Задача 5. Предел и вероятности

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{5n} C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{k-n}$$

Ответ. $\frac{1}{2}$

Решение. Перепишем немного выражение, стоящее под знаком суммы:

$$C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{k-n} = C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{(k-1)-(n-1)}\cdot\frac{1}{5}$$

Нетрудно видеть, что это вероятность того, что в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p=\frac{1}{5}$ n-й по счёту успех произойдёт на k-м шаге. В самом деле, это произведение вероятности $C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{(k-1)-(n-1)}$ того, что среди первых $(k-1)$ испытаний случился ровно $(n-1)$ успех, на вероятность ещё одного успеха.

Теперь, сумма $\sum_{k=n}^{5n} C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{(k-1)-(n-1)}\cdot\frac{1}{5}$ равна вероятности того, что в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p=\frac{1}{5}$ n-й по счёту успех случится не позже испытания с номером $5n$ (в самом деле, раньше n-й попытки он никак не может произойти).

Обозначим через $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимые случайные величины, распределённые как номер первого успеха в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха $\frac{1}{5}$. Отметим, что их математическое ожидание $\mathbb{E}\xi_i$ равно 5; этот факт нам пригодится в дальнейшем. Кроме того, заметим, что сумма $\xi_1+\ldots+\xi_n$ распределена как раз таки как номер n-го успеха (мы можем считать, что после очередного успеха счёт попыток обнуляется — тогда следующий успех оказывается как бы первым). Таким образом, мы ищем предел

$$P\left(\xi_1+\ldots+\xi_n\leqslant 5n\right)$$

Как мы уже отмечали выше, $\mathbb{E}\xi_i=5$, то есть

$$P\left(\sum_i \xi_i\leqslant 5n\right)=P\left(\sum_i(\xi_i-\mathbb{E}\xi_i)\leqslant 0\right)=P\left(\frac{\sum\limits_i(\xi_i-\mathbb{E}\xi_i)}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_i}}\leqslant 0\right)$$

А предел этого выражения равен $\frac{1}{2}$ по центральной предельной теореме.