Домашняя работа 2

Кошман Дмитрий

№1

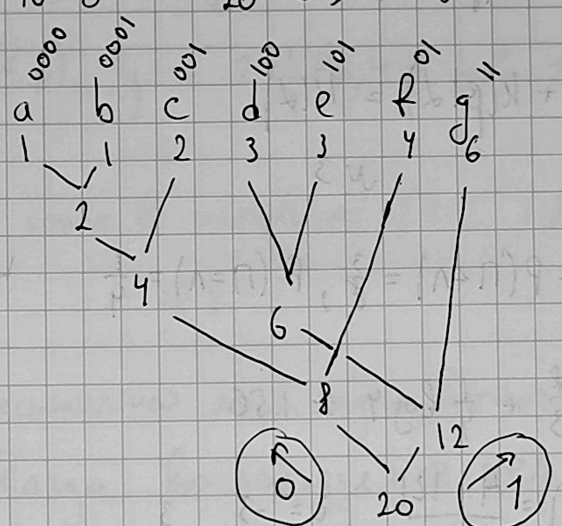
Сведем задачу к изоморфной, но проще:

$$1/1/2/3/3/4/6 \quad \Sigma = 20$$

a b c d e f g

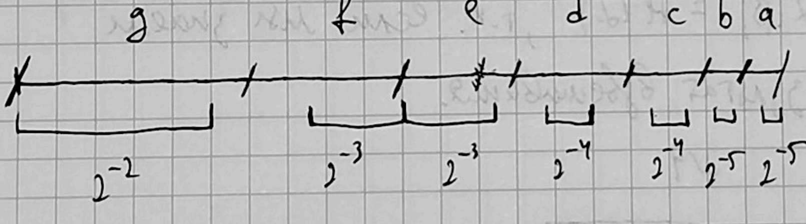
$$H = 2\cdot\frac{1}{20}\log 20 + \frac{1}{10}\log 10 + 2\cdot\frac{3}{20}\log\frac{20}{3} + \frac{1}{5}\log 5 + \frac{3}{10}\log\frac{10}{3} \approx 2.57$$

Код Хаффмана:



Длина кода: $2\cdot\frac{4}{20} + \frac{3\cdot 2}{20} + \frac{3\cdot 3}{20} + \frac{3\cdot 3}{20} + 2\cdot\frac{4}{20} + \frac{2\cdot 6}{20} = \frac{58}{20} = 2.9$

Арифметический код:



Длина кода: $\frac{2\cdot 6 + 3\cdot 4 + 3\cdot 3 + 4\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5 + 5}{20} = \frac{63}{20} = 3.15$

№2

$\alpha: \; p(0)=\frac{1}{9}, \; p(1)=\frac{1}{6}, \; p(2)=\frac{1}{6}, \; p(3)=\frac{5}{9}$

$H(\alpha)= \frac{1}{9}\log 9 + \frac{1}{6}\log 6 + \frac{1}{6}\log 6 + \frac{5}{9}\log\frac{9}{5} \approx 1.7$

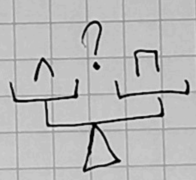
$\beta = \alpha \bmod 2, \; \beta: \; p(0)=\frac{5}{18} \quad p(1)=\frac{13}{18}$

$H(\beta)= \frac{5}{18}\log\frac{18}{5} + \frac{13}{18}\log\frac{18}{13} \approx 0.85$

$H(\alpha,\beta) = H(\alpha) + H(\beta|\alpha) = H(\alpha)$

№3

$\alpha: \; P(Л<П) = P(П<Л) = \frac{3}{8}, \; P(П=Л)=\frac{1}{4}$



$H(\alpha)= 2\cdot\frac{3}{8}\log\frac{8}{3} + \frac{1}{4}\log 4 \approx 1.56$

$\beta: \; p(Л-П=i) = \frac{4-|i|}{4\cdot 4}, \; i=-3,\dots,3$

$H(\beta)= 2\cdot\frac{1}{16}\log 16 + 2\cdot\frac{2}{16}\log 8 + 2\cdot\frac{3}{16}\log\frac{16}{3} + \frac{1}{4}\log 4 \approx 2.66$

$I(\alpha:\beta) = H(\alpha) - H(\alpha|\beta) = H(\alpha)$, т.к. если мы знаем Л−П, то знаем результат взвешивания.

№4

Совместное распределение: $\begin{array}{c|c|c} \hline x & \frac{3}{4}-x & \\ \hline \frac{1}{2}-x & x-\frac{1}{4} & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\alpha} & \end{array} \beta$, $\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}$

$H(\alpha,\beta) = -\left(x\log x + \left(\frac{3}{4}-x\right)\log\left(\frac{3}{4}-x\right) + \left(\frac{1}{2}-x\right)\log\left(\frac{1}{2}-x\right) + \left(x-\frac{1}{4}\right)\log\left(x-\frac{1}{4}\right)\right)$

$$H'_x = -\left(\log x + 1 - \log\left(\tfrac{3}{4}-x\right) - 1 + \log\left(\tfrac{1}{2}-x\right) - 1 + \log\left(x-\tfrac{1}{4}\right) + 1\right) =$$

$$= \log \frac{\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)}{x\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)} \neq 0$$

$$x^2 - \frac{x}{4} = x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}$$

$$x = \frac{3}{8}$$

$$H(\alpha,\beta)_{x=\frac{3}{8}} = 2\cdot\frac{3}{8}\log\frac{8}{3} + 2\cdot\frac{1}{8}\log 8 \approx 1.8$$

$$H(\alpha,\beta)_{x=\frac{1}{4}} = H(\alpha,\beta)_{x=\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 = 1.5$$

Ответ: $H(\alpha,\beta)$ лежит в интервале $[1.5,\ 1.8]$

№5

Пусть α – максимальная мера одноцветного для $DISJ_n$ прямоугольника. Тогда воспользуемся тем, что среднее кол-во битов, переданных людям протоколом, не меньше $-\log\alpha$.

Рассмотрим трудное мн-во $\{(z,\bar{z}) \in \{1,..,n\}^2\}$ мощности 2^n и равномерное распределение на нем. Тогда $\alpha = 2^{-n}$, $-\log\alpha = n$.