Omega^2-(\omega+i\delta)^2}d\Omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(\Omega)}{\Omega}\frac{\omega^2}{\Omega^2-\omega^2-2i\omega\delta}d\Omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\eta\int_0^\infty \omega^2 i\pi\,\mathrm{sign}(\omega)\delta\left(\Omega^2-\omega^2\right)d\Omega=i\omega\eta.$$

а другая ее часть K_1^R — частотно-зависимая

$$J(\Omega)=\sum_\alpha \frac{\pi}{2m}C_\alpha^2\delta(\Omega-\omega_\alpha)$$

$$K_1^R(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J(\Omega)}{\Omega}\frac{\omega^2}{\Omega^2-(\omega+i\delta)^2}d\Omega,$$

так что $K^R(\omega)=K_0+K_1^R(\omega)$. Если $J(\Omega)=\eta\Omega$, то легко убедиться, что

$$K_1^R(\omega)=i\omega\eta \quad \text{и} \quad K^R(\omega)=K_0+i\omega\eta.$$

$$K_1^R(\omega) = i\omega\eta \quad \text{и} \quad K^R(\omega) = K_0 + i\omega\eta.$$

Выполняя обратное фурье-преобразование находим временное представление для функции отклика

$$K^R(t) = K_0\,\delta(t) - \eta\,\delta'(t).$$

Подставим $K^R(t)$ в уравнение движения для частицы и вычислим интегралы

$$M\ddot{q} + U_0'(q) = K_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)\,q(s)\,ds - \eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-s)q(s)\,ds + f(t) =$$

$$= K_0 q(t) - \eta\dot{q}(t) + f(t).$$

Предварительный итог:

Это уравнение мы запишем в форме *уравнения Ланжевена* с коэффициентом трения η и силой трения, пропорциональной скорости частицы $\dot{q}$

$$M\ddot{q} + \eta\dot{q} + U'(q) = f(t) \quad \text{и} \quad U(q) = U_0(q) - K_0 q^2/2.$$

Таким образом, взаимодействие частицы со средой приводит, во-первых, к перенормировке потенциальной энергии частицы $U_0(q) \to U(q)$, во-вторых, к возникновению силы трения и, в третьих, к появлению случайной силы $f(t)$, свойства которой зависят от состояния среды.

$$\boxed{f(t) = -\sum_{\alpha} C_{\alpha}\left(x_{\alpha}(0)\cos\omega_{\alpha}t + \frac{\dot{x}_{\alpha}(0)}{\omega_{\alpha}}\sin\omega_{\alpha}t\right)}$$

Случайные силы

Перейдем к рассмотрению свойств случайной силы $f(t)$. Поскольку для термодинамически равновесной системы термодинамическое среднее координаты осциллятора и его скорости равны нулю, т.е. $\langle x_\alpha(0)\rangle = 0$ и $\langle \dot{x}_\alpha(0)\rangle = 0$, то среднее значение случайной силы будет также равно нулю

$$\langle f(t)\rangle = 0.$$

Коррелятор силы второго порядка определяется двойной суммой

$$\langle f(t)\,f(t')\rangle = \sum_{\alpha\beta} C_\alpha C_\beta \Big\langle \left(x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha t\right) \times$$

$$\times \left(x_\beta(0)\cos\omega_\beta t' + \frac{\dot{x}_\beta(0)}{\omega_\beta}\sin\omega_\beta t'\right)\Big\rangle.$$

Случайные силы

Перейдем к рассмотрению свойств случайной силы $f(t)$. Поскольку для термодинамически равновесной системы термодинамическое среднее координаты осциллятора и его скорости равны нулю, т. е. $\langle x_\alpha(0) \rangle = 0$

$$f(t) = -\sum_\alpha C_\alpha \left(x_\alpha(0) \cos \omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha} \sin \omega_\alpha t \right)$$

Коррелятор силы второго порядка определяется двойной суммой

$$\langle f(t) f(t') \rangle = \sum_{\alpha\beta} C_\alpha C_\beta \left\langle \left(x_\alpha(0) \cos \omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha} \sin \omega_\alpha t \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(x_\beta(0) \cos \omega_\beta t' + \frac{\dot{x}_\beta(0)}{\omega_\beta} \sin \omega_\beta t' \right) \right\rangle .$$

Случайные силы

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_{\alpha\beta} C_\alpha C_\beta \left\langle \left(x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha t \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(x_\beta(0)\cos\omega_\beta t' + \frac{\dot{x}_\beta(0)}{\omega_\beta}\sin\omega_\beta t' \right) \right\rangle.$$

Так как осцилляторы или фононы независимы друг от друга, то среднее для произведения двух величин от разных осцилляторов равно произведению средних, например, $\langle x_\alpha(0)x_\beta(0)\rangle = \langle x_\alpha(0)\rangle\langle x_\beta(0)\rangle = 0$ при $\alpha \neq \beta$, и в сумме останутся только члены с $\alpha = \beta$

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_\alpha C_\alpha^2 \Big[\langle x_\alpha(0)^2\rangle \cos\omega_\alpha t \cos\omega_\alpha t' +$$
$$+ \frac{\langle x_\alpha(0)\dot{x}_\alpha(0)\rangle}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha(t+t') + \frac{\langle \dot{x}_\alpha(0)\dot{x}_\alpha(0)\rangle}{\omega_\alpha^2}\sin\omega_\alpha t \sin\omega_\alpha t' \Big].$$

Для дальнейшего заметим, что термодинамическое среднее произведения координаты и скорости для осциллятора, взятое в один и тот же момент времени равно нулю, т. е. $\langle x_\alpha(0)\dot{x}_\alpha(0)\rangle = 0$, а средний квадрат скорости легко выразить через средний квадрат координаты $\langle \dot{x}_\alpha^2(0)\rangle = \omega_\alpha^2 \langle x_\alpha^2(0)\rangle$ в силу равенства средних для кинетической и потенциальной энергий. Учитывая, что для термодинамически равновесного осциллятора при температуре T

$$\langle x_\alpha^2(0)\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_\alpha} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_\alpha}{2T},$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a),$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a).$$

$$\left\langle \hat{x}^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle (a^\dagger + a)(a^\dagger + a) \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle (a^\dagger a + aa^\dagger) \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(N_B(\omega) + 1 + N_B(\omega) \right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\operatorname{cth}\left(\frac{\omega}{2T}\right), \quad N_B(\omega) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{T}\right) - 1}.$$

весного осциллятора при температуре T

$$\langle x_\alpha^2(0) \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_\alpha} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_\alpha}{2T},$$

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_\alpha C_\alpha^2 \Big[\langle x_\alpha(0)^2\rangle \cos\omega_\alpha t \cos\omega_\alpha t' + \\ + \frac{\langle x_\alpha(0)\dot x_\alpha(0)\rangle}{\omega_\alpha} \sin\omega_\alpha (t+t') + \frac{\langle \dot x_\alpha(0)\dot x_\alpha(0)\rangle}{\omega_\alpha^2} \sin\omega_\alpha t \sin\omega_\alpha t' \Big].$$

$$\langle x_\alpha^2(0)\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_\alpha} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_\alpha}{2T},$$

найдем для временного коррелятора силы

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\hbar}{2m\omega_\alpha} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_\alpha}{2T} \cos\omega_\alpha (t-t') = \\ = \frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty J(\Omega) \operatorname{cth}\frac{\hbar\Omega}{2T} \cos\Omega(t-t')\, d\Omega = \frac{\eta}{\pi}\int_0^\infty \hbar\Omega \operatorname{cth}\frac{\hbar\Omega}{2T} \cos\Omega(t-t')\, d\Omega.$$

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_\alpha C_\alpha^2 \Big[\langle x_\alpha(0)^2\rangle \cos\omega_\alpha t \cos\omega_\alpha t' + $$
$$+ \frac{\langle x_\alpha(0)\dot{x}_\alpha(0)\rangle}{\omega_\alpha} \sin\omega_\alpha(t+t') + \frac{\langle \dot{x}_\alpha(0)\dot{x}_\alpha(0)\rangle}{\omega_\alpha^2} \sin\omega_\alpha t \sin\omega_\alpha t' \Big].$$

$$J(\Omega) = \sum_\alpha \frac{\pi}{2m} C_\alpha^2 \delta(\Omega - \omega_\alpha)$$

найдем для вре

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\hbar}{2m\omega_\alpha} \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega_\alpha}{2T} \cos\omega_\alpha(t-t') =$$
$$= \frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty J(\Omega) \operatorname{cth}\frac{\hbar\Omega}{2T}\cos\Omega(t-t')\,d\Omega = \frac{\eta}{\pi}\int_0^\infty \hbar\Omega \operatorname{cth}\frac{\hbar\Omega}{2T}\cos\Omega(t-t')\,d\Omega.$$

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\hbar}{2m\omega_\alpha} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_\alpha}{2T} \cos\omega_\alpha(t-t') =$$

$$= \frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty J(\Omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\Omega}{2T} \cos\Omega(t-t')\, d\Omega = \frac{\eta}{\pi}\int_0^\infty \hbar\Omega \operatorname{cth} \frac{\hbar\Omega}{2T} \cos\Omega(t-t')\, d\Omega.$$

В силу четности подынтегральной функции нетрудно найти фурье-компоненту временного коррелятора силы или его *спектральную плотность*

$$\langle f(t)f(t')\rangle_\Omega = \int \langle f(t)f(t')\rangle e^{i\Omega(t-t')} \frac{d\Omega}{2\pi} = \eta\hbar\Omega \operatorname{cth} \frac{\hbar\Omega}{2T} =$$

$$= \begin{cases} 2\eta T, & \text{классический предел}, \quad \hbar = 0, \\ \eta\hbar|\Omega|, & \text{квантовый предел}, \quad T = 0. \end{cases}$$

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\hbar}{2m\omega_\alpha} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_\alpha}{2T} \cos\omega_\alpha(t-t') =$$

$$= \frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty J(\Omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\Omega}{2T} \cos\Omega(t-t')\, d\Omega = \frac{\eta}{\pi}\int_0^\infty \hbar\Omega \operatorname{cth}\frac{\hbar\Omega}{2T}\cos\Omega(t-t')\, d\Omega.$$

Во временном представлении коррелятор силы $\langle f(t)f(t')\rangle_\Omega$ в двух предельных случаях равен

$$\langle f(t)\, f(t')\rangle_\Omega = \begin{cases} 2\eta T\delta(t-t'), & \text{классический предел,} \quad \hbar = 0, \\ -\dfrac{\eta\hbar}{\pi(t-t')^2}, & \text{квантовый предел,} \quad T = 0. \end{cases}$$

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\hbar}{2m\omega_\alpha} \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega_\alpha}{2T}\cos\omega_\alpha(t-t') =$$

$$= \frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty J(\Omega)\operatorname{cth}\frac{\hbar\Omega}{2T}\cos\Omega(t-t')\,d\Omega = \frac{\eta}{\pi}\int_0^\infty \hbar\Omega\operatorname{cth}\frac{\hbar\Omega}{2T}\cos\Omega(t-t')\,d\Omega.$$

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \frac{\eta}{\pi}\int_0^\infty \hbar\Omega\frac{2T}{\hbar\Omega}\cos\left(\Omega\left(t-t'\right)\right)d\Omega = \frac{\eta T}{\pi}\int_0^\infty\left(\exp\left(i\Omega\left(t-t'\right)\right)+\exp\left(-i\Omega\left(t-t'\right)\right)\right)d\Omega =$$

$$= \frac{\eta T}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(i\Omega\left(t-t'\right)\right)d\Omega = 2\eta T\delta(t-t').$$

$$\langle f(t)\,f(t')\rangle_\Omega = \begin{cases} 2\eta T\delta(t-t'), & \text{классический предел,} \quad \hbar = 0, \\ -\dfrac{\eta\hbar}{\pi(t-t')^2}, & \text{квантовый предел,} \quad T = 0. \end{cases}$$

Выводы из задачи 13

Частица, взаимодействующая с бесконечной системой осцилляторов, получает силу трения и случайные силы…

Что мы сделали… Усреднили по степеням свободы осцилляторов, но не стали усреднять по координатам частицы. Когда так можно делать? Когда осцилляторы – «термостат». Т.е. Мы пренебрегли возмущением системы осцилляторов со стороны частицы. Осцилляторы всегда равновесные!!! Они могут поглотить сколько угодно энергии частицы…