КОМБИНАТОРИКА

Н. Я. ВИЛЕНКИН

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1969

517.8
В 44
УДК 519.1

ВИЛЕНКИН Наум Яковлевич

КОМБИНАТОРИКА

М., 1969 г., 328 стр. с илл.

Оформление *Б. М. Маторина*

Рисунки *О. Д. Добролюбовой*

Редактор *Г. В. Дорофеев*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова*

Корректор *Т. А. Панькова*

Сдано в набор 8/VII 1968 г.
Подписано к печати 8/XII 1968 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 10,25.
Условн. печ. л. 17.22. Уч.-изд. л. 18,59.
Тираж 100 000 экз. Т-16170.
Цена книги 73 коп. Заказ 1356.

Издательство «Наука»

Главная редакция
физико-математической литературы

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Измайловский проспект, 29.

2-2-3
143-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

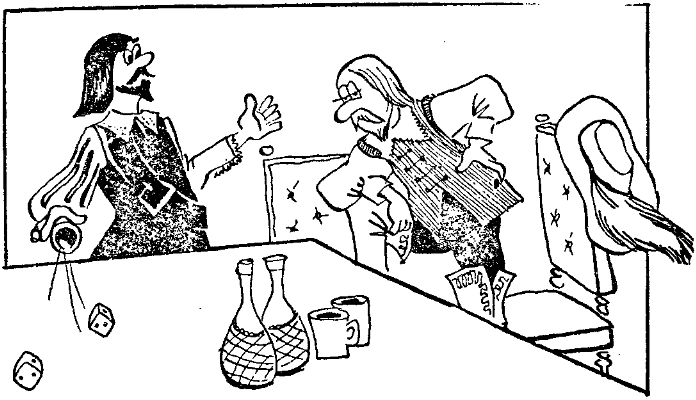
Представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр и иных объектов. Начальнику цеха надо распределить несколько видов работ между имеющимися станками, агроному — разместить посевы сельскохозяйственных культур на нескольких полях, заведующему учебной частью школы — составить расписание уроков, ученому-химику — рассмотреть возможные связи между атомами и молекулами, лингвисту — учесть различные варианты значений букв незнакомого языка и т. д. Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется *комбинаторикой.*

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев тогдашнего общества большое место занимали азартные игры. В карты и кости[1]) выигрывались и проигрывались золото и бриллианты, дворцы и имения, породистые кони и дорогие украшения. Широко были распространены всевозможные лотереи. Понятно, что первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр — вопросов, сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или сколькими способами можно получить двух королей в данной карточной игре. Эти и другие проблемы азартных игр явились движущей силой в развитии комбинаторики и развивавшейся одновременно с ней теории вероятностей.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик

---

[1]) При игре в кости бросалось несколько кубиков, на гранях которых стояли цифры от 1 до 6. Выигрывал тот, кто выбрасывал больше очков. Были и другие варианты игры.



Тарталья. Он составил таблицу, показывавшую, сколькими способами могут выпасть r костей. Однако при этом не учитывалось, что одна и та же сумма очков может быть получена разными способами (например, $1+3+4=4+2+2$).

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские ученые Паскаль и Ферма. Исходным пунктом их исследований тоже были проблемы азартных игр. Особенно большую роль сыграла здесь задача о разделе ставки, которую предложил Паскалю его друг шевалье де Мере, страстный игрок. Проблема состояла в следующем: «матч» в орлянку ведется до шести выигранных партий; он был прерван, когда один игрок выиграл 5 партий, а другой — 4; как разделить ставку? Было ясно, что раздел в отношении 5:4 несправедлив. Применив методы комбинаторики, Паскаль решил задачу в общем случае, когда одному игроку остается до выигрыша r партий, а второму s партий. Другое решение задачи дал Ферма.

Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера. Однако и у них основную роль играли приложения к различным играм (лото, солитер и др.). За последние годы комбинаторика переживает период бурного развития, связанного с общим повышением интереса к проблемам дискретной математики. Комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний; для составления планов производства и реализации продукции. Установлены связи между комбинаторикой и задачами линейного программирования, статистики и т. д. Комбинаторика используется для составления и декодирования шифров и для решения других проблем теории информации.

Значительную роль комбинаторные методы играют и в чисто математических вопросах — теории групп и их представлений, изучении оснований геометрии, неассоциативных алгебр и т. д.

На русском языке очень мало книг по комбинаторике. Помимо совсем элементарных книг типа школьных учебников, можно указать лишь на переводные книги М. Холла «Комбинаторный анализ», ИЛ, 1963; Дж. Риордана «Введение в комбинаторный анализ», ИЛ, 1963, и Г. Дж. Райзера «Комбинаторная математика», «Мир», 1965.

В предлагаемой вниманию читателя книге о комбинаторных проблемах рассказывается в занимательной, популярной форме. Тем не менее в ней разбираются и некоторые довольно сложные комбинаторные задачи, дается понятие о методах рекуррентных соотношений и производящих функций.

Первая глава книги посвящена общим правилам комбинаторики — правилам суммы и произведения. Во второй главе изучаются размещения, перестановки и сочетания. Этот традиционный школьный материал сопровождается разбором некоторых занимательных примеров. В главе III мы изучаем комбинаторные задачи, в которых на рассматриваемые комбинации налагаются те или иные ограничения. В главе IV рассмотрены задачи на разбиения чисел и рассказано о геометрических методах в комбинаторике. Глава V посвящена задачам о случайных блужданиях и различным модификациям арифметического треугольника. В главе VI рассказано о рекуррентных соотношениях, а в главе VII — о производящих функциях, и в частности о биномиальной формуле.

К книге приложено несколько сотен задач по комбинаторике, взятых автором из различных источников. Много задач заимствовано из книги Уитворта «Выбор и случай» (Whitworth W. A., Choice and Chance, London, 1901), упомянутой книги Риордана, книги А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», Гостехиздат, 1954, различных сборников задач математических олимпиад и т. д.

ГЛАВА I

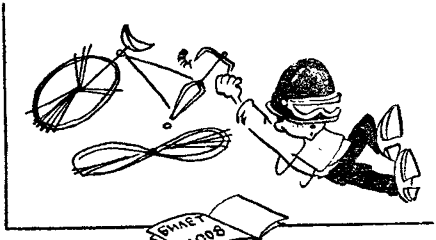
ОБЩИЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

Суеверные велосипедисты

«Опять восьмерка!» — горестно воскликнул председатель клуба велосипедистов, взглянув на погнутое колесо своего велосипеда. «А все почему? Да потому, что при вступлении в клуб мне выдали билет за номером 008. И теперь месяца не проходит, чтобы то на одном, то на другом колесе не появилась восьмерка. Надо менять номер билета. А чтобы меня не обвиняли в суеверии, проведу-ка я перерегистрацию всех членов клуба и буду выдавать только билеты с номерами, в которые ни одна восьмерка не входит».

Сказано — сделано, и на другой день он заменил все билеты. *Сколько членов было в клубе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной восьмерки?* (Например, 000 использован, а 836 нет.)

Для решения этой задачи определим сначала, сколько однозначных номеров не содержит восьмерку. Ясно, что таких номеров девять 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (номер 8 пропускается). А теперь найдем все двузначные номера, не содержащие восьмерок. Их можно составить так: взять любой из найденных однозначных номеров и написать после него любую из девяти допустимых цифр. В результате из каждого однозначного номера получится девять двузначных. А так как однозначных номеров



тоже 9, то получится $9 \cdot 9 = 81$ двузначный номер без восьмерок. Вот они:

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 09
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49
50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59
60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99

Итак существует $9^2 = 81$ двузначный номер без цифры 8. Но за каждым из них снова можно поставить любую из девяти допустимых цифр. В результате получим $9^2 \cdot 9 = 9^3 = 729$ трехзначных номеров. Значит, в клубе было 729 велосипедистов. А если взять не трехзначные, а четырехзначные номера, то номеров, не содержащих восьмерок, будет $9^4 = 6561$.

В другом клубе велосипедисты были еще суевернее. Так как число 0 похоже на вытянутое колесо, они отказались и от этой цифры и обходились восемью цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. *Сколько членов состояло в клубе, если номера билетов были трехзначными*?

Эта задача похожа на решенную выше, только вместо 9 цифр у нас всего 8. Поэтому и в ответе надо заменить 9 на 8. Иными словами, в клубе было $8^3 = 512$ членов.

Размещения с повторениями

Задача о велосипедистах относится к следующему типу задач. Даны предметы, относящиеся к n различным видам. Из них составляют всевозможные расстановки по k предметов в каждой, или, как будем в дальнейшем кратко говорить, *k-расстановки*. При этом в расстановки могут входить и предметы одного вида, а две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них предметов, или порядком этих предметов. *Надо найти общее число таких расстановок.*

Расстановки описанного типа называются *k-размещениями с повторениями из элементов n видов*, а число всех таких расстановок обозначают $\overline{A}_n^k$. В первой задаче о велосипедистах число видов элементов равнялось 9 (мы брали все цифры, кроме 8), а в каждое размещение (каждый номер) входило по три элемента. Как было показано, в этом случае число размещений равно $\overline{A}_9^3 = 9^3$. Естественно предположить, что если число видов равно n, а в каждое размещение входит k элементов, то можно составить n^k размещений с повторениями.

Итак, мы хотим доказать, что число k-размещений с повторениями из элементов n видов равно

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{1}$$

Доказательство проводится с помощью математической индукции по k — числу элементов в размещении при фиксированном значении n. При $k=1$ ответ ясен — каждое размещение (с повторениями) состоит только из одного элемента, и разные размещения получаются, если брать элементы различных видов. Но так как число видов равно n, то и число размещений равно n. Итак, $\overline{A}_n^1 = n$ в соответствии с формулой (1).

Предположим теперь, что уже доказано равенство $\overline{A}_n^{k-1} = n^{k-1}$, и рассмотрим k-размещения с повторениями. Все такие размещения можно получить следующим образом. Возьмем любое $(k-1)$-размещение (с повторениями) $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ и припишем к нему элемент a_k одного из имеющихся n видов. Мы получим некоторое k-размещение $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$. При этом ясно, что из каждого $(k-1)$-размещения получится столько k-размещений, сколько есть различных видов элементов, то есть n размещений. Очевидно, что, действуя описанным образом, мы не пропустим ни одного k-размещения и ни одного не получим дважды (если $(a_1, \ldots, a_{k-1}) \neq \neq (b_1, \ldots, b_{k-1})$ или если $a_k \neq b_k$, то $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) \neq (b_1, \ldots \ldots, b_{k-1}, b_k)$). Поэтому число k-размещений с повторениями из элементов n видов в n раз больше, чем число $(k-1)$-размещений с повторениями из элементов тех же видов. Таким образом, $\overline{A}_n^k = n\overline{A}_n^{k-1}$. Но мы считаем уже доказанным, что $\overline{A}_n^{k-1} = n^{k-1}$. Поэтому

$$\overline{A}_n^k = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

Тем самым равенство (1) доказано для всех значений k.

Формула (1) встречается в целом ряде вопросов. Мы расскажем сейчас о некоторых из них.

Системы счисления

Наряду с десятичной системой счисления применяются и другие — двоичная, троичная, восьмеричная и т. д. (см. книгу С. В. Фомина «Системы счисления», «Наука», 1963). В n-ичной системе счисления используются n цифр. Подсчитаем, сколько в n-ичной системе натуральных чисел, записываемых ровно k знаками[1]). Если допустить записи, начинающиеся с нуля, то каждое k-значное число в n-ичной системе счисления можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из k цифр, причем цифры бывают n видов. По формуле (1) получаем, что количество чисел, имеющих такую запись, равно n^k.

Но для натуральных чисел не применяют записей, начинающихся с нуля. Поэтому из полученного значения n^k надо вычесть количество чисел, n-ичная запись которых начинается с нуля. Если отбросить у этих чисел первую цифру — нуль, то получим $(k-1)$-значное число (быть может, также начинающееся с нуля). Таких чисел по формуле (1) будет n^{k-1}. Значит, общее количество k-значных чисел в n-ичной системе счисления равно

$$n^k - n^{k-1} = n^{k-1}(n-1).$$

Например, в десятичной системе счисления имеем $10^3 \cdot 9 = 9000$ четырехзначных чисел — из 10 000 чисел от 0 до 9999 надо отбросить тысячу чисел, а именно числа от 0 до 999.

Полученную нами формулу можно вывести и иным способом. Ведь в k-значном числе, записанном по n-ичной системе счисления, первой цифрой может быть любая из цифр $1, 2, \ldots, n-1$. Второй же и дальнейшими — любые из цифр $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Таким образом, на первое место у нас $n-1$ кандидатов, а на остальные $k-1$ мест — по n кандидатов. Отсюда легко получаем, что искомых чисел может быть $(n-1)n^{k-1}$.

Секретный замок

Для запирания сейфов и автоматических камер хранения применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано некоторое «тайное слово». Это слово набирают с помощью одного или нескольких дисков, на которых нанесены буквы (или цифры). *Пусть на диск нанесены 12 букв, а секретное слово*

---

[1]) Ради удобства мы относим здесь 0 к натуральным числам.

состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

По формуле (1) общее число комбинаций равно

$$12^5 = 248\,832.$$

Значит, неудачных попыток может быть 248 831. Впрочем, обычно делают сейфы так, что после первой же неудачной попытки открыть их раздается сигнал тревоги.

Код Морзе

При передаче сообщений по телеграфу используется код Морзе. В этом коде буквы, цифры и знаки препинания обозначаются точками и тире. При этом для одних букв используется один знак, например *Е*·, а для некоторых приходится использовать пять знаков, например *Э*··—··.

Откуда же взялось число 5? Нельзя ли обойтись меньшим числом знаков, скажем, передавать все сообщения с помощью комбинаций, содержащих не более четырех знаков? Оказывается, что нельзя, и ответ этот дает именно формула для числа размещений с повторениями. Из формулы (1) следует, что $\overline{A}_2^1 = 2$. Иными словами, только две буквы можно передать с помощью одного знака (*Е*· и *Т*—). С помощью двух знаков можно передать $2^2=4$ буквы, трех знаков — $2^3=8$ букв и четырех знаков — $2^4=16$. Поэтому общее число букв, которые можно передать четырьмя знаками, равно

$$2 + 4 + 8 + 16 = 30.$$

А в русском алфавите 32 буквы, да еще надо передавать цифры и знаки препинания. Ясно, что символов из четырех знаков не хватает. А если брать и символы из 5 знаков, то к полученным 30 прибавится еще 32 символа. Полученных 62 символов вполне достаточно для телеграфирования.

Применяют для телеграфирования и пятизначный код, в котором каждая буква изображается в точности пятью символами. Здесь уже вместо точек и тире используют перемены направления тока, или посылку токового и бестокового сигнала. При пользовании этим кодом имеем ровно $2^5=32$ комбинации. Их хватает для передачи букв. А для передачи цифр, знаков препинания и т. д. используют те же комбинации, что и для букв. Поэтому телеграфные аппараты пятизначного кода имеют специальное устройство для перевода аппарата с букв на цифры и обра́тно.

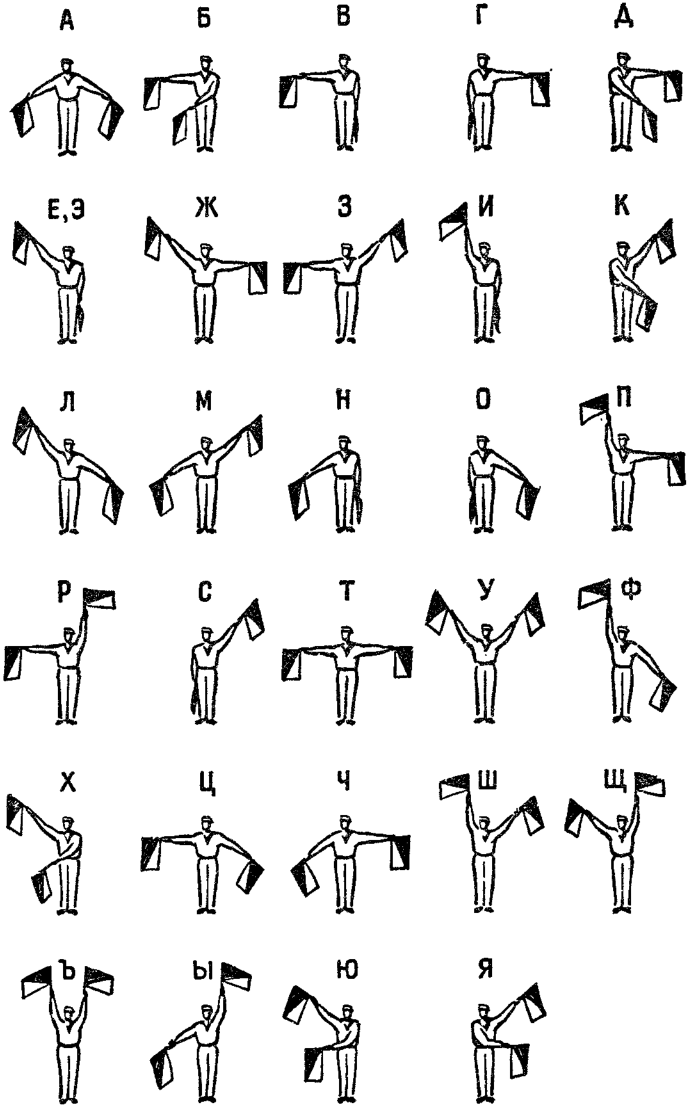
Морской семафор

На флоте иногда применяют семафор флажками. Каждой букве при этом соответствует определенное положение флажков. Как правило, флажки находятся по разные стороны от тела сигнальщика. Однако при передаче некоторых букв (б, д, к, х, ю, я) оба флажка расположены по одну и ту же сторону. Почему пришлось сделать такое исключение? Ответ на этот вопрос дает та же формула размещений с повторениями. Дело в том, что различных положений каждого флажка пять — вниз отвесно, вниз наклонно, горизонтально, вверх наклонно и вверх отвесно. Так как у нас два флажка, то общее число комбинаций основных положений равно $\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$. При этом еще надо отбросить положение, когда оба флажка направлены вниз — оно служит для разделения слов. Всего получаем 24 комбинации, а этого недостаточно для передачи всех букв русского алфавита. Поэтому для некоторых букв и пришлось направить оба флажка в одну сторону.

Электронная цифровая вычислительная машина

Электронные вычислительные машины могут решать самые различные задачи. На одной и той же машине можно разгадывать надписи на незнакомых языках, делать расчет плотины и обрабатывать данные о движении ракеты. Чем объясняется такая гибкость в использовании машины? Главным образом тем, что все эти задачи сводятся к вычислениям, к действиям над числами. Но почему же машина может решать столько задач, да еще при самых различных числовых данных? Сколько различных комбинаций чисел можно поместить в машину?

Для ответа на этот вопрос возьмем, например, машину «Стрела». Оперативная память этой машины состоит из 2048 ячеек, в каждой из которых 43 двоичных


А
Б
В
Г
Д
Е,Э
Ж
З
И
К
Л
М
Н
О
П
Р
С
Т
У
Ф
Х
Ц
Ч
Ш
Щ
Ъ
Ы
Ю
Я

разряда. Каждый разряд может содержать или 0, или 1. Всего мы имеем $43 \cdot 2048 > 87\,000$ различных мест, а число типов заполнений ячеек равно двум (0 или 1). По формуле (1) получаем, что машина «Стрела» может находиться более чем в $2^{87\,000}$ различных состояниях. Трудно представить себе, как велико это число. Достаточно сказать, что число нейтронов, которые можно плотно упаковать в шар с радиусом, равным расстоянию до самой удаленной из известных нам туманностей, не больше чем 2^{500}.

Если взять одну-единственную ячейку памяти, то понадобилась бы девятилетняя работа стотысячной армии машинисток, чтобы напечатать все числа, которые могут появиться в этой ячейке (считая, что машинистки работают семь часов в день и на запись одного 43-значного числа тратят 10 секунд).

Генетический код

Замечательным открытием биологии XX века была разгадка генетического кода. Удалось выяснить, каким образом наследственная информация передается потомству. Оказалось, что эта информация записана в гигантских молекулах дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК). Различные молекулы ДНК отличаются друг от друга тем, в каком порядке идут в них 4 азотистых основания: аденин, тимин, гуанин и цитозин. Эти основания определяют порядок построения белков организма из двух десятков аминокислот, причем каждая аминокислота зашифрована кодом из трех азотистых оснований.

Легко понять, откуда взялось число 3. Ведь с помощью комбинаций двух оснований можно зашифровать лишь $4^2=16$ аминокислот, а этого недостаточно. Если же брать по 3 основания, то получим $4^3=64$ комбинации. А этого с избытком хватит, чтобы зашифровать два десятка. Было бы весьма интересно узнать, как используется в природе избыточность информации — ведь число комбинаций равно 64, а число аминокислот втрое меньше.

В одной хромосоме содержится несколько десятков миллионов азотистых оснований. Число различных комбинаций, в которых они могут идти друг за другом, невообразимо велико[1]). Ничтожной доли этих комбинаций достаточно было, чтобы обеспечить все разнообразие живой природы за время существования жизни на Земле. Разумеется, надо иметь в виду, что лишь ничтожная доля теоретически возможных комбинаций приводит к жизнеспособным организмам.

Общие правила комбинаторики

Как мы увидим дальше, комбинаторные задачи бывают самых разных видов. Но большинство задач решается с помощью двух основных правил — правила суммы и правила произведения.

Часто удается разбить все изучаемые комбинации на несколько классов, причем каждая комбинация входит в один и только один класс. Ясно, что в этом случае *общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах.* Это утверждение и называют *правилом суммы.* Иногда это формулируют несколько иначе:

Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор «либо A, либо B» можно осуществить $m+n$ способами.

При использовании правила суммы в последней формулировке надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта B (или, как мы говорили раньше, чтобы ни одна комбинация не попала сразу в два класса). Если такие совпадения есть, правило суммы утрачивает силу, и мы получаем лишь $m+n-k$ способов выбора, где k—число совпадений.

Второе правило, называемое *правилом произведения*, несколько сложнее. Часто при составлении комбинации из двух элементов известно, сколькими способами можно выбрать первый элемент, и сколькими способами второй, причем число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый элемент. Пусть первый элемент можно выбрать m способами, а второй n способами. Тогда пару этих элементов можно выбрать mn способами. Иными словами:

Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать

---

[1]) Оно равно 4^N, где N — число оснований в хромосоме, см. формулу (1).

n способами, то выбор пары (A, B) в указанном порядке можно осуществить mn способами.

Для доказательства правила произведения заметим, что каждый из m способов выбора объекта A можно скомбинировать с n способами выбора объекта B. А это и приводит к mn способам выбора пары (A, B).

Правило произведения можно наглядно представить с помощью следующей таблицы:

ТАБЛИЦА 1

$(A_1,$	$B_{11}),$	$\ldots,$	$(A_1,$	$B_{1n})$
$(A_2,$	$B_{21}),$	$\ldots,$	$(A_2,$	$B_{2n})$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$(A_i,$	$B_{i1}),$	$\ldots,$	$(A_i,$	$B_{in})$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$(A_m,$	$B_{m1}),$	$\ldots,$	$(A_m,$	$B_{mn}).$

Здесь через $A_1, \ldots, A_m$ обозначены m способов выбора объекта A, а через $B_{i1}, \ldots, B_{in}$ обозначены n способов выбора объекта B, если объект A выбран i-тым способом. Ясно, что эта таблица содержит все способы выбора пары (A, B) и состоит из mn элементов.

Если способы выбора объекта B не зависят от того, как выбран объект A, то вместо таблицы 1 получается более простая таблица:

ТАБЛИЦА 2

$(A_1, B_1),$	$(A_1, B_2),$	$\ldots,$	(A_1, B_n)
$(A_2, B_1),$	$(A_2, B_2),$	$\ldots,$	(A_2, B_n)
. . .	. . .	. . .	. . .
$(A_m, B_1),$	$(A_m, B_2),$	$\ldots,$	$(A_m, B_n).$

Разумеется, может случиться, что нам надо составить не пары, а комбинации из большого числа элементов. Тогда мы приходим к следующей задаче:

Сколько можно составить k-расстановок, если первый элемент может быть одного из n_1 различных видов, второй — из n_2 различных видов, ..., k-й — из n_k различных видов. При этом две расстановки считаются различными, *если хотя бы на одном месте в них стоят разные элементы.*

Эта задача решается так же, как задача о велосипедистах. Первый элемент можно выбрать n_1 способами. Каждый из выбранных элементов можно соединить с любым из n_2 видов вторых элементов, что дает $n_1 n_2$ пар. Каждую пару можно соединить с любым из n_3 видов третьих элементов, что дает $n_1 n_2 n_3$ троек. Продолжая далее, мы получим в конце концов $n_1 n_2 \ldots n_k$ расстановок искомого типа.

В задаче о велосипедистах надо было выбрать три элемента (цифру сотен, цифру десятков и цифру единиц). На каждом шагу мы могли выбрать одну из девяти допустимых цифр. Поэтому и получилось $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ номеров. А вот задача потруднее.

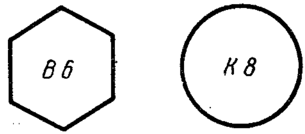


Рис. 1.

Составляются знаки, состоящие из геометрической фигуры (окружности, квадрата, треугольника или шестиугольника), буквы и цифры. *Сколько таких знаков можно составить?*

Здесь на первом шагу можно выбрать геометрическую фигуру. Этот выбор может быть совершен четырьмя способами (у нас всего четыре фигуры). Потом надо выбрать одну из 32 букв и, наконец, одну из 10 цифр. Всего получается $4 \cdot 32 \cdot 10 = 1280$ комбинаций.

Задача о домино

Сложнее решаются комбинаторные задачи, в которых число выборов после каждого шага зависит от того, какие элементы были выбраны на предыдущих шагах. Вот пример такой задачи.

Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (то есть чтобы какое-то число очков встречалось на обеих костях)?

Сначала выберем одну кость. Это можно сделать 28 способами. При этом в 7 случаях выбранная кость окажется «дублем», то есть костью вида 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, а в 21 случае — костью с различными числами очков (например, 05, 13 и т. д.). В первом случае вторую кость можно выбрать 6 способами (например, если на первом шагу выбрана кость 11, то на втором шагу можно взять одну из костей 01, 12, 13, 14, 15, 16). Во втором же случае вторую кость можно выбирать 12 способами (для кости 35 подойдут кости 03, 13, 23, 33, 34, 36, 05, 15, 25, 45, 55, 56). По правилу произведения в первом случае получаем $7 \cdot 6 = 42$ выбора, а во втором $21 \cdot 12 = 252$ выбора. Значит, по правилу суммы получаем $42 + 252 = 294$ способов выбора пары.

В проведенном рассуждении учитывался и порядок, в котором выбирались кости. Поэтому каждая пара костей появлялась дважды (например, первый раз 01 и 16, а второй раз 16 и 01). Если не учитывать порядок выбора костей, то получим вдвое меньше способов выбора, то есть 147 способов.

Команда космического корабля

В случае, когда число возможных выборов на каждом шагу зависит от того, какие элементы были выбраны ранее, удобно изображать процесс составления комбинаций в виде «дерева». Сначала из одной точки проводят столько отрезков, сколько различных выборов можно сделать на первом шагу (таким образом, каждый отрезок соответствует одному элементу). Из конца каждого отрезка проводят столько отрезков, сколько можно сделать выборов на втором шагу, если в первый раз был выбран данный элемент и т. д.

В результате такого построения получается «дерево», рассмотрение которого легко дает число решений нашей задачи.

Рассмотрим следующий пример. Известно, что при составлении команд многоместных космических кораблей возникает вопрос о психологической совместимости участников космического путешествия. Даже вполне подходящие порознь люди могут оказаться непригодными для длительного совместного путешествия. Предположим, что надо составить команду космического корабля из трех человек: командира, инженера и врача. На место командира есть четыре кандидата a_1, a_2, a_3, a_4, на место инженера — 3 кандидата b_1, b_2, b_3 и на место врача — 3 кандидата c_1, c_2, c_3. Проведенная проверка показала, что командир a_1 психологически совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_2, c_3, командир a_2 — с инженерами b_1 и b_2 и всеми врачами, командир a_3 — с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1, c_3, командир a_4 — со всеми инженерами и врачом c_2. Кроме того, инженер b_1 психологически несовместим с врачом c_3, инженер b_2 — с врачом c_1 и инженер b_3 — с врачом c_2. *Сколькими способами при этих условиях может быть составлена команда корабля?*

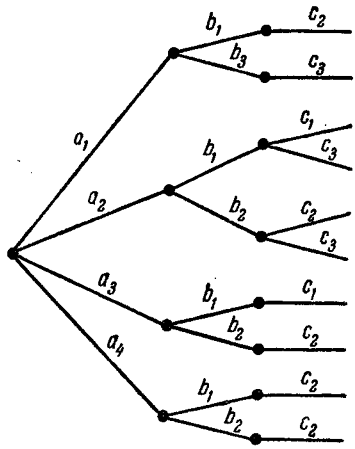


Рис. 2.

Соответствующее дерево изображено на рис. 2. Оно показывает, что есть лишь 10 допустимых комбинаций (если бы не было ограничения совместимости, то число комбинаций по правилу произведения равнялось бы $36=4\cdot3\cdot3$).

Задачи о шашках

Решим следующую задачу:

Сколькими способами можно поставить на доску две шашки — белую и черную, так, чтобы белая шашка могла бить черную?

По шашечным правилам шашки ставятся на черные поля и одна шашка бьет другую, перепрыгивая через нее и вставая на следующее поле (рис. 3). Если же шашка достигла последней горизонтали, то она превращается в дамку и может бить все шашки, стоящие на одной диагонали с ней, кроме шашек, стоящих в конце диагоналей.

Сложность этой задачи состоит в том, что для разных положений белой шашки есть разное число положений черной шашки, при которых эту шашку можно бить. Например, если белая шашка стоит на поле $a1$, то существует лишь одно положение черной шашки, при котором она находится под боем. А если белая шашка стоит на поле $c3$, то число искомых положений черной шашки равно 4. Наконец, если белая шашка прошла в дамки на поле $h8$, то имеется 6 положений черной шашки, на которых ее может бить эта дамка.

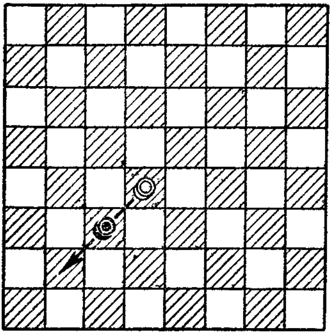
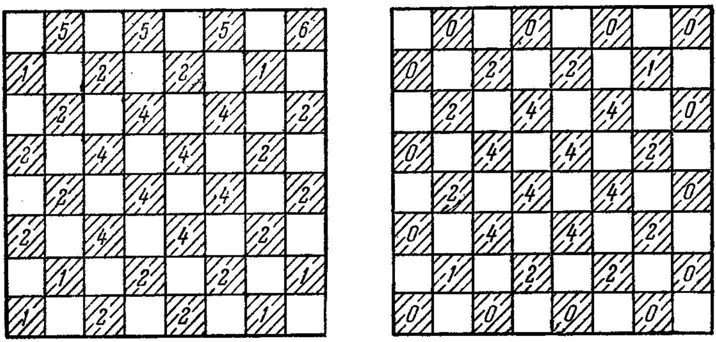


Рис. 3.

Поэтому здесь проще всего указать для каждого положения белой шашки число возможных положений черной шашки и сложить полученные результаты. На рис. 4, *а* изображена доска с указанием соответствующих чисел. Складывая их, получаем 87. Значит, искомая расстановка возможна 87 способами.

Ясно, что ровно столько же положений, при которых черная шашка может бить белую. А положений, при которых обе шашки могут бить друг друга, меньше. Например, если белая шашка стоит



а) *б)*

Рис. 4.

на краю доски, то ее нельзя бить, где бы ни стояла черная шашка. Поэтому всем полям на краю доски соответствует число 0. Точно так же находим числа, соответствующие другим черным полям. Они изображены на рис. 4, *б*. Складывая эти числа, получаем, что искомая расстановка возможна 50 способами.

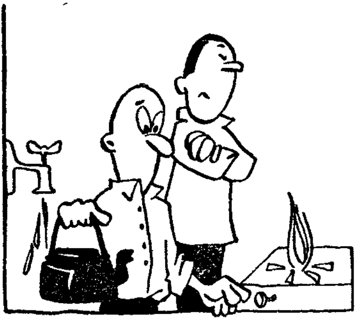
Наконец, найдем число положений белой и черной шашек, при котором ни одна из них не может бить друг друга. Эту задачу можно было бы решить так же, как и предыдущие, ставя белую шашку на каждое из черных полей и подсчитывая сколькими способами можно поставить черную шашку так, чтобы ни одна из этих шашек не могла бить другую. Но здесь проще применить «принцип чайника»[1]) и свести эту задачу к уже решенной. Для этого сначала найдем общее число положений, которыми можно поставить на доску белую и черную шашки. Белую шашку можно поставить на любое из 32 черных полей. После этого для черной шашки останется 31 поле. Поэтому в силу правила произведения расстановка возможна $32 \cdot 31 = 992$ способами. Но из этих способов есть 87, при которых белая шашка может бить черную, и 87 способов, при которых черная шашка может бить белую. Поэтому надо отбросить $2 \cdot 87 = 174$ способа. Однако следует учесть, что при этом некоторые способы оказываются отброшенными дважды — и из-за того, что белая шашка может бить черную, и из-за того, что черная шашка может бить белую. Мы видели, что существует 50 положений, в которых обе шашки могут бить друг друга. Поэтому число положений, в которых ни одна шашка не может бить другую, равно

$$992 - 174 + 50 = 868.$$

---

[1]) Рассказывают, что однажды математик спросил у физика: «Перед Вами пустой чайник и незажженная газовая плита; как вскипятить воду?» «Наполнить чайник водой, зажечь газ и поставить чайник на плиту», — отвечал физик. «Правильно», — сказал математик. «А теперь решите вторую задачу: перед зажженной плитой стоит наполненный чайник. Как вскипятить воду?» «Это еще проще — надо поставить чайник на плиту». «Ничего подобного!» — воскликнул математик. «Надо погасить плиту, вылить воду из чайника, и мы придем к первой задаче, которую уже умеем решать!»

Поэтому, когда новую задачу сводят к уже решенным, шутя говорят, что применяют «принцип чайника».



Сколько человек не знают иностранных языков?

Метод, которым мы решили последнюю из задач о шашках, часто применяется для решения комбинаторных задач. Рассмотрим следующий пример:

В научно-исследовательском институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий язык и 23 — оба языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого языков?

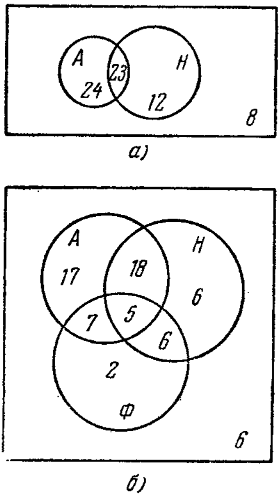


Рис. 5.

Для решения этой задачи надо разбить весь коллектив сотрудников института на части, не имеющие общих элементов. Первую из них составят те, кто знает только английский язык, — вторую — те, кто знает только немецкий язык, третью — те, кто знает оба языка, и четвертую — те, кто не знает ни одного, ни другого языка (рис. 5). Нам дано, что третья часть состоит из 23 человек. Но так как английский язык знают 47 человек, то только английским языком владеют 47—23=24 человека. Точно так же только немецким языком владеют 35—23=12 человек. Отсюда следует, что общее число людей, владеющих одним из этих языков, равно 23+24+12=59 человек. А так как всего в институте работают 67 человек, то на долю последней части приходится 67—59=8 человек. Итак, 8 человек не знают ни английского, ни немецкого языка.

Полученный ответ можно записать в виде

$$8 = 67 - (23 + 24 + 12).$$

Но 24 мы получили, вычитая 23 из 47, а 12 — вычитая 23 из 35. Поэтому

$$8 = 67 - 23 - (47 - 23) - (35 - 23) = 67 - 47 - 35 + 23.$$

Теперь видна закономерность — из общего числа сотрудников вычитается число знающих английских язык и число знающих немецкий язык. При этом некоторые сотрудники попадают в оба списка и оказываются «вычтенными» дважды. Это как раз те полиглоты, которые знают оба языка. Прибавляя их число, мы получаем число лиц, не знающих ни одного из этих языков.

Усложним разобранную задачу, добавив еще один язык. Пусть французский язык знают 20 человек, английский и французский — 12 человек, немецкий и французский — 11 человек, а все три языка — 5 человек. Ясно, что тогда только английский и французский (без немецкого) знают $12-6=6$ человек, а только немецкий и французский знают $11-5=6$ человек. Значит, только один французский язык знают $20-7-6-5=2$ человека. Эти люди входят в состав тех 8 человек, которым неведомы английский и немецкий языки. Значит, число людей, не знающих ни одного из трех языков, равно $8-2=6$.

Полученный ответ можно записать так:

$$\begin{aligned}6 &= 8-2 = 67-47-37+23-(20-7-6-5) = \\ &= 67-47-37+23-20+(12-5)+(11-5)+5 = \\ &= 67-47-37-20+23+12+11-5.\end{aligned}$$

А теперь закон совершенно ясен. Сначала из общего числа сотрудников вычитают число тех, кто знает один из языков (и, может быть, другие). При этом некоторые оказываются «вычтенными» дважды, поскольку знают два языка. Поэтому прибавляют числа 23, 12, 11, показывающие, сколько человек владеют двумя языками (и, может быть, еще третьим). Но лица, владеющие тремя языками, оказываются сначала трижды «вычтенными», а потом трижды «прибавленными». Так как их надо все-таки вычесть, то приходится еще отнять число 5.

Формула включений и исключений

Разобранные примеры позволяют сформулировать общий закон. Пусть имеется N предметов, некоторые из которых обладают свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. При этом каждый предмет может либо не обладать ни одним из этих свойств, либо обладать одним или несколькими свойствами. Обозначим через $N(\alpha_i\alpha_j\ldots\alpha_k)$

количество предметов, обладающих свойствами α_i, α_j, ..., α_k (и, быть может, еще некоторыми из других свойств). Если нам надо будет подчеркнуть, что берутся лишь предметы, не обладающие некоторым свойством, то это свойство пишем со штрихом. Например, через $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4')$ обозначено количество предметов, обладающих свойствами α_1 и α_2, но не обладающих свойством α_4 (вопрос об остальных свойствах остается открытым).

Число предметов, не обладающих ни одним из указанных свойств, обозначается по этому правилу через $N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_n')$. Общий закон состоит в том, что

$$\begin{aligned}N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_n') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \ldots - N(\alpha_n) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + \ldots + N(\alpha_1\alpha_n) + \ldots + N(\alpha_{n-1}\alpha_n) - \\ - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \ldots - N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n). \quad (2)\end{aligned}$$

Здесь алгебраическая сумма распространена на все комбинации свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (без учета их порядка), причем знак + ставится, если число учитываемых свойств четно, и знак —, если это число нечетно. Например, $N(\alpha_1\alpha_3\alpha_6\alpha_8)$ входит со знаком +, а $N(\alpha_3\alpha_4\alpha_{10})$ со знаком —. Формулу (2) называют *формулой включений и исключений* — сначала исключаются все предметы, обладающие хотя бы одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, потом включаются предметы, обладающие по крайней мере двумя из этих свойств, исключаются имеющие по крайней мере три и т. д.

Докажем формулу (2). Доказательство ведется с помощью индукции по числу свойств. При одном свойстве формула очевидна. Каждый предмет либо обладает этим свойством, либо не обладает им. Поэтому

$$N(\alpha') = N - N(\alpha).$$

Предположим теперь, что формула (2) доказана для случая, когда число свойств равно $n - 1$:

$$\begin{aligned}N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}') = N - N(\alpha_1) - \ldots - N(\alpha_{n-1}) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) - \\ - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \ldots - N(\alpha_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}). \quad (3)\end{aligned}$$

Эта формула, по предположению, справедлива для любой совокупности. В частности, она верна для совокупности $N(\alpha_n)$ элементов, обладающих свойством α_n. Для этой совокупности формула (3) принимает вид

$$N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n\right) = N\left(\alpha_n\right) - N\left(\alpha_1\alpha_n\right) - \ldots - N\left(\alpha_{n-1}\alpha_n\right) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2\alpha_n) + \ldots + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_n) - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n) \qquad (4)$$

(добавляется указание, что в каждом случае берутся лишь предметы, обладающие свойством α_n).

Вычтем равенство (4) из равенства (3). В правой части получим то, что нам нужно — правую часть формулы (2). А в левой части получим разность

$$N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\right) - N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n\right). \qquad (5)$$

Но $N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\right)$ — это число предметов, не обладающих свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ и, быть может, обладающих свойством α_n. А $N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n\right)$ — это число предметов, которые не обладают свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, но наверняка обладают свойством α_n. Значит, разность (5) как раз равна числу предметов, не обладающих ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Иными словами,

$$N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\right) - N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n\right) = N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n'\right).$$

Таким образом, после вычитания и в левой части получается левая часть формулы (2). Тем самым эта формула доказана для случая, когда число свойств равно n.

Итак, соотношение (2) справедливо для n свойств, коль скоро оно справедливо для $n-1$, а при $n=1$ оно уже доказано; поэтому доказана справедливость этого соотношения для любого набора свойств.

Формулу (2) можно представить в символической форме следующим образом:

$$N(\alpha'\beta' \ldots \omega') = N(1-\alpha)(1-\beta) \ldots (1-\omega). \qquad (6)$$

Здесь после раскрытия скобок надо произведения $N\alpha\beta \ldots \lambda$ писать в виде $N(\alpha\beta \ldots \lambda)$. Например, вместо $N\alpha\beta\delta\omega$ пишем $N(\alpha\beta\delta\omega)$.

В чем ошибка?

Староста одного класса дал следующие сведения об учениках: «В классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. 30 школьников учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 школьников, учащихся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично и в то же время занимаются спортом».

Через несколько дней его вызвал к себе классный руководитель (который, как на зло, вел математику) и сказал, что в сведениях есть ошибка. Попробуем выяснить, как он это узнал. Для этого подсчитаем, сколько девочек не занимаются спортом и получают время от времени тройки (а быть может, и двойки). Обозначим через α_1 принадлежность к мужскому полу, через α_2 — хорошую успеваемость и через α_3 — увлечение спортом. Найдем, чему равно $N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3')$. По условию задачи имеем

$$N(\alpha_1)=25, \quad N(\alpha_2)=30, \quad N(\alpha_3)=28, \quad N(\alpha_1\alpha_2)=16,$$
$$N(\alpha_1\alpha_3)=18, \quad N(\alpha_2\alpha_3)=17, \quad N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=15.$$

Значит, по формуле включений и исключений получаем, что

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3')=45-25-30-28+16+18+17-15=-2.$$

Но отрицательным ответ быть не может! Поэтому в данных сведениях есть внутреннее противоречие, они неверны.

Решето Эратосфена

Одной из самых больших загадок математики является расположение простых чисел в ряду всех натуральных чисел. Иногда два простых числа идут через одно число (например, 17 и 19, 29 и 31), а иногда подряд идет миллион составных чисел. Сейчас ученые знают уже довольно много о том, сколько простых чисел содержится среди N первых натуральных чисел. В этих подсчетах весьма полезным оказался метод, восходящий еще к древнегреческому ученому Эратосфену (он жил в III веке до новой эры в Александрии).

Эратосфен занимался самыми различными вопросами — ему принадлежат интересные исследования в области математики, астрономии и других наук. Впрочем, такая разносторонность привела его к некоторой поверхностности. Современники несколько иронически называли Эратосфена «во всем второй» (второй математик после Евклида, второй астроном после Гиппарха и т. д.).

В математике Эратосфена интересовал как раз вопрос о том, как найти все простые числа среди натуральных чисел от 1 до N [1]). Он придумал для этого следующий способ. Сначала вычеркивают все числа, делящиеся на 2 (исключая само число 2). Потом берут первое из оставшихся чисел (а именно 3). Ясно, что это число простое. Вычеркивают все идущие после него числа, делящиеся на 3. Первым оставшимся числом будет 5. Вычеркиваем все идущие после него числа, делящиеся на 5, и т. д. Числа, которые уцелеют после всех вычеркиваний, и являются простыми. Так как во времена Эратосфена писали на восковых табличках и не вычеркивали, а выкалывали цифры, то табличка после описанного процесса напоминала решето. Поэтому метод Эратосфена для нахождения простых чисел получил название «решето Эратосфена».

Подсчитаем, сколько останется чисел в первой сотне, если мы вычеркнем по методу Эратосфена числа, делящиеся на 2, 3 и 5. Иными словами, поставим такой вопрос: сколько чисел в первой сотне не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5? Эта задача решается по формуле включения и исключения.

Обозначим через α_1 свойство числа делиться на 2, через α_2 — свойство делимости на 3 и через α_3 — свойство делимости на 5. Тогда $\alpha_1\alpha_2$ означает, что число делится на 6, $\alpha_1\alpha_3$ означает, что оно делится на 10, и $\alpha_2\alpha_3$, — что оно делится на 15. Наконец, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ означает, что число делится на 30. Нам надо найти, сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, то есть не обладает ни одним из свойств α_1, α_2, α_3. По формуле (2) имеем

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3') = 100 - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3).$$

Но чтобы найти, сколько чисел от 1 до N делится на n, надо разделить N на n и взять целую часть получившегося частного. Поэтому

$$N(\alpha_1) = 50, \quad N(\alpha_2) = 33, \quad N(\alpha_3) = 20,$$
$$N(\alpha_1\alpha_2) = 16, \quad N(\alpha_1\alpha_3) = 10, \quad N(\alpha_2\alpha_3) = 6, \quad N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3,$$

---

[1]) Эратосфен считал 1 простым числом. Сейчас математики считают 1 числом особого вида, не относящимся ни к простым, ни к составным числам.

и, значит,

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3') = 32.$$

Таким образом, 32 числа от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Эти числа и уцелеют после первых трех шагов процесса Эратосфена. Кроме них, останутся сами числа 2, 3 и 5. Всего останется 35 чисел.

А из первой тысячи после первых трех шагов процесса Эратосфена останется 335 чисел. Это следует из того, что в этом случае

$$N(\alpha_1) = 500, \quad N(\alpha_2) = 333, \quad N(\alpha_3) = 200,$$
$$N(\alpha_1\alpha_2) = 166, \; N(\alpha_1\alpha_3) = 100, \; N(\alpha_2\alpha_3) = 66, \; N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 33.$$

ГЛАВА II

РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ

Мы рассмотрели некоторые общие правила решения комбинаторных задач. С их помощью можно решать задачи самых разных типов. Однако как в геометрии неудобно всегда сводить решение задачи к аксиомам, а удобнее пользоваться теоремами, так и в комбинаторике вместо решения задачи по общим правилам часто удобнее пользоваться готовыми формулами. Дело в том, что некоторые типы задач встречаются значительно чаще других. Комбинациям, которые встречаются в этих задачах, присвоены особые названия — размещения, перестановки и сочетания.

Для числа таких комбинаций выведены особые формулы, которыми и пользуются при решении различных комбинаторных задач. С одной из этих формул мы уже знакомы — в начале главы I было показано, что число k-размещений с повторениями из элементов n типов равно n^k. Сейчас мы выясним, сколько можно составить таких размещений, если не допускать повторений, то есть если все элементы, входящие в размещения, различны. Сначала разберем следующую задачу.

Футбольное первенство

В первой группе класса «А» первенства СССР по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные и бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены?

Эта задача решается на основе правила произведения. Золотые медали может получить любая из 17 команд. Иными словами, здесь у нас 17 возможностей. Но если золотые медали уже получены какой-то командой, то остается лишь 16 претендентов на серебряные медали. Повторения здесь не может быть — одна и та же команда не может завоевать и золотые, и серебряные медали.

Значит, после вручения золотых медалей какой-то команде остается 16 возможностей получения серебряных медалей. Точно так же если уже вручены и золотые, и серебряные медали, то бронзовые медали может получить лишь одна из оставшихся 15 команд. Значит, по правилу произведения получаем, что медали могут быть распределены $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$ способами.

Размещения без повторений

Решенная задача относится к классу комбинаторных задач о размещении без повторений. Общая формулировка этих задач такова:

Имеется n различных предметов. Сколько из них можно составить k-расстановок? При этом две расстановки считаются различными, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Такие расстановки называют *размещениями без повторений*, а их число обозначают A_n^k. При составлении k-размещений без повторений из n предметов нам надо сделать k выборов. На первом шагу можно выбрать любой из имеющихся n предметов. Если этот выбор уже сделан, то на втором шагу приходится выбирать из оставшихся $n-1$ предметов — ведь повторять сделанный выбор нельзя[1]). Точно так же на третьем шагу для выбора остается лишь $n-2$ свободных предметов, на четвертом $n-3$ предметов... на k-м шагу $n-k+1$ предметов. Поэтому по правилу произведения получаем, что число k-размещений без повторения из n предметов выражается следующим образом:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1). \qquad (1)$$

[1]) Напомним, что в отличие от случая размещений с повторениями у нас теперь есть лишь один элемент каждого вида.

Научное общество

Применим выведенную формулу для решения следующей задачи: *Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?*

В этом случае надо найти число размещений (без повторений) из 25 элементов по 4. Ведь здесь играет роль и то, кто будет выбран в руководство общества, и то, какие посты займут выбранные (выбор: президент — Иванов, вице-президент — Татаринов, ученый секретарь — Тимошенко, казначей — Алексеев, отличается от выбора: президент — Тимошенко, вице-президент — Иванов, ученый секретарь — Татаринов и казначей — Алексеев). Поэтому ответ дается формулой

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

Перестановки

При составлении размещений без повторений из n элементов по k мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга и составом, и порядком элементов. Но если брать расстановки, в которые входят все n элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие расстановки называют *перестановками из n элементов*, или, короче, *n-перестановками*.

Иными словами, n-перестановками называют размещения без повторения из n элементов, в которые входят все элементы. Можно также сказать, что перестановками из n элементов называют всевозможные n-расстановки, каждая из которых содержит все эти элементы по одному разу и которые отличаются друг от друга лишь порядком элементов. Число n-перестановок обозначают через P_n. Формула для P_n сразу получается из формулы для числа размещений без повторений. Именно,

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \ldots 2 \cdot 1. \qquad (2)$$

Таким образом, чтобы узнать, сколько перестановок можно составить из n элементов, надо перемножить все натуральные числа от 1 до n. Это произведение обозначают $n!$ (читается n-факториал). Итак,

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

При этом полагают $1! = 1$.

В дальнейшем нам встретится обозначение 0! Казалось бы, что 0! должен равняться нулю. Принято считать, однако, что $0! = 1$.

Дело в том, что факториал обладает, очевидно, следующим свойством:

$$n! = n(n-1)!$$

Это равенство справедливо при $n > 1$. Естественно определить 0! так, чтобы оно оставалось верным и при $n = 1$, то есть так, чтобы $1! = 1 \cdot 0!$ Но тогда нужно положить $0! = 1$.

Заметим еще, что формулу (1) для числа размещений без повторений можно записать следующим образом:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{3}$$

В самом деле, в дроби (3) все сомножители: 1, 2, 3, ..., $n-k$ входят и в числитель, и в знаменатель. После сокращения получаем, что $A_n^k = n(n-1) \ldots (n-k+1)$ в соответствии с формулой (1).

Задача о ладьях

Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

Ясно, что при таком расположении на каждой горизонтали и каждой вертикали стоит по одной ладье. Возьмем одно из этих расположений и обозначим через a_1 номер занятого поля на первой горизонтали, через a_2 — на второй горизонтали, ..., через a_8 — на восьмой горизонтали. Тогда $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ будет некоторой перестановкой из чисел 1, 2, ..., 8 (ясно, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$ нет ни одной пары одинаковых, так как иначе две ладьи попали бы на одну и ту же вертикаль). Обратно, если $a_1, a_2, \ldots, a_8$ — некоторая перестановка чисел 1, 2, ..., 8, то ей соответствует некоторое расположение ладей, при котором они не могут бить друг друга. Например, на рис. 6 изображено расположение ладей, соответствующих перестановке 7 5 4 6 1 3 2 8. Таким образом, число искомых расположений ладей равно числу перестановок чисел 1, 2, ..., 8, то есть P_8. Но

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

Значит, ладьи можно расположить требуемым образом 40 320 способами.

Точно так же доказывается, что *на доске из n горизонталей и n вертикалей можно $n!$ способами расположить ладьи так, чтобы они не могли бить друг друга.*

Совсем иной ответ получился бы, если бы ладьи чем-то отличались друг от друга — имели разный цвет или были перенумерованы. В этом случае из каждого расположения незанумерованных ладей получится $n!$ расположений занумерованных ладей — они получаются, если при тех же занятых полях всеми способами переставлять друг с другом n ладей. Поэтому получилось бы $(n!)^2$ способов расположения, при которых ладьи не могут бить друг друга.

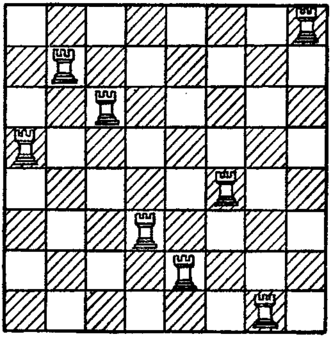


Рис. 6.

К тому же выводу можно прийти иначе, прямо используя правило произведения. Первую ладью можно поставить на любое из n^2 полей. Если вычеркнуть горизонталь и вертикаль, на которые попала эта ладья, остается доска с $n-1$ горизонталями и $n-1$ вертикалями, имеющая $(n-1)^2$ полей. Значит, вторая ладья может быть поставлена $(n-1)^2$ способами. Точно так же третья ладья может быть поставлена $(n-2)^2$ способами и т. д. Всего получаем

$$n^2(n-1)^2 \ldots 1^2 = (n!)^2$$

способов расположения ладей.

Лингвистические проблемы

Лингвистам — специалистам по живым и мертвым языкам, часто приходится разгадывать надписи, сделанные на незнакомых языках. Предположим, что им попался текст, написанный при помощи 26 незнакомых знаков. Эти знаки являются буквами, изображающими каждый один из 26 звуков. *Сколькими способами можно сопоставить звуки знакам письма?*

Расположим знаки письма в некотором порядке. Тогда каждый способ сопоставления даст некоторую перестановку звуков. Но из 26 звуков можно составить $P_{26}=26!$ перестановок. А это число приблизительно равно $4\cdot10^{26}$. Разумеется, проверить все эти возможности непосильная работа не только для человека, но и для электронной вычислительной машины. Поэтому стараются уменьшить число возможностей. Часто удается отделить знаки, обозначающие гласные, от знаков, обозначающих согласные (гласные чаще стоят рядом с согласными, чем гласные рядом с гласными или согласные рядом с согласными; наблюдая, какие сочетания знаков чаще всего встречаются, можно отделить знаки для гласных от знаков для согласных). Предположим, что удалось найти 7 знаков для гласных и 19 знаков для согласных. Подсчитаем, *во сколько раз уменьшилось число возможностей?* 7 знаков для гласных можно переставлять друг с другом 7! способами, а 19 знаков для согласных 19! способами. Общее число комбинаций равно $7!\cdot19!$. Значит, работа уменьшилась в $26!/7!\cdot19!\approx\approx650\,000$ раз. Конечно, стало легче, но и $7!\cdot19!$ — гигантское число.

Далее подсчитывают частоту появления отдельных знаков. Сравнивая эту частоту с частотой появления букв в близких к данному языках, можно примерно угадать значения некоторых знаков. Другие знаки удается найти, сравнив данный текст с тем же текстом на ином языке (древние цари любили вещать о своих «подвигах» на нескольких языках).

Предположим, что в результате этой работы опознано 4 гласных и 13 согласных букв. Сколько еще остается возможностей? Ясно, что $3!\cdot6!=4320$. А такое число комбинаций уже можно по порядку проверить, используя электронные вычислительные машины.

С аналогичными трудностями встречаются и криптологи — специалисты по расшифровке кодов.

Хоровод

Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Если бы они стояли на месте, то получилось бы $7!=$ $=5040$ перестановок. Но так как танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих предметов не существенно, а важно лишь взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении танцовщиц надо считать одинаковыми. Но из каждой перестановки можно получить еще шесть новых путем вращения. Значит, число 5040 надо разделить на 7. Мы получаем $5040 : 7 = 720$ различных перестановок девушек в хороводе.

Вообще, если рассматривать перестановки n предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать

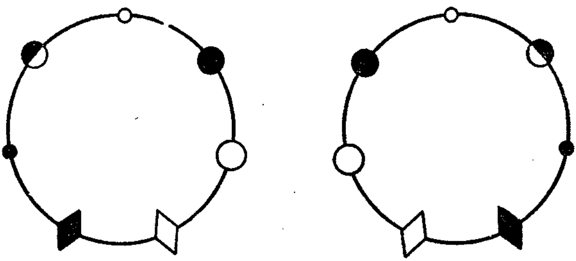


Рис. 7.

одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно $(n-1)!$.

А теперь сосчитаем, сколько ожерелий можно составить из 7 различных бусин? По аналогии с только что решенной задачей можно подумать, что число различных ожерелий равно 720. Но ожерелье можно не только повернуть по кругу, но и перевернуть (рис. 7). Поэтому ответом на эту задачу является $720 : 2 = 360$.

Перестановки с повторениями

До сих пор мы переставляли предметы, которые были попарно различны. Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок — некоторые перестановки совпадают друг с другом.

Например, переставляя буквы слова «март», мы получим 24 различные перестановки:

март	рамт	мтра	ртма
матр	мтар	ратм	ртам
мрат	рмат	рмта	мрта
трам	тмар	амтр	артм
тарм	атрм	атмр	тамр
амрт	армт	трма	тмра

А если вместо слова «март» взять слово «мама», то во всех выписанных перестановках надо будет заменить «р» на «м» и «т» на «а». При этом некоторые из наших 24 перестановок окажутся одинаковыми. Например, стоящие в первой строке перестановки март, рамт, мтра, ртма при этой замене дадут одно и то же слово «мама». Точно так же все четыре перестановки, написанные во второй строке, дадут слово «маам». Вообще, все 24 перестановки разбиваются на четверки, которые при замене «р» на «м» и «т» на «а» дают один и тот же результат. В таблице эти перестановки стоят в одной строке. Поэтому число различных перестановок, которые можно сделать из слова «мама», равно $24:4=6$. Вот они

мама, маам, ммаа, амам, аамм, амма.

Общая задача формулируется следующим образом: *Имеются предметы k различных типов. Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ..., n_k элементов k-го типа?*

Число элементов в каждой перестановке равно $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$. Поэтому если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы $n!$. Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. В самом деле, возьмем, например, перестановку

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n_1}\ \underbrace{bb\ldots b}_{n_2}\ \ldots\ \underbrace{xx\ldots x}_{n_k}, \tag{4}$$

в которой сначала выписаны все элементы первого типа, потом все элементы второго типа, ..., наконец, все элементы k-го типа. Элементы первого типа можно переставлять друг с другом $n_1!$ способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то такие перестановки ничего не меняют. Точно так же ничего не меняют $n_2!$ перестановок элементов второго типа, ..., $n_k!$ перестановок элементов k-го типа. Например, в перестановке «ммаа» ничего не изменится, если мы переставим первый элемент со вторым, или третий с четвертым.

Перестановки элементов первого типа, второго типа и т. д. можно делать независимо друг от друга. Поэтому (по правилу произведения) элементы перестановки (4) можно переставлять друг с другом $n_1!n_2!\ldots n_k!$ способами так, что она остается неизменной. То же самое верно и для любого другого расположения элементов. Поэтому множество всех $n!$ перестановок распадается на части, состоящие из $n_1!n_2!\ldots n_k!$ одинаковых перестановок каждая. Значит, число различных перестановок с повторениями, которые можно сделать из данных элементов, равно

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}, \qquad (5)$$

где, напомним, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Пользуясь формулой (5), легко ответить на вопрос: *сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»?* Здесь у нас одна буква «м», четыре буквы «и», три буквы «с» и одна буква «п», а всего 9 букв. Значит, по формуле (5) число перестановок равно

$$P(4,\ 3,\ 1,\ 1) = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} = 2520.$$

Анаграммы

До XVII столетия почти не было научных журналов. Ученые узнавали о трудах своих коллег или из книг, или из частных писем. Это создавало большие трудности при опубликовании новых результатов — ведь печатание книг занимало целые годы, а написать о своем открытии в частном письме было рискованно — не ровен час, кто-нибудь присвоит достижение, и поди доказывай, что он не сам придумал, а узнал из полученного письма. А могло случиться, что получатель письма долго думал над тем же вопросом, нашел его решение, и письмо ничего нового ему не открыло — он сам собирался написать коллеге аналогичное сообщение.

Из-за этого часто возникали споры о приоритете. Еще в конце XVII столетия шли долгие споры о приоритете между Ньютоном и Лейбницем (о том, кто первый открыл дифференциальное и интегральное исчисления), между Ньютоном и Гуком (кто первый сформулировал закон всемирного тяготения) и т. д.

А в древности Архимеду пришлось даже пуститься на хитрость. Когда некоторые александрийские ученые присвоили себе его результаты, о которых узнали из полученных от него писем, он написал им еще одно письмо. В нем содержались совершенно замечательные формулы для площадей и объемов некоторых фигур. Александрийцы снова сказали, что эти формулы они давным-давно знают, и ничего нового им Архимед не сообщил. Но тут выяснилось, что Архимед поймал их в ловушку — сообщенные в письме формулы были неверными! Для того чтобы и приоритет обеспечить, и не допустить преждевременной огласки достигнутых результатов, ученые в краткой фразе формулировали суть открытия, а потом переставляли в ней буквы и посылали письмо с переставленными буквами своим коллегам. Такие тексты с переставленными буквами называются *анаграммами*. Например, слова «лунка» и «кулан» — анаграммы. Когда же печаталась книга с подробным изложением результата, в ней давалась расшифровка анаграммы. К анаграммам прибегали и в политических спорах. Например, после убийства французского короля Генриха III из имени его убийцы frère Jacques Clément (брат Жак Клеман) составили анаграмму C'est l'enfer qui m'a créé (меня создал ад). Противники короля не остались в долгу и из его имени Henri de Valois (Анри де Валуа) составили анаграмму Vilain Herodés (Иродова мерзость). Когда Христиан Гюйгенс (1629—1695) открыл кольцо Сатурна, он составил анаграмму

aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiiii, lll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, ttttt, uuuuu.

Если поставить в ней буквы в нужном порядке, то получится текст

«Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato».

(«Окружен кольцом тонким, плоским, нигде не подвешенным, наклонным к эклиптике».)

Однако не всегда анаграммы позволяли сохранять тайну. Когда тот же Гюйгенс открыл первый спутник Сатурна (Титан) и нашел, что время его обращения вокруг планеты равно 15 дням, он составил по этому поводу анаграмму и послал своим коллегам. Однако один из них, Валлис, большой мастер в расшифровке тайнописи, разгадал эту анаграмму и составил по этому поводу свою анаграмму, которую послал Гюйгенсу. Когда ученые обменялись разгадками анаграмм, то получилось так, что будто бы Валлис еще до Гюйгенса сделал то же самое открытие. Потом Валлис признался, что он пошутил, чтобы доказать бесполезность анаграмм в деле тайнописи. Гюйгенс, однако, не оценил этой шутки и рассердился...

Подсчитаем, сколько надо было сделать перестановок, чтобы дойти до истинного смысла первой анаграммы Гюйгенса. В эту анаграмму входит 7 букв a, 5 букв c, 1 буква d, 5 букв e, 1 буква g, 1 буква h, 7 букв i, 3 буквы l, 2 буквы m, 9 букв n, 4 буквы o, 2 буквы p, 1 буква q, 2 буквы r, 1 буква s, 5 букв t и 5 букв u, а всего 61 буква. Значит, по формуле (5) получаем

$$\frac{61!}{7!\,5!\,1!\,5!\,1!\,1!\,7!\,3!\,2!\,9!\,4!\,2!\,1!\,2!\,1!\,5!\,5!}$$

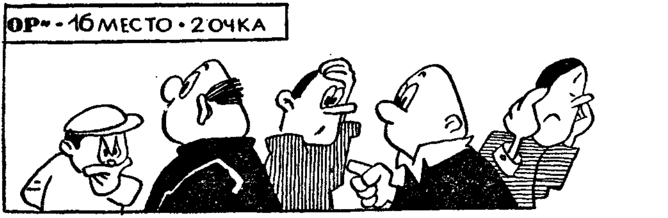
перестановок. Это громадное число примерно равно 10^{60}.

С задачей перебора всех этих перестановок электронная вычислительная машина, делающая миллион операций в секунду, не справилась бы за все время существования Солнечной системы.

В каком-то смысле человеку легче решить эту задачу, чем машине. Ведь человек будет брать не все перестановки, а только те, в которых получаются осмысленные слова, будет учитывать морфологические правила и т. д. Это сильно сократит число необходимых попыток. А самое главное — он примерно знает, над какими вопросами думал его корреспондент. Но все равно получается очень громоздкая работа.

Сочетания

Не всегда нас интересует порядок, в котором располагаются элементы. Например, если в полуфинале первенства СССР по шахматам участвуют 20 человек,



а в финал выходят лишь трое, то порядок, в котором располагается первая тройка, не существен — хоть третьим, а лишь бы выйти в финал! Ведь бывали случаи, что чемпионом СССР становился шахматист, занявший в полуфинале не самое высокое место.

Точно так же при проведении первенства СССР по футболу высшую лигу, состоящую из 17 команд, должны были покинуть команды, занявшие последние четыре места. И слабым утешением могло служить то, что команда заняла 14, а не 17 место — все равно придется перейти во второй эшелон.

В тех случаях, когда нас не интересует порядок элементов в комбинации, а интересует лишь ее состав, говорят о сочетаниях. Итак, *k-сочетаниями из n элементов* называют всевозможные k-расстановки, составленные из этих элементов и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком элементов. Число k-сочетаний, которые можно составить из n элементов, обозначают через C_n^k.

Формула для числа сочетаний легко получается из выведенной ранее формулы для числа размещений. В самом деле, составим сначала все k-сочетания из n элементов, а потом переставим входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами. При этом получатся все k-размещения из n элементов, причем каждое только по одному разу. Но из каждого k-сочетания можно сделать $k!$ перестановок, а число этих сочетаний равно C_n^k. Значит, справедлива формула

$$k!\,C_n^k = A_n^k.$$

Из этой формулы находим, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (6)$$

Замечательно, что выведенная формула совпадает с формулой для числа перестановок из k элементов одного типа и $n-k$ элементов второго типа:

$$P(k,\ n-k)=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Иными словами,

$$C_n^k=P(k,\ n-k). \tag{7}$$

Это равенство можно доказать и непосредственно, не прибегая к формуле числа размещений. Для этого поставим по порядку все n элементов, из которых составляют сочетания, и зашифруем каждое сочетание n-расстановкой нулей и единиц. Именно, если некоторый элемент входит в сочетание, то на его месте пишем 1, а если он не входит, то пишем 0. Например, если составляются сочетания из букв а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к, то сочетанию {а, в, е, з, и} соответствует расстановка 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0, а расстановке 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 — сочетание {б, в, г, ж, к}. Ясно, что при этом каждому k-сочетанию соответствует расстановка из k единиц и $n-k$ нулей, а каждой расстановке из k единиц и $n-k$ нулей соответствует некоторое k-сочетание, причем различным расстановкам — различные k-сочетания. Отсюда и следует, что число k-сочетаний из n элементов совпадает с числом перестановок из k элементов одного типа (единиц) и $n-k$ элементов другого типа (нулей).

Применяя формулу (6), легко решить задачи, о которых говорилось в начале этого пункта. Число различных исходов полуфинала шахматного первенства дается формулой

$$C_{20}^3=\frac{20!}{3!\,17!}=1140.$$

Число же различных «печальных» исходов футбольного первенства равно

$$C_{17}^4=\frac{17!}{4!\,13!}=2380.$$

Вот еще задача на сочетания:

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 ладей? В отличие от задачи, рассмотренной на стр. 34, здесь не налагается условие, что ладьи не могут бить друг друга. Поэтому нам надо просто выбрать из 64 клеток шахматной доски любые 8 клеток. А это может быть сделано

$$C_{64}^{8}=\frac{64!}{8!\,56!}=4\,328\,284\,968$$

способами.

Точно так же доказывается, что на доске из m горизонталей и n вертикалей k ладей можно поставить

$$C_{mn}^{k}=\frac{(mn)!}{k!\,(mn-k)!}$$

способами.

Если же ставить не k одинаковых ладей, а k различных фигур, то уже имеет значение, какая фигура куда поставлена. Поэтому здесь получатся не сочетания, а размещения, и ответ дается формулой

$$A_{mn}^{k}=\frac{(mn)!}{(mn-k)!}.$$

Генуэзская лотерея

В прошлые века процветала так называемая *генуэзская лотерея*, сохранившаяся в некоторых странах до сих пор. Суть ее заключалась в следующем. Участники лотереи покупали билеты, на которых стояли числа от 1 до 90. Можно было купить и билеты, на которых было сразу два, три, четыре или пять чисел. В день розыгрыша лотереи из мешка, содержавшего жетоны с числами от 1 до 90, вынимали пять жетонов. Выигрывали те, у которых все числа на билете были среди вынутых[1]). Например, если на билете были числа 8, 21, 49, а вынутыми оказались числа 3, 8, 21, 37, 49, то билет выигрывал; если же вынутыми были, скажем, числа 3, 7, 21, 49, 63, то билет проигрывал — ведь числа 8 среди вынутых не оказалось.

Если участник лотереи покупал билет с одним числом, то он получал при выигрыше в 15 раз больше стоимости билета — если с двумя числами (амбо), то в 270 раз больше, если с тремя числами (терн), то в 5500

---

[1]) Видоизменением этой лотереи является распространенная игра в лото — здесь тоже участвуют «бочонки» с числами от 1 до 90, а на карточках у игроков напечатаны 3 ряда по 5 чисел в каждом ряду. Заполнение 4 чисел часто называют «квартира», что является искажением слова «катерн».

раз больше, если с четырьмя числами (катерн) — в 75 000 раз больше, а если с пятью числами (квин), то в 1 000 000 раз больше, чем стоимость билета.

Многие люди пытались обогатиться, участвуя в этой лотерее и ставя в каждом розыгрыше на терн или амбо. Но почти никому не удалось этого сделать — лотерея была рассчитана так, чтобы в выигрыше оставались ее устроители [1]).

Чтобы понять, в чем дело, попробуем сосчитать, каково отношение «счастливых» исходов лотереи к общему числу ее исходов при различных способах игры. Общее число исходов лотереи сразу находится по формуле (6). Ведь из мешка с 90 жетонами вынимают 5 жетонов, причем их порядок не играет никакой роли. Получаются сочетания из 90 элементов по 5, число которых равно

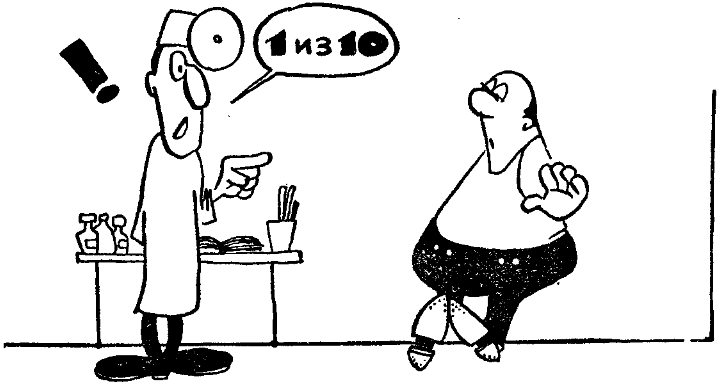
$$C_{90}^{5}=\frac{90!}{5!\,85!}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Предположим теперь, что участник лотереи купил билет с одним номером. Во скольких случаях он выиграет? Для выигрыша необходимо, чтобы один из вынутых номеров совпал с номером на билете. Остальные же 4 номера могут быть любыми. Но эти четыре номера выбираются из оставшихся 89 номеров. Поэтому число благоприятных комбинаций выражается формулой

$$C_{89}^{4}=\frac{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

---

[1]) Переживания участников лотереи ярко описаны итальянской писательницей Матильдой Серао в новелле «Розыгрыш лотереи», см. книгу «Итальянские новеллы 1860—1914 гг.», ГИХЛ, 1960, стр. 226—250.



Отсюда следует, что отношение числа благоприятных комбинаций к общему числу комбинаций равно

$$\frac{C_{89}^{4}}{C_{90}^{5}}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}.$$

Это, примерно, означает, что игрок будет выигрывать один раз из восемнадцати. Иными словами, он заплатит за 18 билетов, а выиграет лишь в 15 раз больше стоимости одного билета — цену трех билетов положат в карман устроители лотереи.

Разумеется, не следует думать, что из каждых 18 раз игрок выиграет в точности один раз. Иногда между двумя выигрышами пройдет 20 или 30 тиражей, а иногда удастся выиграть и в двух тиражах подряд. Речь идет о среднем числе выигрышей за большой промежуток времени или при большом числе участников. Иначе можно сделать ошибку, которую приписывают одному врачу. Он сказал пациенту: «У Вас болезнь, от которой выздоравливает 1 человек из 10. Но предыдущие 9 больных, которых я лечил от этой болезни, умерли. Значит, Вы обязательно выздоровеете!».

А теперь подсчитаем шансы при игре на амбо. Здесь уже нужно, чтобы два загаданных номера вошли в число вынутых из мешка, а остальные три номера могут быть любыми. Так как их можно выбрать из оставшихся 88 номеров, то число «счастливых» исходов при игре на амбо дается формулой

$$C_{88}^{3}=\frac{88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Отношение же числа «счастливых» исходов к общему числу исходов равно

$$\frac{C_{88}^3}{C_{90}^5} = \frac{4 \cdot 5}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}.$$

Здесь уже из 801 исхода только два приводят к выигрышу. Но так как выигрыш лишь в 270 раз больше стоимости билета, то из каждых 801 билетов «амбо» цену 261 билета кладут в карман устроители лотереи. Ясно, что игра на амбо еще менее выгоднее участникам, чем игра на «простую одиночку».

Совсем уже невыгодны игры на терн, катерн и квин. При игре на терн отношение числа благоприятных исходов к числу всех исходов равно

$$\frac{C_{87}^2}{C_{90}^5} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11\,748},$$

при игре на катерн

$$\frac{C_{86}^1}{C_{90}^5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511\,038}$$

и при игре на квин

$$\frac{1}{C_{90}^5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43\,949\,268}.$$

Платят же выигрывшим лишь в 5500, 75 000 и 1 000 000 раз больше. Подсчитайте сами, каковы потери участников лотереи при этих условиях.

Покупка пирожных

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Эта задача имеет иной вид, чем те, которые мы уже решали. Она не является задачей на размещения с повторениями, так как порядок, в котором укладывают пирожные в коробку, несуществен. Поэтому она ближе к задачам на сочетания. Но от задач на сочетания она отличается тем, что в комбинации могут входить повторяющиеся элементы (например, можно купить

7 эклеров). Такие задачи называют задачами на *сочетания с повторениями.*

Чтобы решить нашу задачу, поступим следующим образом. Зашифруем каждую покупку с помощью нулей и единиц. Именно, сначала напишем столько единиц, сколько куплено наполеонов. Потом, чтобы отделить наполеоны от эклеров, напишем нуль, а затем — столько единиц, сколько куплено эклеров. Далее снова напишем нуль (если не было куплено ни одного эклера, то в записи появятся два следующих друг за другом нуля). Далее напишем столько единиц, сколько куплено песочных пирожных, снова напишем нуль, и наконец, напишем столько единиц, сколько куплено слоеных пирожных. Например, если куплено 3 наполеона, 1 эклер, 2 песочных пирожных и 1 слоеное, то получим такую запись: 1110101101. Если же куплено 2 наполеона и 5 песочных, то получится запись 1100111110. Ясно, что разным покупкам соответствуют при этом разные комбинации из 7 единиц и 3 нулей. Обратно, каждой комбинации 7 единиц и 3 нулей соответствует какая-то покупка. Например, комбинации 0111011110 соответствует покупка 3 эклеров и 4 песочных пирожных.

Таким образом, число различных покупок равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из 7 единиц и 3 нулей. А это число, как было показано на стр. 39, равно

$$P(7,\ 3)=\frac{10!}{7!\,3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120.$$

К тому же самому результату можно было бы прийти и иным путем. Именно, расположим в каждой покупке пирожные в таком порядке: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные, а потом перенумеруем их. Но при нумерации будем к номерам эклеров прибавлять 1, к номерам песочных — 2 и к номерам слоеных пирожных — 3 (а к номерам наполеонов ничего не будем прибавлять). Например, пусть куплено 2 наполеона, 3 эклера, 1 песочное и 1 слоеное пирожное. Тогда эти пирожные нумеруются так: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Ясно, что самый большой номер при этом равен 10 (последнее слоеное пирожное получает номер 7+3=10), а самый маленький номер равен 1 (этот номер получает первый наполеон). При этом ни один номер не повторяется. Обратно, каждой возрастающей последовательности 7 чисел от 1 до 10 соответствует некоторая покупка. Например, последовательность 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 соответствует покупке из 4 эклеров и 3 песочных пирожных. Чтобы убедиться в этом, надо отнять от заданных номеров числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Мы получим числа 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, то есть 4 единицы и 3 двойки. Но 1 мы прибавляли к номерам эклеров, а 2 — к номерам песочных пирожных; значит, у нас 4 эклера и 3 песочных пирожных.

При этом у нас получаются лишь возрастающие последовательности чисел, и, следовательно, каждая последовательность полностью определяется своим составом. Поэтому число таких 7-последовательностей равно числу 7-сочетаний из 10 чисел (от 1 до 10). А число этих сочетаний дается формулой

$$C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120.$$

Мы получили тот же самый результат.

Сочетания с повторениями

Мы уже говорили, что разобранная задача относится к типу задач на сочетания с повторениями. Общая формулировка этих задач такова: имеются предметы n различных типов. Сколько k-комбинаций можно сделать из них, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации (иными словами, различные комбинации должны отличаться хотя бы одним предметом)?

Эта задача в общем виде решается точно так же, как и задача о пирожных. Именно, надо зашифровать каждую комбинацию с помощью нулей и единиц: для каждого типа написать столько единиц, сколько предметов этого типа входит в комбинацию, а различные типы отделять друг от друга нулями (при этом если предметы какого-нибудь типа совсем не вошли в комбинацию, то надо писать подряд два или большее число нулей). При этом мы получим столько единиц, сколько предметов входит в комбинацию, то есть k, а число нулей будет на 1 меньше, чем число типов предметов, то есть $n-1$. Таким образом, мы получим перестановки с повторениями из k единиц и $n-1$ нулей. Различным комбинациям будут при этом соответствовать различные перестановки с повторениями, а каждой перестановке с повторениями соответствует своя комбинация. Итак, число $\overline{C}_n^k$ k-сочетаний с повторениями из элементов n типов равно числу $P(k, n-1)$ перестановок с повторениями из $n-1$ нулей и k единиц. А

$$P(k,\ n-1)=\frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

Поэтому

$$\overline{C}_n^k=\frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}=C_{n+k-1}^k.$$

Эту же формулу можно доказать и иным способом. Надо в каждом сочетании расположить элементы по типам (сначала все элементы первого типа, потом — второго типа и т. д.). А после этого перенумеровать все элементы в сочетании, но к номерам элементов второго типа прибавить 1, третьего типа прибавить 2 и т. д. Тогда из каждого сочетания с повторениями получится сочетание без повторений, состоящее из чисел 1, 2, ..., $n+k-1$, причем в каждое сочетание входит k элементов. Отсюда снова следует, что

$$\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}. \tag{8}$$

Встречаются задачи, в которых на сочетания с повторениями налагается дополнительное условие — в них обязательно должны входить элементы r фиксированных типов, где $r\leqslant n$. Эти задачи легко сводятся к уже решенной. Для того чтобы обеспечить присутствие элементов заданных r типов, возьмем с самого начала по одному элементу каждого такого типа. Тем самым в k-сочетании окажутся заняты r мест. Остальные же $k-r$ мест можно заполнять любыми элементами, принадлежащими по условию к n типам. Поэтому комбинаций искомого вида столько же, сколько и сочетаний с повторениями из элементов n типов, содержащих по $k-r$ элементов каждое, то есть

$$\overline{C}_n^{k-r}=C_{n+k-r-1}^{k-r}.$$

В частности, если $n \leqslant k$ и требуется, чтобы в k-сочетания с повторениями входил по крайней мере один элемент каждого из n типов, то получится C_{k-1}^{k-n} комбинаций.

Снова футбольное первенство

Мы разобрали задачи на размещения, перестановки и сочетания. Во многих случаях приходится иметь дело с комбинациями различных типов. Рассмотрим следующую задачу:

Назовем два исхода первенства СССР по футболу *совпадающими в главном*, если при этих исходах совпадают обладатели золотых, серебряных и бронзовых медалей, а также четыре команды, покидающие высшую лигу. *Найти число различных в главном исходов первенства* (как и выше, мы считаем, что в первенстве участвуют 17 команд).

Мы уже знаем, что медали могут распределяться $A_{17}^3 = 17 \cdot 16 \cdot 15$ способами (см. стр. 32). После этого остается 14 команд, из которых 4 должны покинуть высшую лигу. Так как здесь уже порядок выбывающих команд не важен, то это может произойти $C_{14}^4 = \frac{14!}{4!\,10!}$ способами. По правилу произведения получаем, что число различных в главном исходов первенства равно

$$A_{17}^3 \cdot C_{14}^4 = 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot \frac{14!}{4!\,10!} = \frac{17!}{4!\,10!} = 4\,084\,080.$$

К этому же результату можно прийти иным путем. Общее число различных исходов первенства (отбрасывая случаи, когда происходит раздел тех или иных мест) равно $P_{17} = 17!$. Но перестановки команд, занявших места с 4-го по 13-е, а также перестановки команд, занявших места с 14-го по 17-е, приводят к совпадающему в главном исходу первенства. Число таких перестановок равно $10! \cdot 4!$. Значит, число различных исходов дается формулой $\frac{17!}{10!\,4!}$.

Предположим, что об исходе первенства хотят передать с помощью телеграммы, состоящей из k точек и тире. *Каково наименьшее нужное для этого число знаков?* Мы уже знаем, что из k точек и тире можно составить 2^k различных комбинаций. Поэтому минимальное число знаков, с помощью которых можно передать требуемую информацию, должно быть таким, чтобы выполнялось неравенство

$$2^k \geqslant 4\,084\,080.$$

Решая его, получаем, что $k \geqslant 22$. Итак, для передачи результатов первенства с помощью точек и тире надо использовать не менее 22 знаков.

Разумеется, такие подсчеты при передаче исходов соревнований не используются. Но легко представить случай, когда передача информации сопряжена с большими техническими трудностями (например, при передаче фотографического снимка с космического корабля) и каждый знак идет «на вес золота». Тогда приходится рассматривать различные возможности такой передачи и выбирать наиболее экономные. Эти вопросы изучаются в разделе математики, называемом *теорией информации.*

Свойства сочетаний [1])

Числа C_n^k обладают целым рядом замечательных свойств. Эти свойства можно доказывать по-разному. В некоторых случаях удобнее всего прямо воспользоваться формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{9}$$

Однако часто удается получить доказательство из комбинаторных соображений: подсчитываем число комбинаций некоторого вида и разбиваем эти комбинации на классы без общих элементов. После этого находим, сколько комбинаций входит в каждый класс. Складывая полученные числа, снова получаем число всех комбинаций данного вида. Это и дает искомое соотношение.

Начнем с самого простого соотношения:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{10}$$

---

[1]) Конец главы при первом чтении можно пропустить. Однако доказанные здесь равенства $C_n^k = C_n^{n-k}$ и $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ дальше будут часто встречаться.

Оно сразу вытекает из формулы (9). Ведь если заменить в этой формуле k на $n-k$, то $n-k$ заменится на $n-(n-k)=k$ и в результате множители, стоящие в знаменателе, поменяются местами. Но равенство (10) легко доказать и не прибегая к явному виду числа сочетаний. Если выбрать из n различных элементов некоторое k-сочетание, то останется дополнительное сочетание из $n-k$ элементов, а дополнительным к полученному $(n-k)$-сочетанию является исходное k-сочетание. Таким образом, k-сочетания и $(n-k)$-сочетания образуют взаимно дополнительные пары, потому число этих сочетаний одно и то же. Значит, $C_n^k=C_n^{n-k}$.

Почти столь же просто доказывается соотношение

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k. \tag{11}$$

Для этого составим k-сочетания из n элементов $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ и разобьем их на два класса. В первый из них войдут сочетания, содержащие элемент a_n, а во второй — сочетания, не содержащие этого элемента. Если из любого сочетания первого класса откинуть элемент a_n, то останется $(k-1)$-сочетание, составленное из элементов $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Число этих сочетаний равно C_{n-1}^{k-1}. Поэтому в первый класс входит C_{n-1}^{k-1} комбинаций. Сочетания второго класса являются k-сочетаниями, составленными из $(n-1)$-го элемента $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Поэтому их число равно C_{n-1}^k. Поскольку любое k-сочетание из элементов $a_1, \ldots, a_n$ принадлежит одному и только одному из этих классов, а общее число этих сочетаний равно C_n^k, то приходим к равенству (11).

Похожим способом доказывается соотношение

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n. \tag{12}$$

Для этого вспомним, что 2^n — это число всех n-размещений с повторениями из элементов двух типов. Разобьем эти размещения на классы, отнеся в k-й класс те, в которые входят k элементов первого типа и $n-k$ элементов второго типа. Размещения k-го класса — это не что иное, как всевозможные перестановки из k элементов первого типа и $n-k$ элементов второго типа. Мы знаем, что число таких перестановок равно $P(k, n-k)$, а $P(k, n-k)=C_n^k$ (см. стр. 39 и 43). Значит, общее число размещений всех классов равно $C_n^0+C_n^1\ldots+C_n^n$. С другой стороны, это же число равно 2^n. Тем самым соотношение (12) доказано.

Совершенно так же доказывается, что

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} P(n_1,\ n_2,\ n_3)=3^n, \qquad (13)$$

где сумма распространена на все разбиения числа n на три слагаемых (причем учитывается и порядок слагаемых, то есть в сумму входят, например, и $P(n_1,\ n_2,\ n_3)$, и $P(n_2,\ n_3,\ n_1)$. Для доказательства надо рассмотреть все n-размещения из элементов трех типов и разбить их на классы одного и того же состава (то есть брать размещения с одним и тем же числом элементов первого типа, второго типа и третьего типа).

Вообще, имеет место равенство

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} P(n_1,\ \ldots,\ n_k)=k^n, \qquad (14)$$

где сумма распространена на все разбиения числа n на k слагаемых (с учетом порядка слагаемых).

А теперь рассмотрим m-сочетания с повторениями, составленные из элементов $n+1$ типов, скажем из $n+1$ букв $a,\ b,\ c,\ \ldots,\ x$. Число таких сочетаний равно $\overline{C}_{n+1}^m=C_{n+m}^m$. Разобьем все эти сочетания на классы, отнеся к k-му классу сочетания, в которые k раз входит буква a. Остальные $m-k$ мест могут быть заняты оставшимися буквами $b,\ c,\ \ldots,\ x$, число которых равно n. Поэтому в k-й класс входит столько сочетаний, сколько можно составить $(m-k)$-сочетаний с повторениями из элементов n типов, то есть $C_{n+m-k-1}^{m-k}$. Значит, общее число всех сочетаний равно

$$C_{n+m-1}^m+C_{n+m-1}^{m-1}+\ldots+C_n^1+C_{n-1}^0.$$

С другой стороны, мы видели, что это число равно C_{n+m}^m. Таким образом, доказано равенство

$$C_{n-1}^0+C_n^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+m-1}^m=C_{n+m}^m. \qquad (15)$$

Заменяя здесь n на $n+1$ и m на $m-1$ и используя равенство (10), получаем, что

$$C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\ldots+C_{n+m-1}^n=C_{n+m}^{n+1}. \qquad (16)$$

Частными случаями формулы (16) при $n=1, 2, 3$ являются

$$1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}, \tag{17}$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+m(m+1)=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}, \tag{18}$$

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+m(m+1)(m+2)=$$
$$=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}. \tag{19}$$

С помощью формул (17)—(19) легко найти сумму квадратов и сумму кубов натуральных чисел от 1 до m. Формулу (18) можно переписать так:

$$1^2+2^2+\ldots+m^2+1+2+\ldots+m=$$
$$=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}.$$

Но по формуле (17) $\quad 1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}$

и потому

$$1^2+2^2+\ldots+m^2=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}-\frac{m(m+1)}{2}=$$
$$=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}. \tag{20}$$

Точно так же из формулы (9) выводим, что

$$1^3+2^3+\ldots+m^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}. \tag{21}$$

Предоставляем читателю получить таким образом формулы для сумм более высоких степеней натуральных чисел.

m-сочетания с повторениями из элементов n типов можно расклассифицировать, взяв за основу число элементов различного типа, входящих в данное сочетание. Иными словами, в первый класс войдут сочетания, состоящие из одинаковых элементов, во второй — из элементов двух типов, ..., в n-й — из элементов всех n типов (разумеется, если $m<n$, то получится лишь m классов).

Подсчитаем, сколько сочетаний входит в каждый класс. Выбор сочетания, принадлежащего k-му классу, можно сделать в два этапа. Сначала выберем, какие именно k типов элементов входят в сочетание. Так как общее число типов равно n, то этот выбор можно сделать C_n^k способами. А после того, как типы уже выбраны, нам предстоит составить те m-сочетания с повторениями из элементов этих k типов, в которых все эти k типов представлены. А мы доказали (см. стр. 51), что число таких сочетаний с повторениями равно $C_{m-1}^{m-k} = C_{m-1}^{k-1}$.

По правилу произведения отсюда следует, что в k-й класс входит $C_n^k C_{m-1}^{k-1}$ сочетаний. Складывая числа сочетаний каждого класса, получим общее число m-сочетаний с повторениями из элементов n типов, то есть C_{m+n-1}^m. Тем самым доказано равенство

$$C_n^1 C_{m-1}^0 + C_n^2 C_{m-1}^1 + \ldots + C_n^n C_{m-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^m. \qquad (22)$$

Если $m<n$, то последним членом в сумме будет $C_n^m C_{m-1}^{m-1}$. Полученное равенство удобнее переписать иначе, заменив в каждом слагаемом C_n^k на C_n^{n-k}. Мы получим

$$C_n^{n-1} C_{m-1}^0 + C_n^{n-2} C_{m-1}^1 + \ldots + C_n^0 C_{m-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{n-1}. \qquad (23)$$

Здесь в каждом слагаемом слева сумма верхних индексов равна $n-1$, а нижних $n+m-1$. При этом нижние индексы постоянны, а верхние меняются. Иначе это равенство можно записать так:

$$C_p^0 C_{n-p}^m + C_p^1 C_{n-p}^{m-1} + \ldots + C_p^m C_{n-p}^0 = C_n^m. \qquad (23')$$

Сейчас мы выведем аналогичную формулу, в которой при суммировании меняются и нижние индексы. Для этого возьмем p различных гласных букв и $n-p$ различных согласных букв и составим из них всевозможные m-сочетания с повторениями. Разобьем эти сочетания на классы, отнеся к k-му классу сочетания, содержащие k гласных и $m-k$ согласных букв. Подсчитаем число сочетаний, входящих в k-й класс. Каждое сочетание этого класса разбивается на k-сочетание (с повторениями), составленное из p гласных букв, и $(m-k)$-сочетание (с повторениями), составленное из $n-p$ согласных букв. Поэтому в k-й класс входит

$C_{k+p-1}^{k}C_{m+n-p-k-1}^{m-k}$ сочетаний. Следовательно, общее число рассматриваемых сочетаний равно

$$C_{p-1}^{0}C_{m+n-p-1}^{m}+C_{p}^{1}C_{m+n-p-2}^{m-1}+\ldots+C_{m+p-1}^{m}C_{n-p-1}^{0}.$$

С другой стороны, эти сочетания дают всевозможные m-сочетания с повторениями из элементов n различных типов, а потому их число равно C_{m+n-1}^{m}. Мы приходим к тождеству

$$C_{p-1}^{0}C_{m+n-p-1}^{m}+C_{p}^{1}C_{m+n-p-2}^{m-1}+\ldots$$
$$\ldots+C_{m+p-1}^{m}C_{n-p-1}^{0}=C_{m+n-1}^{m}. \quad (24)$$

Перепишем это тождество так, чтобы при суммировании менялись лишь нижние индексы. Для этого надо ко всем членам применить тождество $C_r^q=C_r^{r-q}$. Мы получим

$$C_{p-1}^{p-1}C_{m+n-p-1}^{n-p-1}+C_{p}^{p-1}C_{m+n-p-2}^{n-p-1}+\ldots$$
$$\ldots+C_{m+p-1}^{p-1}C_{n-p-1}^{n-p-1}=C_{m+n-1}^{n-1}.$$

Эту формулу можно иначе переписать следующим образом [1]:

$$C_{p}^{p}C_{m-p}^{n-p}+C_{p+1}^{p}C_{m-p-1}^{n-p}+\ldots+C_{m-n+p}^{p}C_{n-p}^{n-p}=C_{m+1}^{n+1}. \quad (24')$$

Мы видим, что здесь при суммировании верхние индексы остаются постоянными, а нижние меняются, причем сумма верхних индексов равна n, а нижних m.

Отметим частный случай полученной ранее формулы (23). Если положить в ней $n-p=m$, то получим

$$C_{p}^{0}C_{m}^{0}+C_{p}^{1}C_{m}^{1}+\ldots+C_{p}^{m}C_{m}^{m}=C_{p+m}^{m}. \quad (25)$$

В частности, при $p=m$ имеем равенство

$$(C_p^0)^2+(C_p^1)^2+\ldots+(C_p^p)^2=C_{2p}^{p}. \quad (26)$$

Полученные тождества можно обобщить. Для этого рассмотрим совокупность, состоящую из элементов q типов: n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ..., n_k элементов k-го типа, причем элементы одного типа отличны друг от друга (например, тип определяется цветом предмета, а предметы одного цвета имеют различную форму).

Будем составлять из элементов этой совокупности всевозможные m-сочетания и классифицировать их по составу, то есть по числу

[1]) Мы заменяем p на $p+1$, n на $n+2$ и m на $m-n$.

элементов первого, второго, ..., q-го типов. Таким образом, каждый класс характеризуется натуральными числами $(m_1, m_2, \ldots, \ldots, m_q)$, удовлетворяющими неравенствам $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$. Он состоит из m_1 элементов первого типа, m_2 элементов второго типа, ..., m_q элементов q-го типа, причем $m_1+m_2+\ldots+m_q=m$. Мы будем обозначать такой класс $A(m_1, \ldots, m_q)$.

Из правила произведения вытекает, что в класс $A(m_1, \ldots, m_q)$ входит $C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\ldots C_{n_q}^{m_q}$ сочетаний. Суммируя числа сочетаний по всем классам, получаем тождество

$$\sum C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\ldots C_{n_q}^{m_q}=C_n^m, \tag{27}$$

где $n=n_1+n_2+\ldots+n_q$, а суммирование распространено на всевозможные комбинации натуральных чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_q)$, где $m_1+m_2+\ldots+m_q=m$.

Если брать сочетания с повторениями, то получаем аналогичное тождество

$$\sum C_{n_1+m_1-1}^{m_1}C_{n_2+m_2-1}^{m_2}\ldots C_{n_q+m_q-1}^{m_q}=C_{n+m-1}^m, \tag{28}$$

где также $n=n_1+n_2+\ldots+n_q$, а суммирование ведется по тем же комбинациям чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_q)$.

Еще одно свойство сочетаний устанавливается так. Мы имеем тождество

$$C_n^kC_{n-k}^{m-k}=C_m^kC_n^m. \tag{29}$$

Это тождество легко проверяется комбинаторно. Для этого надо взять n различных элементов, выбрать из них k элементов, а из оставшихся $n-k$ элементов выбрать еще $m-k$. Таким путем получится m-сочетание из n-элементов. При фиксированном k этот процесс можно провести $C_n^kC_{n-k}^{m-k}$ способами. Нетрудно проверить, что при этом каждое из C_n^m сочетаний получается при C_m^k способах. Отсюда и вытекает равенство (29).

Запишем тождество (29) при $k=0, \ldots, m$ и сложим получающиеся равенства. Так как по формуле (12)

$$C_m^0+C_m^1+\ldots+C_m^m=2^m,$$

то получаем, что

$$C_n^0C_n^m+C_n^1C_{n-1}^{m-1}+\ldots+C_n^mC_{n-m}^0=2^mC_n^m,$$

или

$$C_n^0C_n^{n-m}+C_n^1C_{n-1}^{n-m}+\ldots+C_n^mC_{n-m}^{n-m}=2^mC_n^m. \tag{30}$$

Частный случай формулы включений и исключений

Многие свойства сочетаний выводятся на основе формулы включений и исключений (см. стр. 25). Нам понадобится частный случай этой формулы. Пусть число $N(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$ элементов, обладающих свойствами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, зависит не от самих этих свойств, а лишь от их числа, то есть, пусть

$$N(\alpha_1) = \ldots = N(\alpha_n),$$
$$N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1\alpha_3) = \ldots = N(\alpha_{n-1}\alpha_n),$$
$$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4) = \ldots = N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$$

и т. д. Тогда в сумме $N(\alpha_1) + \ldots + N(\alpha_n)$ все слагаемые равны одному и тому же числу, которое мы обозначим $N^{(1)}$ Поскольку в этой сумме n слагаемых, то она равна $nN^{(1)} = C_n^1 N^{(1)}$. Точно так же доказывается, что

$$N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-1}\alpha_n) = C_n^2 N^{(2)},$$

где $N^{(2)} = N(\alpha_1\alpha_2)$, и, вообще,

$$N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k) + \ldots + N(\alpha_{n-k+1} \ldots \alpha_n) = C_n^k N^{(k)} \quad (31)$$

(ясно, что сумма (31) распространена, естественно, на все возможные сочетания k свойств из n).

Поэтому в рассматриваемом случае формула включений и исключений принимает вид

$$N^{(0)} = N - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} - \ldots + (-1)^n C_n^n N^{(n)}. \quad (32)$$

Знакопеременные суммы сочетаний

А теперь перейдем к выводу дальнейших свойств сочетаний. Эти свойства похожи на доказанные ранее, но отличаются от них тем, что знаки слагаемых меняются — после плюса идет минус, потом опять плюс и т. д.

Простейшей из таких формул является

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (33)$$

Это тождество вытекает из равенства (11). Для доказательства надо заметить, что $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$. Заменим первое слагаемое на C_{n-1}^0 и заметим, что по формуле (11) $C_{n-1}^0 - C_n^1 = -C_{n-1}^1$. Далее, имеем $-C_{n-1}^1 + C_n^2 = C_{n-1}^2$ и т. д. В конце концов все слагаемые взаимно уничтожатся.

Эту формулу можно доказать комбинаторно. Выпишем все сочетания из n элементов $a_1, \ldots, a_n$ и сделаем следующее преобразование: к сочетанию, не содержащему букву a_1, припишем эту букву, а из сочетаний, куда она входит, вычеркнем ее. Легко проверить, что при этом снова получатся все сочетания и притом по одному разу. Но при этом преобразовании все сочетания, имевшие четное число элементов, превратятся в сочетания, имеющие нечетное число элементов, и обратно. Значит, сочетаний с четным числом элементов столько же, сколько и с нечетным числом (мы включаем в рассмотрение и пустое сочетание, совсем не содержащее элементов). Это и выражается формулой (33).

А теперь докажем более сложную формулу

$$C_n^0 C_n^m - C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + C_n^2 C_{n-2}^{m-2} - \ldots + (-1)^m C_n^m C_{n-m}^0 = 0. \tag{34}$$

Для доказательства рассмотрим m-сочетания из n элементов $a_1, \ldots, a_n$. Обозначим через $(a_1, \ldots, a_k)$ свойство сочетания, заключающееся в том, что в это сочетание заведомо входят элементы $a_1, \ldots, a_k$. Число $N(a_1, \ldots, a_k)$ таких сочетаний равно C_{n-k}^{m-k} (в них k мест заняты элементами $a_1, \ldots, a_k$, а на оставшиеся $m-k$ мест есть $n-k$ претендентов). Общее число сочетаний равно C_n^m, а сочетаний, не обладающих ни одним из свойств $(a_1), \ldots, (a_n)$, не существует (в каждое m-сочетание входят какие-то элементы). Поэтому в нашем случае $N = C_n^m$, $N^{(0)} = 0$, $N^{(k)} = C_{n-k}^{m-k}$. Подставляя эти значения в формулу (32), приходим к тождеству (34).

Точно так же доказывается соотношение

$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + C_n^2 C_{n+m-3}^{m-2} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n C_n^n C_{m-1}^{m-n} = 0, \quad \text{если} \quad m \geqslant n,$$
$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + \ldots + (-1)^m C_n^m C_{n-1}^0 = 0, \tag{35}$$

если $m < n$.

Именно, рассмотрим m-сочетания с повторениями из элементов n сортов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и обозначим через (a_k), $1 \leqslant k \leqslant n$, свойство сочетания, заключающееся в том, что среди его элементов есть элементы сорта a_k (и, быть может, элементы других сортов). Тогда $N(a_1, \ldots, a_k)$ — число сочетаний, в которые заведомо входят элементы сортов $a_1, \ldots, a_k$. Из каждого такого сочетания можно удалить по одному элементу сортов $a_1, \ldots, a_k$. В результате получится некоторое $(m-k)$-сочетание с повторениями из элементов n сортов $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$. При этом, обратно, добавляя к $(m-k)$-сочетанию с повторениями из элементов сортов $a_1, \ldots, a_n$ по одному элементу сортов $a_1, \ldots, a_k$, получим m-сочетание, в котором заведомо представлены сорта $a_1, \ldots, a_k$. Отсюда вытекает, что число $N(a_1, \ldots, a_k)$ равно числу $(m-k)$-сочетаний с повторениями из элементов n сортов, то есть $N(a_1, \ldots, a_k) = C_{n+m-k-1}^{m-k}$. Далее, общее число m-сочетаний с повторениями равно C_{n+m-1}^{m}, а сочетаний, не обладающих ни одним из свойств (a_k), $1 \leqslant k \leqslant n$, не существует. Подставляя найденные значения $N^{(0)} = 0$, $N = C_{n+m-1}^{m}$, $N^{(k)} = C_{n+m-k-1}^{m-k}$ в формулу (32), приходим к тождеству (35).

Наконец, докажем тождество

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \cdot 1^m = 0, \quad (36)$$

справедливое при $m < n$.

Для этого рассмотрим m-размещения с повторениями из элементов n сортов и обозначим через (a_k) свойство размещения, состоящее в том, что в него не входят элементы сорта a_k. Тогда $N(a_1, \ldots, a_k)$ — число m-размещений с повторениями, не содержащих элементов сортов $a_1, \ldots, a_k$, то есть состоящее из элементов $n-k$ сортов $a_{k+1}, \ldots, a_n$. А число таких размещений равно $(n-k)^m$. Таким образом, $N^{(k)} = N(a_1, \ldots, a_k) = (n-k)^m$. Общее число размещений равно n^m.

Наконец, размещений, не обладающих ни одним из свойств $(a_1), \ldots, (a_n)$, не существует. В самом деле, если размещение не обладает ни одним из свойств (a_k), то оно содержит элементы всех n сортов. А это невозможно, так как число m элементов в размещении меньше, чем n. Поэтому $N^{(0)}=0$, и мы приходим к тождеству (36).

Мы доказали здесь целый ряд соотношений для чисел C_n^k. Их можно доказать и другими способами. В главе V мы расскажем о геометрическом способе доказательства таких соотношений, а в главе VII изложим самый сильный метод доказательства — метод производящих функций. Этим методом можно доказать не только все соотношения, приведенные в этой главе, но и целый ряд других интересных соотношений.

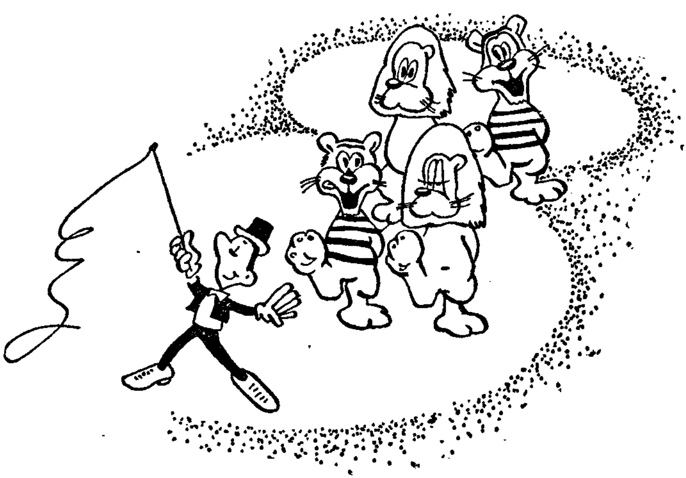
КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых на порядок элементов в комбинациях не накладывалось никаких дополнительных условий. Либо (как в размещениях и перестановках) допускался любой порядок элементов, либо (как в сочетаниях) порядок совсем не учитывался. Сейчас мы разберем задачи, в которых на порядок элементов налагаются некоторые ограничения.

Львы и тигры

Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигров; при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей.

Поставим сначала всех львов так, чтобы между каждыми двумя львами был промежуток. Это можно



сделать $5!=120$ способами. Число промежутков равно 4. Если присоединить к ним еще два места — впереди всех львов и позади них, то получится 6 мест, на которые можно поставить тигров, причем никакие два тигра не окажутся рядом друг с другом. Так как порядок тигров существен, то число способов их расстановки равно числу размещений из 6 по 4, то есть $A_6^4=360$. Комбинируя каждый способ расстановки львов с одним из способов расстановки тигров, получаем $120\cdot 360=43\,200$ способов вывести хищных зверей на арену.

Если бы у дрессировщика было n львов и k тигров, то он мог бы решить задачу $P_nA_{n+1}^k=\frac{n!\,(n+1)!}{(n-k+1)!}$ способами. Это возможно лишь при условии, что $k\leqslant n+1$ — иначе два тигра обязательно окажутся рядом.

Постройка лестницы

Строится лестница, ведущая из точки A в точку B (рис. 8). *Расстояние AC равно* 4,5 *м, а расстояние CB — 1,5 м. Высота каждой ступеньки равна 30 см, а ее ширина — целое кратное 50 см. Сколькими способами можно построить лестницу?*

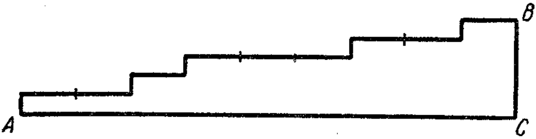


Рис. 8.

Из условия видно, что лестница должна иметь 5 ступеней. При этом так как $4{,}5:0{,}5=9$, то имеется 10 мест, где можно устроить ступеньку. Таким образом, надо из 10 мест выбрать 5 мест. Это можно сделать

$$C_{10}^5=\frac{10!}{5!\,5!}=252$$

способами.

Вообще если должно быть k ступенек, а на длине AC умещается n ступенек, то лестницу можно построить C_{n+1}^k способами.

Эта задача похожа на задачу об укротителе: укротитель не хотел ставить рядом двух тигров, а строитель лестницы не может делать ступеньки двойной высоты. Но между этими задачами есть существенное отличие. Укротителю был важен порядок, в котором шли тигры, одно дело поставить впереди всех тигра Шаха, а другое — тигра Акбара. А для строителя лестницы все места, где есть подъем, одинаковы. Кроме того, укротитель должен был учитывать и порядок расположения львов, а для строителя лестницы все места, где можно сделать подъем, одинаковы. Поэтому выбор у строителя лестницы меньше, чем у укротителя. Если бы лестница имела высоту 1,2 *м* и длину 2,5 *м*, то было бы 4 ступеньки и 6 мест, где их можно сделать. И ответ был бы $C_6^4 = 15$. А у укротителя в точно таком же случае получилось 43 200 вариантов. Это и понятно — он мог переставлять между собой 5 львов $5! = 120$ способами и 4 тигров $4! = 24$ способами, а всего $120 \cdot 24 = 2880$ способами. А $15 \cdot 2880 = 43\,200$.

Задачу о лестнице можно сформулировать следующим образом:

Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

В самом деле, каждую лестницу можно зашифровать последовательностью нулей и единиц: нуль означает место, где ломаная идет вправо, а единица — место, где она идет вверх. Например, для лестницы, изображенной на рис. 8, получаем последовательность 1001010010100010. При этом, так как ступенек двойной высоты на лестнице нет, в последовательности не могут идти две единицы подряд. Таким образом, число последовательностей из n нулей и k единиц, в которых никакие две единицы не идут подряд, равно числу лестниц, то есть C_{n+1}^k.

Книжная полка

На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

Эта задача сводится к только что решенной. Зашифруем каждый выбор книг последовательностью нулей и единиц. Именно, каждой оставленной книге сопоставим 0, а каждой взятой — 1. В результате получится последовательность из 5 единиц и 7 нулей. При этом, так как нельзя брать стоящие рядом книги, то в полученной последовательности не будет двух идущих подряд единиц. Но число последовательностей из 5 единиц и 7 нулей, в которых никакие две единицы не стоят рядом, равно $C_8^5 = 56$.

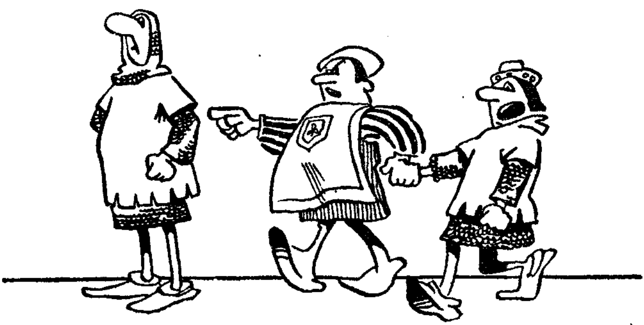
Вообще, если на полке стоит n книг и выбираются k книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом, то это можно сделать C_{n-k+1}^k способами. Отсюда видно, что задача разрешима лишь при $2k - 1 \leqslant n$.

Рыцари короля Артура

За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует со своими соседями. Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить заколдованную принцессу. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыцарей не было врагов?

Эта задача похожа на задачу о книжной полке, но отличается от нее тем, что рыцари сидят не в ряд, а по кругу. Но ее легко свести к случаю, когда рыцари сидят в ряд. Для этого возьмем какого-нибудь рыцаря, скажем, сэра Ланселота. Все выбираемые комбинации рыцарей распадаются на два класса — в одних из них участвует сэр Ланселот, а в других нет. Подсчитаем, сколько комбинаций входит в каждый класс.

Если сэр Ланселот отправляется освобождать заколдованную принцессу, то ни его сосед справа, ни его сосед слева уже не примут участия в этой экспедиции. Остаются 9 рыцарей, из которых надо выбрать 4 спутников для сэра Ланселота. Так как соседи Ланселота не участвуют в экспедиции, то надо лишь проследить,



чтобы среди выбранных 4 рыцарей не было врагов, то есть чтобы никакие два из них не сидели рядом. Но исключение сэра Ланселота и его двух соседей разрывает цепь рыцарей, и можно считать, что они сидят не за круглым столом, а в один ряд. А в этом случае выбрать 4 рыцарей из 9 требуемым образом можно $C_6^4=15$ способами. Итак, в первый класс входит 15 комбинаций.

Теперь сосчитаем, сколько комбинаций входит во второй класс. Так как сэр Ланселот не участвует в экспедиции, то его можно сразу исключить из числа рыцарей круглого стола. А тогда цепь рыцарей и их взаимоотношений разрывается, и остаются 11 рыцарей, расположенных в ряд. Из них надо выбрать 5 участников экспедиции так, чтобы среди выбранных не было двух сидящих рядом. Это можно сделать $C_7^5=21$ способами. Таким образом, общее число способов равно $15+21=36$.

Вообще, *если за круглым столом сидят n рыцарей, и надо выбрать k рыцарей так, чтобы в их число не попали никакие два соседа, то это можно сделать $C_{n-k-1}^{k-1}+C_{n-k}^{k}$ способами.*

Это утверждение доказывается точно так же, как и выше. Все комбинации рыцарей разбивают на два класса в зависимости от того, участвует или нет в них рыцарь Ланселот. Комбинаций, где он участвует, будет C_{n-k-1}^{k-1}, а комбинаций, в которые он не входит, C_{n-k}^{k}. Легко проверяется, что

$$C_{n-k-1}^{k-1}+C_{n-k}^{k}=\frac{n}{n-k}C_{n-k}^{k}.$$

Например, при $n=12$, $k=5$ получаем

$$\frac{12}{7}\cdot C_7^5=\frac{12}{7}\cdot 21=36.$$

Девушка спешит на свидание

Когда-то на экранах страны шла кинокомедия под таким названием. В ней рассказывалось о злоключениях двух курортников, забывших дома паспорта. Им решили выслать паспорта по почте. Но девушка из почтового отделения спешила на свидание и в спешке перепутала конверты — паспорт одного лег в конверт с адресом другого, а паспорт другого — в конверт с адресом

первого. Хорошо, что ей не пришлось одновременно обрабатывать 5 писем — тогда не двоим, а пятерым несчастным пришлось бы ночевать на жестких скамейках курортного парка...

Впрочем, это не совсем так, ведь случайно она могла бы положить некоторые из паспортов в нужные конверты. Подсчитаем, *во скольких случаях она сделала бы полную путаницу, то есть так, что никто не получил бы своего паспорта.*

Эту задачу можно сформулировать следующим образом. *Берутся все перестановки из 5 чисел 1, 2, 3, 4, 5. Во скольких из них ни одно число не стоит на своем месте?* Решение проводится методом включения и исключения (см. стр. 25). Обозначим через (α) свойство перестановки, заключающееся в том, что число α стоит на своем месте, а через N_α обозначим количество перестановок, обладающих этим свойством. Точно так же через $N_{\alpha\beta}$ обозначим количество перестановок, одновременно обладающих свойствами (α) и (β), то есть таких, что и α и β стоят на своих местах. Аналогичный смысл имеют обозначения $N_{\alpha\beta\gamma}$ и т. д. Наконец, через $N^{(0)}$ обозначим число перестановок, не обладающих ни одним из свойств (1), (2), (3), (4), (5), то есть перестановок, в которых ни одно число не стоит на своем месте. По формуле включений и исключений имеем

$$N^{(0)} = N - N_1 - N_2 - N_3 - N_4 - N_5 + N_{12} + \ldots$$
$$\ldots + N_{45} - N_{123} - \ldots - N_{345} +$$
$$+ N_{1234} + \ldots + N_{2345} - N_{12345}, \qquad (1)$$

где $N = P_5$ — общее число всех перестановок из 5 элементов (см. стр. 26).

В данном случае задача облегчается тем, что свойства (1), (2), (3), (4), (5) совершенно равноправны. Поэтому ясно, что $N_1 = N_2 = \ldots = N_5$. Точно так же имеем $N_{12} = N_{23} = \ldots = N_{45}$ — ведь все равно, остаются на своих местах числа 1 и 2 или числа 3 и 4. Но число пар, которые можно выбрать из чисел 1, 2, 3, 4, 5, равно C_5^2 (свойства (1, 2) и (2, 1) совпадают, и потому порядок выбираемых чисел в паре нас не интересует).

Точно так же имеем C_5^3 троек, C_5^4 четверок и C_5^5 пятерок. Поэтому формулу (1) можно переписать так:

$$N^{(0)}=N-C_5^1N^{(1)}+C_5^2N^{(2)}-C_5^3N^{(3)}+C_5^4N^{(4)}-C_5^5N^{(5)}. \quad (2)$$

Здесь для краткости через $N^{(k)}$ обозначено количество перестановок, в которых заданные k чисел остались на своих местах. Для того чтобы закончить решение задачи, нам осталось найти значения $N^{(k)}$, $k=1, 2, 3, 4, 5$.

Через $N^{(1)}$ обозначено количество перестановок, в которых осталось на месте данное число, например 1. Но если число 1 остается на своем месте, то остальные числа можно переставлять друг с другом $P_4=24$ способами. Значит, $N^{(1)}=P_4$. Точно так же, если на месте остаются числа 1 и 2, то оставшиеся три числа можно переставлять друг с другом $P_3=6$ способами. Поэтому $N^{(2)}=P_3=6$. Аналогично получаем, что

$$N^{(3)}=P_2=2, \quad N^{(4)}=P_1=1 \quad \text{и} \quad N^{(5)}=P_0=1.$$

Подставляя полученные значения $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, $N^{(5)}$ в формулу (2), находим, что

$$N^{(0)}=P_5-C_5^1P_4+C_5^2P_3-C_5^3P_2+C_5^4P_1-C_5^5P_0=$$
$$=120-5\cdot 24+10\cdot 6-10\cdot 2+5\cdot 1-1\cdot 1=44.$$

Итак, в 44 случаях из 120 ни один из адресатов писем не получил бы своего паспорта.

Совершенно так же можно найти, во скольких случаях ровно один адресат получит свой паспорт. Если этим счастливцем окажется первый адресат, то все остальные 4 получат чужие паспорта. Это может произойти

$$P_4-C_4^1P_3+C_4^2P_2-C_4^3P_1+C_4^4P_0=9$$

способами. Но так как счастливцем может оказаться любой из адресатов, то общее число способов, при которых в точности один человек получит адресованное ему письмо, равно $5\cdot 9=45$.

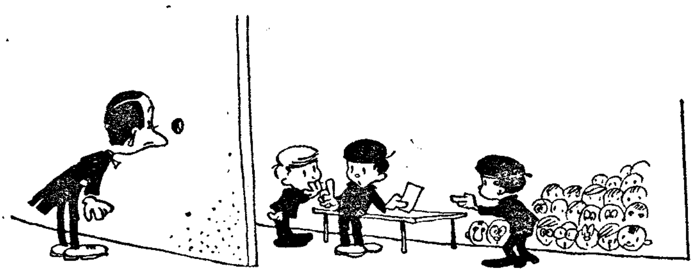
Проверьте сами, что в точности двое получают свое письмо в 20 случаях, трое — в 10 случаях, четверо — в 0 случаев и пятеро — в 1 случае. Результат для четверых объясняется тем, что если четверо получают адресованное им письмо, то и оставшееся письмо направлено по правильному адресу.

Итак, 120 различных перестановок из 5 элементов распадаются на 44 перестановки, в которых ни один элемент не остается на месте, 45 перестановок, в которых ровно один элемент не меняет своего положения, 20 перестановок, в которых не меняют положения два элемента, 10 перестановок, не меняющих положения трех элементов, и 1 перестановку, при которой все элементы остаются на своих местах.

Сеанс телепатии

Некоторые люди утверждают, что могут читать мысли на расстоянии. Для проверки делались следующие опыты. В одной комнате поднимали в некотором порядке так называемые фигуры Зенера (рис. 9). Телепат должен был угадать, в каком порядке поднимались эти фигуры.

Будем считать, что фигуры поднимаются без повторений. Тогда общее число возможных перестановок этих фигур равно 5! = 120. При проведении сеанса выбирается одна из этих перестановок. Телепат называет другую перестановку этих фигур, и его успех тем больше, чем больше фигур он угадает. Из подсчетов, проведенных на стр. 69—70, вытекает, что при случайном угадывании результаты были бы примерно следующие: в 44 случаях из 120 не была бы угадана ни одна фигура, в 45 случаях — одна фигура, в 20 случаях — две фигуры, в 10



случаях — три фигуры и в одном случае — все пять фигур. В среднем при случайном гадании число правильно названных фигур равно

$$\frac{45+20\cdot 2+10\cdot 3+5}{120}=1,$$

то есть называется одна фигура из пяти. При n различных фигурах в среднем должна угадываться одна фигура из n. Если систематически угадывается большее число фигур, то надо тщательно изучить в чем дело —

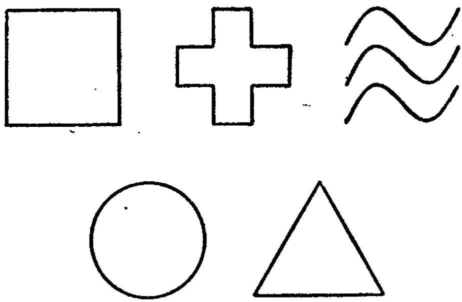


Рис. 9.

происходит ли (как часто бывает) жульничество или действительно данный человек обладает особыми способностями.

Выясним, изменится ли число угадываемых в среднем фигур, если допустить повторения. В этом случае вместо перестановок имеем размещения с повторениями. Но число таких размещений из n элементов, при которых ни один элемент не находится на своем «законном» месте, равно $(n-1)^n$. В самом деле, на первом месте может быть любой из элементов, кроме первого, на втором — любой из элементов, кроме второго, и т. д. Иными словами, на каждое место имеем $n-1$ кандидатов. По правилу произведения выводим отсюда, что общее число возможных комбинаций равно $(n-1)^n$.

Найдем, во скольких случаях на своем месте стоит в точности один элемент. Если свое место занимает, скажем, первый элемент, то остается еще $n-1$ мест, которые надо занять. При этом на каждое место претендуют $n-1$ кандидатов (все элементы, кроме «законного владельца» этого места). Значит, число размещений, в которых первый и только первый элемент стоит на своем месте, равно $(n-1)^{n-1}$. Но так как на своем месте может стоять любой из n элементов, то число размещений, где не смещен в точности один элемент, равно $n(n-1)^{n-1}$. Совершенно так же доказывается, что число размещений, в которых не смещено ровно k элементов, равно $C_n^k(n-1)^{n-k}$.

Например, в случае пяти различных элементов получаем следующий результат: число размещений с повторениями, в которых все элементы смещены, равно $4^5=$ $=1024$; размещений, где ровно один элемент стоит на своем месте, $5\cdot 4^4=1280$; размещений, где ровно два элемента остались на своих местах, $10\cdot 4^3=640$; три — $10\cdot 4^2=160$; четыре — $5\cdot 4=20$ и пять — $1\cdot 4^0=1$. Всего имеем

$$1024+1280+640+160+20+1=3125$$

размещений, что согласуется с формулой

$$\overline{A}_5^5=5^5=3125.$$

В среднем будет угадываться при случайном гадании

$$\frac{1280+640\cdot 2+160\cdot 3+20\cdot 4+1\cdot 5}{3125}=1.$$

Ответ получился тот же самый — при случайном гадании можно угадать одну фигуру из пяти независимо от того, допускаются повторения фигур или нет. Однако распределение числа угаданных фигур будет уже иным. Оно указано в следующей таблице:

Число угаданных фигур	Без повторений	С повторениями
0	0,366	0,328
1	0,375	0,410
2	0,167	0,205
3	0,083	0,051
4	0	0,006
5	0,009	0,000

Общая задача о смещении [1])

Совершенно так же, как и разобранные выше задачи, решается общая задача о смещении: *найти число D_n перестановок из n элементов, при которых ни один элемент не остается в первоначальном положении.* Ответ дается формулой

$$D_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n =$$
$$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]. \qquad (3)$$

Читатель, знакомый с теорией рядов, узнает в выражении, стоящем в скобках, частичную сумму разложения e^{-1}.

Обобщая формулу (3) на случай $n=0$, получаем, что естественно принять $D_0=1$.

Число перестановок, при которых ровно r элементов остаются на первоначальных местах, а остальные $n-r$ меняют свое положение, выражается формулой

$$D_{n,r} = C_n^r D_{n-r}. \qquad (4)$$

В самом деле, сначала надо выбрать, какие именно r элементов остаются на месте. Это можно сделать C_n^r способами. А остальные $n-r$ элементов можно переставлять после этого любыми способами, лишь бы ни один из них не занял первоначального места. Это можно сделать D_{n-r} способами. По правилу произведения получаем, что общее число требуемых перестановок равно $C_n^r D_{n-r}$.

Разобьем все перестановки на классы в зависимости от того, сколько элементов остаются неподвижными при данной перестановке. Так как общее число перестановок равно $n!$, то получаем следующее тождество:

$$n! = \sum_{r=0}^{n} D_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r D_{n-r}. \qquad (5)$$

Другое тождество, связывающее $n!$ и числа $D_{n,r}$, получается следующим образом. Возьмем все $n!$ перестановок элементов $a_1, \ldots, a_n$ и подсчитаем, сколько чисел во всех этих перестановках

---

[1]) Этот пункт может быть пропущен при первом чтении.

осталось на своих местах. Этот расчет можно сделать двумя способами. Во-первых, заметим, что если, например, элемент a_1 находится на своем месте, то остальные элементы можно переставлять $P_{n-1}=(n-1)!$ способами. Поэтому в $(n-1)!$ перестановках элемент a_1 находится на первом месте. Точно так же в $(n-1)!$ перестановках элемент a_2 находится на втором месте и т. д. Всего получаем $n(n-1)!=n!$ элементов, находящихся на своих местах. Но число этих элементов можно подсчитать и иначе. Число перестановок r-го класса, то есть таких, что в них r элементов находится на своих местах, равно $D_{n,r}$. Каждая такая перестановка дает нам r неподвижных элементов. Поэтому общее число неподвижных элементов в перестановках r-го класса равно $rD_{n,r}$ и всего получаем $\sum_{r=0}^{n} rD_{n,r}$ неподвижных элементов. Тем самым доказано тождество

$$n!=\sum_{r=0}^{m} rD_{n,r}=\sum_{r=0}^{n} rC_n^r D_{n-r}. \tag{5'}$$

Формула включения и исключения позволяет решить и такую задачу: *найти число перестановок из n элементов, при которых данные r элементов смещены* (а остальные могут быть как смещены, так и оставаться на старых местах). Ответ дается формулой

$$n!-C_r^1(n-1)!+C_r^2(n-2)!-\ldots+(-1)^r(n-r)!. \tag{6}$$

Субфакториалы [1])

Некоторые авторы называют числа D_n *субфакториалами.* Эти числа имеют много общих свойств с обычными факториалами. Например, для факториалов выполняется равенство

$$n!=(n-1)[(n-1)!+(n-2)!]. \tag{7}$$

В самом деле,

$$(n-1)[(n-1)!+(n-2)!]=(n-1)(n-2)!\,n=n!.$$

Покажем, что это же равенство верно и для субфакториалов D_n, то есть, что

$$D_n=(n-1)[D_{n-1}+D_{n-2}]. \tag{8}$$

Для этого заменим D_{n-1} и D_{n-2} их разложениями по

[1]) Этот пункт может быть пропущен при первом чтении.

формуле (3). Мы получим, отделяя в выражении D_{n-1} последнее слагаемое, что

$$(n-1)[D_{n-1}+D_{n-2}]=(n-1)[(n-1)!+(n-2)!]\times$$
$$\times\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\right]+(-1)^{n-1}(n-1).$$

Но по формуле (7)

$$(n-1)[(n-1)!+(n-2)!]=n!.$$

Кроме того,

$$(-1)^{n-1}(n-1)=n!\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n}}{n!}\right].$$

Поэтому

$$(n-1)[D_{n-1}+D_{n-2}]=$$
$$=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n}}{n!}\right]=D_n.$$

Доказанное соотношение (8) можно, следуя Эйлеру, вывести с помощью чисто комбинаторных рассуждений. Рассмотрим все перестановки, в которых все элементы смещены. Первое место в таких перестановках может занять любой элемент, кроме первого. Так как число оставшихся элементов равно $n-1$, то D_n перестановок разбито на $n-1$ групп в зависимости от того, какой элемент занял первое место. Ясно, что во всех группах будет поровну элементов.

Сосчитаем, сколько элементов в одной из этих групп, скажем в той, где первое место занял второй элемент. Эта группа разбивается на две части: те, в которых первый элемент стоит на втором месте, и все остальные. Если первый элемент занял второе место (а второй, как мы помним, — первое место), то оставшиеся $n-2$ элементов можно переставлять любым образом, лишь бы ни один из них не занял своего места. Это можно сделать D_{n-2} способами. Значит, первая часть состоит из D_{n-2} перестановок.

Покажем, что вторая часть состоит из D_{n-1} перестановок. В самом деле, во вторую часть войдут все перестановки, в которых первый элемент не стоит на втором месте, а остальные элементы не находятся на своих местах. Если временно считать второе место «законным» для первого элемента, то получится, что первый, третий, четвертый, ..., n-й элементы не находятся на своих местах. Так как число этих элементов равно $n-1$, то во второй части D_{n-1} перестановок. Но тогда вся группа состоит из $D_{n-2}+D_{n-1}$ перестановок. Так как все множество смещающих перестановок состоит из $(n-1)$-й группы, то в него входит $(n-1)[D_{n-2}+D_{n-1}]$ перестановок. Тем самым доказано равенство (8).

Из формулы (8) вытекает, что

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}].$$

Поэтому при изменении n выражение $D_n - nD_{n-1}$ только меняет знак. Применяя это соотношение несколько раз, получаем, что

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1].$$

Но $D_2=1$, а $D_1=0$, и поэтому

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n. \tag{9}$$

Эта формула напоминает соотношение $n! = n(n-1)!$ для факториалов.

Выпишем значения субфакториалов для первых 12 натуральных чисел

n	D_n	n	D_n	n	D_n	n	D_n
1	0	4	9	7	1854	10	1 334 961
2	1	5	44	8	14 833	11	14 684 570
3	2	6	265	9	133 496	12	176 214 841

Караван в пустыне

По пустыне идет караван из 9 верблюдов. Путешествие длится много дней, и наконец, всем надоедает видеть впереди себя одного и того же верблюда. Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы впереди каждого верблюда шел другой, чем раньше?

Такие перестановки наверняка существуют. Например, можно переставить всех верблюдов в обратном порядке, так что последний окажется первым и т. д. В общем, как гласит арабская поговорка, «когда караван поворачивает назад, хромой верблюд оказывается впереди».

Для решения задачи перенумеруем верблюдов в первоначальном порядке от конца каравана к началу числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Таким образом, последний верблюд получает номер один, предпоследний — номер 2 и т. д. Нам нужно найти все перестановки из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, в которых не встретится ни одна из пар (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9). Для решения задачи снова используем формулу включений и исключений.

Сосчитаем сначала, во сколько перестановок входит пара (1, 2). Мы можем считать в таких перестановках эту пару за один элемент. Поэтому общее число элементов будет не 9, а 8 и число перестановок, содержащих (1, 2), равно P_8. Тот же результат получаем для всех 8 пар.

Теперь рассмотрим перестановки, содержащие данные две пары. В этом случае объединяем элементы, входящие в каждую из этих пар. При этом если обе пары содержат один и тот же элемент (например, пары (1, 2) и (2, 3)), то объединяем все три элемента. В противном случае (например, для пар (1, 2) и (5, 6)) объединяем элементы по два. В обоих случаях после объединения получится 7 новых элементов (часть из них является парой или тройкой первоначальных), которые можно переставлять друг с другом P_7 способами. А две пары можно выбрать из восьми C_8^2 способами.

Совершенно так же доказывается, что количество перестановок, содержащих данные k пар, равно P_{9-k}. При этом k пар можно выбрать C_8^k способами. По формуле включений и исключений получаем, что количество перестановок, не содержащих ни одной из заданных пар, равно

$$P_9 - C_8^1P_8 + C_8^2P_7 - C_8^3P_6 + C_8^4P_5 - $$
$$- C_8^5P_4 + C_8^6P_3 - C_8^7P_2 + C_8^8P_1 =$$
$$= 8!\left[9 - \frac{8}{1!} + \frac{7}{2!} - \frac{6}{3!} + \frac{5}{4!} - \frac{4}{5!} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{6!} - \frac{2}{7!} + \frac{1}{8!}\right] = 148\,329.$$

Совершенно так же доказывается, что количество перестановок из n чисел 1, 2, 3, ..., n, не содержащих ни одной из пар (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$, выражается формулой

$$E_n = P_n - C_{n-1}^1 P_{n-1} + C_{n-1}^2 P_{n-2} - \\ - C_{n-1}^3 P_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} P_1 = \\ = (n-1)!\left[n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} - \frac{n-3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]. \quad (10)$$

Выразим полученный ответ через субфакториалы. Для этого разобьем каждое слагаемое в правой части на два:

$$\frac{(-1)^k (n-k)}{k!} = \frac{(-1)^k n}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Мы получим, что

$$E_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right] + \\ + (n-1)!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

(в обе скобки мы добавили по одному — последнему члену; очевидно, что эти члены взаимно уничтожаются, так как после раскрытия скобок превращаются соответственно в $(-1)^n$ и $(-1)^{n-1}$). Но первая скобка — это не что иное, как D_n, а вторая — не что иное, как D_{n-1}. Поэтому

$$E_n = D_n + D_{n-1}. \quad (11)$$

Итак, число перестановок из 1, 2, 3, ..., в которые не входит ни одна из пар (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$, равно $D_n + D_{n-1}$.

Совершенно так же доказывается, что количество перестановок из n элементов, в которые не входят заданные $r \leqslant n-1$ пар, равно

$$P_n - C_r^1 P_{n-1} + C_r^2 P_{n-2} + \ldots + (-1)^r C_r^r P_{n-r}. \quad (12)$$

Иной ответ получится, если число запрещенных пар больше, чем $n-1$. Пусть, например, кроме пар (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$, в перестановки не должна входить и пара $(n, 1)$. Рассуждая точно так же, как и выше, получим, что ответ выражается формулой

$$F_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - (-1)^k C_n^k P_{n-k} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_1 = \\ = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right] = nD_{n-1}. \quad (13)$$

В самом деле, в этом случае число запрещенных пар равно n, а случая, когда в перестановку входят все n пар, быть не может. Ведь, например, если в перестановку входят пары $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(n-1, n)$, то первым элементом является 1, а последним n и поэтому пара $(n, 1)$ в перестановку не входит. Поэтому последний член в формуле (13) равен $(-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_1$, а не $(-1)^n C_n^n P_0 = (-1)^n$.

Было бы интересно дать полученному ответу $F_n = nD_{n-1}$ чисто комбинаторное обоснование.

Катание на карусели

На карусели катаются n ребят. Они решили пересесть таким образом, чтобы впереди каждого оказался другой, чем был раньше. Сколькими способами они могут это сделать?

Эта задача похожа на решенную выше задачу о караване. Но теперь число запрещенных пар равно n; должны отсутствовать пары $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(n-1, n)$ и $(n, 1)$. Кроме того, перестановки, получаемые друг из друга пересадкой ребят по кругу, мы не будем считать различными — когда карусель закружится, их не различишь. Поэтому из k элементов можно сделать лишь $P_{k-1} = (k-1)!$ существенно различных перестановок. Наконец, в новой задаче могут быть перестановки, в которые входят все n пар. Такой будет, например, исходная перестановка. Учитывая все эти обстоятельства, получаем по формуле включений и исключений, что число искомых перестановок равно

$$Q_n = P_{n-1} - C_n^1 P_{n-2} + C_n^2 P_{n-3} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_0 + (-1)^n C_n^n. \quad (14)$$

Легко проверить, что это выражение можно записать в виде

$$Q_n = D_{n-1} - D_{n-2} + D_{n-3} - \dots + (-1)^{n-3} D_2. \quad (15)$$

В самом деле, из формулы (14) в силу равенства $C_n^k - C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^k$ следует, что при $n \geqslant 1$

$$Q_n + Q_{n-1} = P_{n-1} - C_{n-1}^1 P_{n-2} + C_{n-1}^2 P_{n-3} - \dots + (-1)^n,$$

а это выражение равно D_{n-1} (см. стр. 75). Таким образом, Q_n+ $+Q_{n-1}=D_{n-1}$. Кроме того, из формулы (14) вытекает, что $Q_2=0$. Мы имеем, таким образом, что

$$\begin{aligned} Q_n+Q_{n-1}&=D_{n-1},\\ -Q_{n-1}-Q_{n-2}&=-D_{n-2},\\ Q_{n-2}+Q_{n-3}&=D_{n-3},\\ \cdots&\cdots\\ (-1)^{n-3}Q_3&=(-1)^{n-3}D_2. \end{aligned}$$

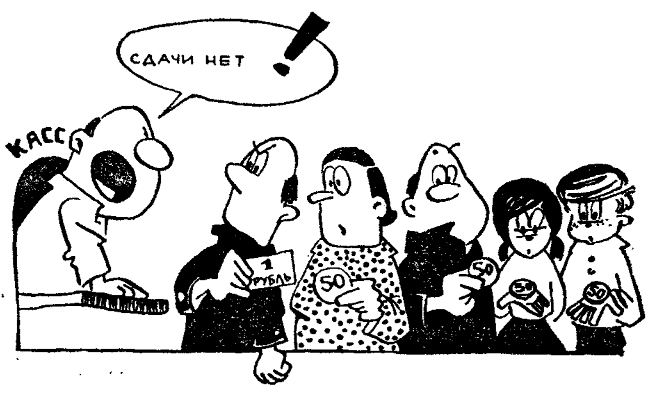
Складывая эти равенства, приходим к соотношению (15).

Очередь в кассу

У кассы кинотеатра стоит очередь из $m+k$ человек, причем m человек имеют рубли, а k — полтинники. Билет в кино стоит 50 коп., и в начале продажи касса пуста. Скольими способами могут располагаться в очереди люди с рублями и полтинникамц так, что очередь пройдет без задержки, то есть никому не придется ждать сдачи?

Например, если $m=k=2$, то благоприятными будут лишь два случая: п р п р и п п р р, где п означает полтинники, а р — рубли. В четырех же случаях — р р п п, р п р п, р п п р и п р р п возникает задержка — в первых трех случаях уже первый зритель не сможет получить сдачи, а в последнем случае у кассы задержится третий зритель.

При небольших значениях m и k задачу можно решить прямым перебором. Но если m и k сравнительно велики, то прямой перебор не поможет. Ведь число



различных перестановок из m рублей и k полтинников равно, как мы знаем,

$$P(m,\ k)=\frac{(m+k)!}{m!\,k!}.$$

Если, например, $m=k=20$, то

$$P(20,\ 20)=\frac{40!}{20!\,20!},$$

а это число больше ста миллиардов.

Выведем формулу, выражающую число искомых комбинаций через m и k. Нам надо, таким образом, найти число перестановок из m букв р и k букв п, обладающих следующим свойством: для любого r, $1\leqslant r\leqslant m+k$, число букв п в первых r членах перестановки не меньше, чем число букв р (полтинников должно быть не меньше, чем рублей, иначе очередь застопорится).

Ясно, что для разрешимости задачи необходимо, чтобы выполнялось условие $m\leqslant k$, иначе очередь наверняка задержится — полтинников не хватит, чтобы дать сдачу всем владельцам рублей. Поэтому мы будет считать, что $0\leqslant m\leqslant k$. Как и в некоторых других комбинаторных задачах, здесь выгоднее искать число «неблагоприятных» случаев, то есть случаев, когда очередь задерживается. Если мы найдем это число, то, вычтя его из числа $P(m,\ k)=C_{m+k}^{m}$ всех перестановок m букв р и k букв п, получим ответ для нашей задачи.

Сейчас будет доказано следующее утверждение: число неблагоприятных случаев для перестановок из m букв р и k букв п равно $P(m-1,\ k+1)=C_{m+k}^{m-1}$, то есть числу всех перестановок из $m-1$ букв р и $k+1$ букв п. Это доказывается следующим образом. Возьмем любую неблагоприятную перестановку из m букв р и k букв п. Пусть очередь задерживается на каком-то месте. Тогда перед этим местом будет одинаковое количество букв п и р (все полтинники уйдут на сдачу владельцам рублей), а на самом этом месте стоит буква р — иначе очередь благополучно прошла бы через него.

Итак, номер места, на котором задерживается очередь, имеет вид $2s+1$, а перед этим местом стоит s букв п и s букв р. Поставим теперь впереди нашей перестановки одну букву п (если очередь запротестует, то скажем, что это делается, чтобы облегчить размен монет).

У нас получится перестановка из m букв р и $k+1$ букв п, причем первой буквой этой перестановки является п, а среди первых $2s+2$ букв поровну букв р и п (было s букв п и $s+1$ букв р, мы добавили одну букву п и стало поровну).

А теперь сделаем операцию, которая вызовет неудовольствие всех владельцев рублей и радость владельцев полтинников — на первых $2s+2$ местах у каждого обладателя рубля заменим его монету на полтинник, а каждый полтинник заменим рублем. Например, если очередь имела вид

п п р п р п р р п р ***р*** п п р п п р,

то она задержится на месте, отмеченном буквой ***р***. После того как впереди поставят букву п и произведут описанную замену, получится очередь вида

р р р п р п р п п р п ***п*** п п р п п р.

Так как на первых $2s+2$ местах было одинаковое количество рублей и полтинников, то после замены общее количество монет каждого вида не изменится, и мы получим перестановку из m букв р и $k+1$ букв п, причем теперь первой буквой станет р. Итак, мы сопоставили каждой «неблагоприятной» последовательности из m букв р и k букв п последовательность из m букв р и $k+1$ букв п, начинающуюся с буквы р.

Покажем, что таким путем может быть получена любая последовательность из m букв р и $k+1$ букв п, начинающаяся с буквы р. В самом деле, возьмем такую последовательность. Так как мы предполагаем, что $m \leqslant k$, то на каком-то месте число букв п и р сравняется. Если заменить от начала до этого места включительно все буквы п на р, а все буквы р на п и отбросить первую букву п, то как раз получится неблагоприятная расстановка рублей и полтинников в очереди. Очередь задерживается на том самом месте, где в заданной последовательности впервые сравнялось число букв п и р.

Мы установили таким образом, что *число неблагоприятных расположений рублей и полтинников в очереди в точности равно числу всех перестановок из m букв* р *и $k+1$ букв* п, *начинающихся с буквы* р. Если отбросить первую букву, то получатся всевозможные перестановки из $m-1$ букв р и $k+1$ букв п. А число таких перестановок равно

$$P(m-1,\ k+1)=C_{m+k}^{m-1}.$$

Итак, число неблагоприятных перестановок равно C_{m+k}^{m-1}. Так как число всех перестановок из m букв р и k букв п равно C_{m+k}^{m}, то число благоприятных перестановок выражается формулой

$$C_{m+k}^{m}-C_{m+k}^{m-1}=\frac{k-m+1}{k+1}C_{m+k}^{m}. \tag{16}$$

В частности, если $k=m$, то есть если в очереди одинаковое количество рублей и полтинников, то она пройдет в $\frac{1}{k+1}C_{2k}^{k}$ случаях и задержится в $\frac{k}{k+1}C_{2k}^{k}$ случаях. Таким образом, чем больше k, тем меньше процент благоприятных случаев.

Наша задача полностью решена. Рассмотрим теперь другую, весьма близкую к ней задачу. Именно, предположим, что кассир был предусмотрителен и *в начале в кассе лежало q полтинников. Во скольких случаях пройдет без задержки очередь, состоящая из m обладателей рублей и k обладателей полтинников*?

Ясно, что если $m\leqslant q$, то очередь наверняка пройдет без задержки — полтинников, которые были в кассе с самого начала, хватит, чтобы удовлетворить всех владельцев рублей. Если же $m>k+q$, то очередь наверняка задержится — общего числа полтинников в кассе и в очереди не хватит, чтобы дать сдачу всем владельцам рублей. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда

$$q<m\leqslant k+q.$$

Можно считать, далее, что q полтинников появились в кассе потому, что в начале очереди поставили q новых людей, державших полтинники. Поэтому задачу можно переформулировать следующим образом:

В очереди стоит $k+q$ человек с полтинниками и m человек с рублями, причем первые q мест занимают обладатели полтинников. Во скольких случаях никому не придется ждать сдачи?

Эта задача решается точно так же, как разобранный выше частный случай $q=0$. Мы будем искать число неблагоприятных случаев. В каждом таком случае задержка произойдет на человеке, впереди которого находится одинаковое количество s рублей и полтинников, а сам он держит в руках рубль. Поставим впереди очереди еще одного человека с полтинником и заменим у первых $2s+2$ человек рубли на полтинники, а полтинники на рубли. У нас получится перестановка из m рублей и $k+q+1$ полтинников, причем первые $q+1$ мест занимают рубли. При этом любая такая перестановка может быть единственным образом получена из неблагоприятного расположения рублей и полтинников. Но первые $q+1$ рублей можно отбросить и тогда получатся всевозможные перестановки из $m-q-1$ рублей и $k+q+1$ полтинников. Число же таких перестановок равно $P(m-q-1, k+q+$ $+1)=C_{m+k}^{m-q-1}$. Мы доказали, что в рассматриваемой задаче C_{m+k}^{m-q-1} неблагоприятных перестановок. А так как общее число перестановок равно C_{m+k}^{k}, то число благоприятных перестановок дается формулой

$$C_{m+k}^{m}-C_{m+k}^{m-q-1}. \tag{17}$$

Использованный выше прием позволяет решить и многие другие задачи. Например, используя его, легко получить следующие результаты:

Если $m<k$, то число перестановок из m букв р *и k букв* п, *таких, что перед каждой буквой (кроме первой) стоит больше букв* п, *чем* р, *равно*

$$C_{m+k-1}^{m}-C_{m+k-1}^{m-1}=\frac{k-m}{k}C_{m+k-1}^{m}. \tag{18}$$

Рассуждение проводится точно так же, как и выше, только не надо добавлять в начале букву п.

Эта формула верна при $m<k$. Если же $m=k$, то число перестановок с указанным свойством равно $\frac{1}{k}C_{2k-2}^{k-1}$. В этом можно убедиться следующим образом. Каждая такая перестановка должна начинаться буквой п и заканчиваться буквой р. Если отбросить эти буквы, то получится перестановка из $k-1$ букв р и $k-1$ букв п. Легко видеть, что для этой перестановки очередь пройдет без задержек. Обратно, из каждой перестановки $k-1$ букв п и $k-1$ букв р, для которой очередь проходит без задержек, получится путем прибавления в на-

чале буквы п и в конце буквы р перестановка с нужным нам свойством. Но число перестановок из $k-1$ букв п и $k-1$ букв р, при которых очередь проходит без задержки, как раз равно $\frac{1}{k}C_{2k-2}^{k-1}$.

Задача о двух шеренгах

В комбинаторике часто бывает, что две весьма далекие на первый взгляд задачи сводятся одна к другой. Рассмотрим следующую задачу:

Сколькими способами можно построить $2n$ человек разного роста в две шеренги по n человек в каждой, чтобы в каждой шеренге они стояли по росту, причем каждый человек в первой шеренге был выше стоящего за ним человека во второй шеренге?

Покажем, что решение этой задачи сводится к уже решенному вопросу об очереди в кассу. Поставим людей требуемым образом в две шеренги и дадим всем стоящим в первой шеренге по полтиннику, а всем стоящим во второй шеренге — по рублю, после чего выстроим всех по росту в одну колонну. Получится очередь из n обладателей полтинников и n обладателей рублей. Из условия задачи следует, что эта очередь проходит без задержки. В самом деле, пусть кто-то занимает k-е место во второй шеренге. Тогда среди владельцев рублей лишь $k-1$ выше него. А среди владельцев полтинников выше него по крайней мере k человек (стоящий перед ним и все стоящие по правую сторону). Поэтому, когда он подойдет к кассе, там будет по крайней мере один полтинник, и сдача ему обеспечена.

Обратно, пусть задана некоторая расстановка n человек с полтинниками и n человек с рублями, при которой очередь проходит без задержки. Не теряя общности, можно считать, что все $2n$ человек стоят по росту. Выберем теперь всех обладателей полтинников и поставим их по росту в первую шеренгу, а обладателей рублей — во вторую шеренгу. Предоставляем читателю проверить, что полученное построение удовлетворяет условиям задачи. Отсюда следует, что возможных построений столько же, сколько благоприятных перестановок из n букв п и n букв р, то есть $\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$.

Новые свойства сочетаний [1])

Выведенные в предыдущих пунктах формулы позволяют установить дальнейшие свойства числа сочетаний C_m^k (см. стр. 52). Для этого разобьем на классы все «неблагоприятные» перестановки из m букв р и k букв п. Мы видели, что для таких перестановок очередь задерживается на месте с номером $2s+1$, причем перед ним стоит s букв р и s букв п, на нем стоит буква р, а очередь вплоть до этого места проходит без задержки. Отнесем к s-му классу все неблагоприятные перестановки, для которых задержка происходит на месте $2s+1$. Ясно, что s может принимать значение $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Найдем, сколько перестановок входит в s-й класс. На первых $2s$ местах могут стоять любые благоприятные перестановки из s букв р и s букв п — ведь до места $2s+1$ очередь не останавливается. Как мы видели, число таких перестановок равно $\frac{1}{s+1}C_{2s}^s$. Далее, на месте $2s+1$ стоит буква р, а после нее — любая перестановка оставшихся $m-s-1$ букв р и $k-s$ букв п. Число этих перестановок равно $P(m-s-1,\ k-s)=C_{m+k-2s-1}^{m-s-1}$. Таким образом, в силу правила произведения число неблагоприятных перестановок s-го класса равно

$$\frac{1}{s+1}C_{2s}^sC_{m+k-2s-1}^{m-s-1}.$$

Так как общее число неблагоприятных перестановок равно C_{m+k}^{m-1}, а число классов равно $m-1$, то получаем при $m\leqslant k$ соотношение

$$C_0^0C_{m+k-1}^{m-1}+\frac{1}{2}C_2^1C_{m+k-3}^{m-2}+$$
$$+\frac{1}{3}C_4^2C_{m+k-5}^{m-3}+\ldots+\frac{1}{m}C_{2m-2}^{m-1}C_{k-m+1}^0=C_{m+k}^{m-1}. \qquad (19)$$

Это соотношение является частным случаем формулы

$$\sum_{s=p}^{m-1}\left[C_{2s-p}^s-C_{2s-p}^{s-p-1}\right]C_{m+k+p-2s-1}^{m-s-1}=C_{m+k}^{m-p-1}, \qquad (20)$$

где $p<m\leqslant p+k$ (в первом слагаемом C_s^{-1} считается равным нулю). Формула (20) доказывается так же, как

[1]) Этот пункт может быть пропущен при первом чтении.

и (19), путем разбиения на классы неблагоприятных перестановок из m букв р и $k+p$ букв п, у которых в начале стоят p букв п (см. стр. 83).

Теперь рассмотрим соотношения, получающиеся путем разбиения на классы *благоприятных* перестановок, составленных из k букв р и k букв п. Число этих перестановок равно $\frac{1}{k+1}C_{2k}^{k}$. После прохождения всей очереди в кассе вновь не будет ни одного полтинника — все они уйдут на сдачу. Однако для некоторых благоприятных перестановок и ранее возникают моменты, когда в кассе нет полтинников; только то обстоятельство, что следующий зритель дает полтинник, спасает очередь от задержки. Разобьем все благоприятные перестановки на классы, отнеся к s-му классу все перестановки, в которых касса впервые не имеет полтинников на $2s$-м месте, $s=1, 2, \ldots, k$.

Найдем число перестановок в s-м классе. Каждая такая перестановка разбивается на две части. Первые $2s$ букв образуют перестановку из s букв п и s букв р, такую, что перед каждой ее буквой больше букв п, чем букв р (иначе выравнивание впервые произошло бы не на $2s$-м месте, а раньше). Мы видели, что число таких перестановок равно $\frac{1}{s}C_{2s-2}^{s-1}$ (см. стр. 85). После продажи первых $2s$ билетов полтинников в кассе нет. Поэтому, чтобы очередь прошла без задержки, последние $k-s$ букв р и $k-s$ букв п должны образовать благоприятную перестановку. Но число таких перестановок равно $\frac{1}{k-s+1}C_{2k-2s}^{k-s}$ (см. стр. 83). По правилу произведения получаем, что в классе

$$\frac{1}{s(k-s+1)}C_{2s-2}^{s-1}C_{2k-2s}^{k-s}$$

перестановок. А так как общее число благоприятных перестановок равно $\frac{1}{k+1}C_{2k}^{k}$, то получаем тождество

$$\sum_{s=1}^{k}\frac{k+1}{s(k+s-1)}C_{2s-2}^{s-1}C_{2k-2s}^{k-s}=C_{2k}^{k}. \qquad (21)$$

Если ввести обозначение

$$\frac{1}{s+1} C_{2s}^{s} = T_s,$$

то формула (21) примет следующий вид:

$$T_0 T_{k-1} + T_1 T_{k-2} + \ldots + T_{k-1} T_0 = T_k. \qquad (22)$$

Если одно соотношение между числами C_n^m получается следующим образом. Зададим число l, $1 \leqslant l \leqslant m$, и разобьем множество всех благоприятных перестановок на классы, отнеся к s-му классу все перестановки, содержащие среди первых l элементов ровно s букв р. Тогда число букв п среди первых l элементов равно $l - s$. Так как букв п должно быть не меньше, чем букв р, то s удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant 2s \leqslant l$.

Найдем число перестановок в s-м классе. Каждая такая перестановка распадается на две части: одна состоит из первых l букв, а другая — из последних $k+m-l$ букв. В первую часть входит $l-s$ букв п и s букв р. При этом так как вся перестановка благоприятна, то и ее часть, состоящая из первых l букв, тоже благоприятна. А из $l-s$ букв п и s букв р можно составить $\frac{l-2s+1}{l-s+1} C_l^s$ таких перестановок.

После того как пройдет первая часть перестановки, в кассе будет $l-2s$ полтинников. Вторая часть перестановки состоит из $k-l+s$ букв п и $m-s$ букв р. Число перестановок, при которых эта часть очереди проходит без задержки, вычисляется по формуле (17) на стр. 84, в которой надо заменить q на $l-2s$, m на $m-s$ и k на $k-l+s$. Из этой формулы вытекает, что вторая часть перестановки может быть выбрана $C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}$ способами. По правилу произведения получаем, что число перестановок в s-м классе равно

$$\frac{l-2s+1}{l-s+1} C_l^s \left[C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1} \right].$$

Так как общее число благоприятных перестановок из k букв п и m букв р равно $\frac{k-m+1}{k+1} C_{m+k}^m$, то получаем тождество [1])

$$\sum_{s=0}^{E\left(\frac{l}{2}\right)} \frac{l-2s+1}{l-s+1} C_l^s \left[C_{m-k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}\right] = \frac{k-m+1}{k+1} C_{m+k}^{m}. \tag{23}$$

(Здесь C_r^p при $p<0$ считается равным нулю.) Читатель без труда выведет аналогичные соотношения, устанавливая те или иные методы разбиения перестановок на классы.

---

[1]) Через $E\left(\frac{l}{2}\right)$ обозначена целая часть числа $\frac{l}{2}$.

ГЛАВА IV

КОМБИНАТОРИКА РАЗБИЕНИЙ

В задачах на размещения, перестановки и сочетания из данных элементов составлялись различные комбинации, и мы считали, сколько таких комбинаций получается при тех или иных ограничениях. Судьба элементов, оставшихся после выбора комбинаций, нас почти не интересовала. Иной вид имеют задачи, к которым мы сейчас перейдем. В этих задачах элементы делятся на две или большее число групп, и надо найти все способы такого раздела.

При этом могут встретиться различные случаи. Иногда существенную роль играет порядок элементов в группах: например, когда сигнальщик вывешивает сигнальные флаги на нескольких мачтах, то для него важно не только то, на какой мачте окажется тот или иной флаг, но и то, в каком порядке эти флаги развешиваются. В других же случаях порядок элементов в группах никакой роли не играет. Когда игрок в домино выбирает кости из кучи, ему безразлично, в каком порядке они придут, а важен лишь окончательный результат.

Отличаются задачи и по тому, играет ли роль порядок самих групп. При игре в домино игроки сидят в определенном порядке, и важно не только то, как разделились кости, но и то, кому какие кости достались. Если же я раскладываю фотографии по одинаковым конвертам, чтобы послать их приятелю, то существенно, как распределятся фотографии по конвертам, но порядок самих конвертов совершенно несуществен — ведь на почте их все равно смешают.

Играет роль и то, различаем ли мы между собой сами элементы или нет, а также различаем ли между собой группы, на которые делятся элементы. Наконец, в одних задачах некоторые группы могут оказаться пустыми, то есть не содержащими ни одного элемента, а в других такие группы недопустимы. В соответствии со всем сказанным возникает целый ряд различных *комбинаторных задач на разбиение.*

Игра в домино

При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Раздел костей можно выполнить следующим образом. Сначала каким-то образом положим все 28 костей в ряд. После этого первый игрок берет первые 7 костей, второй — вторые 7 костей, третий — следующие 7 костей, а четвертый забирает себе остаток. Ясно, что таким образом можно получить всевозможные разбиения костей.

Так как число всех перестановок из 28 элементов равно 28!, то может показаться, что общее число всех способов раздела равно 28!. Но это неверно — ведь первому игроку совершенно безразлично, что он возьмет сначала — кость 6 : 6 или кость 3 : 4; ему важен лишь окончательный итог. Поэтому любая перестановка первых 7 костей не меняет существа дела. Не меняет его и любая перестановка вторых 7 костей, третьих 7 костей и последних 7 костей. В силу правила произведения получаем $(7!)^4$ перестановок костей, не меняющих результата раздела.

Таким образом, 28! перестановок костей делятся на группы по $(7!)^4$ перестановок в каждой группе, причем перестановки из одной группы приводят к одинаковому распределению костей. Отсюда следует, что число способов раздела костей равно $\frac{28!}{(7!)^4}$. Это число приближенно равно $4{,}7 \cdot 10^{15}$.

К тому же результату можно прийти иначе. Первый игрок должен выбрать 7 костей из 28. Так как порядок этих костей безразличен, то он имеет C_{23}^7 выборов. После этого второй игрок должен выбрать 7 костей из оставшихся 21 кости. Это можно сделать C_{21}^7 способами. Третий игрок выбирает из 14 костей, а потому имеет C_{14}^7 возможностей выбора. Наконец, четвертому игроку остается C_7^7, то есть единственный выбор.

По правилу произведения получаем, что полное число возможностей равно

$$C_{28}^{7}C_{21}^{7}C_{14}^{7}C_{7}^{7}=\frac{28!}{21!\,7!}\cdot\frac{21!}{14!\,7!}\cdot\frac{14!}{7!\,7!}=\frac{28!}{(7!)^4}.$$

Совершенно так же доказывается, что при игре в преферанс, где 32 карты делятся между тремя игроками по 10 карт каждому, а две карты кладутся в прикуп, число различных сдач равно

$$\frac{32!}{10!\,10!\,10!\,2!}=2\ 753\ 294\ 408\ 504\ 640.$$

Возможно, у читателя возникает вопрос, стоит ли вообще тратить время на изучение карточных игр? По этому поводу напомним, что именно изучение азартных игр дало толчок для первоначального развития комбинаторики и теории вероятностей. Такие первоклассные математики, как Паскаль, Бернулли, Эйлер, Чебышев, оттачивали идеи и методы комбинаторики и теории вероятностей на задачах об играх в орел и решку, кости и карты. Многие идеи теории игр (раздел математики, широко применяемый в экономике и военном деле) первоначально оформились на изучении простейших моделей карточных игр.

Раскладка по ящикам

Задачи о домино и преферансе относятся к комбинаторным задачам на раскладывание предметов по ящикам. Общая постановка этих задач такова:

Даны n различных предметов и k ящиков. Надо положить в первый ящик n_1 предметов, во второй — n_2 предметов, ..., в k-й — n_k предметов, где $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Сколькими способами можно сделать такое распределение?

В задаче о домино роль ящиков выполняли игроки, а роль предметов — кости. Рассуждая точно так же, как и в этой задаче, получаем ответ в общем случае: число различных раскладок по ящикам равно

$$P(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}. \qquad (1)$$

Эта формула возникла у нас раньше при решении следующей, на первый взгляд совсем непохожей задачи:

Имеются предметы k различных типов. Сколько различных перестановок можно сделать из n_1 предметов первого типа, n_2 предметов второго типа, ..., n_k предметов k-го типа?

И здесь ответ был дан формулой

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!},$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ (см. стр. 39). Чтобы установить связь между этими задачами, занумеруем все n мест, которые могут занимать наши предметы. Каждой перестановке соответствует распределение номеров мест на k классов. В первый класс попадают номера тех мест, на которые попали предметы первого типа, во второй — номера мест предметов второго типа и т. д. Тем самым устанавливается соответствие между перестановками с повторениями и раскладкой номеров мест по «ящикам». Понятно, что формулы решения обеих задач оказались одинаковыми.

Букет цветов

В задаче о раскладке элементов по ящикам мы считали известным количество предметов, попадающих в каждый ящик (например, число костей, которые должен взять каждый игрок). В большинстве задач о разделе предметов эти количества не указываются.

Двое ребят собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?

Ясно, что ромашки можно разделить 11 способами — первый может не взять ни одной ромашки, взять 1 ромашку, 2 ромашки, ..., все 10 ромашек. Точно так же васильки можно разделить 16 способами, а незабудки — 15 способами. Так как цветы каждого вида можно делить независимо от цветов другого вида, то по правилу произведения получаем $11 \cdot 16 \cdot 15 = 2640$ способов раздела цветов.

Разумеется, среди этих способов есть и крайне несправедливые, при которых, например, один из ребят совсем не получает цветов. Введем поэтому ограничение, что каждый из ребят должен получить не менее 3 цветков каждого вида. Тогда ромашки можно разделить лишь пятью способами: первый может взять себе 3, 4, 5, 6 или 7 цветков. Точно так же васильки можно разделить 10 способами, а незабудки — 9 способами. В этом случае общее число способов деления равно $5 \cdot 10 \cdot 9 = 450$.

Вообще, если имеется n_1 предметов одного сорта, n_2 предметов другого сорта, ..., n_k предметов k-го сорта, то их можно разделить между двумя людьми

$$(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1) \tag{2}$$

способами. В частности, если все предметы отличны друг от друга и их число равно k, то $n_1=n_2=\ldots=n_k=1$ и потому есть 2^k способов раздела.

Если же наложить добавочное ограничение, что каждый из участников раздела должен получить не менее s_1 предметов первого сорта, s_2 предметов второго сорта, ..., s_k предметов k-го сорта, то число способов раздела выражается формулой

$$(n_1-2s_1+1)(n_2-2s_2+1)\ldots(n_k-2s_k+1). \tag{3}$$

Мы предоставляем читателю доказать эти утверждения.

Задача о числе делителей

Выведенная нами формула (2) позволяет решить следующую задачу теории чисел:

Найти, сколько делителей есть у натурального числа N. Для этого разложим N на простые множители: $N=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Например, $360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. При разложении числа N на два сомножителя, $N=N_1N_2$, простые сомножители распредляются между N_1 и N_2. Если в N_1 сомножитель p_j войдет m_j раз, $j=1, \ldots, k$, то разложение имеет вид

$$N=\left(p_1^{m_1}\ldots p_k^{m_k}\right)\left(p_1^{n_1-m_1}\ldots p_1^{n_k-m_k}\right).$$

Таким образом, разложение N на два сомножителя сводится к разделу n_1 элементов одного сорта, n_2 элементов второго сорта, ..., n_k элементов k-го сорта на две части. А формула (2) показывает, что это можно сделать $(n_1+1)\ldots(n_k+1)$ способами. Значит, число делителей у натурального числа $N=p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}$ равно $(n_1+1)\ldots$ $\ldots(n_k+1)$. Это число обозначают $\tau(N)$.

Сбор яблок

Трое ребят собрали с яблони 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми (то есть если нас интересует лишь, сколько яблок получит каждый, но не то, какие именно яблоки ему достанутся)?

Для решения этой задачи поступим так: добавим к собранным яблокам еще 2 одинаковые груши, а потом переставим всеми возможными способами 40 яблок и 2 груши. По формуле для перестановок с повторениями число таких перестановок равно

$$P(40,\ 2)=C_{42}^{2}=\frac{42!}{40!2!}=861.$$

Но каждой перестановке соответствует свой способ раздела яблок. Первому из ребят мы даем все яблоки, начиная от первого и до первой груши, второму — все яблоки, попавшие между первой и второй грушей, а третьему — все яблоки, лежащие после второй груши. Ясно, что при этом различным перестановкам соответствуют разные способы раздела. Таким образом, общее число способов раздела равно 861. При этом может случиться так, что одному (или даже двоим) участникам раздела ничего не достанется. Например, если одна из груш попадет при перестановке в начало, то лишается яблок первый из ребят, а если в конец — то третий. Если же обе груши окажутся рядом, то ничего не получит второй. Разберите сами, что случится, если обе груши попадут в начало или в конец.

Совершенно так же доказывается, что n одинаковых предметов можно разделить между k лицами

$$P(n,\ k-1)=C_{n+k-1}^{n}=C_{n+k-1}^{k-1} \qquad (4)$$

способами.

Предположим теперь, что для большей справедливости раздела условлено, чтобы каждый участник получил по крайней мере r предметов. В этом случае надо начать с того, что дать каждому по r предметов. После этого остается $n-kr$ предметов, которые можно уже распределять произвольным образом. А это можно сделать, как мы видели, $C_{n-kr+k-1}^{k-1}=C_{n-k(r-1)-1}^{k-1}$ способами.

В частности, *если каждый из k участников должен получить не менее одного предмета, то задача решается C_{n-1}^{k-1} способами.*

Последний результат можно вывести и иным образом. Расположим данные n предметов в ряд. Тогда между ними будет $n-1$ промежутков. Если в любые $k-1$ из этих промежутков поставить разделяющие перегородки, то все предметы разделятся на k непустых частей. После этого первая часть передается первому лицу, вторая — второму и т. д. Так как $k-1$ перегородок можно поставить в $n-1$ промежутков C_{n-1}^{k-1} способами, то число способов раздела равно C_{n-1}^{k-1}.

Сбор грибов

Если делят предметы разных видов, то надо найти число способов раздела для каждого вида и перемножить полученные числа. Решим, например, следующую задачу:

Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами?

Применяя результаты предыдущего пункта, получаем, что ответ имеет вид

$$C_{13}^{3}C_{18}^{3}C_{11}^{3}=41\,771\,040.$$

Если же каждый должен получить хотя бы по одному грибу каждого сорта, то ответом будет

$$C_{9}^{3}C_{14}^{3}C_{7}^{3}=1\,070\,160.$$

В случае, когда n различных предметов делят между k лицами без ограничений, каждый предмет можно вручить k способами (отдав его одному из участников раздела). Поэтому число решений равно k^n.

Например, 8 различных пирожных можно разделить между 5 человеками $5^8=390\,625$ способами.

Посылка фотографий

Я хочу послать своему другу 8 различных фотографий. Сколькими способами я могу это сделать, использовав 5 различных конвертов?

Эта задача похожа на решенную в конце предыдущего пункта. Поэтому, казалось бы, ответом является

$5^8=390\,625$. Однако посылать пустые конверты нельзя, поэтому накладывается новое ограничение — ни один конверт не должен быть пустым. Чтобы учесть это ограничение, используем формулу включений и исключений (ответ C_{n-1}^{k-1} неверен, так как фотографии различны).

Найдем сначала, при скольких способах распределения данные r конвертов оказываются пустыми (а остальные могут быть как пустыми, так и содержать фотографии). В этом случае фотографии кладутся без ограничений в $5-r$ конвертов, и по доказанному выше число таких распределений равно $(5-r)^8$.

Но r конвертов можно выбрать из пяти C_5^r способами. Отсюда, применяя формулу включений и исключений, выводим, что число распределений, при которых ни один конверт не оказывается пустым, равно

$$5^8-C_5^1\cdot 4^8+C_5^2\cdot 3^8-C_5^3\cdot 2^8+C_5^4\cdot 1^8=126\,020.$$

Совершенно так же доказывается, что если посылаются n различных фотографий в k различных конвертах, причем ни один конверт не пуст, то число способов распределения выражается формулой

$$k^n-C_k^1(k-1)^n+C_n^2(k-2)^n-\ldots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}\cdot 1^n. \tag{5}$$

Предоставляем читателю разобрать следующую задачу:

Имеются n_1 предметов первого вида, n_2 предметов второго вида, ..., n_s предметов s-го вида. Сколькими способами можно раздать их k лицам так, чтобы каждый получил хотя бы один предмет?

Ответ на эту задачу такой:

$$C_{n_1+k-1}^{k-1}C_{n_2+k-1}^{k-1}\ldots C_{n_s+k-1}^{k-1}-C_k^1C_{n_1+k-2}^{k-2}C_{n_2+k-2}^{k-2}\ldots C_{n_s+k-2}^{k-2}+$$
$$+C_k^2C_{n_1+k-3}^{k-3}C_{n_2+k-3}^{k-3}\ldots C_{n_s+k-3}^{k-3}-\ldots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}. \tag{6}$$

Например, если делят 8 яблок, 10 груш и 7 апельсинов между 4 ребятами и каждый должен получить хотя бы один фрукт, то раздел возможен

$$C_{11}^3C_{13}^3C_{10}^3-C_4^1C_{10}^2C_{12}^2C_9^2+C_4^2C_9^1C_{11}^1C_8^1-C_4^3=5\,464\,800$$

способами.

Флаги на мачтах

До сих пор мы не учитывали порядок, в котором расположены элементы каждой части. В некоторых задачах этот порядок надо учитывать.

Имеется n различных сигнальных флагов и k мачт, на которые их вывешивают. Значение сигнала зависит от того, в каком порядке развешены флаги. Сколькими способами можно развесить флаги, если все флаги должны быть использованы, но некоторые из мачт могут оказаться пустыми?

Каждый способ развешивания флагов можно осуществить в два этапа. На первом этапе мы переставляем всеми возможными способами данные n флагов. Это можно сделать $n!$ способами. После этого берем один из способов распределения n одинаковых флагов по k мачтам (напомним, что число этих способов равно C_{n+k-1}^{k-1}). Пусть этот способ заключается в том, что на первую мачту надо повесить n_1 флагов, на вторую n_2 флагов, ..., на k-ю n_k флагов, где $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Тогда берем первые n_1 флагов данной перестановки и развешиваем в полученном порядке на первой мачте; следующие n_2 флагов развешиваем на второй мачте и т. д. Ясно, что, используя все перестановки n флагов и все способы распределения n одинаковых флагов по k мачтам, мы получим все способы решения поставленной задачи. По правилу произведения получаем, что число способов развешивания флагов равно

$$n!\,C_{n+k-1}^{k-1}=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}=A_{n+k-1}^{n}. \tag{7}$$

Вообще, *если имеется n различных вещей, то число способов распределения этих вещей по k различным ящикам с учетом порядка их расположения в ящиках равно A_{n+k-1}^{n}.*

К тому же результату можно прийти иным путем. Добавим к распределяемым n вещам $k-1$ одинаковых шаров и рассмотрим всевозможные перестановки полученных $n+k-1$ предметов. Каждая такая перестановка определяет один из способов распределения. Именно, в первый ящик кладут все предметы, идущие в перестановке до первого добавленного шара (если первым предметом в перестановке является один из добавленных шаров, то первый ящик остается пустым). После этого во второй ящик кладут все предметы, попавшие между первым и вторым шаром, ..., в k-й ящик — все предметы, идущие после шара $k-1$. Ясно, что при этом получаются все распределения предметов, обладающие указанными свойствами. Но число перестановок из n различных предметов и $k-1$ одинаковых шаров равно

$$P(\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{n\text{ раз}},\ k-1)=\frac{(n+k-1)!}{1!\ldots 1!\,(k-1)!}=A^n_{n-k-1}.$$

Аналогично решается задача в случае, когда на каждой мачте должен висеть хотя бы один флаг (или, что то же самое, в каждом ящике должен быть хотя бы один предмет). С помощью формулы, выведенной на стр. 96, получаем, что в этом случае имеем $n!\,C^{k-1}_{n-1}$ способов распределения. И этот результат можно получить путем выбора точек раздела среди $n-1$ промежутков.

Полное число сигналов

До сих пор мы считали, что все флаги должны быть использованы для передачи сигнала. Но могут быть и сигналы, для передачи которых используется лишь часть флагов, причем допускаются и пустые мачты. Найдем *полное число сигналов, которые можно передать с помощью n сигнальных флагов, вывешиваемых на k мачтах.*

Разобьем эти сигналы на классы по числу флагов, участвующих в сигнале.

По формуле (7) с помощью заданных s флагов можно передать A^s_{s+k-1} сигналов (число мачт равно k). Но s флагов из n можно выбрать C^s_n способами. Поэтому число всех сигналов в s-м классе равно $C^s_nA^s_{s+k-1}$. Значит, полное число сигналов дается формулой

$$C^0_nA^0_{k-1}+C^1_nA^1_k+C^2_nA^2_{k+1}+\ldots+C^n_nA^k_{n+k-1}. \qquad (8)$$

Например, с помощью 6 различных флагов на 3 мачтах можно передать

$$1+C^1_6A^1_3+C^2_6A^2_4+C^3_6A^3_5+C^4_6A^4_6+C^5_6A^5_7+C^6_6A^6_8=42\,079$$

сигналов.

Если не допускать, чтобы некоторые мачты пустовали, то вместо формулы (8) получаем

$$C_n^k C_{k-1}^{k-1} k! + C_n^{k+1} C_k^{k-1} (k+1)! + C_n^{k+2} C_{k+1}^{k-1} (k+2)! + \ldots \\ \ldots + C_n^n C_{n-1}^{k-1} n! \quad (9)$$

способов.

Разные статистики

Задачи о раскладке предметов по ящикам весьма важны для статистической физики. Эта наука изучает, как распределяются по своим свойствам физические частицы; например, какая часть молекул данного газа имеет при данной температуре ту или иную скорость. При этом множество всех возможных состояний распределяют на большое число k маленьких ячеек (фазовых состояний), так что каждая из n частиц попадет в одну из ячеек.

Вопрос о том, какой статистике подчиняются те или иные частицы, зависит от вида этих частиц. В классической статистической физике, созданной Максвеллом и Больцманом, частицы считаются различимыми друг от друга. Такой статистике подчиняются, например, молекулы газа. Мы знаем, что n различных частиц можно распределить по k ячейкам k^n способами. Если все эти k^n способов при заданной энергии имеют равную вероятность, то говорят о *статистике Максвелла — Больцмана*.

Оказалось, что этой статистике подчиняются не все физические объекты. Фотоны, атомные ядра и атомы, содержащие четное число элементарных частиц, подчиняются иной статистике, разработанной Эйнштейном и индийским ученым Бозе. В *статистике Бозе — Эйнштейна* частицы считаются неразличимыми друг от друга. Поэтому имеет значение лишь то, сколько частиц попало в ту или иную ячейку, а не то, какие именно частицы туда попали. Эта задача похожа на задачу о разделе яблок (см. стр. 95). Мы уже знаем, что при таком подходе получается $C_{n+k-1}^{k-1} \equiv C_{n+k-1}^n$ различных способов раздела. В статистике Бозе — Эйнштейна все эти способы считаются равновероятными.

Однако для многих частиц, например, таких, как электроны, протоны и нейтроны, не годится и статистика

Бозе — Эйнштейна. Для них в каждой ячейке может находиться не более одной частицы, причем различные распределения, удовлетворяющие указанному условию, имеют равную вероятность. В этом случае может быть C_k^n различных распределений. Эта статистика называется *статистикой Дирака — Ферми.*

Разбиения чисел

В большинстве рассмотренных выше задач предметы, подлежащие разделу, были различными. Теперь мы переходим к задачам, в которых все разделяемые предметы совершенно одинаковы. В этом случае можно говорить не о разделе предметов, а о разбиении натуральных чисел на слагаемые (которые, конечно, тоже должны быть натуральными числами).

Здесь возникает много различных задач. В одних задачах учитывается порядок слагаемых, а в других — нет. Можно рассматривать лишь разбиения на четное или только на нечетное число слагаемых, на различные или на произвольные слагаемые и т. д. Основным методом решения задач на разбиение является сведéние к задачам о разбиении меньших чисел или о разбиении на меньшее число слагаемых.

Отправка бандероли

За пересылку бандероли надо уплатить 18 коп. Сколькими способами можно оплатить ее марками стоимостью в 4, 6 и 10 коп., если два способа, отличающиеся порядком марок, считаются различными? [1]).

Обозначим через $f(N)$ число способов, которыми можно наклеить марки в 4, 6 и 10 коп. так, чтобы общая стоимость этих марок равнялась N. Тогда для $f(N)$ справедливо следующее соотношение:

$$f(N)=f(N-4)+f(N-6)+f(N-10). \qquad (10)$$

В самом деле, пусть имеется некоторый способ наклейки марок с общей стоимостью N, и пусть последней наклеена марка стоимостью в 4 коп. Тогда все остальные

[1]) Запас марок различного достоинства мы считаем неограниченным.

марки стоят $N-4$ коп. Наоборот, присоединяя к любой комбинации марок общей стоимостью $N-4$ коп. одну четырехкопеечную марку, получаем комбинацию марок стоимостью в N коп. При этом из разных комбинаций стоимостью в $N-4$ коп. получатся разные комбинации стоимостью в N коп. Итак, число искомых комбинаций, где последней наклеена марка стоимостью в 4 коп., равно $f(N-4)$.

Точно так же доказывается, что число комбинаций, оканчивающихся на шестикопеечную марку, равно $f(N-6)$, а на десятикопеечную марку оканчиваются $f(N-10)$ комбинаций. Поскольку любая комбинация оканчивается на марку одного из указанных типов, то по правилу суммы получаем соотношение (10).

Соотношение (10) позволяет свести задачу о наклеивании марок на сумму N коп. к задачам о наклеивании марок на меньшие суммы. Но при малых значениях N задачу легко решить непосредственно. Простой подсчет показывает, что

$$f(0)=1, \quad f(1)=f(2)=f(3)=0, \quad f(4)=1, \quad f(5)=0,$$
$$f(6)=1, \quad f(7)=0, \quad f(8)=1, \quad f(9)=0.$$

Равенство $f(0)=1$ означает, что сумму в 0 коп. можно уплатить единственным образом: совсем не наклеивая марок. А сумму в 1, 2, 3, 5, 7 и 9 коп. вообще никак нельзя получить с помощью марок в 4, 6 и 10 коп. Используя значения $f(N)$ для $N=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, легко найти $f(10)$:

$$f(10)=f(6)+f(4)+f(0)=3.$$

После этого находим

$$f(11)=f(7)+f(5)+f(1)=0,$$
$$f(12)=f(8)+f(6)+f(2)=2$$

и т. д. Наконец, получаем значение $f(18)=8$. Таким образом, марки можно наклеить восемью способами. Эти способы таковы:

10, 4, 4; 4, 10, 4; 4, 4, 10; 6, 4, 4, 4; 4, 6, 4, 4;
4, 4, 6, 4; 4, 4, 4, 6; 6, 6, 6.

Отметим, что значения $f(N)$ для $N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ можно было получить иначе, не приводя непосредственной проверки. Дело в том, что при $N<0$ имеем $f(N)=0$, поскольку отрицательную сумму нельзя уплатить, наклеивая неотрицательное количество марок. В то же время, как мы видели, $f(0)=1$. Поэтому

$$f(1)=f(-3)+f(-5)+f(-9)=0.$$

Точно так же получаем значение $f(2)=0$, $f(3)=0$. А для $N=4$ имеем

$$f(4)=f(0)+f(-2)+f(-6)=1.$$

Общая задача о наклейке марок

Разобранная задача является частным случаем следующей общей задачи:

Имеются марки достоинством в $n_1, n_2, \ldots, n_k$ коп[1]. *Сколькими способами можно оплатить с их помощью сумму в N коп., если два способа, отличающиеся порядком, считаются различными?*

В этом случае число $f(N)$ способов удовлетворяет соотношению

$$f(N)=f(N-n_1)+f(N-n_2)+\ldots+f(N-n_k). \quad (11)$$

При этом $f(N)=0$, если $N<0$ и $f(0)=1$. С помощью соотношения (11) можно найти $f(N)$ для любого N, последовательно вычисляя $f(1), f(2), \ldots, f(N-1)$.

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда $n_1=1$, $n_2=2$, $\ldots$, $n_k=k$. Мы получаем всевозможные разбиения числа N на слагаемые $1, 2, \ldots, k$, причем разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными. Обозначим число этих разбиений через $\varphi(k;\ N)$[2]. Из соотношения (11) следует, что

$$\varphi(k;\ N)=\varphi(k;\ N-1)+\varphi(k;\ N-2)+\ldots$$
$$\ldots+\varphi(k;\ N-k). \quad (12)$$

При этом

$$\varphi(k;\ 0)=1 \quad \text{и} \quad \varphi(k;\ N)=0, \quad \text{если} \quad N<0.$$

---

[1]) Все числа $n_1, \ldots, n_k$ различны, а запас марок неограничен.

[2]) Здесь и в дальнейшем мы будем на первом месте указывать число слагаемых, на втором — разбиваемое число и на последнем — ограничения на величину слагаемых.

Вычисление $\varphi(N;\ k)$ можно упростить, если заметить, что

$$\varphi(N-1;\ k)=\varphi(N-2;\ k)+\ldots+\varphi(N-k;\ k)+\\+\varphi(N-k-1;\ k)$$

и потому

$$\varphi(N;\ k)=2\varphi(N-1;\ k)-\varphi(N-k-1;\ k). \qquad (13)$$

Ясно, что слагаемые не могут быть больше N. Поэтому $\varphi(N, N)$ равно числу всех разбиений N на натуральные слагаемые (включая и «разбиение» $N=N$). Если число слагаемых равно s, то получаем C_{N-1}^{s-1} разбиений (см. стр. 96). Поэтому

$$\varphi(N,\ N)=C_{N-1}^{0}+C_{N-1}^{1}+\ldots+C_{N-1}^{N-1}=2^{N-1}.$$

Итак, мы доказали, что натуральное число N можно разбить на слагаемые 2^{N-1} способами. Напомним, что при этом учитывается порядок слагаемых.

Например, число 5 можно разбить на слагаемые $2^{5-1}=16$ способами:

$5=5$	$5=3+1+1$	$5=1+2+2$
$5=4+1$	$5=1+3+1$	$5=2+1+1+1$
$5=1+4$	$5=1+1+3$	$5=1+2+1+1$
$5=2+3$	$5=2+2+1$	$5=1+1+2+1$
$5=3+2$	$5=2+1+2$	$5=1+1+1+2$
		$5=1+1+1+1+1$

Комбинаторные задачи теории информации

Задачу, похожую на только что решенную, приходится решать в теории информации. Предположим, что сообщение передается с помощью сигналов нескольких типов. Длительность передачи сигнала первого типа равна t_1, второго типа t_2, ..., k-го типа t_k единиц времени. *Сколько различных сообщений можно передать с помощью этих сигналов за T единиц времени?* При этом учитываются лишь «максимальные» сообщения, то есть сообщения, к которым нельзя присоединить ни одного сигнала, не выйдя за рамки отведенного для передачи времени.

Обозначим число сообщений, которые можно передать за время T через $f(T)$. Рассуждая точно так же, как и в задаче о марках, получаем, что $f(T)$ удовлетворяет соотношению

$$f(T)=f(T-t_1)+\ldots+f(T-t_k). \qquad (14)$$

При этом снова $f(T)=0$, если $T<0$ и $f(0)=1$.

Проблема абитуриента

Поступающий в высшее учебное заведение должен сдать 4 экзамена. Он полагает, что для поступления будет достаточно набрать 17 очков. Сколькими способами он может сдать экзамены, чтобы наверняка поступить в вуз?

Эта задача похожа на задачу о марках, но отличается от нее тем, что указано число «марок», которыми надо «уплатить сумму в 17 очков». За каждый успешно сданный экзамен поступающий получает 3, 4 или 5 баллов. Обозначим через $F(k;\ N)$ число способов, которыми можно набрать N баллов после k экзаменов. Тогда имеет место соотношение

$$F(k;\ N)=F(k-1;\ N-3)+F(k-1;\ N-4)+\\+F(k-1;\ N-5),$$

вывод которого совершенно аналогичен выводу соотношения (11) на стр. 103.

Отсюда получаем, что

$$F(4;\ 17)=F(3;\ 14)+F(3;\ 13)+F(3;\ 12)=\\=F(2;\ 11)+2F(2;\ 10)+3F(2;\ 9)+2F(2;\ 8)+F(2;\ 7)=\\=2+3F(2;\ 9)+2F(2;\ 8)+F(2;\ 7),$$

поскольку набрать 11 баллов после 2 экзаменов невозможно, а набрать 10 баллов можно единственным образом — получив две пятерки.

Продолжая вычисление, получаем, что

$$F(4;\ 17)=2+3F(1;\ 6)+5F(1;\ 5)+\\+6F(1;\ 4)+3F(1;\ 3)+F(1;\ 2).$$

Но $F(1;\ 6)=F(1;\ 2)=0$ [1], а $F(1;\ 5)=F(1;\ 4)=F(1;3)=$ $=1$. Поэтому $F(4;\ 17)=16$. Точно так же выводим, что

$$F(4;\ 18)=10,\quad F(4;\ 19)=4\quad \text{и}\quad F(4;\ 20)=1.$$

Итого получаем $16+10+4+1=31$ способ успешной сдачи экзаменов.

Тот же результат можно получить иначе. Легко проверить, что 17 очков можно получить лишь двумя существенно различными способами: либо получить 2 пятерки, 1 четверку и 1 тройку, либо получить 1 пятерку и 3 четверки. Эти отметки могут любым способом распределяться по сдаваемым предметам. Так как

$$P(2,\ 1,\ 1)+P(1,\ 3)=\frac{4!}{2!\,1!\,1!}+\frac{4!}{3!\,1!}=16,$$

то 17 очков можно получить 16 способами. Точно так же подсчитывается число способов получить 18, 19 и 20 очков.

Вообще, пусть $F(m;\ N)$ — число способов разбиения N на m слагаемых, каждое из которых равно одному из чисел $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$. Тогда для $F(m;\ N)$ выполняется соотношение

$$F(m;\ N)=F(m-1;\ N-n_1)+\ldots+F(m-1;\ N-n_k), \tag{15}$$

которое выводится точно так же, как соотношение (11). Мы предоставляем читателю провести этот вывод.

В частности, если $n_1=1,\ n_2=2,\ \ldots,\ n_k=k$, то получаем разбиения N на m слагаемых, каждое из которых равно одному из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Обозначим число этих разбиений через $F(m;\ N;\ k)$. Тогда для $F(m;N;k)$ имеем соотношение

$$F(m;\ N;\ k)=F(m-1;\ N-1;\ k)+$$
$$+F(m-1;\ N-2;\ k)+\ \ldots\ +F(m-1,\ N-k;\ k). \tag{16}$$

Как и на стр. 104, из этого соотношения вытекает, что

$$F(m;\ N;\ k)=F(m,\ N-1;\ k)+$$
$$+F(m-1;\ N-1;\ k)-F(m-1;\ N-k-1;\ k). \tag{17}$$

Перейдем теперь к задачам на разбиения, в которых разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

---

[1] Шесть баллов за один экзамен получить нельзя, а с двойкой в институт не принимают.

В кошельке лежат монеты в 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 и 50 коп. по одной монете каждого достоинства. Сколькими способами можно уплатить этими монетами за покупку стоимостью в 73 коп.?

В этой задаче порядок монет не играет роли — важно лишь, какие именно монеты берутся для уплаты. Введем следующее обозначение: через

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N)$$

будем обозначать число способов, которыми можно уплатить N коп. с помощью монет различного достоинства $n_1, n_2, \ldots, n_m$ коп., беря не более чем по одной монете каждого достоинства. Разобьем все способы уплаты на два класса в зависимости от того, использована или нет монета достоинством в n_m коп. Если она использована, то остается уплатить сумму в $N - n_m$ коп. с помощью монет в $n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$ коп. А это можно сделать $F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N - n_m)$ способами. Если же монета в n_m коп. не использована, то надо оплатить всю сумму в N коп. с помощью монет в $n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$ коп. А это можно сделать $F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N)$ способами.

Отсюда следует, что имеет место соотношение

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N) = \\ = F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N-n_m) + F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N). \tag{18}$$

Это соотношение позволяет свести задачу о выборе из m монет к задаче о выборе из $m - 1$ монет. Повторяя это же рассуждение, сводим к задаче о выборе из $m - 2$ монет и т. д., пока не дойдем либо до задачи об уплате нулевой суммы, либо до задачи о выборе из одной монеты. Обе задачи решаются однозначно. При этом в ходе вычисления многие слагаемые отбрасываются. Ведь если $n_1 + n_2 + \ldots + n_m < N$, то $F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N) = 0$, так как монет не хватает на оплату покупки. Кроме того, если $n_m > N$, то соотношение (18) заменяется на

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_m; N) = F(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}; N),$$

поскольку монета n_m в уплате участвовать не может.

Применим описанный метод к решению нашей задачи. По соотношению (11) выводим сначала, что

$$F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 50;\ 73)=$$
$$=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20;\ 23)+$$
$$+F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20;\ 73)=$$
$$=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20;\ 23),$$

так как $1+2+3+5+10+15+20<73$ и потому $F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20;\ 73)=0$. Далее получаем, что

$$F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20;\ 23)=$$
$$=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15;\ 3)+F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15;\ 23).$$

Но

$$F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15;\ 3)=F(1,\ 2,\ 3;\ 3)=$$
$$=F(1,\ 2;\ 0)+F(1,\ 2;\ 3)=1+F(1;\ 3)+F(1;\ 1)=2.$$

Вычислим второе слагаемое

$$F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15;\ 23)=$$
$$=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10;\ 8)+F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10;\ 23)=$$
$$=F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10;\ 8),$$

так как $1+2+3+5+10<23$. Но $F(1,\ 2,\ 3,\ 5;\ 8)=F(1,\ 2,\ 3;\ 3)=2$.

Окончательно получаем, что

$$F(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 50;\ 73)=4.$$

Итак, требуемую уплату можно произвести 4 способами, а именно 50, 20 и 3 коп.; 50, 20, 2 и 1 коп.; 50, 15, 5 и 3 коп. и, наконец, 50, 15, 5, 2 и 1 коп.

Покупка конфет

В магазине продаются конфеты нескольких сортов: 3 сорта стоимостью 2 коп. за штуку и 2 сорта стоимостью 3 коп. за штуку. Сколькими способами можно купить конфеты на 8 коп., если брать не более одной конфеты каждого сорта?

Решение задачи получается из следующих соотношений:

$$F(2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3;\ 8)=F(2,\ 2,\ 2,\ 3;\ 5)+F(2,\ 2,\ 2,\ 3;\ 8)=$$
$$=F(2,\ 2,\ 2;\ 2)+2F(2,\ 2,\ 2;\ 5)+F(2,\ 2,\ 2;\ 8)=$$
$$=F(2,\ 2,\ 2;\ 2)=F(2,\ 2;\ 0)+F(2,\ 2;\ 2)=$$
$$=1+F(2;\ 0)+F(2;\ 2)=3.$$

Итак, покупку можно сделать 3 способами — купить по одной конфете обоих сортов за 3 коп. и добавить к ним любую из конфет за 2 коп.

Казалось бы, столько же решений имеет задача:

В кошельке лежат 3 монеты по 2 коп. и 2 монеты по 3 коп. Сколькими способами можно уплатить с помощью этих монет сумму в 8 коп.?

Это зависит, однако, от того, какие именно монеты лежат в кошельке. Если монеты по 2 коп., равно как и монеты по 3 коп., считались различимыми, то задача совпадает с разобранной и уплату можно произвести 3 способами. Если же все монеты по 2 коп. неразличимы, то остается единственный способ уплаты: 2 монеты по 3 коп. и 1 монета в 2 коп.

Таким образом, задачи на уплату имеют разный характер в зависимости от того, различимы или нет монеты одного и того же достоинства. Разобранный выше метод решения годится лишь в случае, когда все монеты считаются различными независимо от того, имеют они одинаковое или разное достоинство. Покажем теперь, как решать задачу в случае, когда монеты одного достоинства считаются неразличимыми.

В кошельке лежат 10 монет по 2 коп. и 5 монет по 3 коп. Сколькими способами можно уплатить этими монетами сумму в 22 коп., если монеты одного достоинства неразличимы друг от друга?

Обозначим число решений задачи через $\Phi(10\cdot 2,\ 5\cdot 3;\ 22)$ ($10\cdot 2$ означает, что у нас 10 монет по 2 коп., а $5\cdot 3$ — что есть 5 монет по 3 коп.). Разобьем все способы решения задачи на классы в зависимости от того, сколько использовано трехкопеечных монет. Если, например, использованы две такие монеты, то остается уплатить 16 коп. с помощью двухкопеечных монет, а если использованы все 5 монет, то остается уплатить лишь 7 коп. Если же трехкопеечные монеты совершенно не использовались для уплаты, то все 22 коп. надо уплатить двухкопеечными монетами. Таким образом, имеет место равенство

$$\Phi(10\cdot 2,\ 5\cdot 3;\ 22)=\Phi(10\cdot 2;\ 22)+$$
$$+\Phi(10\cdot 2;\ 19)+\Phi(10\cdot 2;\ 16)+$$
$$+\Phi(10\cdot 2;\ 13)+\Phi(10\cdot 2;\ 10)+\Phi(10\cdot 2;\ 7). \quad (19)$$

Продолжать дальше не надо, так как у нас только 5 трехкопеечных монет. Ясно, что 10 двухкопеечными монетами невозможно уплатить 22 коп. Поэтому $\Phi(10\cdot 2;\ 22)=0$. Далее, очевидно, что нечетную сумму невозможно уплатить двухкопеечными монетами, а четную можно уплатить единственным образом. Поэтому из формулы (19) следует

$$\Phi(10\cdot 2;\ 5\cdot 3;\ 22)=2.$$

Есть только 2 способа уплаты:

$$22=8\cdot 2+2\cdot 3=5\cdot 2+4\cdot 3.$$

Как разменять гривенник?

Читателю, наверно, приходится каждый день по нескольку раз менять гривенники — для проезда на метро нужны пятачки, для разговора по телефону-автомату — двухкопеечные монеты, а для того чтобы выпить стакан газированной воды с сиропом — трехкопеечные монеты. В связи с этим возникает вопрос:

Сколькими способами можно разменять гривенник (монету в 10 коп.) на монеты в 1, 2, 3 и 5 коп.?

Эта задача похожа на решавшуюся в конце предыдущего пункта. Только теперь число монет разного достоинства не ограничено. Поэтому число решений мы обозначим так: $\Phi(1,\ 2,\ 3,\ 5;\ 10)$. Рассуждая точно так же, как и в предыдущем пункте, получаем соотношение

$$\Phi(1,\ 2,\ 3,\ 5;\ 10)=\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 10)+$$
$$+\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 5)+\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 0) \quad (20)$$

(все способы размена разбиты на классы по числу входящих в них пятачков). Ясно, что $\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 0)=1$ — уплатить 0 коп. можно единственным образом.

Чтобы сосчитать $\Phi(1, 2, 3; 5)$, разобьем все способы размена 5 коп. монетами 1, 2, 3 коп. на классы в зависимости от того, сколько берут трехкопеечных монет. Мы получим

$$\Phi(1, 2, 3; 5)=\Phi(1, 2; 5)+\Phi(1, 2; 2)$$

(первое слагаемое соответствует случаю, когда не берется ни одна трехкопеечная монета, а второе — когда берут одну такую монету).

Продолжая вычисление, получаем

$$\Phi(1, 2, 3; 5)=\Phi(1; 5)+\Phi(1; 3)+$$
$$+\Phi(1; 1)+\Phi(1; 2)+\Phi(1; 0).$$

Все эти слагаемые равны 1, так как любая сумма копейками уплачивается единственным образом. Итак, $\Phi(1, 2, 3; 5)=5$. Точно так же подсчитывается, что $\Phi(1, 2, 3; 10)=14$. Всего получаем $14+5+1=20$ способов размена.

Вместо соотношения (20) можно было взять сначала соотношение

$$\Phi(1, 2, 3, 5; 10)=\Phi(1, 2, 3; 10)+\Phi(1, 2, 3, 5; 5).$$

Оно показывает, что способы размена распадаются на те, где не использован ни один пятачок, и на те, где хотя бы один пятачок использован.

Вообще, если надо заплатить N коп. монетами достоинством в $n_1, \ldots, n_k$ коп., то имеет место соотношение

$$\Phi(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k; N)=$$
$$=\Phi(n_1, \ldots, n_{k-1}; N)+\Phi(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k; N-n_k). \quad (21)$$

Оно показывает, что либо мы не используем ни одной монеты в n_k коп. и тогда надо всю сумму N заплатить остальными монетами в $n_1, \ldots, n_{k-1}$ коп., либо хоть одна монета в n_k коп. использована и тогда надо заплатить оставшуюся сумму $N-n_k$ коп. монетами в $n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k$ коп. Если же, как это было на стр. 107, монеты не должны повторяться, то соотношение (21) заменяется уже встречавшимся ранее (см. стр. 107) соотношением

$$F(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k; N)=$$
$$=F(n_1, \ldots, n_{k-1}; N)+F(n_1, \ldots, n_{k-1}; N-n_k). \quad (22)$$

Разбиение чисел на слагаемые

Рассмотрим частный случай задачи о размене, когда допускаются любые монеты от 1 до n коп. Иными словами, решим следующую задачу:

Сколькими способами можно разбить число N на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел 1, 2, ..., n (порядок слагаемых не учитывается).

Обозначим число таких способов разбиения через Π_N^n [1]. Тогда имеет место соотношение

$$\Pi_N^n = \Pi_N^{n-1} + \Pi_{N-n}^n. \tag{23}$$

В самом деле, если число n не использовано в качестве слагаемого, то N разбито на слагаемые 1, 2, ..., $n-1$, а это можно сделать Π_N^{n-1} способами. Если же n использовано в качестве слагаемого, то число $N-n$ разбито на слагаемые 1, 2, ..., n, что можно сделать Π_{N-n}^n способами.

Наложим теперь ограничение, что *все слагаемые должны быть различными*. Число решений в этом случае обозначим через Φ_N^n (при этом $\Phi_0^n = 1$). Предоставляем читателю показать, что для Φ_N^n имеет место соотношение

$$\Phi_N^n = \Phi_N^{n-1} + \Phi_{N-n}^{n-1} \tag{24}$$

(число n нельзя второй раз использовать в качестве слагаемого).

Как легко видеть, $\Phi_1^1 = 1$ и $\Phi_N^1 = 0$ при $N > 1$, и с помощью формулы (24) можно последовательно вычислить Φ_N^n для всех n и N. Для Π_N^n удобнее вместо соотношения (23) взять соотношение

$$\Pi_N^n = \Pi_N^{n-1} + \Pi_{N-n}^{n-1} + \Pi_{N-2n}^{n-1} + \ldots, \tag{25}$$

которое получается последовательным применением соотношения (23). А после этого достаточно заметить, что $\Pi_N^1 = 1$ (любое натуральное число можно единственным образом разложить на слагаемые, равные 1). Пользуясь соотношением (25), последовательно вычисляем Π_N^2 для всех N, потом Π_N^3 и т. д.

---

[1] Значение Π_0^n мы полагаем равным 1.

Заметим, что число всех способов разложения N на слагаемые равно Π_N^N — слагаемые, большие чем N, в разложение войти не могут. Точно так же число способов разложения N на различные слагаемые равно Φ_N^N.

Диаграммная техника

Первоначальные методы доказательства теорем о разбиениях чисел были весьма сложны. Как и во многих вопросах математики, привлечение геометрических соображений упростило и сделало наглядными доказательства теорем.

Каждое разбиение числа N на слагаемые можно изобразить в виде диаграммы. Каждая строка диаграммы состоит из стольких точек, сколько единиц входит в соответствующее слагаемое. Например, разбиению $7=1+1+2+3$ соответствует диаграмма (рис. 10).

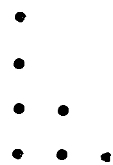
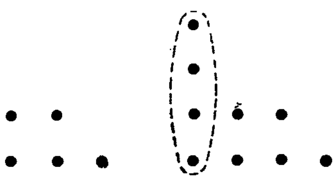


Рис. 10.

Так как порядок слагаемых в разбиении не играет роли, то строки можно расположить так, чтобы их длина не убывала сверху вниз. Кроме того, первые точки каждой строки будем изображать в одном столбце. Такие диаграммы будем называть *нормальными*.



$m=4$

Рис. 11.

С помощью диаграмм легко доказывать различные свойства разбиений. Докажем, например, что *число способов разбиения числа N на не более чем m слагаемых такое же, как и способов разбиения $N+m$ на m слагаемых.* В самом деле, диаграмма, изображающая разбиение числа N на не более чем m слагаемых, состоит из N точек, расположенных не более чем в m строках. Добавим к каждой из таких диаграмм столбец, состоящий из m точек (см. рис. 11, где изображено это преобразование для $N=5$, $m=4$). Получится диаграмма, состоящая из $N+m$ точек, расположенных в m строках. Обратно, отнимая первый столбец от каждой диаграммы, состоящей из $N+m$ точек, расположенных в виде

m строк, мы получим диаграмму из N точек, причем число строк будет не больше, чем m.

Мы установили взаимно однозначное соответствие между диаграммами двух видов, откуда следует, что число этих диаграмм одинаково. Тем самым утверждение доказано.

Несколько сложнее доказывается следующая теорема (теорема Эйлера):

Число способов разбиения N на не более чем m слагаемых равно числу способов разбиения $N+\frac{m(m+1)}{2}$ на m неравных частей.

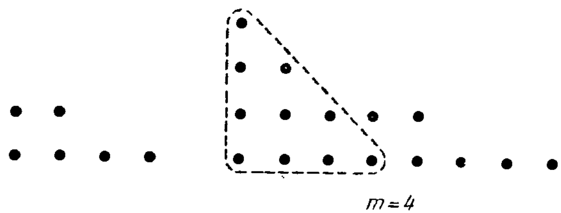


Рис. 12.

Каждое разбиение числа N на не более чем m слагаемых изображается в виде диаграммы из N точек, содержащей не более чем m строк. Добавим к каждой такой диаграмме равнобедренный прямоугольный треугольник из m строк, после чего приведем диаграмму к нормальному виду (рис. 12), где изображено такое преобразование при $N=6$, $m=4$. Так как число точек в треугольнике равно $\frac{m(m+1)}{2}$, то мы получим диаграмму из $N+\frac{m(m+1)}{2}$ точек, содержащую m строк. При этом все строки диаграммы будут различной длины. В самом деле, длины строк исходной диаграммы не убывают, а длины строк треугольника все время увеличиваются. Значит, после добавления треугольника получается диаграмма, длины строк которой все время растут. Следовательно, строк одинаковой длины быть не может.

Обратно, из каждой диаграммы для разбиения $N+\frac{m(m+1)}{2}$ на m неравных слагаемых можно удалить равнобедренный прямоугольный треугольник, содержащий m строк, и получить диаграмму для разбиения N на не более чем m слагаемых. Это соответствие между диаграммами двух видов показывает, что число их одинаково. Тем самым наше утверждение доказано.

Двойственные диаграммы

Диаграммы можно преобразовывать так, чтобы строки стали столбцами, а столбцы — строками. Для этого повернем диаграмму на 90° и приведем ее к нормальному виду. На рис. 13 изображено такое преобразование диаграмм.

Ясно, что если повторить это преобразование, то снова получим исходную диаграмму. Поэтому все диаграммы распадаются на двойственные друг другу пары

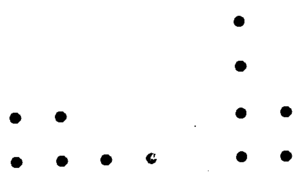


Рис. 13.

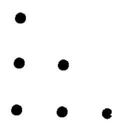


Рис. 14.

диаграмм (впрочем, надо иметь в виду, что некоторые диаграммы двойственны сами себе, такова, например, диаграмма на рис. 14).

Пользуясь двойственностью диаграмм, можно сравнивать разбиения, подчиненные некоторым ограничениям на величину слагаемых с разбиениями, подчиненными ограничениям на число слагаемых. Например, имеет место такое утверждение:

Число разбиений N на слагаемые, не превосходящие n, равно числу разбиений N на не более чем n слагаемых.

В самом деле, диаграммы для разбиения N на слагаемые, не превосходящие n, состоят из N точек, причем в каждой строке не более n точек. Значит, в этой диаграмме не более чем n столбцов. Но тогда двойственная диаграмма имеет не более чем n строк, то есть соответствует разбиению числа N на не более чем n слагаемых.

Точно так же доказывается, что число разбиений N на n слагаемых равно числу разбиений на слагаемые, не превосходящие n, хотя бы одно из которых равно n.

Далее, рассмотрим разбиения числа N на четные слагаемые. Эти разбиения изображаются диаграммами, строки которых содержат четное число точек. Но тогда в двойственной диаграмме будет четное количество слагаемых каждого вида (рис. 15). Отсюда выводим такое утверждение.

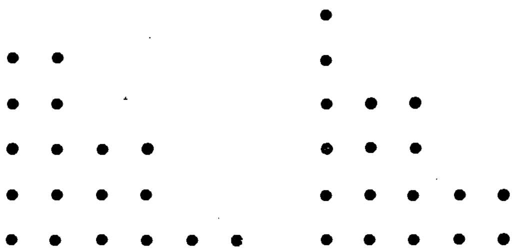


Рис. 15.

Количество разбиений N на четные слагаемые равно количеству разбиений, в которые каждое из чисел входит четное число раз (разумеется, некоторые слагаемые могут совсем не входить, поскольку нуль — четное число).

Точно так же доказывается, что

Количество разбиений N на нечетные слагаемые равно количеству разбиений, в которые каждое из слагаемых, кроме наибольшего, входит четное число раз, а наибольшее слагаемое — нечетное число раз.

Формула Эйлера [1]

В связи с некоторыми вопросами разбиений Эйлер изучил бесконечное произведение

$$A = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots \qquad (26)$$

Раскроем в этом произведении первые 22 скобки. Мы получим выражение

$$A = [1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \ldots] \times \\ \times (1-x^{23})(1-x^{24})\ldots(1-x^n)\ldots$$

---

1) Этот пункт может быть пропущен при первом чтении.

где точками обозначены слагаемые, содержащие x в более высокой степени, чем 22. Мы не стали выписывать эти члены, так как после умножения квадратной скобки на $1-x^{23}$, $1-x^{24}$, .. и т. д. они изменятся. Выписанные же члены больше меняться не будут. Поэтому если раскрыть все скобки, то получится бесконечный ряд, первые члены которого имеют вид

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\ldots \quad (27)$$

Видно, что после двух отрицательных членов идут два положительных, потом снова два отрицательных и т. д. Однако закон, по которому идут показатели этих членов, уловить гораздо труднее. Путем длительного экспериментирования Эйлер установил следующее правило:

Если превратить бесконечное произведение

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots$$

в ряд, то в этом ряду будут отличны от нуля лишь слагаемые вида $(-1)^k x^{\frac{3k^2 \pm k}{2}}$, *где k — натуральное число.*

Теорема Эйлера имеет большое значение не только в теории разбиений на слагаемые, но и в теории эллиптических функций и других вопросах математического анализа. Однако большинство доказательств этой теоремы довольно сложны. Мы приведем сейчас весьма простое геометрическое доказательство теоремы Эйлера. Предварительно нам понадобится сформулировать эту теорему на языке теории разбиений.

При раскрытии скобок в выражении (26) слагаемые $\pm x^N$ встретятся столько раз, сколькими способами можно разбить число N на различные слагаемые. При этом x^N появляется, если число слагаемых четно, а $-x^N$, если это число нечетно. Например, разбиению $12=5+4+$ $+2+1$ соответствует слагаемое $(-x^5)(-x^4)(-x^2)(-x)=$ $=x^{12}$, а разбиению $12=5+4+3$ — слагаемое

$$(-x^5)(-x^4)(-x^3)=-x^{12}.$$

Таким образом, коэффициент при x^N в разложении (27) равен разности между количеством разбиений на четное число различных слагаемых и количеством разбиений на нечетное число различных слагаемых. Теорема Эйлера утверждает:

Если число N не может быть представлено в виде $N=\frac{3k^2 \pm k}{2}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. А для чисел вида $N=\frac{3k^2 \pm k}{2}$, разность между этими количествами равна $(-1)^k$ (то есть если k четно, то на 1 больше разбиений на четное число слагаемых, а если k нечетно, то на 1 больше разбиений на нечетное число слагаемых).

Чтобы доказать теорему Эйлера, покажем один способ превращения диаграммы с четным числом строк в

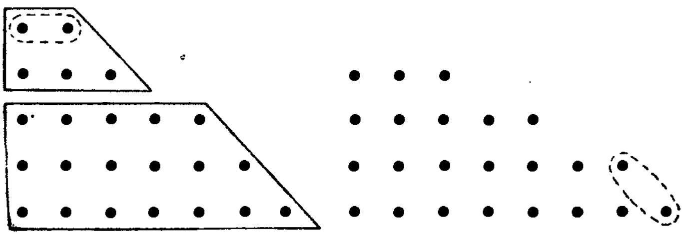


Рис. 16.

диаграмму из стольких же точек с нечетным числом строк, и обратно. Так как мы рассматриваем лишь разбиения на различные слагаемые, то диаграммы таких разбиений состоят из нескольких трапеций, поставленных друг на друга. Обозначим число точек в верхней строке диаграммы через m, а число строк нижней трапеции через n. На рис. 16 изображена диаграмма, для которой $m=2$ и $n=3$.

Предположим, что диаграмма содержит не менее двух трапеций, причем $m \leqslant n$. В этом случае отбросим первую строку и удлиним последние m строк нижней трапеции на одну точку. После этого общее число точек не изменится, все строки окажутся различной длины, но четность числа строк изменится. Точно такое же преобразование можно сделать, если диаграмма состоит из одной трапеции, причем $m \leqslant n-1$. На рис. 17а изображен результат такого преобразования диаграммы.

Пусть теперь диаграмма содержит не менее двух трапеций, причем $m>n$. Тогда от каждой строки последней трапеции возьмем по одной точке и составим из них первую строку новой диаграммы. Это можно сделать, так как $m>n$ и поэтому составленная строка короче первой строки исходной диаграммы. Кроме того, так как мы взяли все строки нижней трапеции, то в получившейся диаграмме все строки будут иметь различную

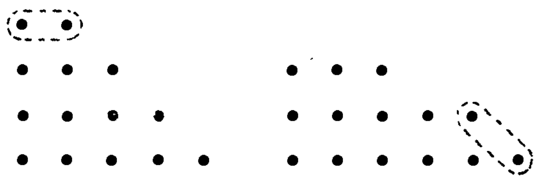


Рис. 17а.

длину. Наконец, новая диаграмма содержит столько точек, что и исходная, но четность числа строк изменилась — новая диаграмма содержит еще одну строку. Точно такое же преобразование допускают диаграммы, состоящие из одной трапеции, если $n \geqslant m-2$. На

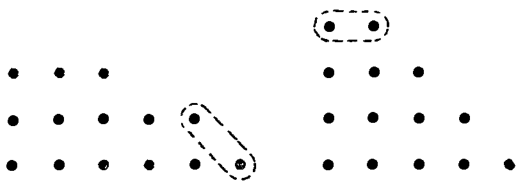
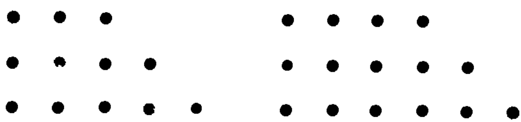


Рис. 17б.

рис. 17б изображен результат описанного преобразования диаграммы. Сравнивая рисунки 17а и 17б, мы убеждаемся, что *описанные преобразования взаимно обратны — если сначала сделать одно из них, а потом второе, то снова получим исходную диаграмму.*

Таким образом, *диаграммы разбиений числа N, допускающие одно из этих преобразований, распадаются на одинаковое число диаграмм с четным и нечетным числом строк.* Осталось выяснить, какие же диаграммы не допускают описанного преобразования. Ясно, что эти диаграммы состоят из одной трапеции, причем для них либо $m=n$, либо $m=n+1$. В первом случае диаграмма содержит $\frac{3n^2-n}{2}$ точек, а во втором $\frac{3n^2+n}{2}$ точек (рис. 18).

Приведенные рассуждения показывают, что если N не является числом вида $\frac{3n^2 \pm n}{2}$, то оно имеет поровну разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. Если $N = \frac{3n^2 \pm n}{2}$ и n — четное число, то остается



$m=n=3$ $\qquad$ $m=4,\ n=3$

Рис. 18.

одна диаграмма, не допускающая преобразования и имеющая четное число строк. Поэтому разбиений на четное число слагаемых окажется на 1 больше, чем на нечетное число слагаемых. Если же $N = \frac{3n^2 \pm n}{2}$ и n — нечетное число, то на 1 больше будет разбиений на нечетное число слагаемых. Теорема доказана.

ГЛАВА V

КОМБИНАТОРИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Человек бродит по городу

На рис. 19 изображен план города (примерно такой вид имеет план Канберры — столицы Австралии). *В этом городе $n \times k$ прямоугольных кварталов, разделенных $n-1$ «горизонтальными» и $k-1$ «вертикальными» улицами. Путник хочет попасть из пункта A в пункт B*

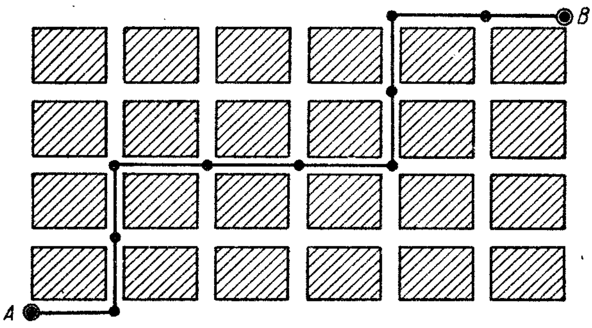
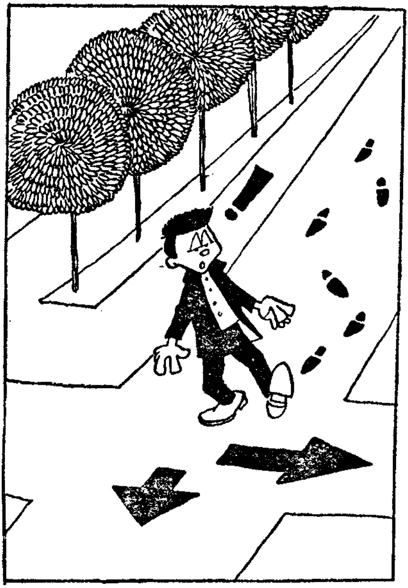


Рис. 19.

кратчайшим путем, то есть двигаясь все время или «слева направо», или «снизу вверх». Сколькими путями он может добраться из A в B?

Ясно, что, каким бы путем ни шел путник, он пройдет через $k+n$ перекрестков (считая точку A, но не считая точку B). На каждом перекрестке он может идти или направо, или вверх. В соответствии с этим все перекрестки делятся на два класса. Сопоставим тем перекресткам, где он выбирает путь вправо, цифру 0, а тем, где он идет вверх, цифру 1. Так как число перекрестков



первого класса должно равняться k, а второго n (иначе путник не попадет в точку B), то получим перестановку, состоящую из k нулей и n единиц. Каждой такой перестановке в свою очередь соответствует некоторый путь. На рис. 19 изображен путь, соответствующий перестановке 0110001100.

Но число перестановок из k нулей и n единиц равно

$$P(k, n) = C_{n+k}^{n} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}. \quad (1)$$

Тому же самому равно и число кратчайших путей из A в B.

Арифметический квадрат

Перемещения путника по городу напоминают движения шахматной ладьи. Возьмем бесконечную шахматную доску, ограниченную с двух сторон перпендикулярными лучами, и поставим в углу этой доски ладью. Мы будем предполагать, что ладья движется по доске или сверху вниз, или слева направо. Комбинируя друг с другом эти движения, можно получить различные пути, ведущие из углового поля в данное поле доски. Напишем на каждом поле доски число этих путей. Ясно, что написанное число зависит от координат поля, от того, в какой вертикали и горизонтали оно находится.

Нам будет удобно нумеровать вертикали и горизонтали числами 0, 1, 2, ..., n, ... При такой нумерации угловое поле получает координаты (0, 0). Используя результат, полученный при решении предыдущей задачи, убеждаемся, что на пересечении k-й вертикали и n-й горизонтали стоит число C_{n+k}^{k} (чтобы попасть на это поле, надо сделать k ходов вправо и n ходов вниз). Подставим вместо C_{n+k}^{k} их числовые значения. Мы получим тогда таблицу 3. Эту таблицу называют *арифметическим квадратом*. Познакомимся подробнее с его свойствами. Внимательное изучение арифметического квадрата показывает, что каждое написанное в нем число получается по следующему закону: *оно равно сумме числа, написанного над ним, и числа, написанного слева от него.* Например, над числом $10=4+6$ написано 4, а слева от него 6.

ТАБЛИЦА 3

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	196	...
1	6	21	56	126	252	...
...	...	...	...	...	...	...

Полученное правило легко вытекает из доказанного ранее (см. стр. 53) равенства $C_{n}^{k}=C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1}$. Но его можно доказать и непосредственно. В самом деле, на поле $(k,\ n)$ ладья может попасть с одного из полей $(k-1,\ n)$ или $(k,\ n-1)$. Поэтому в силу правила суммы число способов попасть на поле $(k,\ n)$ равно сумме числа способов достигнуть поле $(k-1,\ n)$ и числа способов достигнуть поле $(k,\ n-1)$. А это и есть наше утверждение.

Из соотношения $C_{n+k}^{k}=C_{n+k}^{n}$ вытекает, что арифметический квадрат симметричен относительно диагонали, проходящей через угол (мы будем называть ее *главной диагональю*). Впрочем, это свойство также легко доказать геометрически — попасть на пересечение n-й вертикали и k-й горизонтали и на пересечение k-й вертикали и n-й горизонтали можно одинаковым числом способов.

Фигурные числа

При вычислении элементов таблицы 3 мы пользовались как элементами предыдущей строки, так и элементами предыдущего столбца. Но достаточно было использовать элементы предыдущей строки. В самом деле, мы доказали на стр. 54 формулу (15)

$$C_{n+k}^{k}=C_{n+k-1}^{k}+C_{n+k-2}^{k-1}+\ \dots\ +C_{n-1}^{0}.$$

Эта формула показывает, что каждый элемент нашей таблицы равен сумме элементов предыдущей строки, начиная с первого и кончая элементом, стоящим непосредственно над вычисляемым. Таким образом, последовательно складывая элементы $(n-1)$-й строки, мы вычисляем один за другим элементы n-й строки.

Такой метод вычисления таблицы 3 связан с восходящим к древнегреческим математикам Пифагору и Никомаху учением о фигурных числах. Дело в том, что числа 1, 2, 3, ... можно изображать строками из одной,

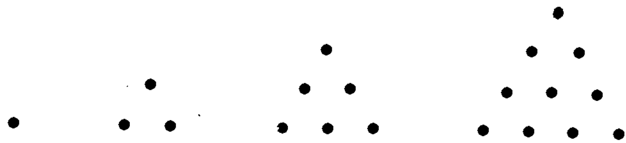


Рис. 20.

двух, трех и т. д. точек, а эти строки объединить в треугольники (рис. 20). Тогда число точек в каждом треугольнике будет равно соответствующему числу во второй строке таблицы [1]). Поэтому числа 1, 3, 6, 10, 15, 21 и т. д. называют *треугольными числами*. k-е треугольное число равно

$$C_{k+1}^2 = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Точно так же треугольники, изображенные на рис. 20, можно объединять в пирамиды. Число точек в каждой пирамиде равно соответствующему числу в третьей строке нашей таблицы. Поэтому числа 1, 4, 10, 20, 35 и т. д. называют *пирамидальными*. Их общий вид такой:

$$C_{k+2}^3 = \frac{(k+2)(k+1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Чтобы дать аналогичное истолкование числам следующих строк, надо было бы перейти к пирамидам в пространствах высшего числа измерений.

Учение о фигурных числах на протяжении многих столетий привлекало математиков, и было в свое время важным разделом теории чисел.

---

[1]) Напомним, что строки нумеруются числами 0, 1, 2, ..., и потому верхняя строка — нулевая, следующая за ней — первая и т. д.

Арифметический треугольник

Возьмем теперь доску, ограниченную только с одной стороны, и поставим на поле A нулевой горизонтали шашку (рис. 21). Двигаясь по правилам шашечной игры, эта шашка может попасть на любое поле в области, ограниченной прямыми AB и AC. Снова напишем на каждом поле число способов, которыми на него может попасть наша шашка. Мы видим, что написанные числа совпадают, по сути дела, с числами арифметического квадрата и только иначе расположены.

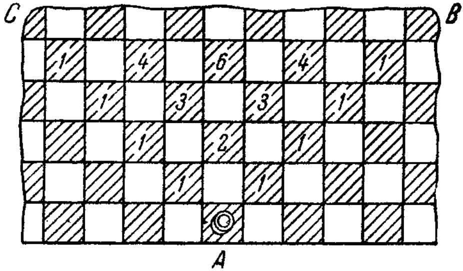


Рис. 21.

Это не удивительно: если повернуть доску на 45°, то шашка будет двигаться по горизонтальным и вертикальным линиям, и задача превратится в задачу о движениях ладьи. Числа на рис. 21 обычно изображают в виде треугольника (таблица 4). Здесь каждое число равно сумме двух чисел предыдущей строки, между которыми оно находится. Этот треугольник часто называют треугольником Паскаля. Однако еще до Паскаля (1623—1662) его знал итальянский математик Тарталья[1]) (1500—1557). А за много лет до Тарталья этот треугольник встречается в работах арабских математиков

ТАБЛИЦА 4

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

[1]) Тарталья был замечательным математиком. Кроме арифметического треугольника, он открыл формулу решения для кубических уравнений. Он рассказал эту формулу другому итальянскому математику Д. Кардано, взяв с него клятву никому не открывать доверенный секрет. Но Кардано вскоре опубликовал это решение в своем учебнике алгебры, и потому формулу для решения кубических уравнений совершенно несправедливо называют «формулой Кардано».

Гиясэддина и Омара Хайяма. Поэтому мы будем называть его просто арифметическим треугольником.

Арифметический треугольник можно записать и в таком виде:

ТАБЛИЦА 5

1	0	0	0	0	0	...
1	1	0	0	0	0	...
1	2	1	0	0	0	...
1	3	3	1	0	0	...
1	4	6	4	1	0	...
1	5	10	10	5	1	...
...	...	...	...	...	...	...

Здесь на пересечении k-й вертикали и n-й горизонтали стоит число C_n^k (напомним, что крайние линии имеют нулевые номера). Каждое число треугольника равно сумме числа, стоящего выше его, и числа, расположенного в предыдущей строке наискосок влево. Например, над числом 4 в четвертой строке стоит число 1, а наискосок влево от 4 стоит число 3, и $4=1+3$.

Отметим еще следующие особенности арифметического треугольника — *все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, а нулевой столбец состоит из единиц*. Числа, стоящие в n-й строке арифметического треугольника, то есть числа C_n^k при фиксированном n, являются коэффициентами в разложении бинома $(1+x)^n$ по степеням x. Поэтому их называют также *биномиальными коэффициентами*. Мы остановимся на этом подробнее в главе VII.

Расширенный арифметический треугольник

Арифметический треугольник занимает лишь часть плоскости. Распространим его на всю плоскость, сохраняя сформулированное выше правило — *каждый элемент равен сумме элемента, стоящего над ним, и элемента предыдущей строки, стоящего наискосок влево.* При этом, так как нулевой столбец арифметического треугольника состоит из единиц, то и в расширенном треугольнике заполним этот столбец единицами.

Применяя указанное правило к элементам нулевого столбца, видим, что перед ним должен быть столбец, заполненный нулями. Но тогда и все дальнейшие столбцы влево состоят из одних нулей. Поэтому надо лишь выяснить, что стоит над нулевой строкой треугольника. Наискосок от первого элемента нулевой строки стоит число 1, а сам этот элемент равен нулю. Поэтому над ним надо написать —1 $(1+(-1)=0)$. Но тогда, чтобы получить нуль и на втором месте первой строки, надо поставить над ним число 1. Продолжая далее, увидим, что над первой строкой появилась новая строка, состоящая из чередующихся чисел 1 и —1. Точно так же заполняются остальные строки вверх.

В результате получаем таблицу, часть которой изображена ниже:

ТАБЛИЦА 6

... 0	1	—5	15	—35	70	—196	...
... 0	1	—4	10	—20	35	—56	...
... 0	1	—3	6	—10	15	—21	...
... 0	1	—2	3	—4	5	—6	...
... 0	1	—1	1	—1	1	—1	...
... 0	1	0	0	0	0	0	...
... 0	1	1	0	0	0	0	...
... 0	1	2	1	0	0	0	...
... 0	1	3	3	1	0	0	...
... 0	1	4	6	4	1	0	...
... 0	1	5	10	10	5	1	...
....	...	...	...	...	...	...	...

Рассматривая часть этой таблицы, расположенную выше нулевой строки, убеждаемся, что она отличается от арифметического квадрата на стр. 123 лишь знаками членов. Именно, на пересечении $(-n)$-й горизонтали и k-й вертикали стоит число $(-1)^{k-1} C_{n+k-1}^{k}$. Разумеется, рассмотрение части таблицы не может служить доказательством того, что это утверждение верно для всех строк и всех столбцов. Чтобы убедиться в его справедливости, заметим, что

$$(-1)^{k-1}C_{n+k-1}^{k}+(-1)^{k-2}C_{n+k-2}^{k-1}=$$
$$=(-1)^{k-1}\left[C_{n+k-1}^{k}-C_{n+k-2}^{k-1}\right]=(-1)^{k-1}C_{n+k-2}^{k}$$

(см. формулу (11) на стр. 53). Полученное равенство показывает, что в таблице, составленной из чисел $(-1)^{k-1}C_{n+k-1}^{k}$, k-й элемент строки $n+1$ равен сумме элементов $(-n)$-й строки с номерами k и $k-1$. Иначе, правило заполнения таблицы из чисел $(-1)^{k-1}C_{n+k-1}^{k}$ совпадает с правилом заполнения таблицы для расширенного арифметического треугольника. Так как, кроме того, эти таблицы имеют одинаковые сроки с номером — 1 и нулевой столбец, то все их элементы совпадают.

В исходном арифметическом треугольнике на пересечении n-й горизонтали и k-й вертикали стояло число C_n^k. В расширенном треугольнике на пересечении $(-n)$-й горизонтали и k-й вертикали стоит число $(-1)^{k-1}C_{n+k-1}^{k}$. Поэтому можно обобщить символ C_n^k на отрицательные значения n, положив

$$C_{-n}^{k}=(-1)^{k-1}C_{n+k-1}^{k}. \qquad (2)$$

Как показывает таблица 6, обобщение символа C_n^k на отрицательные значения k тривиально: при $k<0$ имеем $C_n^k=0$ (см. также стр. 202). Кроме того, $C_n^k=0$, если $0\leqslant n<k$.

Шахматный король

Арифметический треугольник можно получить следующим образом. Поставим в левом верхнем углу таблицы «одностороннего шахматного короля», то есть фигуру, которая может ходить только на одно поле вперед и на одно поле наискосок вправо. Написав на каждом поле число способов, которыми эта фигура может дойти до этого поля, мы получим арифметический треугольник.

Заменим теперь «одностороннего короля» обычным шахматным королем, ограничив его свободу передвижения лишь одним условием: король должен всегда идти вперед, на следующую горизонталь. Для того чтобы король мог использовать свои новые возможности, надо расширить доску, взять доску, ограниченную только с одной стороны прямой линией. На рис. 22 изображена такая доска, на каждом поле которой указано число способов, которым может достигнуть его король, первоначально находившийся на поле A.

Разберемся, как составлена новая таблица. Предположим, что для каждого поля горизонтали $n-1$ уже

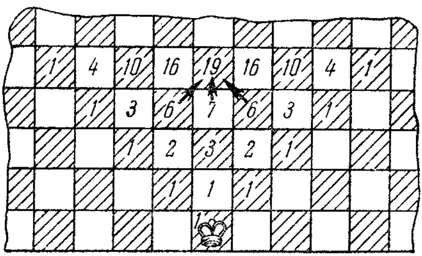


Рис. 22.

найдено, сколькими способами может попасть на него царственный скиталец. Найдем, сколькими способами достигаются поля n-й горизонтали. На каждое из этих полей король может попасть с одного из соседних полей горизонтали $n-1$ (лежащего прямо над ним, наискосок вправо и наискосок влево, см. рис. 22). По правилу суммы получаем следующий результат:

Число способов, которыми шахматный король может достигнуть некоторого поля n-й горизонтали, равно сумме чисел способов, которыми достигаются три соседних поля горизонтали $n-1$.

При этом считается, что для поля, на котором король стоит в самом начале, есть один такой способ (не двигаться с места), а для остальных полей нулевой горизонтали таких способов совсем нет.

Обобщенный арфиметический треугольник

Треугольник на рис. 22 можно изобразить иначе, сдвинув все числа вправо так, чтобы таблица уместилась на части доски, ограниченной двумя перпендикулярными лучами.

В этом случае правило получения каждого числа таблицы формулируется так:

Каждое число равно сумме трех чисел предыдущей строки: стоящего прямо над ним и двух соседних слева. При этом в углу стоит число 1, а все остальные элементы нулевой строки равны нулю.

Например, число 16 в четвертой строке является суммой чисел 3, 6 и 7 третьей строки.

Совершенно ясно, как дальше обобщать арифметический треугольник. Возьмем какое-нибудь натуральное число m и будем заполнять таблицу по такому правилу: в левом верхнем углу поставим число 1, а во все остальные клетки нулевой строки — нули. А после этого в каждую клетку первой строки запишем сумму m элементов нулевой строки: стоящего прямо над искомым и $m-1$ элементов влево от него. Ясно, что тогда первые m элементов первой строки окажутся равными единице, а остальные — нулю (если при составлении суммы не хватает слагаемых, то недостающие слагаемые считаются равными нулю; иными словами, таблицу дополняют слева таблицей из нулей (см. таблицу 7).

ТАБЛИЦА 7

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0	0	0
0	0	1	3	6	7	6	3	1	0	0
0	0	1	4	10	16	19	16	10	4	1
. . .		. . . .								

Совершенно так же заполняются остальные строки таблицы: каждый элемент таблицы равен сумме m элементов предыдущей строки: стоящего прямо над ним и $m-1$ стоящих влево. В частности, арифметический треугольник получается при $m=2$, треугольник на таблице 7 при $m=3$.

Для того чтобы различать друг от друга арифметические треугольники с различными значениями m, мы будем называть их *m-арифметическими треугольниками.* Элемент m-арифметического треугольника, стоящий на пересечении n-й горизонтали и k-й вертикали, обозначим через $C_m(k, n)$. Из определения m-арифметического треугольника вытекает, что числа $C_m(k, n)$ удовлетворяют соотношению

$$C_m(k, n) = C_m(k, n-1) + C_m(k-1, n-1) + \ldots \\ \ldots + C_m(k-m+1, n-1). \quad (3)$$

При этом выполняются условия

$$C_m(k, 1) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant k \leqslant m-1; \\ 0, & \text{если } k \geqslant m. \end{cases}$$

Обобщенные арифметические треугольники и m-ичная система счисления

Числа $C_m(k, n)$ связаны с m-ичной системой счисления. Именно, $C_m(k, n)$ *равно количеству n-значных чисел в m-ичной системе счисления, у которых сумма цифр равна k.* При этом термин «n-значные» мы понимаем в широком смысле, допуская и числа, начинающиеся с одного или нескольких нулей. Например, 001 215 рассматривается как шестизначное число, сумма цифр которого равна 9.

Чтобы доказать сформулированное утверждение, обозначим количество n-значных чисел в m-ичной системе счисления, сумма цифр которых равна k, через $B_m(k, n)$. Мы покажем, что числа $B_m(k, n)$ удовлетворяют тому же соотношению (3), что и $C_m(k, n)$. В самом деле, последняя цифра числа в m-ичной системе счисления может принимать одно из значений $0, 1, \ldots, m-1$. В соответствии с этим сумма цифр $(n-1)$-значного числа, получающегося из n-значного отбрасыванием последней цифры, может принимать одно из значений $k, k-1, \ldots, k-m+1$. В силу правила суммы получаем отсюда, что

$$B_m(k, n) = B_m(k, n-1) + \ldots + B_m(k-m+1, n-1). \quad (4)$$

Кроме того, ясно, что $B_m(k, 1)$ равно 1, если $0 \leqslant k \leqslant m-1$, и 0 в противном случае (в m-ичной системе счисления есть только одно однозначное число с суммой цифр k, если $0 \leqslant k \leqslant m-1$, и ни одного такого числа, если $k \geqslant m$). Таким образом, первая строка таблицы чисел $B_m(k, n)$ совпадает с первой строкой таблицы чисел $C_m(k, n)$. Так как законы (3) и (4) составления этих таблиц тоже совпадают, то для любых k и n имеем $B_m(k, n) = C_m(k, n)$.

Некоторые свойства чисел $C_m(k, n)$

Числа $C_m(k, n)$ обладают рядом свойств, напоминающих свойства чисел C_k^n. Это не удивительно, поскольку в силу построения арифметического треугольника имеем $C_2(k, n) = C_k^n$. В первую очередь отметим, что $C_m(k, n)$ *отлично от нуля лишь при* $0 \leqslant k \leqslant n(m-1)$. Это сразу следует из того, что каждая следующая строка m-арифметического треугольника длиннее предыдущей на $m-1$.

Далее, покажем, что числа $C_m(k, n)$ обладают следующим свойством симметрии:

$$C_m(k, n) = C_m(n(m-1) - k, n). \tag{5}$$

Для этого сопоставим каждому n-значному числу в m-ичной системе счисления «дополнительное число», получающееся путем замены каждой цифры ее дополнением до $m-1$. Например, в 7-ричной системе счисления дополнительным к 3 140 216 будет число 3 526 450. Ясно, что если сумма цифр данного числа равнялась k, то сумма цифр дополнительного числа равна $n(m-1)-k$. Поэтому n-значных чисел с суммой цифр k столько же, сколько и с суммой цифр $n(m-1)-k$. Но это и выражено равенством (5).

Так как общее количество n-значных чисел в m-ичной системе счисления равно m^n (см. стр. 12), то имеет место соотношение

$$C_m(0, n) + C_m(1, n) + \ldots + C_m(n(m-1), n) = m^n. \tag{6}$$

Докажем теперь соотношение

$$C_m(0, l)\,C_m(k, n-l) + C_m(1, l)\,C_m(k-1, n-l) + \ldots$$
$$\ldots + C_m(k, l)\,C_m(0, n-l) = C_m(k, n), \tag{7}$$

где $0 \leqslant l \leqslant n$. Для этого разобьем все n-значные числа с суммой цифр, равной k, на классы. К s-му классу отнесем числа, сумма первых l цифр которых равна s. Тогда сумма последних $n-l$ цифр будет равна $k-s$. По правилу произведения получаем, что в s-й класс входит $C_m(s, l)\,C_m(k-s, n-l)$ чисел. Так как общее количество n-значных чисел с суммой цифр k равно $C_m(k, n)$, то по правилу суммы получаем соотношение (7).

В частности, при $l=1$ соотношение (7) проводит к равенству (3) (так как $C_m(k, 1)=1$ при $0 \leqslant k \leqslant m-1$ и $C_m(k, 1)=0$ при $k \geqslant m$).

Наконец, покажем, что имеет место равенство

$$C_n^0 C_{m-1}(k-n, n) + C_n^1 C_{m-1}(k-n+1, n-1) + \ldots$$
$$\ldots + C_n^s C_{m-1}(k-n+s, n-s) + \ldots + C_n^n C_{m-1}(k, 0) = C_m(k, n). \tag{8}$$

Для этого разобьем все n-значные числа в m-ичной системе счисления, сумма цифр которых равна k, на классы. К s-му классу, $0 \leqslant s \leqslant n$, отнесем числа, в m-ичной записи которых встречается ровно s нулей.

Найдем, сколько чисел входит в s-й класс. Каждое число s-го класса может быть выбрано в два этапа. Сначала выберем места, на которых стоят нули. Так как рассматриваются n-значные числа, а количество нулей равно s, то это может быть сделано C_n^s способами. После этого вычеркнем все нули и уменьшим каждую оставшуюся цифру на 1. Мы получим $(n-s)$-значное число, записанное цифрами $0, 1, \ldots, m-2$ (то есть число в $(m-1)$-ичной системе счисления), сумма цифр этого числа равна $k-(n-s)=k-n+s$. Количество таких чисел равно $C_{m-1}(k-n+s, n-s)$. Из проведенных рассуждений видно, что в s-й класс входит $C_n^s C_{m-1}(k-n+s,\ n-s)$ чисел. Так как общее количество n-значных чисел, имеющих сумму цифр k, равно $C_m(k, n)$, то в силу правила суммы получаем соотношение (8).

Так как $C_2(k, n) = C_k^n$, то из соотношения (8) следует, что

$$C_3(k, n) = C_n^0 C_{k-n}^n + C_n^1 C_{k-n+1}^{n-1} + \ldots + C_n^n C_k^0.$$

Повторно применяя формулу (8), получаем выражение $C_m(k, n)$ через биномиальные коэффициенты.

Шашка в углу

Возьмем снова бесконечную шахматную доску, ограниченную двумя перпендикулярными лучами, и поставим в углу этой доски шашку (рис. 23)[1]. На каждом поле доски напишем число способов, которыми шашка

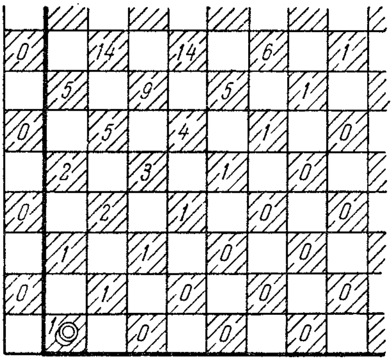


Рис. 23.

может на него попасть. Результат будет отличаться от полученного ранее, когда доска была ограничена только одной прямой линией (см. стр. 125), так как теперь шашка не может перейти вертикальную границу. Поэтому число возможностей попасть на какое-нибудь поле стало меньше: идя на это поле, шашка не должна забирать слишком влево. Например, на поля, находящиеся вдоль границы, шашка может попасть только с одного

[1]) На рисунке изображен нужный для дальнейшего добавочный столбец.

поля, а не с двух, как это было на стр. 125. На стр. 125 говорилось, что число, написанное на каждом черном поле, равно сумме двух чисел, написанных на соседних черных полях предыдущей горизонтали. Чтобы этот закон сохранил силу и сейчас, надо провести еще одну вертикаль слева от границы, и на каждом ее черном поле написать нуль (попасть на это поле невозможно).

Подсчитаем, сколькими же способами можно попасть на некоторое поле с учетом сделанного ограничения. Каждый путь можно записать в виде последовательности нулей и единиц — нуль означает ход влево, а единица — ход вправо. При этом число нулей и единиц определяется только полем, на которое должна попасть шашка. Например, любой путь из 4 нулей и 6 единиц приводит к полю на пересечении второй вертикали и десятой горизонтали (как и выше, мы считаем, что крайние линии имеют нулевой номер).

Однако не любая последовательность нулей и единиц допустима. Например, нельзя начинать с нуля — этот ход сразу выведет шашку за пределы доски. Допустимые последовательности обладают следующим характеристическим свойством: перед каждым местом стоит не меньше единиц, чем нулей — в каждый момент движения число ходов вправо должно быть не меньше, чем число ходов влево, иначе шашка окажется за пределами доски.

Итак, нам надо найти, *сколько последовательностей из k нулей и m единиц обладает* следующим свойством: перед каждым местом последовательности число единиц не меньше, чем число нулей. Но эту задачу мы уже решили на стр. 83 (только там вместо нулей и единиц брали буквы р и п). Там было показано, что число таких последовательностей равно $\frac{m-k+1}{m+1}C_{m+k}^{k}$. Это число и надо написать на пересечении горизонтали $m+k$ и вертикали $m-k$.

Поставим теперь шашку не в угол, а на q-е поле нулевой горизонтали (вопреки шашечным правилам это поле может быть и белым). Теперь у шашки появилось q запасных ходов влево. Этот случай соответствует рассмотренной на стр. 84 задаче, в которой кассир заранее запасся q полтинниками. Используя полученный там ответ, приходим к выводу: если на некоторое поле шашка попадает, сделав k ходов влево и m ходов вправо, $0 \leqslant k \leqslant m+q$, то число различных способов попасть на

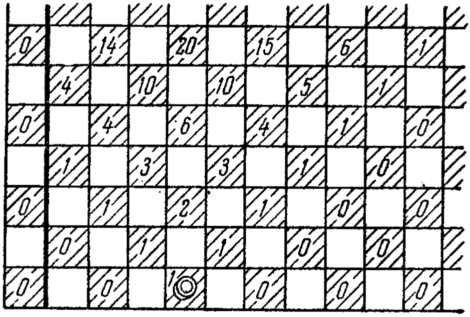


Рис. 24.

это поле равно $C_{m+k}^{k}-C_{m+k}^{k-q+1}$. На рис. 24 изображена таблица, возникающая при $q=3$.

Арифметический пятиугольник

Повернем доску на 45°. Тогда шашка будет двигаться по вертикальным и горизонтальным прямым, а граница будет наклонена к этим прямым под углом в 45°. Поэтому задача о шашке в углу примет следующий вид:

В углу шахматной доски стоит ладья. Сколькими способами она может попасть на поле (m, k), *двигаясь кратчайшим образом и не пересекая во время движения диагональ доски* (вставать на поля диагонали ладья может)?

Из доказанного выше следует, что при $k \leqslant m$ число этих способов равно $\frac{m-k+1}{m+1} C_{m+k}^{k}$, а при $k>m$ — нулю.

Если же перенести диагональ на q полей вправо, то ответ примет вид: при $0 \leqslant k \leqslant m+q$ число способов равно $C_{m+k}^{k}-C_{m+k}^{k-q-1}$, а при $k>m+q$ — нулю.

Если шахматная доска конечна, то отличные от нуля числа этой таблицы заполняют пятиугольник (рис. 25).

Его называют *арифметическим пятиугольником.* Это же название сохраняют и для таблицы, получающейся на бесконечной доске, ограниченной двумя перпендикулярными лучами.

Основное свойство арифметического пятиугольника совпадает с основным свойством арифметического квадрата: каждое число арифметического пятиугольника равно сумме двух чисел: стоящего выше него и стоящего слева от него. Отличие же арифметического пятиугольника от арифметического квадрата состоит в том, что диагональ пятиугольника, расположенная на q линий выше главной диагонали, состоит из нулей (этим пятиугольник напоминает арифметический треугольник, рассмотренный на стр. 126).

1	1	1	1	0	0	0
1	2	3	4	4	0	0
1	3	6	10	14	14	0
1	4	10	20	34	48	48

Рис. 25.

Возьмем теперь доску, ограниченную двумя перпендикулярными лучами, и проведем на ней не одну, а две линии, параллельные главной диагонали — на q линий выше ее и на s линий ниже ее. Будем считать обе эти линии «запретными» для ладьи и напишем на каждом поле доски число способов, которыми ладья может дойти до этого поля. Получающаяся таблица носит название *арифметического шестиугольника.* На рис. 26 изображена такая таблица при $q=4$, $s=3$.

1	1	1	1	1	0	0
1	2	3	4	5	5	0
1	3	6	10	15	20	20
1	4	10	20	35	55	75
0	4	14	34	69	124	199
0	0	14	48	117	241	340

Рис. 26.

Арифметический шестиугольник можно истолковать также следующим образом. Возьмем шахматную доску, ограниченную отрезком длины в $s+q$ полей и двумя перпендикулярными к нему лучами, и поставим шашку на поле, удаленное от одного угла на s полей, а от другого угла на q полей. Напишем на каждом поле число способов, которыми может достигнуть его наша шашка. Повернув эту таблицу на 45°, получим арифметический шестиугольник.

Геометрический способ доказательства свойств сочетаний

В главе II были доказаны некоторые свойства сочетаний. Покажем, как вывести эти свойства более наглядно, используя геометрические соображения.

Сначала покажем, как вывести соотношение

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \quad (9)$$

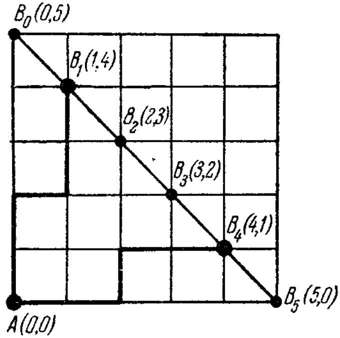


Рис. 27.

Для этого рассмотрим все пути, ведущие из точки $A(0, 0)$ в точки вида $B_k(k, n-k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$ (рис. 27).

Эти пути распадаются на классы в зависимости от того, в какой точке B_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, они заканчиваются. В точку же B_k ведет $P(k, n-k) = C_n^k$ путей. Нам осталось подсчитать общее число рассматриваемых путей. Каждый такой путь имеет длину n. Его можно зашифровать n-последовательностью из нулей и единиц, сопоставив горизонтальным отрезкам нули, а вертикальным — единицы. Но число всех n-последовательностей из нулей и единиц равно 2^n. Тем самым доказано соотношение (9).

На стр. 123 мы уже доказали геометрически соотношения

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad \text{и} \quad C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Этим способом можно доказать и более сложные равенства. Проведем вертикальную прямую с абсциссой m, $0 \leqslant m \leqslant k$. (рис. 28). Каждый путь, ведущий из точки $A(0, 0)$ в точку $B(k, n)$, пересекает эту прямую, причем, быть может, частично проходит по этой прямой. Разобьем множество всех путей из A в B на классы, причем в s-й класс отнесем пути, для которых *последней* общей точкой с прямой $x=m$ является точка $D_s(m, s)$.

Подсчитаем теперь, сколько путей, соединяющих точки A и B, относится к s-му классу. Каждый такой путь состоит из пути, идущего от A к D_s, отрезка от $D_s(m, s)$ до $D'_s(m+1, s)$ (ведь D_s — последняя точка прямой $x=m$ на этом пути!) и пути от $D'_s(m+1, s)$ до точки $B(k, n)$. По формуле (1) из точки $A(0, 0)$ в точку $D_s(m, s)$ ведет $P(m, s)$ путей. Из точки же $D'_s(m+1, s)$ в точку $B(k, n)$ ведет $P(k-m-1, n-s)$ путей (чтобы попасть из D'_s в B, надо пройти $k-m-1$ единичных

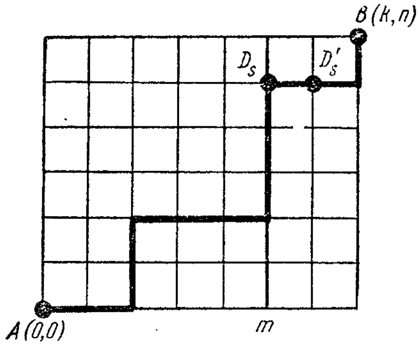


Рис. 28.

отрезков вправо и $n-s$ единичных отрезков вверх). По правилу произведения общее число путей s-го класса равно

$$P(m, s)P(k-m-1, n-s).$$

Число же всех путей из A в B равно $P(k, n)$. Поэтому по правилу суммы получаем, что

$$P(k, n) = P(m, 0)P(k-m-1, n) + P(m, 1)P(k-m-1, n-1) + \ldots + P(m, n)P(k-m-1, 0).$$

Это равенство можно записать так:

$$C_{n+k}^{k} = C_{m}^{m}C_{n+k-m-1}^{k-m-1} + C_{m+1}^{m}C_{n+k-m-2}^{k-m-1} + \ldots + C_{m+n}^{m}C_{k-m-1}^{k-m-1} \tag{10}$$

(ср. формулу (24) на стр. 57).

В частности, при $m=k-1$ получаем соотношение

$$C_{n+k}^{k} = C_{k-1}^{k-1} + C_{k}^{k-1} + \ldots + C_{k+s-1}^{k-1} + \ldots + C_{k+n-1}^{k-1}. \tag{11}$$

Заметим, что соотношения (10) и (11) можно вывести, многократно применяя соотношение $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Докажите самостоятельно геометрическим путем формулу (23) на стр. 56:

$$C_{n+k}^n = C_{n+k-s}^n C_s^0 + C_{n+k-s}^{n-1} C_s^1 + \ldots$$
$$\ldots + C_{n+k-s}^{n-m} C_s^m + \ldots + C_{n+k-s}^{n-s} C_s^s, \quad (12)$$

где $0 \leqslant s \leqslant k$, $0 \leqslant s \leqslant n$.

Для этого надо провести прямую через точки $D(k-s, n)$ и $E(k, n-s)$ и разбить множество всех путей из $A(0, 0)$ в $B(k, n)$ на классы в соответствии с тем, через какую точку этой прямой они проходят. Формула (12) лишь обозначениями отличается от формулы (23) на стр. 56.

Этим геометрическим способом можно доказать еще целый ряд соотношений для чисел C_{n+k}^k, разбивая различным образом на классы пути, которые ведут из $A(0, 0)$ в $B(k, n)$.

Для того чтобы доказать аналогичным образом соотношения между числами $P(n_1, \ldots, n_k)$ (см. формулы (27), (28) на стр. 58), пришлось бы использовать многомерную геометрию. Мы не будем здесь этого делать.

Заметим, что и соотношения между числами C_n^k, выведенные на стр. 86—89, тоже допускают геометрическое истолкование. Для этого надо взять доску с проведенной на ней параллельно главной диагонали линией и рассматривать лишь пути, не пересекающие эту линию (но, быть может, имеющую с ней общие точки). Разбивая множество этих путей на классы различными способами, приходим к установленным в главе III формулам.

Само решение задачи об очереди в кассу может быть очень просто истолковано геометрически. Процесс прохождения очереди можно изобразить графически, ставя каждому полтиннику в соответствие горизонтальный, а каждому рублю — вертикальный отрезок. Из условия задачи ясно, что этот график не должен пересекать главную диагональ. Сделанные при решении преобразования (добавление в очередь одного человека с полтинником и замена полтинников на рубли, а рублей на полтинники) приобретают простой геометрический смысл: они сводятся к отражению графика прохождения очереди в прямой, параллельной главной диагонали и отстоящей от нее на единицу длины. Мы предоставляем читателю перевести на «геометрический язык» рассуждения, которые были использованы при решении этой задачи.

Случайные блуждания

Разобранные выше задачи о движении шахматных фигур тесно связаны с важными для физики проблемами случайных блужданий. Рассмотрим следующую задачу, предлагавшуюся в 1945 г. на VIII Московской математической олимпиаде.

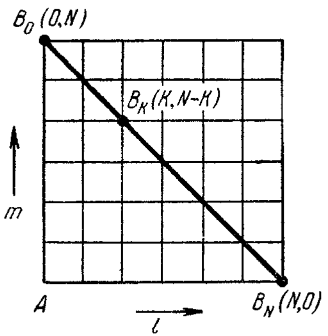


Рис. 29.

Имеется сеть дорог (рис. 29). *Из точки A выходят 2^N человек. Половина идет по направлению l, половина — по направлению m. Дойдя до первого перекрестка, каждая группа разделяется: половина идет по направлению l, половина — по направлению m. Такое же разделение происходит на каждом перекрестке. Где окажутся эти люди после того, как они пройдут N отрезков, и сколько людей окажется после этого на каждом перекрестке?*

Так как общее число пройденных каждым человеком отрезков равно N, то очевидно, что все они попадут в точки B_k с координатами вида $(k, N-k)$, где k принимает значения $0, 1, \ldots, N$. Все эти точки расположены на прямой, проходящей через точки $B_0(0, N)$ и $B_N(N, 0)$ (см. рис. 29).

Теперь нам надо узнать, сколько человек придет в точку $B_k(k, N-k)$. Для этого зашифруем все пути, ведущие из $A(0, 0)$ в точки $B_k(k, N-k)$, $k=0, 1, \ldots, N$, с помощью нулей и единиц. Мы получим всевозможные N-последовательности, составленные из нулей и единиц. А таких последовательностей, как мы знаем, 2^N, то есть столько же, сколько человек вышло из точки A. Отсюда легко вытекает, что каждый путь пройдет ровно один человек. Поэтому в каждую точку $B_k(k, N-k)$ придет ровно столько людей, сколько кратчайших путей ведет в нее из точки A. А число этих кратчайших путей мы уже сосчитали. Оно равно

$$P(k, N-k) = C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

Итак, в точку $B_k(k, N-k)$ придет $\frac{N!}{k!(N-k!)}$ людей. Это число равно k-му числу N-й строки арифметического треугольника.

Броуновское движение

Решенной выше задаче можно придать следующую, по сути дела эквивалентную, форму

Из точки O на прямой Ox выходит 2^N человек. Из них половина идет направо, половина — налево. Через 1 час каждая группа снова делится пополам, и половина идет направо, а половина — налево. Такое разделение происходит каждый час. Сколько человек придет в каждую точку через N часов после выхода?

Будем считать, что за один час они проходят половину единицы пути. Рассуждая точно так же, как при решении предыдущей задачи, получаем следующий результат: через N часов участники прогулки окажутся в точках $B_k\left(k - \frac{N}{2}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N$ (точка O — начало отсчета). При этом в точку B_k придет $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ человек.

Маловероятно, чтобы люди ходили описанным выше образом (впрочем, в фольклорном варианте этой задачи в точке O находится питейное заведение..). Однако в некоторых задачах физики подобные блуждания возникают естественным образом. Именно, такое блуждание является простейшей моделью так называемого броуновского движения, совершаемого частицами под ударами молекул.

Рассмотрим частицы, которые могут передвигаться только по прямой линии. Так как удары молекул носят случайный характер, то в первом приближении можно считать, что за единицу времени половина частиц сместится на $^1/_2$ единицы длины вправо, а половина — на

$^1/_2$ единицы влево (на самом деле процесс значительно сложнее и возможны передвижения на различные отрезки). Поэтому если взять 2^N частиц, находящихся в самом начале в точке O, то они будут перемещаться примерно так, как было описано в нашей задаче. Такое распространение частиц называют в физике *диффузией*. Решенная нами задача о случайном блуждании толпы людей позволяет найти, как распределяются диффундирующие частицы через некоторое время после начала диффузии. Именно, через N единиц времени частицы распределятся по следующему закону: в точке $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$ окажется $C_N^k=\frac{N!}{k!\,(N-k)!}$ частиц.

Как уже отмечалось, числа C_N^k являются элементами N-й строки арифметического треугольника. При ином характере диффузии получатся числа N-й строки m-арифметического треугольника. Именно, пусть вначале в точке O было m^N частиц. Их разделили на m равных частей и поместили в m точек на прямой Ox, причем расстояние между соседними точками равно 1, и эти точки симметричны относительно точки O. После этого каждая часть делится таким же образом (разумеется, если делится часть, находящаяся в какой-то точке B, то частицы помещают в m точек, симметричных относительно точки B). После N шагов частицы будут находиться в точках B_k с координатами $k-\frac{m-1}{2}N$, где $k=0,\ 1,\ \ldots,\ (m-1)N$. При этом в точке B_k будет $C_m(N,\ k)$ частиц.

При больших значениях N подсчет числа частиц в каждой точке становится слишком сложным. Но, как часто бывает в математике, с ростом сложности закон распределения начинает приближаться к простой предельной закономерности, причем эта закономерность тем точнее описывает распределение частиц, чем больше их число, чем сложнее точная закономерность.

В теории вероятностей доказывают, что при больших значениях N на отрезке $\left[x-\frac{a}{2},\ x+\frac{a}{2}\right]$, где a мало по сравнению с N, окажется примерно

$$\frac{12am^N}{\sqrt{2\pi}\,N\,(m^2-1)}\exp\left[-\frac{72x^2}{N^2\,(m^2-1)^2}\right]^{1)}$$

¹) Через $\exp x$ мы обозначаем e^x.

части. Это утверждение можно истолковать так. Построим ступенчатую линию, высота которой в точке $B_k\left(k-\frac{m-1}{2}N\right)$ равна $C_m(N, k)$. Уменьшим все абсциссы полученной линии в $\frac{N(m^2-1}{12)}$ раз, а все ординаты в $\frac{12am^N}{N(m^2-1)}$ раз. Тогда, если N велико, получится ступенчатая линия, очень мало отличающаяся от графика функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Эту функцию ввел в теорию вероятностей великий немецкий математик К. Гаусс. Поэтому ее называют *функцией Гаусса.* Она играет важную роль не только в вопросах диффузии газов, но и в теории теплопроводности, теории ошибок и т. д.

У Шемаханской царицы

Вернемся снова к блужданиям толпы людей по оси Ox. Только теперь будем считать, что слева от точки O, из которой они вышли, простираются... владения Шемаханской царицы, сыгравшей столь печальную роль в судьбе незадачливого царя Додона и его сыновей. Как читатель, вероятно, помнит, те, кто попадали в ее царство, обратно уже не возвращались. Мы тоже будем считать, что те, кто попадают на левую половину оси, там и остаются. Требуется выяснить, сколько человек останется у Шемаханской царицы и где окажутся остальные люди через N часов после выхода из точки O.

Оказывается, эта задача сводится к рассмотренной нами выше задаче об очереди в кассу кинотеатра. В самом деле, рассмотрим передвижения некоторого человека, вышедшего из точки O. Эти передвижения можно задать последовательностью чисел 1 и —1: каждому передвижению направо соответствует число 1, а каждому движению налево — число —1. Если в этой последовательности имеется k единиц, то он k раз передвинется вправо и $N-k$ раз влево. В результате он должен был бы оказаться в точке $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$[1]. Однако это случится лишь в том случае, если наш путник по дороге

[1]) Напомним, что каждый раз он сдвигается на $^1/_2$ единицы длины.

не попадет в Шемаханское царство. А в это царство он попадает, если в какой-то момент времени число передвижений влево окажется больше числа передвижений вправо.

Если вместо передвижений вправо и влево рассматривать людей, имеющих полтинники и рубли, то можно сказать, что попадание к Шемаханской царице соответствует тому, что очередь в кассу задержится. Значит, число людей, попавших в точку $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, равно числу случаев, когда очередь, в которой стоят k обладателей полтинников и $N-k$ обладателей рублей, пройдет без задержки. А мы знаем, что это число отлично от нуля, лишь если $k \geqslant N-k$. В этом случае оно равно (см. стр. 83)

$$A(N-k, k)=C_N^{N-k}-C_N^{N-k-1}=\frac{N!\,(2k-N+1)}{(N-k)!\,(k+1)!}.$$

Итак, через N часов после выхода 2^N человек из точки O в точку $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, где $2k \geqslant N$, придут $C_N^{N-k}-C_N^{N-k-1}$ человек. Теперь уже нетрудно подсчитать, сколько человек попадет в Шемаханское царство. Для этого сложим сначала числа $C_N^{N-k}-C_N^{N-k-1}$ от $k=E\left(\frac{N}{2}\right)+1$ [1]) до N. Мы получим, что $C_N^{N-E\left(\frac{N}{2}\right)-1}$ человек в Шемаханское царство не попали. А так как всего из точки O вышло 2^N человек, то во владения Шемаханской царицы попали $2^N-C_N^{N-E\left(\frac{N}{2}\right)-1}$ человек.

Если бы Шемаханское царство начиналось не слева от точки O, а слева от точки O_1 (с абсциссой $-\frac{q}{2}$), то результат получился бы несколько иной. Именно, оказалось бы, что в точках $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, $k \geqslant \frac{N-q}{2}$, находится $C_N^{N-k}-C_N^{N-k-q-1}$ человек, остальные находятся во владениях Шемаханской царицы. Это сразу вытекает из результатов задачи на стр. 84.

---

[1]) См. сноску на стр. 89.

Поглощающая стенка

Мы уже говорили, что задачи о случайных блужданиях весьма важны для физики — они являются простейшими моделями диффузии частиц. Задача о Шемаханской царице тоже имеет простое физическое истолкование — просто слева от точки O находится стенка из материала, поглощающего частицы. Если стенка вплотную примыкает к точке O, возникает случай, рассмотренный вначале. Если же она отстоит от точки O на $q/2$ единиц длины, то получается задача, разобранная в конце предыдущего пункта.

В те времена, когда основным практическим применением комбинаторики и теории вероятностей была теория азартных игр, задача о случайных блужданиях с поглощением формулировалась иначе. Речь шла об «играх на разорение». Представим себе двух игроков, играющих, например, в орел и решку. После каждой партии проигравший уплачивает выигравшему один рубль. Участник, проигравший все деньги, прекращает игру. Надо было выяснить вероятность различных исходов игры, если вначале у одного игрока было p рублей, а у другого q рублей. Очевидна связь этой задачи с задачей о диффузии частиц в области, ограниченной с двух сторон поглощающими стенками.

Блуждания по бесконечной плоскости

До сих пор мы рассматривали либо блуждания ладьи, имеющей право передвигаться лишь вверх или вправо, либо, что, по сути дела, то же самое, блуждания по бесконечной прямой. Изучим теперь случай, когда ладья перемещается в любом направлении по бесконечной доске. Иными словами, решим следующую задачу:

Шахматная ладья находится в начале на поле $O\,(0, 0)$ *бесконечной во всех направлениях шахматной доски. Сколькими способами она может попасть на поле* $A\,(p, q)$, *сделав* N *ходов* (мы считаем, что за один ход ладья перемещается на соседнее поле)?

В силу соображений симметрии достаточно рассмотреть случай, когда $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. Если бы ладья двигалась кратчайшим путем, то она достигла бы поля $A(p, q)$ за $p+q$ ходов. Поэтому должно выполняться неравенство $N \geqslant p+q$. Отличие N-ходового пути от кратчайшего состоит в том, что ладья делает несколько уничтожающих друг друга ходов, причем очевидно, что число этих ходов четно. Поэтому $N-p-q$ является четным числом. Положим $N-p-q=2k$.

Предположим, что было сделано s ходов влево. Тогда число ходов вправо равно $p+s$ и для передвижений по вертикали остается $N-p-2s=q+2(k-s)$ ходов. Из них надо сделать $k-s$ ходов вниз и $q+k-s$ ходов вверх. Поэтому s должно удовлетворять неравенству $0 \leqslant s \leqslant k$.

Для каждого значения s, удовлетворяющего этому неравенству, мы получаем несколько путей, состоящих из s ходов влево, $p+s$ ходов вправо, $k-s$ ходов вниз и $q+k-s$ ходов вверх. Эти ходы могут выполняться в любой последовательности, а потому число комбинаций равно $P(s,\ p+s,\ k-s,\ q+k-s)$. Отсюда следует, что полное число T путей, ведущих к полю $A(p,\ q)$ за N ходов, равно

$$T=\sum_{s=0}^{k} P(s,\ p+s,\ k-s,\ q+k-s)=$$

$$=\sum_{s=0}^{k} \frac{(p+q+2k)!}{s!\,(p+s)!\,(k-s)!\,(q+k-s)!}.$$

Преобразуем полученное выражение. Для этого заметим, что

$$C_{p+q+2k}^{p+k}=\frac{(p+q+2k)!}{(p+k)!\,(q+k)!},\quad C_{p+k}^{k-s}=\frac{(p+k)!}{(k-s)!\,(p+s)!},$$

$$C_{q+k}^{s}=\frac{(q+k)!}{s!\,(q+k-s)!}$$

и потому

$$T=C_{p+q+2k}^{p+k}\sum_{s=0}^{k} C_{p+k}^{k-s}\,C_{q+k}^{s}.$$

Но в правой части равенства стоит сумма попарных произведений $C_r^l C_n^m$, у которых нижние индексы постоянны, а сумма верхних равна k. Применяя формулу (23) со стр. 56, получаем, что

$$T = C_{p+q+2k}^{p+k} C_{p+q+2k}^{k},$$

или, поскольку $p+q+2k=N$,

$$T = C_N^{p+k} C_N^k.$$

Общая задача о ладьях

Перейдем к новому циклу комбинаторных задач на шахматной доске. Эти задачи связаны с подсчетом числа расположений двух шахматных фигур (королей, ферзей и т. д.), при которых они могут бить друг друга. Ясно, что тем самым подсчитывается и число расположений, при которых эти фигуры не могут бить друг друга: ведь общее число расположений двух фигур сразу подсчитывается по формуле для размещений.

Некоторые задачи такого типа мы уже решили — на стр. 34 была разобрана задача о 8 ладьях на обыкновенной шахматной доске. Обобщим эту задачу и возьмем $m \times n$ доску, то есть доску из m горизонталей и n вертикалей. Мы хотим узнать, сколькими способами можно расставить на $m \times n$ доске k ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

Ясно, что для разрешимости задачи нужно, чтобы выполнялись условия $k \leqslant m$ и $k \leqslant n$ — иначе какие-то две ладьи попадут на одну и ту же горизонталь или вертикаль. Пусть эти условия выполнены. Тогда расстановку ладей можно осуществить в два этапа. Сначала выберем горизонтали, на которых будут стоять ладьи. Так как общее число горизонталей равно m, а надо выбрать k горизонталей, то выбор можно сделать C_m^k способами. Точно так же вертикали, на которых будут стоять ладьи, можно выбрать C_n^k способами. Поскольку выбор вертикалей не зависит от выбора горизонталей, то по правилу произведения получаем $C_m^k C_n^k$ способов выбора линий, где стоят ладьи.

Однако этим еще дело не кончено. Ведь k горизонталей и k вертикалей пересекаются по k^2 клеткам. Сдвигая, если понадобится, эти клетки, мы получим новую доску из k горизонталей и k вертикалей. А мы уже знаем, что на такой доске k ладей можно расставить $k!$

способами (так, чтобы они не могли бить друг друга). Поэтому общее число требуемых расположений ладей равно

$$C_m^k C_n^k k! = \frac{n!\,m!}{k!\,(n-k)!\,(m-k)!}. \tag{13}$$

Например, 3 ладьи на обычной шахматной доске можно расставить

$$\frac{8!\,8!}{3!\,5!\,5!} = 17\,696.$$

При $k=m=n$ формула (13) дает ответ $n!$ в соответствии со сказанным на стр. 35.

Если снять ограничение, что ладьи не могут бить друг друга, то ответ был бы иной. Именно, нам надо было бы выбрать из $m \times n$ клеток любые k клеток. А это можно сделать

$$C_{mn}^k = \frac{(mn)!}{k!\,(mn-k)!}$$

способами. А если бы k ладей различались друг от друга, то полученные ответы надо было бы умножить на $k!$.

Симметричные расстановки

Усложним теперь задачу о ладьях и потребуем, чтобы они не только не били друг друга, но еще симметрично стояли на доске. При этом получается много задач в зависимости от того, какое налагается условие симметрии.

Са́мым простым является случай, когда ладьи стоят симметрично относительно центра доски. Обозначим через G_n число решений задачи в случае, когда n ладей стоят на доске из n горизонталей и n вертикалей. Мы покажем сейчас, что

$$G_{2n} = 2nG_{2n-2}. \tag{14}$$

Пусть доска состоит из $2n$ горизонталей и $2n$ вертикалей. Ладья, стоящая на первой вертикали, может занять любое из $2n$ полей этой вертикали. По условию, этим определяется положение ладьи, стоящей на последней вертикали,— она должна расположиться симметрично с первой ладьей относительно центра доски.

Вычеркнем первую и последнюю вертикали и горизонтали, занятые ладьями (так как число горизонталей четно, выбрасываемые ладьи не могут стоять на одной и той же горизонтали). Мы получаем доску из $2n-2$ вертикалей и $2n-2$ горизонталей. Ясно, что каждому симметричному расположению ладей на новой доске соответствует симметричное расположение ладей на исходной доске. Отсюда и вытекает, что $G_{2n}=2nG_{2n-2}$ (еще раз напомним, что первая ладья могла занять любое из $2n$ полей первой вертикали).

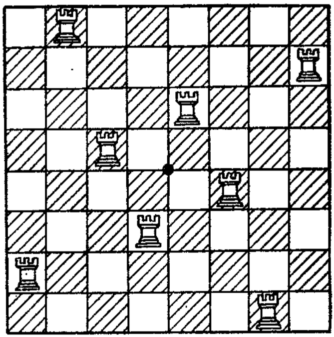


Рис. 30.

Пользуясь формулой (14), находим, что $G_{2n}=2^n n!$

А теперь рассмотрим доску из $2n+1$ вертикалей и $2n+1$ горизонталей. В этом случае есть поле, не имеющее симметричных, — центральное поле доски. На этом поле обязательно должна стоять ладья. Вычеркивая центральные вертикаль и горизонталь, получаем симметричное расположение $2n$ ладей на $2n\times 2n$ доске. Значит, имеет место равенство

$$G_{2n+1}=G_{2n}=2^n n!. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь несколько более сложную задачу о расположениях, не меняющихся при повороте доски на 90° (на рис. 30 изображено одно из таких расположений на 8×8 доске). Пусть доска имеет $4n$ вертикалей и $4n$ горизонталей и число ладей тоже $4n$. В этом случае ладья, стоящая на первой вертикали, может занять любое из полей, кроме угловых, то есть любое из $4n-2$ полей (на угловое поле ставить ладью нельзя, потому что после поворота на 90° получились бы две ладьи, которые бьют друг друга). Этой ладье соответствуют еще три ладьи, стоящие соответственно на последней горизонтали, последней вертикали и первой горизонтали (они получаются из выбранной поворотами на 90°, 180° и 270°). Вычеркивая горизонтали и вертикали, на которых стоят эти ладьи, получаем расположение ладей на

$(4n-4)\times(4n-4)$ доске, обладающее той же симметрией. Поэтому имеет место равенство

$$R_{4n}=(4n-2)\,R_{4n-4},$$

где R_n — число решений задачи для $n\times n$ доски. Отсюда ясно, что

$$R_{4n}=2^n(2n-1)(2n-3)\ldots 1. \qquad (16)$$

Число решений задачи для $(4n+1)\times(4n+1)$ доски такое же, как и для $4n\times 4n$ доски — ведь на $(4n+1)\times\times(4n+1)$ доске одна ладья обязательно стоит в центре и можно вычеркнуть центральные горизонталь и вертикаль. Поэтому

$$R_{4n+1}=R_{4n}. \qquad (17)$$

А для $(4n+2)\times(4n+2)$ и $(4n+3)\times(4n+3)$ досок число решений равно нулю. В самом деле, для каждой ладьи возможны два случая — либо она стоит в центре доски, либо не стоит в центре. Во втором случае ладья входит в четверку ладей, переходящих друг в друга при поворотах доски на 90°. Поэтому общее число ладей должно иметь вид или $4n$ (когда на доске нет центрального поля) или $4n+1$. Тем самым мы доказали, что $R_{4n+2}=R_{4n+3}=0$.

Наконец, найдем число расположений n ладей, симметричных относительно диагонали [1]. Обозначим число решений задачи на $n\times n$ доске через Q_n. Тогда имеет место соотношение

$$Q_n=Q_{n-1}+(n-1)\,Q_{n-2}. \qquad (18)$$

В самом деле, ладья на первой вертикали либо стоит в нижнем левом углу, либо нет. В первом случае вычеркиваем первую вертикаль и первую горизонталь и получаем симметричное расположение $n-1$ ладей на $(n-1)\times(n-1)$ доске. Число таких расположений равно Q_{n-1}. Во втором случае для данной ладьи найдется другая, симметричная с ней относительно выбранной диагонали. Вычеркиваем вертикали и горизонтали, на которых стоят эти ладьи. Мы получим симметричное расположение $n-2$ ладей на $(n-2)\times(n-2)$ доске.

[1]) Мы берем диагональ, проходящую через нижнее левое угловое поле.

Поскольку число таких расположений равно Q_{n-2}, а ладью можно поставить на $n-1$ поле первой вертикали, то получаем $(n-1)Q_{n-2}$ способов. Отсюда и следует соотношение (18).

Имеет место равенство

$$Q_n = 1 + C_n^2 + \frac{1}{1 \cdot 2} C_n^2 C_{n-2}^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2 + \ldots \quad (19)$$

Оно выводится путем разбиения всех расположений ладей на классы — в s-й класс относятся расположения, при которых s пар ладей не попадают на диагональ.

Совершенно так же показывается, что число B_n расположений n ладей на $n \times n$ доске, таких что ладьи не бьют друг друга и стоят симметрично относительно обеих диагоналей, удовлетворяет соотношениям

$$B_{2n} = 2B_{2n-2} + (2n-2) B_{2n-4}, \quad B_{2n+1} = B_{2n}.$$

Два коня

Сколькими способами можно расставить на $m \times n$ доске белого и черного коней так, чтобы они не могли бить друг друга?

Решение этой задачи осложняется тем, что на разных полях доски конь имеет различное число ходов — если $m \geqslant 5$ и $n \geqslant 5$, то в углу доски всего два хода, на одних крайних полях — три хода, на других — четыре хода, а в центре — 8 ходов. Это связано с тем, что конь имеет ходы различных типов: он может пойти на одно поле вперед и на два вверх или на два поля назад и на одно вниз и т. д. Всего у коня 8 видов ходов, которые можно задать, указав, сколько полей он проходит в горизонтальном направлении и сколько в вертикальном. Эти ходы имеют, таким образом, следующий вид: (2, 1), (1, 2), (—1, 2), (—2, 1), (—2, —1), (—1, —2), (1, —2), (2, —1).

Для того чтобы справиться с возникшим осложнением, будем считать, что конь является объединением 8 фигур, каждая из которых имеет ходы только одного типа. Посмотрим, сколькими способами можно поставить на доску (2, 1)-коня так, чтобы он держал под обстрелом какое-то поле доски. Ясно, что он может стоять на любой вертикали, кроме последних двух, и любой горизонтали, кроме самой последней. Значит, вертикаль можно выбрать $n-2$ способами, а горизонталь $m-1$ способами, а всего получаем $(m-1)(n-2)$ способов поставить белого (2, 1)-коня. В силу симметрии ясно, что столько же способов поставить любого из белых $(\pm 2, \pm 1)$-коней так, чтобы он мог бить черного коня. А для белых $(\pm 1, \pm 2)$-коней число способов равно $(m-2)(n-1)$. Отсюда следует, что общее число способов расстановки двух коней, при которых они бьют друг друга, выражается формулой

$$4[(m-1)(n-2)+(m-2)(n-1)] = \\ = 2[(2m-3)(2n-3)-1].$$

Если бы ставили коней одного и того же цвета так, чтобы они могли защищать друг друга, то получили бы вдвое меньше способов (из-за возможности переставить коней). А число способов расставить двух коней разного цвета так, чтобы они не могли бить друг друга, равно

$$m^2n^2-9mn+12m+12n-16.$$

(Двух коней можно поставить на $m \times n$ доску $mn(mn-1)$ способами.)

Составители шахматных задач иногда вводят «сказочные» фигуры, которые ходят не так, как обычные. Введем и мы новую фигуру, которую назовем *(p, q)-конем*, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. Ход этой фигуры состоит в перемещении на p полей в горизонтальном направлении и q полей в вертикальном направлении. Например, обычный конь является объединением (1, 2)- и (2, 1)-коней. Рассуждая точно так же, как и ранее, выводим, что если $0<p \leqslant n$, $0<q \leqslant m$, то на $m \times n$-доске можно $4(n-p)(m-q)$ способами поставить двух (p, q)-коней разного цвета так, чтобы они били друг друга. Если же p или q равно нулю, то получается вдвое меньше способов. Число способов уменьшается вдвое и в случае, когда кони одинакового цвета.

Любую шахматную фигуру можно рассматривать как объединение нескольких (p, q)-коней при разных значениях p и q. Например, шахматный король является объединением (0, 1)-, (1, 0)- и (1, 1)-коней. Поэтому двух шахматных королей разного цвета можно поставить на $m\times n$-доску

$$2[n(m-1)+(n-1)m+2(n-1)(m-1)] =$$
$$= 8mn-6m-6n+4$$

способами, чтобы они били друг друга. Следовательно, поставить их, чтобы они не били друг друга, можно $m^2n^2-9mn+6m+6n-4$ способами.

Шахматный слон является объединением $(1, 1)$-, $(2, 2)$-, ..., (p, p)-коней, где p — наименьшее из чисел $m-1$, $n-1$. Предположим для определенности, что $m\leqslant n$. Тогда $p=m-1$, и двух слонов разного цвета можно поставить

$$4[(n-1)(m-1)+(n-2)(m-2)+\ldots+(n-m+1)\cdot 1]$$

способами, чтобы они били друг друга. Раскрывая скобки и используя формулы для суммы натуральных чисел от 1 до $m-1$ и суммы квадратов этих чисел, получаем, что число способов можно записать так: $\frac{2m(m-1)(3n-m-1)}{3}$. При $m\geqslant n$ надо поменять роли m и n. В частности, если $m=n$, то получаем $\frac{2m(m-1)(2m-1)}{3}$ способов.

Для ладей проще подсчитать число способов расстановки иначе. Белую ладью можно поставить на любое из mn полей. После этого она держит под боем $m+n-2$ поля, на любое из которых можно поставить черную ладью. Поэтому всего получаем $mn(m+n-2)$ способов расстановки, при которых ладьи бьют друг друга.

Так как ферзя можно рассматривать как объединение ладьи и слона, то на $m\times n$-доске при $m\leqslant n$ можно

$$\frac{2}{3}m(m-1)(3n-m-1)+mn(m+n-2)$$

способами поставить двух ферзей так, чтобы они били друг друга. При $m=n$ это выражение принимает вид $\frac{2}{3}m(m-1)(5m-1)$. Предоставляем читателю подсчитать, сколькими способами можно расставить эти фигуры так, чтобы они не могли бить друг друга.

ГЛАВА VI

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

При решении многих комбинаторных задач мы уже пользовались методом сведения данной задачи к задаче, касающейся меньшего числа предметов. Таким путем была, например, выведена формула для числа размещений с повторениями (стр. 11), этим способом были решены почти все задачи на разбиения в главе IV. Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется *методом рекуррентных соотношений* (от латинского recurrere — возвращаться). Пользуясь рекуррентным соотношением, можно свести задачу об n предметах к задаче об $n-1$ предметах, потом к задаче об $n-2$ предметах и т. д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить. Во многих случаях удается получить из рекуррентного соотношения явную формулу для решения комбинаторной задачи.

Например, в главе II (см. стр. 33) мы вывели формулу $P_n = n!$ для числа перестановок n элементов с помощью формулы для числа размещений без повторений. Но ту же формулу можно вывести и иначе, найдя сначала рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет P_n.

Пусть у нас есть n предметов $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Любую их перестановку можно получить так: взять некоторую перестановку предметов $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и присоединить к ней элемент a_n. Ясно, что элемент a_n может занять различные места. Его можно поставить в самое начало, между первым и вторым элементами перестановки, между вторым и третьим, можно поставить и в самый конец. Число различных мест, которые может занять элемент a_n, равно n, и потому из каждой перестановки элементов $a_1, \ldots, a_{n-1}$ получается n перестановок элементов $a_1, \ldots,$

$\ldots, a_{n-1}, a_n$. Но это означает, что перестановок из n элементов в n раз больше, чем перестановок из $n-1$ элементов. Тем самым установлено рекуррентное соотношение

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Пользуясь этим соотношением, последовательно выводим, что

$$P_n = nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = n(n-1)\ldots 2P_1.$$

Но $P_1 = 1$, так как из одного элемента можно сделать лишь одну перестановку. Поэтому

$$P_n = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!.$$

Таким образом, мы снова получили формулу $P_n = n!$.

Много рекуррентных соотношений встречалось нам при решении задач на разбиения, задач о фигурах на шахматной доске и т. д. Сейчас мы рассмотрим еще несколько таких задач, а в конце главы остановимся на общей теории рекуррентных соотношений.

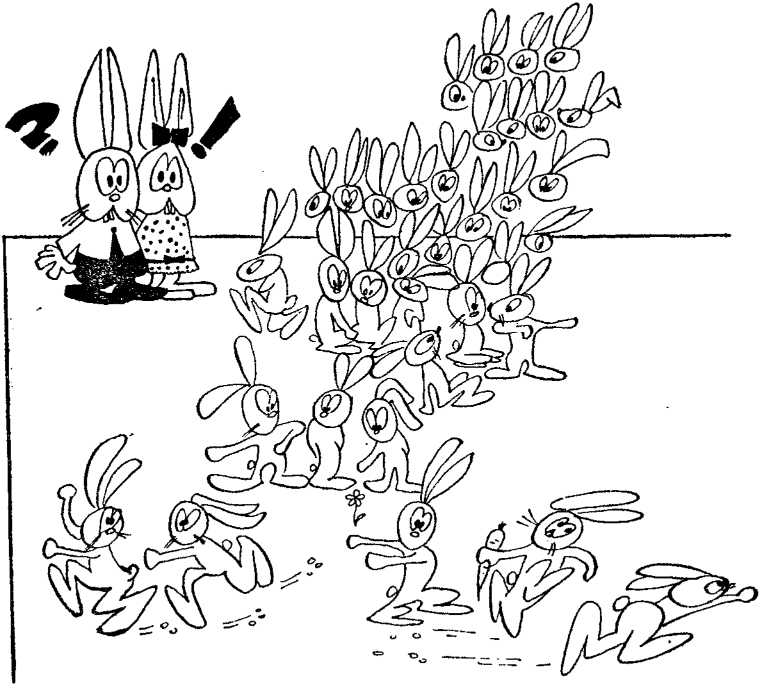
Числа Фибоначчи

В книге «Liber Abaci», появившейся в 1202 году, итальянский математик Фибоначчи среди многих других задач привел следующую:

Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

Из условия задачи следует, что через месяц будет две пары кроликов. Через два месяца приплод даст только первая пара кроликов, и получится 3 пары. А еще через месяц приплод дадут и исходная пара кроликов, и пара кроликов, появившаяся два месяца тому назад. Поэтому всего будет 5 пар кроликов.

Обозначим через $F(n)$ количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года. Мы видим, что через $n+1$ месяцев будут эти $F(n)$ пар и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было в конце



месяца $n-1$, то есть еще $F(n-1)$ пар кроликов. Иными словами, имеет место рекуррентное соотношение

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1). \tag{1}$$

Так как, по условию, $F(0) = 1$ и $F(1) = 2$, то последовательно находим

$$F(2) = 3, \quad F(3) = 5, \quad F(4) = 8 \text{ и т. д.}$$

В частности, $F(12) = 377$.

Числа $F(n)$ называют *числами Фибоначчи*. Они обладают целым рядом замечательных свойств. Сейчас мы выведем выражение этих чисел через C_m^k. Для этого установим связь между числами Фибоначчи и следующей комбинаторной задачей.

Найти число n-последовательностей, состоящих из нулей и единиц, в которых никакие две единицы не идут подряд.

Чтобы установить эту связь, возьмем любую такую последовательность и сопоставим ей пару кроликов по следующему правилу: единицам соответствуют месяцы появления на свет одной из пар «предков» данной пары (включая и исходную), а нулями — все остальные месяцы. Например, последовательность 010010100010 устанавливает такую «генеалогию» — сама пара появилась в конце 11-го месяца, ее родители — в конце 7-го месяца, «дед» — в конце 5-го месяца и «прадед» — в конце второго месяца. Исходная пара кроликов зашифровывается при этом последовательностью 00000000000.

Ясно, что при этом ни в одной последовательности не могут стоять две единицы подряд — только что появившаяся пара не может, по условию, принести приплод через месяц. Кроме того, при указанном правиле различным последовательностям отвечают различные пары кроликов, и обратно, две различные пары кроликов всегда имеют разную «генеалогию», так как, по условию, крольчиха дает приплод, состоящий только из одной пары кроликов.

Установленная связь показывает, что число n-последовательностей, обладающих указанным свойством, равно $F(n)$.

Докажем теперь, что

$$F(n)=C_{n+1}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n-1}^{2}+\ldots+C_{n-p+1}^{p}, \qquad (2)$$

где $p=\frac{n+1}{2}$, если n нечетно, и $p=\frac{n}{2}$, если n четно. Иными словами, p — целая часть числа $\frac{n+1}{2}$ (в дальнейшем мы будем обозначать целую часть числа α через $E(\alpha)$; таким образом, $p=E\left(\frac{n+1}{2}\right)$).

В самом деле, $F(n)$ — это число всех n-последовательностей из 0 и 1, в которых никакие две единицы не стоят рядом. Число же таких последовательностей, в которые входит ровно k единиц и $n-k$ нулей, равно C_{n-k+1}^{k} (см. стр. 65). Так как при этом должно выполняться неравенство $k\leqslant n-k+1$, то k изменяется от 0 до $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Применяя правило суммы, приходим к соотношению (2).

Равенство (2) можно доказать и иначе. Положим

$$G(n)=C_{n+1}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n-1}^{2}+\ldots+C_{n-p+1}^{p},$$

где $p=E\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Из равенства $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$ легко следует, что

$$G(n)=G(n-1)+G(n-2). \qquad (3)$$

Кроме того, ясно, что $G(1)=2=F(1)$ и $G(2)=3=F(2)$. Так как обе последовательности $F(n)$ и $G(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $X(n)=X(n-1)+$ $+X(n-2)$, то имеем

$$G(3)=G(2)+G(1)=F(2)+F(1)=F(3),$$

и, вообще, $G(n)=F(n)$.

Другой метод доказательства

В предыдущем пункте мы непосредственно установили связь между задачей Фибоначчи и комбинаторной задачей. Эту связь можно было установить и иначе, непосредственно доказав, что число $T(n)$ решений комбинаторной задачи удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению

$$T(n+1)=T(n)+T(n-1), \qquad (4)$$

что и числа Фибоначчи.

В самом деле, возьмем любую $(n+1)$-последовательность нулей и единиц, удовлетворяющую условию, что никакие две единицы не идут подряд. Она может оканчиваться или на 0, или на 1. Если она оканчивается на 0, то, отбросив его, получим n-последовательность, удовлетворяющую нашему условию. Обратно, если взять любую n-последовательность нулей и единиц, в которой подряд не идут две единицы, и приписать к ней нуль, то получим $(n+1)$-последовательность с тем же свойством. Мы доказали, что число «хороших» последовательностей, оканчивающихся на нуль, равно $T(n)$.

Пусть теперь последовательность оканчивается на 1. Так как двух единиц подряд быть не может, то перед этой единицей стоит нуль. Иными словами, последовательность оканчивается на 01. Остающаяся же после отбрасывания 0 и 1 $(n-1)$-последовательность может быть любой, лишь бы в ней не шли подряд две единицы.

Поэтому число «хороших» последовательностей, оканчивающихся единицей, равно $T(n-1)$. Но каждая последовательность оканчивается или на 0, или на 1. В силу правила суммы получаем, что $T(n+1)=T(n)+T(n-1)$.

Мы получили, таким образом, то же самое рекуррентное соотношение. Отсюда еще не вытекает, что числа $T(n)$ и $F(n)$ совпадают. Ведь, например, для факториалов и субфакториалов (см. стр. 74) имело место одно и то же рекуррентное соотношение:

$$X(n+1)=n[X(n)+X(n-1)]. \tag{5}$$

Но для факториалов первые члены последовательности равны $0!=1$, $1!=1$, а для субфакториалов — $D(0)=1$, $D(1)=0$. Поэтому разными оказались и третьи, и четвертые, да и все остальные члены последовательности.

Чтобы доказать совпадение чисел $T(n)$ и $F(n)$, надо еще показать, что $T(1)=F(1)$ и $T(2)=F(2)$ — тогда уже в силу рекуррентного соотношения имеем и $T(3)=F(3)$, $T(4)=F(4)$ и т. д. Существуют две 1-последовательности, удовлетворяющие поставленному условию: 0 и 1, и три 2-последовательности; 00, 01 и 10. Поэтому $T(1)=$ $=2=F(1)$ и $T(2)=3=F(2)$. Тем самым утверждение доказано.

Процесс последовательных разбиений

Для решения комбинаторных задач часто применяют метод, использованный в предыдущем пункте. Устанавливают для данной задачи рекуррентное соотношение и показывают, что оно совпадает с рекуррентным соотношением для другой задачи, решение которой нам уже известно. Если при этом совпадают и начальные члены последовательностей в достаточном числе (позже мы остановимся подробнее на том, сколько членов должны совпадать), то обе задачи имеют одинаковые решения.

Применим описанный прием для решения следующей задачи. Пусть дано некоторое множество из n предметов, стоящих в определенном порядке. Разобьем это множество на две непустые части так, чтобы одна из этих частей лежала левее второй (то есть, скажем, одна часть состоит из элементов от первого до m-го, а вторая — из элементов от $(m+1)$-го до n-го). После этого каждую из частей таким же образом разобьем на две непустые части (если одна из частей состоит уже из одного предмета, она не подвергается дальнейшим разбиениям). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не получим части, состоящие из одного предмета каждая. *Сколько существует таких процессов разбиения* (два процесса считаются различными, если хотя бы на одном шагу они приводят к разным результатам)?

Обозначим число способов разбиения для множества из $n+1$ предметов через B_n. На первом шагу это множество может быть разбито n способами (первая часть может содержать один предмет, два предмета, ..., n предметов). В соответствии с этим множество всех процессов разбиений распадается на n классов — в s-й класс входят процессы, при которых первая часть состоит из s предметов.

Подсчитаем число процессов в s-м классе. В первой части содержится s элементов. Поэтому ее можно разбивать далее B_{s-1} различными процессами. Вторая же часть содержит $n-s+1$ элементов, и ее можно разбивать далее B_{n-s} процессами. По правилу произведения получаем, что s-й класс состоит из $B_{s-1}B_{n-s}$ различных процессов. По правилу суммы отсюда вытекает, что

$$B_n = B_0B_{n-1} + B_1B_{n-2} + \ldots + B_{n-1}B_0. \tag{6}$$

Мы получили рекуррентное соотношение для B_n. Оно уже встречалось нам при решении задачи об очереди в кассу кинотеатра (см. стр. 88). Там было показано, что этому соотношению удовлетворяют числа

$$T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Чтобы доказать равенство

$$B_n = T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n. \tag{7}$$

нам осталось показать, что начальные члены T_0 и B_0 последовательностей $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ и $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ совпадают.

Мы имеем $T_0 = C_0^0 = 1$. С другой стороны, $B_0 = 1$, так как множество из одного элемента можно разделить единственным образом. Итак, $B_0 = T_0$. Но по рекуррентной формуле имеем $B_1 = B_0^2 = 1$. Так как T_0 удовлетворяет той же рекуррентной формуле, то $T_1 = T_0^2 = 1$. Далее устанавливаем, что

$$B_2=B_0B_1+B_1B_0=2 \quad \text{и} \quad T_2=T_0T_1+T_1T_0=2$$

и т. д. Итак, все члены обеих последовательностей совпадают. Таким образом, доказан следующий результат:

Число процессов последовательного деления множества из $n+1$ *элементов, расположенных в некотором порядке, равно*

$$T_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

Умножение и деление чисел

Пусть даны n чисел $a_1, \ldots, a_n$, стоящих в определенном порядке. В силу сочетательного закона умножения произведение этих чисел можно вычислить разными способами (сохраняя порядок сомножителей). Например, три числа можно перемножить двумя способами $(ab)c=$ $=a(bc)$, четыре числа — пятью способами и т. д. Требуется *найти число всех способов перемножения* n *чисел, стоящих в заданном порядке.*

Ясно, что каждый способ перемножения сводится к процессу разбиения данных n чисел на части из одного элемента каждая. Например, умножение четырех чисел по формуле $(ab)(cd)$ сводится к такому процессу разбиения $a \mid b \,\Big|\, c \mid d$, а умножение этих же чисел по формуле $((ab)c)d$ — к процессу разбиения $a \mid b \,\Big|\, c \,\Bigg|\, d$. Поэтому число различных способов умножения равно числу различных процессов разбиения множества из n элементов, то есть $T_{n-1}=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$.

Но, кроме сочетательного свойства, умножение обладает и переместительным свойством. Если учесть его, то число процессов умножения увеличится в $n!$ раз — ведь n чисел можно переставить друг с другом $n!$ способами, а потом подвергать переставленные числа тем или иным разбиениям. Отсюда следует, что полное число способов перемножить данные n чисел равно $(n-1)!\,C_{2n-2}^{n-1}$.

К этому результату можно прийти и непосредственно, не опираясь на формулу для числа процессов разбиения.

Этот вывод дает новый метод получения формулы для числа процессов разбиения, а тем самым и для задачи об очереди в кассу (при условии, что число рублей в очереди равно числу полтинников).

Непосредственный вывод заключается в следующем. Предположим, что мы уже нашли число $\Phi(n)$ способов перемножить n чисел. Присоединим к ним еще один сомножитель a_{n+1}. Выясним, сколькими способами можно присоединить этот сомножитель к одному из произведений чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Число a_{n+1} можно умножить на все произведение, взяв либо как множимое, либо как множитель. Это дает два способа присоединения. Но a_{n+1} можно присоединить и на одном из промежуточных этапов. Умножение n чисел сводится к $n-1$ последовательным перемножениям, на каждом из которых перемножаются два числа. К каждому из этих перемножений число a_{n+1} можно подключить 4 способами — умножив его на первый сомножитель в качестве множимого, либо множителя, а также умножив его на второй сомножитель в качестве множимого или множителя. Но так как есть $n-1$ умножений, к которым можно присоединить a_{n+1}, то всего получаем $4n-4$ способов. Добавляя к ним два способа, о которых говорилось выше, получаем $4n-2$ способов присоединения a_{n+1} к каждому из $\Phi(n)$ способов перемножения чисел $a_1, \ldots, a_n$. Отсюда вытекает, что

$$\Phi(n+1) = (4n-2)\,\Phi(n).$$

Но $\Phi(1)=1$. Поэтому

$$\Phi(n) = 2 \cdot 6 \ldots (4n-6) = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-3).$$

Этот ответ совпадает с полученным ранее, так как

$$\Phi(n) = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-3) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = (n-1)!\, C_{2n-2}^{n-1}.$$

Рассмотрим теперь операцию деления. Запишем выражение

$$\cfrac{a_1}{\cfrac{a_2}{\cfrac{a_3}{\cfrac{\vdots}{a_n}}}} \tag{8}$$

Эта запись не имеет смысла, если не указан порядок, в котором должны выполняться деления. Выясним, сколькими способами можно придать смысл этому выражению. Для этого заметим, что каждый способ указания порядка деления может рассматриваться и как процесс разбиения n элементов на части из одного элемента, описанный выше. А мы видели, что число таких процессов равно $\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$.

Значит, выражению (8) можно придать смысл $\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$ способами.

Задачи о многоугольниках

В некоторых вопросах квантовой химии возникает следующая задача:

В окружность вписан правильный $2n$-угольник. Сколькими способами можно попарно соединить его вершины так, чтобы получающиеся отрезки не пересекались друг с другом?

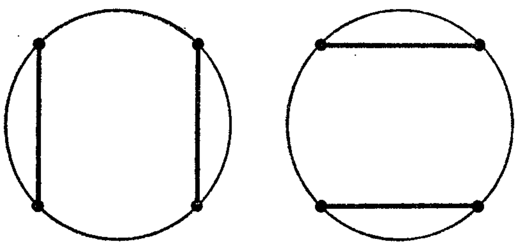


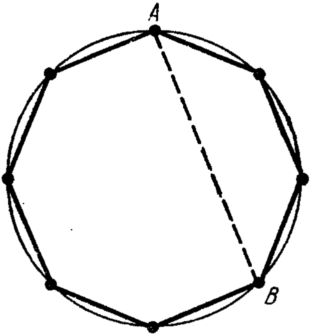
Рис. 31.

При $n=1$ есть один способ такого соединения[1]). При $n=2$ получаем два способа, изображенных на рис. 31. Чтобы найти число способов $F(n)$ для любого n, выведем рекуррентное соотношение для $F(n)$. Выберем одну из вершин A многоугольника. Ее можно соединить с любой из вершин B такой, что между A и B находится четное число вершин (рис. 32). В соответствии с этим все способы соединения вершин распадаются на классы

[1]) Мы считаем здесь диаметр «правильным двуугольником».

в зависимости от того, сколько вершин остается слева от отрезка, проведенного из точки A.

Если остается $2s$ вершин, то по другую сторону от нее остается $2(n-s-1)$ вершин. Тем самым $2n$-угольник разбивается на $2s$-угольник и $2(n-s-1)$-угольник. Но в $2s$-угольнике можно $F(s)$ способами провести отрезки так, чтобы они не пересекали друг друга. В $2(n-s-1)$-угольнике же это можно сделать $F(n-s-1)$ способами. По правилу произведения получаем, что в s-й класс входит $F(s)F(n-s-1)$ способов проведения отрезков.



$n=4,\ s=2$

Рис. 32.

Значит, общее число всех способов равно $F(0)F(n-1)+F(1)F(n-2)+\ldots+F(n-1)F(0)$. Мы получили рекуррентное соотношение

$$F(n)=F(0)F(n-1)+F(1)F(n-2)+\ldots+F(n-1)F(0).$$

Это то же самое соотношение, которому удовлетворяют числа $T_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$. Так как $F_0=T_0=1$, то для всех n имеем $F(n)=T_n$. Итак, в $2n$-угольнике можно $T_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$ способами провести диагонали так, чтобы они попарно не пересекались.

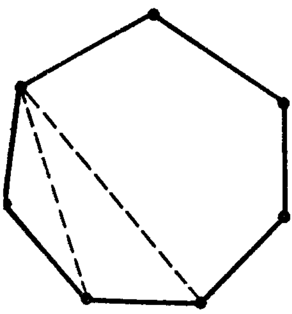

$n=5$

Рис. 33.

Тот же ответ имеет следующая задача:

Сколькими способами можно разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри этого многоугольника?

Обозначим число способов через $\Phi(n)$. Выберем одну из сторон многоугольника и расклассифицируем все разбиения в зависимости от того, с какой вершиной многоугольника совпадает вершина треугольника, основанием которого служит выбранная сторона (рис. 33). Если удалить этот треугольник, то многоугольник распадается на $(s+2)$-угольник и $(n-s+1)$-угольник. Разбивая эти многоугольники на треугольники и комбинируя эти разбиения друг с другом, получим все разбиения исходного многоугольника, в которые входит удаленный треугольник. А потом, применяя правила произведения и суммы, получаем рекуррентное соотношение

$$\Phi(n)=\Phi(0)\Phi(n-1)+\Phi(1)\Phi(n-2)+\ldots+\Phi(n-1)\Phi(0),$$

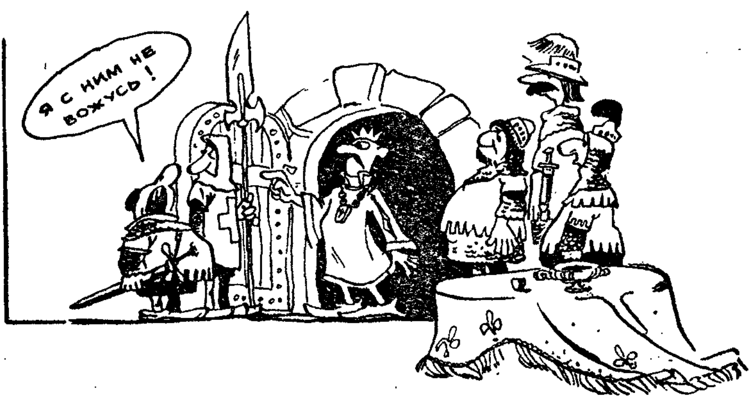
где положено $\Phi(0)=1$. Предоставляем читателю убедиться, исходя из этого соотношения, что

$$\Phi(n)=T_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

Затруднение мажордома

Бывают комбинаторные задачи, в которых приходится составлять не одно рекуррентное соотношение, а систему соотношений, связывающую несколько последовательностей. Эти соотношения выражают $(n+1)$-е члены последовательностей через предыдущие члены не только данной, но и остальных последовательностей.

Однажды мажордом короля Артура обнаружил, что к обеду за круглым столом приглашено 6 пар враждующих рыцарей. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы никакие два врага не сидели рядом?



Если мы найдем какой-то способ рассадки рыцарей, то, пересаживая их по кругу, получим еще 11 способов. Мы не будем сейчас считать различными способы, получающиеся друг из друга такой циклической пересадкой.

Введем следующие обозначения. Пусть число рыцарей равно $2n$. Через A_n обозначим число способов рассадки, при которых никакие два врага не сидят рядом, через B_n — число способов, при которых рядом сидит ровно одна пара врагов, и через C_n — число способов, при которых есть ровно две пары враждующих соседей.

Выведем сначала формулу, выражающую A_{n+1} через A_n, B_n и C_n. Пусть $n+1$ пар рыцарей посажены так, что никакие два врага не сидят рядом. Мы будем считать, что все враждующие пары рыцарей занумерованы. Попросим встать из-за стола пару рыцарей с номером $n+1$. Тогда возможны три случая: среди оставшихся за столом нет ни одной пары соседей-врагов, есть одна такая пара и есть две такие пары (ушедшие рыцари могли разделять эти пары) [1].

Выясним теперь, сколькими способами можно снова посадить ушедших рыцарей за стол, так, чтобы после этого не было ни одной пары соседей-врагов.

Проще всего посадить их, если за столом рядом сидят две пары врагов. В этом случае один из вновь пришедших садится между рыцарями первой пары, а другой — между рыцарями второй пары. Это можно сделать двумя способами. Но так как число способов рассадки $2n$ рыцарей, при которых две пары соседей оказались врагами, равно C_n, то всего получилось $2C_n$ способов.

Пусть теперь рядом сидит только одна пара врагов. Один из вернувшихся должен сесть между ними. Тогда за столом окажутся $2n+1$ рыцарей, между которыми есть $2n+1$ мест. Из них два места — рядом с только севшим гостем — запретны для второго рыцаря, и ему остается $2n-1$ мест. Так как первым может войти любой из двух вышедших рыцарей, то получается $2(2n-1)$ способов рассадки. Но число случаев, когда $2n$ рыцарей сели так, чтобы ровно одна пара врагов оказалась сосе-

---

[1]) Здесь и далее мы считаем, что и $n>1$. При $n=1$ последующие рассуждения теряют силу.

дями, равно B_n. Поэтому мы получаем $2(2n-1)B_n$ способов посадить гостей требуемым образом.

Наконец, пусть никакие два врага не сидели рядом. В этом случае первый рыцарь садится между любыми двумя гостями — это он может сделать $2n$ способами. После этого для его врага останется $2n-1$ мест — он может занять любое место, кроме двух мест, соседних с только что севшим рыцарем. Таким образом, если $2n$ рыцарей уже сидели нужным образом, то вернувшихся гостей можно посадить $2n(2n-1)$ способами. Всего же в этом случае получается $2n(2n-1)A_n$ способов.

Как уже отмечалось, разобранными случаями исчерпываются все возможности. Поэтому имеет место рекуррентное соотношение

$$A_{n+1}=2n(2n-1)A_n+2(2n-1)B_n+2C_n. \qquad (9)$$

Этого соотношения еще недостаточно, чтобы найти A_n для всех значений n. Надо еще узнать, как выражаются B_{n+1} и C_{n+1} через A_n, B_n, C_n.

Предположим, что среди $2n+2$, $n>1$ рыцарей оказалась ровно одна пара врагов-соседей. Мы знаем, что это может произойти в B_{n+1} случаях. Во избежание ссоры попросим их удалиться из-за стола. Тогда останется $2n$ рыцарей, причем возможно одно из двух: либо среди оставшихся нет врагов-соседей, либо есть ровно одна пара таких врагов — до ухода покинувших зал они сидели по обе стороны от них, и теперь оказались рядом. Во втором случае ушедших можно посадить обратно только на старое место — иначе появится вторая пара враждующих соседей. Но так как $2n$ рыцарей можно посадить B_n способами так, чтобы была только одна пара враждующих соседей, то мы получаем $2B_n$ вариантов (возвратившихся рыцарей можно поменять местами). В первом же случае можно посадить ушедших между любыми двумя рыцарями, то есть $2n$ способами, а так как их еще можно поменять местами, то получится $4n$ способов. Комбинируя их со всеми способами посадки n пар рыцарей, при которых нет соседей врагов, получаем $4nA_n$ способов. Наконец, номер ушедшей и вернувшейся пары рыцарей мог быть любым от 1 до $n+1$. Отсюда вытекает, что рекуррентное соотношение для B_{n+1} имеет вид

$$B_{n+1}=4n(n+1)A_n+2(n+1)B_n. \qquad (10)$$

Наконец, разберем случай, когда среди $2n+2$ рыцарей было две пары врагов-соседей. Номера этих пар можно выбрать $C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ способами. Заменим каждую пару одним новым рыцарем, причем будем считать новых двух рыцарей врагами. Тогда за столом будут сидеть $2n$ рыцарей, причем среди них либо не будет ни одной пары врагов-соседей (если новые рыцари не сидят рядом), либо только одна такая пара.

Первый вариант может быть в A_n случаях. Вернуться к исходной компании мы можем 4 способами благодаря возможности изменить порядок рыцарей в каждой паре. Поэтому первый вариант приводит к $4C_{n+1}^2 A_n = 2n(n+1)A_n$ способам.

Второй же вариант может быть в $\frac{1}{n}B_n$ случаях[1]. Здесь тоже можно вернуться к исходной компании 4 способами, и мы получаем всего $2(n+1)B_n$ способов. Отсюда вытекает, что при $n \geqslant 1$

$$C_{n+1} = 2n(n+1)A_n + 2(n+1)B_n. \tag{11}$$

Мы получили систему рекуррентных соотношений

$$A_{n+1} = 2(2n-1)(nA_n + B_n) + 2C_n, \tag{9}$$

$$B_{n+1} = 2(n+1)(2nA_n + B_n), \tag{10}$$

$$C_{n+1} = 2(n+1)(nA_n + B_n), \tag{11}$$

справедливых при $n \geqslant 2$. Но простой подсчет показывает, что $A_2=2$, $B_2=0$, $C_2=4$. Поэтому из соотношений (9)—(11) вытекает, что $A_3=32$, $B_3=48$, $C_3=24$. Продолжая далее, находим, что гостей можно посадить за стол требуемым образом $A_6=12\,771\,840$ способами.

Разобранная задача похожа на следующую задачу, называемую часто «задачей о гостях».

Сколькими способами можно рассадить за круглым столом n супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие два супруга не сидели рядом?

---

[1]) Имеется B_n случаев, когда какая-нибудь пара врагов сидит рядом. Если указать, какая именно пара должна сидеть рядом, получим в n раз меньше случаев.

Эта задача решается примерно так же, как и задача о мажордоме. Сначала рассаживают женщин. Если занумеровать места, то либо все женщины окажутся на четных местах, либо они займут нечетные места. Но число четных мест равно n, и женщины могут сесть на них $n!$ способами. Столькими же способами они могут занять нечетные места. Значит, женщин можно посадить $2 \cdot (n!)$ способами. А потом рассматривают случаи, когда ни один из мужей не сидит рядом со своей женой, когда рядом сидит одна супружеская пара и, наконец, когда рядом сидят две супружеские пары. Предоставляем читателю составить соответствующую систему рекуррентных соотношений.

Счастливые троллейбусные билеты

Некоторые люди считают шестизначные номера троллейбусных билетов «счастливыми», если сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Например, билет 631 752 считается «счастливым», так как $6+1+5=3+7+2=12$. Требуется найти число «счастливых» номеров от 000000 до 999999.

Для этого сначала найдем, сколько трехзначных чисел имеет данную сумму цифр N (при этом мы относим к трехзначным и числа вида 075 и даже 000). Эта задача аналогична решенной на стр. 106 — число слагаемых 3, сумма равна N, а слагаемые — от 0 до 9. Обозначим число ее решений через $F(3, 9; N)$. Тогда имеет место рекуррентное соотношение

$$F(3,\ 9;\ N)=F(2,\ 9;\ N)+F(2,\ 9;\ N-1)+F(2,\ 9;\ N-2)+F(2,\ 9;\ N-3)+F(2,\ 9;\ N-4)+F(2,\ 9;\ N-5)+F(2,\ 9;\ N-6)+F(2,\ 9;\ N-7)+F(2,\ 9;\ N-8)+F(2,\ 9;\ N-9).$$

Точно так же

$$F(2,\ 9;\ N)=F(1,\ 9;\ N)+F(1,\ 9;\ N-1)+\ldots+F(1,\ 9;\ N-9).$$

Ясно, что $F(1,9;\ N)=1$, если $0 \leqslant N \leqslant 9$, и $F(1,9;\ N)=0$ в противном случае. Пользуясь этими соотношениями, без труда заполняем следующую таблицу:

ТАБЛИЦА 8

k \ N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75	75

k \ N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	45	25	26	27
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	73	69	63	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1

Чтобы найти теперь число «счастливых» билетов, надо возвести в квадрат числа третьей строки и сложить получающиеся результаты. В самом деле, каждый «счастливый» билет имеет одну и ту же сумму цифр, стоящих на четных и на нечетных местах. Пусть эта сумма равна N. Число, стоящее на N-м месте третьей строки нашей таблицы, показывает, сколько трехзначных чисел имеет сумму цифр N. Иными словами, оно показывает, сколькими способами можно выбрать цифры, стоящие на четных местах (то есть вторую, четвертую и шестую). Столькими же способами можно выбрать цифры на нечетных местах (первом, третьем и пятом). Так как эти выборы не зависят друг от друга, то по правилу произведения «счастливых» номеров с суммой цифр на четных местах, равной N, будет $[F(N)]^2$. А тогда по правилу суммы общее число «счастливых» номеров равно

$$2\,[1^2+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2+36^2+45^2+ \\ +55^2+63^2+69^2+73^2+75^2].$$

Вычисляя эту сумму, получаем ответ 55 252.

Рекуррентные таблицы

В комбинаторике часто встречаются величины, зависящие не от одного, а от нескольких чисел. Например, число C_n^k зависит и от n, и от k. Если рассматриваемая величина $F(n, k)$ зависит от двух натуральных чисел n и k, то ее значения можно расположить в виде таблицы, помещая $F(n, k)$ на пересечении n-й строки и k-го столбца. С такими величинами мы уже неоднократно сталкивались в главе V — арифметический квадрат, арифметические треугольники и обобщенные арифметические треугольники имели вид именно таких таблиц.

При этом во всех примерах, изученных в главе V, между элементами таблицы существовали зависимости. Эти зависимости позволяли вычислить элементы n-й строки таблицы по элементам предыдущей строки и, быть может, нескольким первым элементам n-й строки. Поэтому, если была задана первая строка таблицы и первые элементы других строк, все остальные строки можно было вычислять одну за другой. Такие таблицы напоминают рекуррентные последовательности, и мы будем называть их в дальнейшем *рекуррентными*.

Для арифметического квадрата рекуррентное соотношение имело вид

$$F(n, k) = F(n-1, k) + F(n, k-1), \tag{12}$$

а граничные условия задавались так: $F(n, 0) = 1$, $F(0, k) = 0$ при $k > 0$ (напомним, что для арифметического квадрата мы говорим не о первом столбце или строке, а о нулевом столбце или строке).

Для арифметических пятиугольника и шестиугольника рекуррентное соотношение тоже имеет вид (12). Ведь эти фигуры появились, когда мы считали, сколькими способами может попасть на некоторое поле ладья, двигаясь по доске, ограниченной двумя перпендикулярными лучами и одной или двумя линиями, параллельными главной диагонали. Но ладья может попасть на поле (n, k) или с поля $(n-1, k)$, или с поля $(k-1, n)$. Поэтому, какие бы ограничения на ее движения не налагались, всегда будет выполнено соотношение (12). Ограничения же приводят к тому, что некоторые элементы таблицы должны быть заведомо равны нулю. Для арифметического пятиугольника такими являются элементы, лежащие выше некоторой прямой, параллельной главной диагонали, а для арифметического шестиугольника — элементы вне области, отсеченной двумя прямыми, параллельными главной диагонали.

Иной вид имеет рекуррентное соотношение для арифметического треугольника и m-арифметического треугольника. Именно, для m-арифметического треугольника

$$F(n, k)=F(n-1, k-m+1)+F(n-1, k-m+2)+\ldots$$
$$\ldots+F(n-1, k). \quad (13)$$

При этом $F(0, 0)=1$ и $F(0, k)=0$, если $k>0$.

Другое решение проблемы мажордома

В качестве еще одного примера на использование рекуррентных таблиц приведем другое решение проблемы мажордома (см. стр. 165). Как читатель помнит, речь шла о числе способов рассадить $2n$ рыцарей за круглым столом так, чтобы никакие два врага не сидели рядом (а среди $2n$ рыцарей было n пар врагов).

Обозначим через $F(m, n)$ число способов рассадки, при которых рядом сидят ровно m пар врагов. Мы выведем сейчас рекуррентную формулу, выражающую $F(m, n+1)$ через $F(k, n)$, $k=m-1$, m, $m+1$, $m+2$.

Мы будем считать, что сначала за столом сидели n пар рыцарей, а потом пришла пара $n+1$ и села за стол. Подсчитаем, во скольких случаях за столом окажутся m пар соседей-врагов. Это может произойти так:

а) За столом было $m-1$ пар врагов, сидевших рядом. Это могло случиться $F(m-1, n)$ способами. Чтобы за столом оказалось m пар враждующих соседей, новая пара должна сесть рядом, не разбив ни одну из уже существовавших пар соседей-врагов. Но между $2n$ рыцарями есть $2n$ промежутков, а садиться нельзя в $m-1$ промежутков. Остается $2n-m+1$ промежутков, куда могут сесть вновь пришедшие рыцари. Так как в каждый из этих промежутков можно сесть двумя способами (пришедшие рыцари могут поменяться местами), то всего получаем

$$2(2n-m+1)F(m-1, n) \quad (14)$$

способов.

б) За столом было m пар рядом сидящих врагов. В этом случае вновь пришедшие могут выбрать одно из двух: либо сесть врозь, не разделив ни одну пару соседей-врагов, либо сесть рядом между двумя враждующими соседями. Легко подсчитать, что первое решение можно провести в жизнь $(2n-m)(2n-m-1)$ способами, а второе $2m$ способами, а всего $(2n-m)^2-2n+3m$ способами. Так как n пар рыцарей могут сесть $F(m, n)$ способами так, чтобы рядом оказались m пар врагов, то всего получаем

$$[(2n-m)^2-2n+3m]\,F(m,\ n) \tag{15}$$

способов.

в) Далее, рассмотрим случай, когда среди $2n$ рыцарей рядом сидели $m+1$ пар врагов (это может случиться $F(m+1, n)$ способами). В этом случае один из вновь пришедших должен сесть между одной из пар врагов соседей, а второй должен сесть так, чтобы не разбить ни одну такую пару. Первое можно сделать $m+1$, а второе $2n-m-1$ способами. Всего получаем $2(m+1)(2n-m-1)$ возможностей (множитель 2 появился потому, что любой из вновь пришедших может сесть между врагами). Поэтому рассматриваемый случай дает всего

$$2(m+1)(2n-m-1)\,F(m+1,\ n) \tag{16}$$

возможностей.

г) Наконец, предположим, что было $m+2$ пар соседей-врагов. Это могло случиться $F(m+2, n)$ способами. Чтобы оказалось только m пар соседей-врагов, каждый из вновь пришедших рыцарей должен разбить одну пару враждующих соседей. Первый рыцарь может сесть $m+2$ способами, после чего второму остается лишь $m+1$ мест. Всего получаем

$$(m+1)(m+2)\,F(m+2,\ n) \tag{17}$$

возможностей.

Легко видеть, что мы исчерпали все возможности, при которых среди $2n+2$ рыцарей за круглым столом окажутся m пар соседей-врагов. Поэтому $F(m, n)$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} F(m,\ n+1) = {} & 2(2n-m+1)\,F(m-1,\ n) + \\ & + [(2n-m)^2-2n+3m]\,F(m,\ n) + \\ & + 2(m+1)(2n-m-1)\,F(m+1,\ n) + \\ & + (m+1)(m+2)\,F(m+2,\ n). \end{aligned} \tag{18}$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$F(0, 2)=2, \quad F(1, 2)=0, \quad F(2, 2)=4$$

(мы не считаем различными способы рассадки, получающиеся друг из друга циклической перестановкой).

Применяя формулу (18), находим, что $F(0, 12)= =12\,771\,840$.

Решение рекуррентных соотношений

Мы будем говорить, что рекуррентное соотношение имеет порядок k, если оно позволяет выразить $f(n+k)$ через $f(n)$, $f(n+1), \ldots, f(n+k-1)$. Например,

$$f(n+2)=f(n)\,f(n+1)-3f^2(n+1)+1$$

— рекуррентное соотношение второго порядка, а

$$f(n+3)=6f(n)\,f(n+2)+f(n+1)$$

— рекуррентное соотношение третьего порядка.

Если задано рекуррентное соотношение k-го порядка, то ему удовлетворяет бесконечно много последовательностей. Дело в том, что первые k элементов последовательности можно задать совершенно произвольно — между ними нет никаких соотношений. Но если первые k элементов заданы, то все остальные элементы определяются совершенно однозначно — элемент $f(k+1)$ выражается в силу рекуррентного соотношения через $f(1), \ldots, f(k)$, элемент $f(k+2)$ — через $f(2), \ldots, f(k+1)$ и т. д.

Пользуясь рекуррентным соотношением и начальными членами, можно один за другим выписывать члены последовательности, причем рано или поздно мы получим любой ее член. Однако при этом нам придется выписать и все предыдущие члены — ведь не узнав их, мы не узнаем и последующих членов. Но во многих случаях мы хотим узнать только один определенный член последовательности, а остальные члены нам не нужны. В этих случаях удобнее иметь явную формулу для n-го члена последовательности. Мы будем говорить, что некоторая последовательность является *решением* данного рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение тождественно выполняется. Например, последовательность

$$2,\ 4,\ 8,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots$$

является одним из решений рекуррентного соотношения

$$f(n+2)=3f(n+1)-2f(n).$$

В самом деле, общий член этой последовательности имеет вид $f(n)=2^n$. Значит, $f(n+2)=2^{n+2}$, $f(n+1)=2^{n+1}$. Но при любом n имеет место тождество $2^{n+2}=3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 2^n$. Поэтому 2^n является решением указанного соотношения.

Решение рекуррентного соотношения k-го порядка называется общим, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_k$, и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения. Например, для соотношения

$$f(n+2)=5f(n+1)-6f(n) \tag{19}$$

общим решением будет

$$f(n)=C_1 2^n+C_2 3^n. \tag{20}$$

В самом деле, легко проверить, что последовательность (20) обращает соотношение (9) в тождество. Поэтому нам надо только показать, что любое решение нашего соотношения можно представить в виде (20). Но любое решение соотношения (19) однозначно определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$. Поэтому нам надо доказать, что для любых чисел a и b найдутся такие значения C_1 и C_2, что

$$2C_1+3C_2=a$$

и

$$2^2C_1+3^2C_2=b.$$

Но легко видеть, что при любых значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 2C_1+3C_2=a, \\ 4C_1+9C_2=b \end{cases} \tag{21}$$

имеет решение. Поэтому (20) действительно является общим решением соотношения (19).

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Для решения рекуррентных соотношений общих правил, вообще говоря, нет. Однако существует весьма часто встречающийся класс соотношений, решаемый единообразным методом. Это — рекуррентные соотношения вида

$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\ldots+a_kf(n), \tag{22}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые числа. Такие соотношения называют *линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами.*

Сначала мы рассмотрим, как решаются такие соотношения при $k=2$, то есть изучим соотношения вида

$$f(n+2)=a_1f(n+1)+a_1f(n). \tag{23}$$

Решение этих соотношений основано на следующих двух утверждениях:

1) Если $f_1(n)$ и $f_2(n)$ являются решениями рекуррентного соотношения (23), то при любых числах A и B последовательность $f(n)=Af_1(n)+Bf_2(n)$ также является решением этого соотношения.

В самом деле, по условию, имеем

$$f_1(n+2)=a_1f_1(n+1)+a_2f_1(n)$$

и

$$f_2(n+2)=a_1f_2(n+1)+a_2f_2(n).$$

Умножим эти равенства на A и B соответственно и сложим полученные тождества. Мы получим, что

$$Af_1(n+2)+Bf_2(n+2)=$$
$$=a_1[Af_1(n+1)+Bf_2(n+1)]+a_2[Af_1(n)+Bf_2(n)]).$$

А это и означает, что $Af_1(n)+Bf_2(n)$ является решением соотношения (23).

2) Если число r_1 является корнем квадратного уравнения

$$r^2=a_1r+a_2,$$

то последовательность

$$1,\ r_1,\ r_1^2,\ \ldots,\ r_1^{n-1},\ \ldots$$

является решением рекуррентного соотношения

$$f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n).$$

В самом деле, если $f(n)=r_1^{n-1}$, то $f(n+1)=r_1^n$ и $f(n+2)=r_1^{n+1}$. Подставляя эти значения в соотношение (23), получаем равенство

$$r_1^{n+1}=a_1r_1^n+a_2r_1^{n-1}.$$

Оно справедливо, так как по условию имеем $r_1^2=a_1r+a_2$.

Заметим, что наряду с последовательностью $\{r_1^{n-1}\}$ любая последовательность вида

$$f(n)=r_1^{n+m},\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

также является решением соотношения (23). Для доказательства достаточно использовать утверждение (23), положив в нем $A=r_1^{m+1}$, $B=0$.

Из утверждений 1) и 2) вытекает следующее правило решения линейных рекуррентных соотношений второго порядка с постоянными коэффициентами:

Пусть дано рекуррентное соотношение

$$f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n). \tag{23}$$

Составим квадратное уравнение

$$r^2=a_1r+a_2, \tag{24}$$

которое называется характеристическим для данного соотношения. Если это уравнение имеет два различных корня r_1 и r_2, то общее решение соотношения (23) *имеет вид*

$$f(n)=C_1r_1^{n-1}+C_2r_2^{n-1}.$$

Чтобы доказать это правило, заметим сначала, что по утверждению 2) $f_1(n)=r_1^{n-1}$ и $f_2(n)=r_2^{n-1}$ являются решениями нашего соотношения. А тогда по утверждению 1) и $C_1r_1^n+C_2r_2^n$ является его решением. Надо только показать, что любое решение соотношения (23) можно записать в этом виде. Но любое решение соотношения второго порядка определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$. Поэтому достаточно показать, что система уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_2=a, \\ C_1r_1+C_2r_2=b \end{cases}$$

имеет решение при любых a и b. Проверьте, что этими решениями являются

$$C_1=\frac{b-ar_2}{r_1-r_2}, \quad C_2=\frac{ar_1-b}{r_1-r_2}.$$

Случай, когда оба корня уравнения (24) совпадают друг с другом, мы разберем несколько позже. А сейчас приведем пример на доказанное правило.

При изучении чисел Фибоначчи мы пришли к рекуррентному соотношению

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2). \tag{25}$$

Для него характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2=r+1.$$

Корнями этого квадратного уравнения являются числа

$$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому общее решение соотношения Фибоначчи имеет вид

$$f(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{26}$$

(мы воспользовались сделанным выше замечанием и взяли показатели n вместо $n-1$).

Мы называли числами Фибоначчи решение соотношения (25), удовлетворяющее начальным условиям $f(0)=1$ и $f(1)=2$, то есть последовательность 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Часто бывает более удобно добавить к этой последовательности вначале числа 0 и 1, то есть рассматривать последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Ясно, что эта последовательность удовлетворяет тому же самому рекуррентному соотношению (25) и начальным условиям $f(0)=0$, $f(1)=1$. Полагая в формуле (26) $n=0$ и $n=1$, получаем для C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(C_1-C_2)=1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и потому

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{27}$$

На первый взгляд кажется удивительным, что это выражение при всех натуральных значениях n принимает целые значения.

Случай равных корней характеристического уравнения

Остановимся теперь на случае, когда оба корня характеристического уравнения совпадают: $r_1 = r_2$. В этом случае выражение $C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$ уже не будет общим решением. Ведь из-за того, что $r_1 = r_2$, это решение можно записать в виде

$$f(n) = (C_1 + C_2) r_1^{n-1} = C r_1^{n-1}.$$

У нас остается только одно произвольное постоянное C, и выбрать его так, чтобы удовлетворить двум начальным условиям $f(1) = a$, $f(2) = b$, вообще говоря, невозможно.

Поэтому нам надо найти какое-нибудь второе решение, отличное от $f_1(n) = r_1^{n-1}$. Оказывается, таким решением является $f_2(n) = n r_1^{n-1}$. В самом деле, если квадратное уравнение $r^2 = a_1 r + a_2$ имеет два совпадающих корня $r_1 = r_2$, то по теореме Виета $a_1 = 2r_1$, $a_2 = -r_1^2$. Поэтому наше уравнение записывается так:

$$r^2 = 2r_1 r - r_1^2.$$

А тогда рекуррентное соотношение имеет такой вид:

$$f(n+2) = 2r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n). \tag{28}$$

Проверим, что $f_2(n) = n r_1^{n-1}$ действительно является его решением. Мы имеем $f_2(n+2) = (n+2) r_1^{n+1}$, а $f_2(n+1) = (n+1) r_1^n$. Подставляя эти значения в соотношение (28), получаем очевидное тождество

$$(n+2) r_1^{n+1} = 2(n+1) r_1^{n+1} - n r_1^{n+1}.$$

Значит, $n r_1^{n-1}$ — решение нашего соотношения.

Теперь мы уже знаем два решения $f_1(n) = r_1^{n-1}$ и $f_2(n) = n r_1^{n-1}$ заданного соотношения. Его общее решение пишется так:

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 n r_1^{n-1} = r_1^{n-1}(C_1 + C_2 n).$$

Теперь уже путем подбора C_1 и C_2 можно удовлетворить любым начальным условиям.

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, порядок которых больше двух, решаются таким же способом. Пусть соотношение имеет вид

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n). \tag{29}$$

Составляем характеристическое уравнение

$$r^k = a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Если все корни $r_1, \ldots, r_k$ этого алгебраического уравнения k-й степени различны, то общее решение соотношения (29) имеет вид

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \ldots + C_k r_k^{n-1}.$$

Если же, например, $r_1 = r_2 = \ldots = r_s$, то этому корню соответствуют решения

$$f_1(n) = r_1^{n-1}, \quad f_2(n) = n r_1^{n-1}, \quad f_3(n) = n^2 r_1^{n-1}, \ldots, \quad f_s(n) = n^{s-1} r_1^{n-1}$$

рекуррентного соотношения (29). В общем решении этому корню соответствует часть

$$r_1^{n-1}\left[C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_s n^{s-1}\right].$$

Составляя такие выражения для всех корней и складывая их, получаем общее решение соотношения (29).

Например, решим рекуррентное соотношение

$$f(n+4) = 5f(n+3) - 6f(n+2) - 4f(n+1) + 8f(n).$$

Характеристическое уравнение имеет здесь вид

$$r^4 - 5r^3 + 6r^2 + 4r - 8 = 0.$$

Решая его, получаем корни

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 2, \quad r_4 = -1.$$

Значит, общее решение нашего соотношения имеет следующий вид:

$$f(n) = 2^{n-1}\left[C_1 + C_2 n + C_3 n^2\right] + C_4(-1)^{n-1}.$$

Применение теории рекуррентных соотношений к вопросам передачи информации.

Мы уже рассматривали (см. стр. 104) задачу о количестве различных сообщений, которые можно передать за время T, если известно время передачи отдельных сигналов. При этом мы пришли к рекуррентному соотношению

$$f(T) = f(T - t_1) + f(T - t_2) + \ldots + f(T - t_n), \tag{30}$$

причем $f(0) = 1$ и $f(T) = 0$, если $T < 0$.

Будем считать числа T, t_1, ..., t_n целыми, и обозначим через λ_1, ..., λ_k корни характеристического уравнения для соотношения (30). Тогда общее решение уравнения принимает вид

$$f(T)=C_1\lambda_1^T+\ldots+C_k\lambda_k^T.$$

Пусть λ_1 — наибольший по абсолютной величине из корней характеристического уравнения. Тогда при больших значениях все слагаемые будут пренебрежимо малы по сравнению с первым, и мы получим, что

$$f(T)\sim C_1\lambda_1^T.$$

Это равенство позволяет приближенно оценивать число сообщений, которое можно передать за время T с помощью данной системы сигналов.

Третье решение задачи мажордома

Оба решения задачи мажордома, с которыми мы выше познакомились, приводили к рекуррентным соотношениям. Сейчас мы выведем формулу, дающую решение этих соотношений, — формулу, позволяющую сразу подсчитать число способов посадить враждующих рыцарей за стол. Для этого воспользуемся формулой включений и исключений. Обозначим через α_k событие, состоящее в том, что k-я пара враждующих между собой рыцарей сидит рядом. Подсчитаем, чему равно $N(\alpha_1\ldots\alpha_k)$, то есть во скольких случаях рядом сидят k пар врагов. Первую пару можно усадить за стол $4n$ способами ($2n$ способами выбрать место для одного, посадить второго на следующее по часовой стрелке место и учесть, что рыцарей можно обменять местами). Для остальных рыцарей останется $2n-2$ мест, причем их надо занять так, чтобы вторая, третья, ..., k-я пары врагов оказались рядом. Объединим эти пары рыцарей в один «объект». Эти $k-1$ пар рыцарей и $2n-2k$ остальных рыцарей можно переставлять друг с другом $(2n-k-1)!$ способами. Если взять одну из таких перестановок и посадить рыцарей по порядку на свободные места, то выбранные нами $k-1$ пар врагов окажутся рядом. Это условие не нарушится и в случае, если мы поменяем местами некоторых рядом сидящих врагов. Так как такие пересадки можно сделать 2^{k-1} способами, то всего получаем $4n2^{k-1}(2n-k-1)!$ способов посадки. Таким образом,

$$N(\alpha_1 \ldots \alpha_k) = 2^{k+1} n (2n - k - 1)!.$$

Мы хотим найти, во скольких случаях ни одна пара врагов не окажется соседями, то есть вычислить $N(\alpha_1' \ldots \alpha_n')$. Принимая во внимание, что k пар можно выбрать C_n^k способами, получаем по формуле включений и исключений, что

$$A_n = N(\alpha_1' \ldots \alpha_n') =$$
$$= (2n)! - C_n^1 2^2 n (2n-2)! + C_n^2 2^3 n (2n-3)! - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k C_n^k 2^{k+1} n (2n-k-1)! + \ldots + (-1)^n 2^{n+1} n!.$$

ГЛАВА VII

КОМБИНАТОРИКА И РЯДЫ

Метод рекуррентных соотношений позволяет решать многие комбинаторные задачи. Но в целом ряде случаев рекуррентные соотношения довольно трудно составить, а еще труднее решить. Зачастую эти трудности удается обойти, использовав производящие функции. Поскольку понятие производящей функции связано с бесконечными степенными рядами, нам придется сначала познакомиться с этими рядами.

Деление многочленов

Читатель, конечно, знает, как делят друг на друга многочлены. Если заданы два многочлена $f(x)$ и $\varphi(x)$, то всегда существуют многочлены $q(x)$ (*частное*) и $r(x)$ (*остаток*) такие, что $f(x)=\varphi(x)q(x)+r(x)$, причем степень $r(x)$ меньше степени $\varphi(x)$ или $r(x)=0$. При этом $f(x)$ называется *делимым*, а $\varphi(x)$ *делителем*. Если же мы хотим, чтобы деление выполнялось без остатка, то придется допустить в качестве частного не только многочлены, но и бесконечные степенные ряды. Для получения частного надо расположить многочлены по возрастающим степеням x и делить «уголком», начиная с младших членов. Рассмотрим, например, деление 1 на $1-x$. Мы имеем

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-x \\ \cline{2-2}
\underline{\mp 1 \pm x} & 1+x+x^2+\dots \\
\quad x & \\
\quad \underline{\mp x \pm x^2} & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad \underline{\mp x^2 \pm x^3} & \\
\qquad\quad x^3\dots &
\end{array}$$

Ясно, что процесс деления никогда не закончится (так же, например, как при обращении числа $\frac{1}{3}$ в бесконечную десятичную дробь). С помощью индукции легко убедиться, что все коэффициенты частного равны единице. Поэтому в качестве частного получается бесконечный ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

Вообще, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ два многочлена:

$$f(x)=a_0+\ldots+a_nx^n, \quad \varphi(x)=b_0+\ldots+b_mx^m,$$

причем свободный член b_0 многочлена $\varphi(x)$ отличен от нуля, $b_0\neq 0$, то при делении $f(x)$ на $\varphi(x)$ получается бесконечный ряд

$$c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots \tag{1}$$

Например, если взять те же многочлены $f(x)=6x^3-2x^2+x+3$ и $\varphi(x)=x^2-x+1$, что и выше, то при новом способе деления получаем

$$\begin{array}{r|l}
3+x-2x^2+6x^3 & 1-x+x^2 \\ \cline{2-2}
\mp 3\pm 3x\mp 3x^2 & 3+4x-x^2+x^2+2x^4+\ldots \\ \cline{1-1}
4x-5x^2+6x^3 & \\
\pm 4x\pm 4x^2\mp 4x^3 & \\ \cline{1-1}
-x^2+2x^3 & \\
\pm x^2\mp x^3\pm x^4 & \\ \cline{1-1}
x^3+x^4 & \\
\mp x^3\pm x^4\mp x^5 & \\ \cline{1-1}
2x^4-x^5 & \\
\ldots\ldots &
\end{array}$$

Такая же картина будет наблюдаться во всех случаях, когда $b_0\neq 0$ и $r(x)\neq 0$. Лишь в случае, когда $f(x)$ делится без остатка на $\varphi(x)$, ряд (1) обрывается и мы получаем многочлен.

Алгебраические дроби и степенные ряды

При делении многочлена $f(x)$ на многочлен $\varphi(x)$ мы получили бесконечный степенной ряд. Возникает вопрос, как связан этот ряд с алгебраической дробью $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, то есть какой смысл можно придать записи

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{2}$$

Рассмотрим, например, разложение

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (3)$$

Мы не пишем здесь знака равенства, так как не знаем, какой смысл имеет стоящая справа сумма бесконечного числа слагаемых. Чтобы выяснить это, попробуем подставлять в обе части соотношения (3) различные значения x. Сначала положим $x = \frac{1}{10}$. Тогда левая часть соотношения примет значение $\frac{10}{9}$, а правая превратится в бесконечный числовой ряд

$$1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots + 0{,}000\ldots01 + \ldots$$

Так как мы не умеем складывать бесконечно много слагаемых, попробуем взять сначала одно, потом — два, потом — три и т. д. слагаемых. Мы получим такие суммы: $1;\ 1{,}1;\ 1{,}11;\ \ldots;\ \underbrace{1{,}111\ldots1}_{n \text{ единиц}};\ \ldots$ Ясно, что с возрастанием n эти суммы приближаются к значению $\frac{10}{9} = 1{,}11\ldots$, которое приняла левая часть соотношения (3) при $x = \frac{1}{10}$.

То же самое получится, если вместо x подставить в обе части равенства (3) число $\frac{1}{2}$. Левая часть равенства примет значение 2, а правая превратится в бесконечный числовой ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ Беря последовательно одно, два, три, четыре, ... слагаемых, мы получим числа $1;\ 1\frac{1}{2};\ 1\frac{3}{4};\ 1\frac{7}{8},\ \ldots,\ 2 - \frac{1}{2^n}$. Ясно, что с возрастанием n эти числа стремятся к числу 2.

Однако если взять $x = 4$, то левая часть равенства (3) примет значение $-\frac{1}{3}$, а в правой получим ряд $1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^n + \ldots$ Если последовательно складывать члены этого ряда, то получаются суммы 1; 5; 21; 85; ... Эти суммы неограниченно увеличиваются и не приближаются к числу $-\frac{1}{3}$.

Мы встретились, таким образом, с двумя случаями. Чтобы различать эти случаи, введем общее понятие о сходимости и расходимости числового ряда. Пусть задан бесконечный числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{4}$$

Говорят, что он *сходится к числу* b, если разность $b - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ стремится к нулю при неограниченном увеличении n. Иными словами, какое бы число $\varepsilon > 0$ мы ни указали, отклонение суммы $a_1 + \ldots + a_n$ от b, начиная с некоторого номера N, окажется меньше ε:

$$|b - (a_1 + \ldots + a_n)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n \geqslant N.$$

В этом случае число b называют *суммой бесконечного ряда* $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ и пишут

$$b = a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

Если не существует числа b, к которому сходится данный ряд (4), то этот ряд называют *расходящимся*.

Проведенное выше исследование показывает, что

$$\frac{10}{9} = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots + 0{,}00\ldots01 + \ldots,$$

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

в то время как ряд $1 + 4 + 16 + \ldots + 4^n + \ldots$ расходится.

Более тщательное исследование показывает, что если $|x| < 1$, то ряд $1 + x + \ldots + x^n + \ldots$ сходится к $\frac{1}{1-x}$, а если $|x| < 1$, то он расходится.

Чтобы доказать это утверждение, достаточно заметить, что

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

и что при $n \to \infty$ выражение x^{n+1} стремится к нулю, если $|x| < 1$, и к бесконечности, если $|x| \geqslant 1$. При $x = \pm 1$ получаем расходящиеся числовые ряды $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ и $1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$

Итак, если $|x| < 1$, то

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots \tag{5}$$

Отметим, что равенство (5) — это известная из школьного курса математики формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Мы выяснили, таким образом, смысл записи

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+\ldots$$

Она показывает, что для значений x, лежащих в некоторой области, а именно при $|x|<1$, стоящий справа ряд сходится к $\frac{1}{1-x}$. Говорят, что функция $\frac{1}{1-x}$ при $|x|<1$ разлагается в степенной ряд $1+x+\ldots+x^n+\ldots$

Теперь уже можно выяснить и более общий вопрос. Пусть при делении многочлена $f(x)$ на многочлен $\varphi(x)$ получился степенной ряд

$$c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{6}$$

Оказывается, что тогда при достаточно малых значениях x ряд (6) сходится к $f(x)/\varphi(x)$.

Размеры области сходимости зависят от корней знаменателя, то есть чисел, при которых знаменатель обращается в нуль. Именно, если эти числа равны $x_1, \ldots, x_k$ и r — наименьшее из чисел $|x_1|, \ldots, |x_k|$, то ряд сходится в области $|x|<r$. Например, функция $1-x$ обращается в нуль при $x=1$, и потому разложение $\frac{1}{1-x}$ верно лишь при $|x|<1$. А функция $x^2-7x+10$ обращается в нуль при $x_1=2$, $x_2=5$, и потому разложение для $\frac{x-1}{x^2-7x+10}$ сходится при $|x|<2$.

Отметим, что ни один из корней знаменателя не равен нулю, так как мы предположили, что свободный член знаменателя отличен от нуля, и потому $\varphi(0)=b_0\neq 0$.

Иными словами, всегда есть область $|x|<r$, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{7}$$

В степенные ряды можно разлагать не только алгебраические дроби, но и многие другие функции. В математическом анализе доказывают, например, что

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \tag{8}$$

и

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots \tag{9}$$

Для нас будет представлять интерес разложение

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \tag{10}$$

Из формулы (10) видно, что

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{11}$$

Беря достаточно много членов ряда (11), получаем значение e с любой степенью точности. Первые десятичные знаки e имеют вид

2,7182818289045...

Укажем, что ряды (8), (9), (10) сходятся при всех значениях x.

Отметим еще следующее важное утверждение:

Функция $f(x)$ не может иметь двух различных разложений в степенные ряды.

Иными словами, если

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

и

$$f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots,$$

то

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \ \ldots, \ a_n = b_n, \ \ldots$$

Действия над степенными рядами

Перейдем теперь к действиям над степенными рядами. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ разложены в степенные ряды

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{12}$$

и

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots \tag{13}$$

Тогда

$$f(x) + \varphi(x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots) + \\ + (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots).$$

Оказывается, что слагаемые в правой части равенства можно переставить и сгруппировать вместе члены с одинаковыми степенями x (это утверждение совсем не так очевидно, как кажется на первый взгляд — ведь в правой части равенства у нас бесконечные суммы, а в бесконечных суммах переставлять слагаемые можно далеко не всегда). После этой перегруппировки мы получим

$$f(x)+\varphi(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots$$
$$\ldots+(a_n+b_n)x^n+\ldots \quad (14)$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (14), называется суммой степенных рядов (12) и (13).

Посмотрим теперь, как разлагается в степенной ряд произведение функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Мы имеем

$$f(x)\varphi(x)=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)\times$$
$$\times(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots). \quad (15)$$

Оказывается, что, как и в случае многочленов, ряды, стоящие в правой части равенства (15), можно почленно перемножить (мы опускаем доказательство этого утверждения). Найдем ряд, получающийся после почленного перемножения. Свободный член этого ряда равен a_0b_0. Члены, содержащие x, получатся дважды: при умножении a_0 на b_1x и при умножении a_1x на b_0. Они дают

$$a_0b_1x+a_1b_0x=(a_0b_1+a_1b_0)x.$$

Точно так же вычисляем члены, содержащие x^2:

$$a_0b_2x^2+a_1b_1x^2+a_2b_0x^2=(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2.$$

Вообще, коэффициент при x^n имеет вид

$$a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_kb_{n-k}+\ldots+a_nb_0.$$

Таким образом,

$$f(x)\varphi(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots$$
$$\ldots+(a_0b_n+\ldots+a_nb_0)x^n+\ldots \quad (16)$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (16), называется *произведением рядов* (12) и (13).

В частности, возводя ряд (12) в квадрат, получаем

$$f^2(x)=a_0^2+2a_0a_1x+(a_1^2+2a_0a_2)x^2+2(a_0a_3+a_1a_2)x^3+\ldots \quad (17)$$

Посмотрим теперь, как делят друг на друга степенные ряды. Пусть свободный член ряда (13) отличен от нуля. Покажем, что в этом случае существует такой степенной ряд

$$c_0+c_1x+\dots c_nx^n+\dots, \qquad (18)$$

что

$$(b_0+b_1x+\dots+b_nx^n+\dots)\times$$
$$\times(c_0+c_1x+\dots+c_nx^n+\dots)=$$
$$=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots \qquad (19)$$

Для доказательства перемножим ряды в левой части этого равенства. Мы получим ряд

$$b_0c_0+(b_0c_1+b_1c_0)x+\dots+(b_0c_n+\dots+b_nc_0)x^n+\dots$$

Для того чтобы этот ряд совпадал с рядом (12), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$b_0c_0=a_0,$$
$$b_0c_1+b_1c_0=a_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$b_0c_n+\dots+b_nc_0=a_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Эти равенства дают бесконечную систему уравнений для отыскания коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$. Из первого уравнения системы получаем $c_0=\frac{a_0}{b_0}$. Подставим полученное значение во второе уравнение. Мы получим уравнение

$$b_0c_1=a_1-\frac{b_1a_0}{b_0},$$

из которого находим, что $c_1=\frac{a_1b_0-b_1a_0}{b_0^2}$. Вообще, если уже найдены коэффициенты $c_0, \dots, c_{n-1}$, то для отыскания c_n имеем уравнение

$$b_0c_n=a_n-b_1c_{n-1}-\dots-b_nc_0.$$

Это уравнение разрешимо, поскольку $b_0\neq0$.

Итак, мы доказали существование ряда (18), удовлетворяющего соотношению (19). Ряд (18) называют частным при делении рядов (12) и (13). Можно доказать, что он получается при разложении функции $f(x)/\varphi(x)$. Таким образом, степенные ряды можно складывать, умножать и делить (последнее — при условии, что свободный член делителя отличен от нуля). Эти действия соответствуют действиям над разлагаемыми функциями.

Отметим, что теперь мы можем иначе истолковать смысл разложения

$$\frac{a_0+\ldots+a_nx^n}{b_0+\ldots+b_mx^m}=c_0+c_1+\ldots+c_kx^k+\ldots \quad (20)$$

Оно означает, что ряд $c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots$ получается при делении конечного степенного ряда $a_0+\ldots+$ $+a_nx^n$ на конечный степенной ряд $b_0+\ldots+b_mx^m$. Иными словами, это равенство означает, что

$$(b_0+\ldots+b_mx^m)(c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots)= \\ =a_0+\ldots+a_nx^n, \quad (21)$$

где произведение в левой части равенства определяется по формуле вида (16).

Применение степенных рядов для доказательства тождеств

С помощью степенных рядов можно доказывать многие тождества. Для этого берут некоторую функцию и двумя способами разлагают ее в степенной ряд. Поскольку функция может быть представлена лишь единственным образом в виде степенного ряда, то коэффициенты при одинаковых степенях x в обоих рядах должны совпадать. Это и приводит к доказываемому тождеству.

Рассмотрим, например, известное нам разложение

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

Возводя обе части этого разложения в квадрат, получаем

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots \quad (22)$$

Если заменить здесь x на $-x$, то получим, что

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-\ldots+(-1)^n(n+1)x^n+\ldots \quad (22')$$

Перемножив разложения (22) и (22′), выводим, что

$$\frac{1}{(1-x)^2}\frac{1}{(1+x)^2}=1+[1(-2)+2\cdot 1]x+$$
$$+[1\cdot 3+2(-2)+3\cdot 1]x^2+\ldots$$
$$\ldots+\left[1(-1)^n(n+1)+2(-1)^{n-2}n+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^n(n+1)\cdot 1\right]x^n+\ldots \qquad (23)$$

Очевидно, что коэффициенты при нечетных степенях x обращаются в нуль (каждое слагаемое дважды входит в эти коэффициенты с противоположными знаками). Коэффициент же при x^{2n} равен

$$1(2n+1)-2\cdot 2n+3(2n-1)-\ldots+(2n+1).$$

Но функцию $\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}$ можно разложить в степенной ряд и иным образом. Мы имеем

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}=\frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

А разложение для $\frac{1}{(1-x^2)^2}$ получается из разложения (22), если заменить в нем x на x^2:

$$\frac{1}{(1-x^2)^2}=1+2x^2+3x^4+\ldots+(n+1)x^{2n}+\ldots \qquad (24)$$

Мы знаем, что никакая функция не может иметь двух различных разложений в степенные ряды. Поэтому коэффициент при x^{2n} в разложении (23) должен равняться коэффициенту при x^{2n} в разложении (24). Отсюда вытекает следующее тождество:

$$1(2n+1)-2\cdot 2n+3(2n-1)-\ldots$$
$$\ldots+(2n+1)\cdot 1=n+1.$$

Производящие функции

А теперь мы уже можем перейти к основной теме этой главы — понятию производящей функции. Пусть дана некоторая последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Образуем степенной ряд

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Если этот ряд сходится в какой-то области к функции $f(x)$, то эту функцию называют *производящей* для последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Например, из формулы

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+\ldots$$

вытекает, что функция $\frac{1}{1-x}$ является производящей для последовательности чисел 1, 1, 1, ..., 1, ... А формула (22) показывает, что для последовательности чисел 1, 2, 3, 4, ..., n, ... производящей является функция $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Нас будут интересовать производящие функции для последовательностей $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, так или иначе связанных с комбинаторными задачами. С помощью этих функций удается получать самые разные свойства этих последовательностей. Кроме того, мы рассмотрим, как связаны производящие функции с решением рекуррентных соотношений.

Бином Ньютона

Сейчас мы получим производящую функцию для конечной последовательности чисел $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.

Из начальной алгебры известно, что

$$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$$

и

$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3.$$

Эти равенства являются частными случаями более общей формулы, дающей разложение для $(a+x)^n$. Запишем $(a+x)^n$ в виде

$$(a+x)^n=\underbrace{(a+x)(a+x)\ldots(a+x)}_{n \text{ раз}}. \qquad (25)$$

Раскроем скобки в правой части этого равенства, причем будем записывать все множители в том порядке, в котором они нам встретятся. Например, $(a+x)^2$ запишем в виде

$$(a+x)^2=(a+x)(a+x)=aa+ax+xa+xx, \qquad (26)$$

а $(a+x)^3$ — в виде

$$(a+x)^3=(a+x)(a+x)(a+x)=$$
$$=aaa+aax+axa+axx+xaa+xax+xxa+xxx. \quad (27)$$

Видно, что в формулу (26) входят все размещения с повторениями, составленные из букв x и a по две буквы в каждом размещении, а в формулу (27) — размещения с повторениями из тех же букв, но состоящие из трех букв каждое. То же самое будет и в общем случае — *после раскрытия скобок в формуле* (25) *мы получим всевозможные размещения с повторениями букв x и a, состоящие из n элементов.*

Приведем теперь подобные члены. Подобными будут члены, содержащие одинаковое количество букв x (тогда и букв a в них будет поровну). Найдем, сколько будет членов, в которые входит k букв x и, следовательно, $n-k$ букв a. Эти члены являются перестановками с повторениями, составленными из k букв x и $n-k$ букв a. Поэтому по формуле (5) главы II их число равно

$$P(k,\ n-k)=C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Отсюда вытекает, что после приведения подобных членов выражение $x^k a^{n-k}$ войдет с коэффициентом $C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Итак, мы доказали, что

$$(a+x)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}x+\ldots$$
$$\ldots+C_n^ka^{n-k}x^k+\ldots+C_n^nx^n. \quad (28)$$

Равенство (28) принято называть формулой бинома Ньютона. Если положить в этом равенстве $a=1$, то получим

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^nx^n. \quad (29)$$

Мы видим, что $(1+x)^n$ является производящей функцией для чисел C_n^k, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

С помощью этой производящей функции можно сравнительно просто доказать многие свойства чисел C_n^k, которые были получены ранее с помощью довольно хитрых рассуждений.

Докажем сначала, что

$$C_{n+1}^{k}=C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1}. \qquad (30)$$

Для этого достаточно умножить обе части равенства (29) на $1+x$. Мы получим, что

$$(1+x)^{n+1}=$$
$$=(C_{n}^{0}+C_{n}^{1}x+\ldots+C_{n}^{k}x^{k}+\ldots+C_{n}^{n}x^{n})(1+x).$$

Выражение в левой части этого равенства снова разложим по биному Ньютона. Только придется заменить в формуле бинома n на $n+1$. Поэтому коэффициентом при x^k будет C_{n+1}^{k}. В правой же части при раскрытии скобок член, содержащий x^k, появится дважды: при умножении $C_{n}^{k}x^{k}$ на 1 и при умножении $C_{n}^{k-1}x^{k-1}$ на x. Поэтому коэффициент при x^k в правой части равенства имеет вид $C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1}$. Но слева и справа должен стоять один и тот же многочлен. Поэтому коэффициенты при x^k слева и справа должны быть одинаковыми. Это и доказывает, что $C_{n+1}^{k}=C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1}$.

На стр. 53 мы доказали это равенство. Но там потребовались комбинаторные рассуждения. Точно так же сравнительно сложно на стр. 53 было доказано, что

$$2^{n}=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+\ldots+C_{n}^{k}+\ldots+C_{n}^{n}. \qquad (31)$$

А с помощью формулы (29) доказательство проходит мгновенно: достаточно положить $x=1$. А если положить в этом равенстве $x=-1$, то получим, что

$$0=C_{n}^{0}-C_{n}^{1}+C_{n}^{2}-C_{n}^{3}+\ldots+(-1)^{k}C_{n}^{k}+\ldots+(-1)^{n}C_{n}^{n}.$$

Иными словами, сумма значений C_n^k с четными k равна сумме значений C_n^k с нечетными k:

$$C_{n}^{0}+C_{n}^{2}+C_{n}^{4}+\ldots+C_{n}^{2m}+\ldots$$
$$\ldots=C_{n}^{1}+C_{n}^{3}+\ldots+C_{n}^{2m+1}+\ldots \qquad (32)$$

Обе суммы конечны, и обрываются, когда $2m$, соответственно $2m+1$, станет больше n.

Любопытный результат получится, если положить в равенстве (29) $x=i$, $n=4m$. Простой подсчет показывает, что $(1+i)^4=-4$. Поэтому $(1+i)^{4m}=(-4)^m$. Мы получаем, таким образом, равенство

$$(-4)^m=C_{4m}^0+C_{4m}^1 i+C_{4m}^2 i^2+C_{4m}^3 i^3+$$
$$+C_{4m}^4 i^4+\ldots+C_{4m}^{4m} i^{4m}=$$
$$=C_{4m}^0+C_{4m}^1 i-C_{4m}^2-C_{4m}^3 i+C_{4m}^4+\ldots+C_{4m}^{4m}.$$

Отделяя в этом равенстве действительную и мнимые части, приходим к тождествам

$$C_{4m}^1-C_{4m}^3+C_{4m}^5-\ldots-C_{4m}^{4m-1}=0, \qquad (33)$$

$$C_{4m}^0-C_{4m}^2+C_{4m}^4+\ldots+C_{4m}^{4m}=(-4)^m. \qquad (34)$$

Разберите сами, какие тождества получатся, если положить $n=4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3$.

Легко доказать с помощью производящей функции и равенство

$$C_{n+m}^s=C_n^0 C_m^s+C_n^1 C_m^s+\ldots+C_n^k C_m^{s-k}+\ldots+C_n^n C_m^{s-n} \qquad (35)$$

(при $s-k<0$ здесь положено $C_m^{s-k}=0$); поэтому на самом деле k меняется от 0 до наименьшего из чисел m, n). Для доказательства надо взять разложения

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1 x+\ldots+C_n^k x^k+\ldots+C_n^n x^n$$

и

$$(1+x)^m=C_m^0+C_m^1 x+\ldots+C_m^s x^s+\ldots+C_m^m x^m$$

и перемножить левые и правые части этих равенств. Мы получим, что

$$(1+x)^{n+m}=[C_n^0+C_n^1 x+\ldots+C_n^k x^k+\ldots+C_n^n x^n]\times$$
$$\times[C_m^0+C_m^1 x+\ldots+C_m^s x^s+\ldots+C_m^m x^m].$$

А теперь применим к левой части формулу бинома Ньютона (для показателя $n+m$), а в правой части раскроем скобки. Если сравнить коэффициенты при x^s слева и справа, как раз получим равенство (35). Частным случаем этого равенства является

$$C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2 \qquad (35')$$

(напомним, что $C_n^k=C_n^{n-k}$).

Полиномиальная формула

Применяя формулу бинома Ньютона, можно разложить и более сложные выражения, например такие, как $(x+y+z)^4$. Именно,

$$(x+y+z)^4=[(x+y)+z]^4=$$
$$=(x+y)^4+C_1^1(x+y)^3z+C_4^2(x+y)^2z^2+$$
$$+C_4^3(x+y)z^3+C_4^4z^4.$$

Разложим теперь $(x+y)^4$, $(x+y)^3$, $(x+y)^2$ снова по формуле бинома Ньютона. Мы получим, что

$$(x+y+z)^4=x^4+y^4+z^4+4x^3y+4x^3z+4xy^3+$$
$$+4y^3z+4xz^3+4yz^3+6x^2y^2+6x^2z^2+$$
$$+6y^2z^2+12x^2yz+12xy^2z+12xyz^2. \tag{36}$$

Но такой способ слишком сложен. С его помощью трудно сразу ответить на вопрос: с каким коэффициентом входит в разложение $(x+y+z)^9$ член $x^2y^4z^3$? Желательно поэтому вывести формулу, сразу дающую разложение для выражения

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n. \tag{37}$$

Эту формулу нетрудно угадать. При доказательстве формулы бинома Ньютона мы видели, что в разложении $(a+x)^n$ член x^ka^{n-k} входит с коэффициентом $P(k,\ n-k)$. Можно предположить, что в разложении $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$ коэффициентом при $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$ будет $P(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m)$. Мы докажем сейчас, что дело обстоит именно так.

В самом деле, запишем $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$ в виде произведения n сомножителей и раскроем скобки, выписывая все сомножители в порядке их появления. Ясно, что при этом получатся всевозможные размещения с повторениями, составленные из букв x_1, x_2, $\ldots$, x_m, такие, что в каждое размещение входит n букв. Но некоторые из этих размещений дадут подобные члены. Так будет, если в первое размещение каждая буква входит столько же раз, сколько и во второе. Поэтому, чтобы найти коэффициент при $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$, надо сосчитать, сколько размещений с повторениями содержат k_1 раз букву x_1, k_2

раз букву $x_2, \ldots, k_m$ раз букву x_m. Ясно, что каждое такое размещение является перестановкой с повторениями из k_1 букв x_1, k_2 букв $x_2, \ldots, k_m$ букв x_m. Число таких перестановок мы обозначали $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Итак, действительно, коэффициентом при $x_1^{k_1}x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$ в разложении выражения (37) служит $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ (где, разумеется, $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$ — ведь в каждый член разложения входит по одному элементу из каждой скобки, а общее число перемножаемых скобок равно n).

Доказанную нами формулу можно записать так:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n = \\ =\sum P(k_1, k_2, \ldots, k_m)x_1^{k_1}x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}, \qquad (38)$$

где сумма распространена на всевозможные разбиения $k_1+k_2+\ldots+k_m$ числа n на m целых неотрицательных слагаемых. Напомним, что

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m)=\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}. \qquad (39)$$

Ясно, что если числа $s_1, \ldots, s_m$ получаются из чисел $k_1, \ldots, k_m$ перестановкой, то $P(s_1, \ldots, s_m)=P(k_1, \ldots, k_m)$. Поэтому, например, в разложении (36) коэффициенты при x^2yz и xyz^2 одинаковы. Это замечание облегчает выписывание членов разложения (37). Достаточно найти коэффициенты для таких разбиений $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$, что $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_m$, а потом переставлять показатели всеми возможными способами.

Например, вычислим $(x+y+z)^5$. Если не учитывать порядок слагаемых, то число 5 можно разбить на 3 слагаемых пятью способами:

$$5=5+0+0,\quad 5=4+1+0,\quad 5=3+2+0,$$
$$5=3+1+1,\quad 5=2+2+1.$$

Но $P(5, 0, 0)=1$, $P(4, 1, 0)=5$, $P(3, 2, 0)=10$, $P(3, 1, 1)=$ $=20$, $P(2, 2, 1)=30$. Поэтому

$$(x+y+z)^5=x^5+y^5+z^5+5x^4y+5xy^4+5x^4z+5xz^4+ \\ +5y^4z+5yz^4+10x^3y^2+10x^2y^3+10x^3z^2+ \\ +10x^2z^3+10y^3z^2+10y^2z^3+20x^3yz+20xy^3z+ \\ +20xyz^3+30x^2y^2z+30x^2yz^2+30xy^2z^2.$$

Формула (38) позволяет легко доказать некоторые свойства чисел $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Например, если положить в этой формуле $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1$, то получим, что

$$m^n = \sum P(k_1, \ldots, k_m). \tag{40}$$

Здесь сумма распространена на все разбиения числа n на m неотрицательных целых слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$, и порядок слагаемых учитывается.

Далее, если умножить обе части равенства (1) на $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, применить к левой части аналогичное разложение, а в правой раскрыть скобки, то получим для $P(k_1, \ldots, k_m)$ следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = P(k_1 - 1, k_2, \ldots, k_m) + \\ + P(k_1, k_2 - 1, \ldots, k_m) + \ldots \\ \ldots + P(k_1, k_2, \ldots, k_m - 1). \end{aligned} \tag{41}$$

Если же перемножить обе части разложений

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum P(k_1, k_2, \ldots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$$

и

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^s = \sum P(l_1, l_2, \ldots, l_m) x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_m^{l_m}$$

и сравнить коэффициенты в обеих частях при $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m}$, то получим тождество

$$\begin{aligned} P(r_1, r_2, \ldots, r_m) = \\ = \sum_{k_p + l_p = r_p} P(k_1, k_2, \ldots, k_m) P(l_1, l_2, \ldots, l_m). \end{aligned} \tag{42}$$

Здесь в правой части суммирование распространено на все целые неотрицательные числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$; $l_1, l_2, \ldots, l_m$ такие, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, $l_1 + l_2 + \ldots + l_m = s$ и $k_1 + l_1 = r_1$, $k_2 + l_2 = r_2$, $\ldots$, $k_m + l_m = r_m$. Мы предоставляем читателю подробно провести соответствующие выкладки.

Разумеется, формулы (40)—(42) можно было бы получить и не пользуясь производящей функцией (38). Но в этом случае пришлось бы проводить геометрические рассуждения, аналогичные примененным на стр. 138, но не на плоскости, а в n-мерном пространстве. Применение же производящей функции позволяет получить эти тождества автоматически, выполняя лишь несложные алгебраические преобразования.

Ряд Ньютона

Мы назвали, как это обычно делают в школе, формулу для $(a+x)^n$ *биномом Ньютона*. Это название с точки зрения истории математики неверно. Формулу для $(a+x)^n$ хорошо знали среднеазиатские математики Омар Хайям, Гиясэддин и др. В Западной Европе задолго до Ньютона ее знал Блэз Паскаль. Заслуга же Ньютона была в ином — ему удалось обобщить формулу для $(x+a)^n$ на случай нецелых показателей. Именно, он доказал, что *если a — положительное число и $|x|<a$, то для любого действительного значения α имеет место равенство*

$$(x+a)^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}a^{\alpha-2}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}a^{\alpha-k}x^k + \ldots \qquad (43)$$

Только теперь получилось не конечное число слагаемых, а бесконечный ряд. В случае, когда n — натуральное число, скобка $(n-n)$ обращается в нуль. Но эта скобка входит в коэффициенты всех членов, начиная с $(n+2)$-го, и потому все эти члены разложения равны нулю. Поэтому при натуральном n ряд (43) превращается в конечную сумму.

Мы не будем доказывать формулу (43) для всех значений α и рассмотрим лишь случай, когда α — целое отрицательное число, $\alpha=-n$. В этом случае подлежащая доказательству формула принимает следующий вид:

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}x + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}a^{-n-2}x^2 -$$

$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-n-3}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\ldots k}a^{-n-k}x^k + \ldots \qquad (44)$$

Иначе это равенство можно переписать так:

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-n}=1-C_n^1\left(\frac{x}{a}\right)+C_{n+1}^2\left(\frac{x}{a}\right)^2-$$
$$-C_{n+2}^3\left(\frac{x}{a}\right)^3+\ldots+(-1)^k C_{n+k-1}^k\left(\frac{x}{a}\right)^k+\ldots \qquad (44')$$

(ведь $C_{n+k-1}^k=\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\ldots k}$).

Нам будет удобнее заменить $\frac{x}{a}$ на $-t$ и доказывать вместо (44′) следующее равенство:

$$(1-t)^{-n}=1+C_n^1 t+C_{n+1}^2 t^2+\ldots+C_{n+k-1}^k t^k+\ldots \qquad (45)$$

Проведем доказательство с помощью индукции по n. При $n=1$ имеем $C_{n+k-1}^k=C_k^k=1$ и потому доказываемое соотношение принимает следующий вид:

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^k+\ldots \qquad (46)$$

Но это — известная формула для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии (напомним, что у нас $|t|=\left|\frac{x}{a}\right|<1$).

Предположим теперь, что уже доказано равенство (45), и покажем, что из него следует равенство

$$(1-t)^{-n-1}=1+C_{n+1}^1 t+C_{n+2}^2 t^2+\ldots+C_{n+k}^k t^k+\ldots \qquad (47)$$

Для этого умножим обе части доказываемого равенства (47) на $1-t$. Если после этого мы получим верное равенство, то и равенство (47) имеет место. Но после умножения на $1-t$ мы получаем

$$(1-t)^{-n}=\left[1+C_{n+1}^1 t+C_{n+2}^2 t+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+C_{n+k-1}^{k-1}t^{k-1}+C_{n+k}^k t^k+\ldots\right](1-t).$$

Раскроем скобки в правой части и приведем подобные члены. Слагаемые, содержащие t^k, появятся дважды: когда $C_{n+k}^k t^k$ умножается на 1 и когда $C_{n+k-1}^{k-1}t^{k-1}$ умножается на $-t$. Поэтому коэффициент при t^k в правой части равен

$$C_{n+k}^k-C_{n+k-1}^{k-1}=C_{n+k-1}^k$$

(см. формулу (11) на стр. 53).

Но по предположению индукции коэффициент при t^k в разложении $(1-t)^{-n}$ как раз равен C_{n+k-1}^k. Так как после умножения на $1-t$ мы получили верное равенство, то и доказываемое равенство (45) верно.

Если читатель не хочет идти от доказываемого равенства к уже известному соотношению, а предпочитает обратный путь, следует умножить обе части равенства (45) на соответствующие члены соотношения (46). Мы получим, что

$$(1-t)^{-n-1}=$$
$$=\left(1+C_n^1t+C_{n+1}^2t^2+\ldots+C_{n+k-1}^kt^k+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(1+t+t^2+\ldots+t^k+\ldots\right).$$

А теперь надо раскрыть скобки и воспользоваться тождеством

$$C_{n-1}^0+C_n^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+k-1}^k=C_{n+k}^k$$

(см. стр. 54). Мы придем в результате к доказываемому соотношению (47).

Итак, равенство (45) доказано. Напомним еще раз, что оно справедливо только при $|t|<1$. Если неосторожный читатель попробует положить в обеих частях равенства $t=-1$ и выведет на основании этого «замечательную» формулу

$$\frac{1}{2^n}=1-C_n^1+C_{n+1}^2-C_{n+2}^3+\ldots+(-1)^kC_{n+k-1}^k+\ldots, \tag{48}$$

то он совершит серьезную ошибку — ведь справа написана сумма целых чисел, и эта сумма никак не даст дробного числа $1/2^n$.

В XVIII веке, когда теория бесконечных рядов еще не была детально изучена, такие ошибки делали и известные математики. Понадобились десятилетия напряженных исследований для того, чтобы точно понять, что такое сумма бесконечного ряда, когда она существует, а когда нет. Впрочем, следует сказать, что в конце XIX века понятие суммы бесконечного ряда было значительно обобщено, и существуют такие определения, при которых формула (48) справедлива. Но эти вопросы выходят за рамки нашей книги.

Сравним доказанное нами разложение

$$(1+t)^{-n}=1-C_n^1t+C_{n+1}^2t^2-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k C_{n+k-1}^k t^k+\ldots \quad (49)$$

с формулой

$$(1+t)^n=1+C_n^1t+C_n^2t^2+\ldots+C_n^kt^k+\ldots+t^n. \quad (50)$$

Мы снова приходим к выводу, что при обобщении символа C_n^k на отрицательные значения n надо положить

$$C_{-n}^k=(-1)^k C_{n+k-1}^k$$

(см. стр. 128). При отрицательных же значениях k $C_n^k=0$, поскольку в разложения (49) и (50) не входят слагаемые с отрицательными степенями t. По тем же соображениям $C_n^k=0$ при $0\leqslant n<k$.

Извлечение квадратных корней

Мы доказали формулу Ньютона при всех целых значениях показателя. Но, как уже говорилось, эта формула верна не только для целых, но и для дробных (и даже для иррациональных) значений показателя. Мы не будем здесь доказывать ее при этих значениях, а лишь выпишем разложения при $n=\frac{1}{2}$ и $n=-\frac{1}{2}$.

При $n=\frac{1}{2}$ формула Ньютона принимает вид

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{1\cdot 2\ldots k}x^k+\ldots \quad (51)$$

Преобразуя это выражение, получаем

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2k-3)}{2\cdot 4\ldots 2k}x^k+\ldots$$

Точно так же при $n=-\frac{1}{2}$ выводим, что

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}x^k+\ldots \quad (52)$$

Полученные формулы можно записать иначе. Для этого заметим, что

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}=\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}=\frac{1}{2^{2k}}C_{2k}^k.$$

Поэтому

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^2}C_2^1x+\frac{1}{2^4}C_4^2x^2-\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^k}{2^{2k}}C_{2k}^kx^k+\ldots \quad (53)$$

Точно так же получаем, что

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 2^3}C_2^1x^2+$$
$$+\frac{1}{3\cdot 2^5}C_4^2x^3-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{2k-2}^{k-1}x^k+\ldots \quad (54)$$

Эти выражения сходятся в области $|x|<1$. С их помощью можно извлекать с любой степенью точности квадратные корни. Например,

$$\sqrt{30}=\sqrt{25+5}=5\sqrt{1+0,2}=5(1+0,2)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=5\left[1+\frac{1}{2}\cdot 0,2-\frac{1}{2\cdot 4}0,2^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 0,2^3-\ldots\right]=5,4775\ldots$$

Однако нас будут интересовать не приложения указанных формул к извлечению корней из чисел, а соотношения между биномиальными коэффициентами, которые вытекают из полученных разложений. Чтобы получить эти соотношения, возведем обе части равенства (53) в квадрат. По правилу умножения степенных рядов получаем, что коэффициент при x^k в правой части имеет вид

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\left[C_{2k}^k + C_2^1 C_{2k-2}^{k-1} + C_4^2 C_{2k-4}^{k-2} + \ldots + C_{2k}^k\right].$$

В левой же части равенства получаем

$$\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right]^2 = \frac{1}{1+x}.$$

Но мы знаем, что

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^k x^k + \ldots$$

Сравнивая коэффициенты при степенях x^k в обеих частях равенства, приходим к тождеству

$$C_{2k}^k + C_2^1 C_{2k-2}^{k-1} + C_4^2 C_{2k-4}^{k-2} + \ldots + C_{2k}^k = 2^{2k}. \quad (55)$$

Аналогичные рассуждения, примененные к равенству (54), дают тождество

$$\frac{C_{2k-4}^{k-2}}{1\cdot(k-1)} + \frac{C_2^1 C_{2k-6}^{k-3}}{2(k-2)} + \frac{C_4^2 C_{2k-8}^{k-4}}{3(k-3)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{C_{2k-4}^{k-2}}{(k-1)\cdot 1} = \frac{C_{2k-2}^{k-1}}{k}, \quad (56)$$

справедливое при $k \geqslant 2$.

Далее, перемножая почленно разложения (53) и (54), получаем

$$1 = \left[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 2^3}C_2^1 x^2 + \frac{1}{3\cdot 2^5}C_4^2 x^3 - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{2k-2}^{k-1}x^k + \ldots\right]\left[1 - \frac{1}{2^2}C_2^1 x +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^4}C_4^2 x^2 + \ldots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}}C_{2k}^k x^k + \ldots\right]. \quad (57)$$

Раскроем скобки в правой части этого равенства. Мы получим степенной ряд, причем из равенства (57) следует, что все коэффициенты этого ряда (кроме свободного члена) равны нулю. Отсюда получаем тождество

$$C_{2k-2}^{k-1}+\frac{1}{2}C_2^1C_{2k-4}^{k-2}+\frac{1}{3}C_4^2C_{2k-6}^{k-3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{k}C_{2k-2}^{k-1}=\frac{1}{2}C_{2k}^k, \quad (58)$$

справедливое при $k\geqslant 1$.

Наконец, заметим, что

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 2^3}C_2^1x^2+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{2k-2}^{k-1}x^k+\ldots\right)\times$$
$$\times(1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^kx^k+\ldots)=$$
$$=1-\frac{1}{2^2}C_2^1x+\frac{1}{2^4}C_4^2x^2-\ldots+\frac{(-1)^k}{2^{2k}}C_{2k}^kx^k+\ldots$$

Раскрывая скобки в обеих частях этого равенства и сравнивая коэффициенты при x^k в обеих частях, приходим к тождеству

$$1-\frac{1}{2\cdot 2^2}C_2^1-\frac{1}{3\cdot 2^4}C_4^2-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{k\cdot 2^{2k-2}}C_{2k-2}^{k-1}=\frac{1}{2^{2k-1}}C_{2k}^k. \quad (59)$$

Производящие функции и рекуррентные соотношения

Мы уже говорили, что теория производящих функций тесно связана с рекуррентными соотношениями. Вернемся снова к делению многочленов. Пусть

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

и

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$$

— два многочлена, причем $b_0\neq 0$. Мы будем, кроме того, предполагать, что $n<m$, то есть что алгебраическая дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ правильна (в противном случае мы всегда можем выделить из нее целую часть).

Мы знаем, что если

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots, \qquad (60)$$

то

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=$$
$$=(b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m)(c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots).$$

Раскроем в правой части этого равенства скобки и сравним коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Сначала мы получим m соотношений такого вида:

$$\begin{gathered} b_0c_0=a_0,\\ b_0c_1+b_1c_0=a_1,\\ b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0=a_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_0c_{m-1}+b_1c_{m-2}+\ldots+b_{m-1}c_0=a_{m-1} \end{gathered} \qquad (61)$$

(если $n<m-1$, то мы считаем, что $a_{n+1}=\ldots=a_{m-1}=0$). А дальше все соотношения имеют один и тот же вид:

$$b_0c_{m+k}+b_1c_{m+k-1}+\ldots+b_mc_k=0, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots \qquad (62)$$

(ведь в $f(x)$ нет членов, содержащих x^m, x^{m+1} и т. д.). Таким образом, коэффициенты c_0, c_1, ..., c_k, ... ряда (60) удовлетворяют рекуррентному соотношению (62). Коэффициенты этого соотношения зависят лишь от знаменателя дроби. Числитель же дроби нужен для нахождения первых членов c_0, c_1, ..., c_{m-1} рекуррентной последовательности.

Обратно, если дано рекуррентное соотношение (62) и заданы члены c_0, c_1, ..., c_{m-1}, то мы сначала по формулам (61) вычисляем значения a_0, ..., a_{m-1}. А тогда производящей функцией для последовательности чисел c_0, c_1, ..., c_k, ... является алгебраическая дробь

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}. \qquad (63)$$

На первый взгляд кажется, что мы мало выиграли при замене рекуррентного соотношения производящей функцией. Ведь все равно придется делить числитель на знаменатель, а это приведет к тому же самому рекуррентному соотношению (62). Но дело в том, что над дробью (63) можно выполнять некоторые алгебраические преобразования, а это облегчит отыскание чисел c_k.

Разложение на элементарные дроби

Мы покажем сейчас, как с помощью алгебраических преобразований производящей функции можно решать рекуррентные соотношения. Предположим, что знаменатель дроби (63) разложен на множители первой степени

$$\varphi(x) = b_m(x-\alpha_1)^r \dots (x-\alpha_k)^s.$$

Отметим, что для этого надо предварительно решить уравнение $b_0+\dots+b_m x^m=0$, то есть характеристическое уравнение соотношения (62).

Тогда ясно, что дробь (63) получилась в результате приведения к одному знаменателю следующих элементарных дробей:

$$\begin{array}{llll} \dfrac{A_{11}}{(x-\alpha_1)^r}, & \dfrac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^{r-1}}, & \dots, & \dfrac{A_{1,\,r-1}}{(x-\alpha_1)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{A_{k1}}{(x-\alpha_k)^s}, & \dfrac{A_{k2}}{(x-\alpha_k)^{s-1}}, & \dots, & \dfrac{A_{k,\,s-1}}{x-\alpha_k}. \end{array}$$

Иными словами,

$$\frac{a_0+\dots+a_{m-1}x^{m-1}}{b_m(x-\alpha_1)^r\dots(x-\alpha_k)^s} = \frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)^r}+\dots$$
$$\dots+\frac{A_{1,\,r-1}}{x-\alpha_1}+\dots+\frac{A_{k1}}{(x-\alpha_k)^s}+\dots+\frac{A_{k,\,s-1}}{x-\alpha_k}. \quad (64)$$

Нам неизвестны здесь лишь коэффициенты $A_{11}, \dots, A_{k,\,s-1}$. Чтобы найти эти коэффициенты, надо умножить обе части равенства (64) на знаменатель $(x-\alpha_1)^r\dots(x-\alpha_k)^s$, раскрыть скобки и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x. Из получившейся системы уравнений мы и находим искомые коэффициенты.

Иногда удается обойтись и без решений системы уравнений. Пусть, например, надо разложить дробь

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{x^4-5x^2+4}.$$

Так как

$$x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=$$
$$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2),$$

то это разложение должно иметь вид

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=$$
$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}.$$

Приводя к одному знаменателю, получаем, что

$$x^3-2x^2+6x+1=A(x+1)(x-2)(x+2)+$$
$$+B(x-1)(x-2)(x+2)+$$
$$+C(x-1)(x+1)(x+2)+D(x-1)(x+1)(x-2).$$

Это равенство должно выполняться при всех значениях x. Но при $x=1$ все слагаемые в правой части равенства, кроме первого, обращаются в нуль, и мы получаем $-6A=6$. Поэтому $A=-1$. Точно так же, полагая $x=-1$, $x=2$, $x=-2$, находим $B=-\frac{4}{3}$, $C=\frac{13}{12}$, $D=\frac{9}{4}$. Таким образом,

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{x^4-5x^2+4}=-\frac{1}{x-1}-\frac{4}{3(x+1)}+$$
$$+\frac{13}{12(x-2)}+\frac{9}{4(x+2)}. \quad (65)$$

Для дробей вида $\frac{A}{(x-\alpha)^r}$ разложение в ряд получается по формуле Ньютона. Например,

$$\frac{13}{12(x-2)}=-\frac{13}{24}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}=$$
$$=-\frac{13}{24}\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right].$$

Применяя такое разложение ко всем дробям в равенстве (65), получаем, что

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{x^4-5x^2+4}=(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)-$$

$$-\frac{4}{3}(1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots)-$$

$$-\frac{13}{24}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{9}{8}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{2^n}+\ldots\right).$$

Группируя члены с одинаковыми степенями x, получаем, что коэффициент при x^n выражается формулой

$$c_n=1-\frac{4}{3}(-1)^n-\frac{13}{24\cdot 2^n}+\frac{9(-1)^n}{8\cdot 2^n}.$$

Мы уже знаем, что задача о разложении алгебраической дроби в степенной ряд равносильна задаче о решении некоторого рекуррентного соотношения при заданных начальных условиях. Таким образом, с помощью разложения дробей на элементарные и последующего разложения полученных элементарных дробей в степенные ряды можно решать линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.

Итак, если задано рекуррентное соотношение (62) и значения $c_0, \ldots, c_{m-1}$, то сначала надо по формулам (61) найти значения $a_0, \ldots, a_{m-1}$. Они дают коэффициенты многочлена, стоящего в числителе дроби

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots$$

Знаменатель же этой дроби равен $b_0+\ldots+b_mx^m$.

Найденную дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ надо разложить на элементарные дроби, после чего каждую элементарную дробь разложить в степенной ряд по формуле Ньютона. Коэффициент при x^k в полученном ряде и дает значение c_k.

Решим, например, рекуррентное соотношение

$$c_{k+2}-5c_{k+1}+6c_k=0 \qquad (66)$$

при начальных условиях $c_0=1$, $c_1=-2$. Здесь $b_0=1$, $b_1=-5$, $b_2=6$. Из формулы (61) получаем, что

$$a_0=b_0c_0=1, \quad a_1=b_0c_1+b_1c_0=-7.$$

Поэтому числитель дроби

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k + \ldots$$

равен $1-7x$. Знаменатель же этой дроби сразу получается из соотношения (60). Он имеет вид x^2-5x+6. Значит, для отыскания решения нам надо разложить в степенной ряд дробь

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6}.$$

Но $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, и потому

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6} = \frac{1-7x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получаем

$$1-7x = A(x-3) + B(x-2).$$

Полагая $x=3$, находим $B=-20$, а полагая $x=2$, находим $A=13$. Значит,

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6} = \frac{13}{x-2} - \frac{20}{x-3} =$$

$$= -\frac{13}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} + \frac{20}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1} =$$

$$= -\frac{13}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right) +$$

$$+ \frac{20}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ldots\right).$$

Поэтому

$$c_n = -\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{2^n} + \frac{20}{3}\cdot\frac{1}{3^n} = -\frac{13}{2^{n+1}} + \frac{20}{3^{n+1}}.$$

Об одном нелинейном рекуррентном соотношении

При решении задачи о разбиении последовательности мы пришли к рекуррентному соотношению

$$T_n = T_0T_{n-1} + T_1T_{n-2} + \ldots + T_{n-1}T_0, \qquad (67)$$

где $T_0=1$ (см. стр. 160). Это соотношение было решено очень искусственным образом — мы свели эту задачу к задаче об очереди (см. стр. 88), которую уже умели решать. Но решение задачи об очереди само было довольно громоздким.

Сейчас мы покажем, как непосредственно решить соотношение (67). Для этого составим производящую функцию

$$f(x)=T_0+T_1x+T_2x^2+\ldots+T_nx^n+\ldots \tag{68}$$

Положим

$$F(x)\equiv xf(x)=T_0x+T_1x^2+\ldots+T_nx^{n+1}+\ldots \tag{69}$$

и возведем $F(x)$ в квадрат. Мы получим, что

$$F^2(x)=T_0^2x^2+(T_0T_1+T_1T_0)x^3+\ldots$$
$$\ldots+(T_0T_{n-1}+\ldots+T_{n-1}T_0)x^{n+1}+\ldots$$

Но по рекуррентному соотношению (67)

$$T_0T_{n-1}+\ldots+T_{n-1}T_0=T_n.$$

Значит,

$$F^2(x)=T_1x^2+T_2x^3+\ldots+T_nx^{n+1}.$$

Полученный ряд есть не что иное, как $F(x)-T_0x$; поскольку $T_0=1$, он равен $F(x)-x$. Итак,

$$F^2(x)=F(x)-x. \tag{70}$$

Для функции $F(x)$ получилось квадратное уравнение (70). Решая его, находим, что

$$F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Мы выбрали перед корнем знак минус, так как в противном случае при $x=0$ мы имели бы $F(0)=2$, а из разложения (69) видно, что $F(0)=0$.

По формуле (54) мы имеем

$$\sqrt{1-4x}=(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1-2x-\frac{2}{2}C_2^1x^2-$$
$$-\frac{2}{3}C_4^2x^3-\ldots-\frac{2}{n+1}C_{2n}^nx^{n+1}-\ldots$$

Значит,

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-2x-\ldots-\frac{2}{n+1}C_{2n}^nx^{n+1}-\ldots\right)\right]=$$
$$=x+C_2^1x^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_{2n}^nx^{n+1}+\ldots \tag{71}$$

Сравнивая формулы (69) и (71), получаем, что $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$. Это полностью соответствует решению, полученному ранее комбинаторным методом (см. стр. 160).

Производящие функции и разбиения чисел

В главе IV мы решали различные комбинаторные задачи на разбиение чисел. Эти задачи можно очень просто решать с помощью производящих функций. Обозначим через a_n число способов разбиения для n и составим ряд

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Во многих случаях удается составить такое алгебраическое выражение $f(x)$, что после раскрытия скобок в этом выражении слагаемое x^n повторяется ровно a_n раз. Тогда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

и, значит, $f(x)$ — производящая функция для последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$

Пусть, например, рассматриваются *разбиения числа N на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел $n_1, \ldots, n_k$. При этом в сумме слагаемые не должны повторяться, а порядок слагаемых не играет роли.*

Для решения задачи образуем выражение

$$(1 + x^{n_1})(1 + x^{n_2}) \ldots (1 + x^{n_k}). \qquad (72)$$

При раскрытии скобок получатся слагаемые вида $x^{m_1}, \ldots, x^{m_s}$, где $m_1, \ldots, m_s$ — некоторые из чисел $n_1, \ldots, n_k$. Поэтому x^N встретится в сумме столько раз, сколькими способами можно разбить N на слагаемые требуемым образом.

Например, если надо узнать, сколькими способами можно уплатить 78 коп., беря не более одной монеты каждого достоинства, то надо составить выражение

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^5) \times \times (1 + x^{10})(1 + x^{15})(1 + x^{20})(1 + x^{50}), \qquad (73)$$

раскрыть скобки и найти коэффициент при x^{78}.

А теперь решим с помощью производящих функций следующую задачу:

Сколькими способами можно уплатить 29 коп. монетами по 3 и 5 коп?

В этой задаче надо найти число способов разбить число 29 на слагаемые, равные 3 и 5, причем порядок слагаемых не имеет значения. Иными словами, нам надо найти число неотрицательных решений уравнения $3m+5n=29$.

Для этого составим выражение

$$
\begin{aligned}
f(x)=(1+x^3+x^6+\ldots+x^{3m}+\ldots)\times \\
\times(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{5n}+\ldots). \qquad (74)
\end{aligned}
$$

Показатели при x в первой скобке пробегают все неотрицательные числа, кратные 3, а во второй скобке — все неотрицательные числа, кратные 5. Ясно, что после раскрытия скобок x^N войдет с коэффициентом, равным числу решений уравнения $3m+5n=N$. В частности, коэффициент при x^{29} дает ответ на нашу задачу.

Вместо раскрытия скобок можно поступить так. Воспользуемся формулой для бесконечной геометрической прогрессии. Тогда выражение (74) переписывается в виде

$$
f(x)=\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1}{1-x^5}=\frac{1}{1-x^3-x^5+x^8}\,.
$$

А теперь разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов (только будем располагать многочлены не по убывающим, а по возрастающим степеням x). Начало этого деления таково:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-x^3-x^5+x^8 \\
\underline{x^3+x^5-x^8} & 1+x^3+x^5+x^6+x^8+\ldots \\
\quad x^5+x^6-x^{11} & \\
\quad x^6+x^8+x^{10}-x^{11}-x^{13} & \\
\quad x^8+x^9+x^{10}-x^{13}-x^{14} &
\end{array}
$$

Продолжая деление, найдем искомый коэффициент при x^{29}.

Общая задача здесь такова:

найти, сколькими способами можно разбить число N на слагаемые, равные соответственно a, b, …, m, причем порядок слагаемых не учитывается.

В этом случае производящая функция имеет вид

$$f(x) = (1 + x^a + x^{2a} + \ldots + x^{ia} + \ldots) \times$$
$$\times (1 + x^b + x^{2b} + \ldots + x^{sb} + \ldots) \times$$
$$\times (1 + x^m + x^{2m} + \ldots + x^{qm} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{(1 - x^a)(1 - x^b) \ldots (1 - x^m)}. \qquad (75)$$

Например, в задаче о размене гривенника (см. стр. 110) надо составить производящую функцию

$$f(x) = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^5)}.$$

Перемножая выражения, стоящие в знаменателе дроби, получаем

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 + x^7 - x^9 - x^{10} + x^{11}}.$$

Выполняя деление, находим

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - x - x^2 + x^7 - x^9 - x^{10} + x^{11} \\
\hline
x + x^2 - x^7 + x^9 + x^{10} - x^{11} & 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots \\
\quad 2x^2 + 3x^3 - x^7 - x^8 + x^9 + 2x^{10} - x^{12} & \\
\qquad 3x^3 + 2x^4 - x^7 - x^8 - x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + x^{12} - 2x^{13} & \\
\qquad\quad 5x^4 + 3x^5 - x^7 - x^8 - x^9 - x^{10} + 2x^{11} - 4x^{12} + x^{13} - 3x^{14} &
\end{array}$$

Коэффициент при x^{10} дает ответ на поставленный вопрос.

Разумеется, выполнять деление обычным образом здесь довольно сложно. Вместо этого можно поступить иначе. Запишем результат деления в виде бесконечного ряда с неопределенными коэффициентами

$$\frac{1}{1 - x - x^2 + x^7 - x^9 - x^{10} + x^{11}} =$$
$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

Умножим обе части равенства на знаменатель. Тогда коэффициент при x^n справа окажется равным

$$A_n - A_{n-1} - A_{n-2} + A_{n-7} - A_{n-9} - A_{n-10} + A_{n-11}.$$

Слева же коэффициент при x^n, $n \geqslant 1$, равен нулю. Поэтому при $n \geqslant 1$ коэффициенты A_n должны удовлетворять рекуррентному соотношению

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} - A_{n-7} + A_{n-9} + A_{n-10} - A_{n-11}.$$

Начальные условия имеют вид: $A_n=0$ при $n<0$ и $A_0=1$. Пользуясь этими условиями, легко найти по порядку все коэффициенты A_n.

Для примера рассмотрим проблему абитуриента (см. стр. 105). В ней надо было найти, сколькими способами можно представить число 17 в виде суммы 4 слагаемых, принимающих значения 3, 4, 5, причем порядок слагаемых имел значение. Для этой задачи в качестве производящей функции надо взять $(x^3+x^4+x^5)^4$. Ведь при раскрытии скобок в выражении $f(x)=(x^3+x^4+x^5)^4$ каждое слагаемое x^N встретится столько раз, сколькими способами N разбивается на сумму 4 слагаемых, принимающих значения 3, 4, 5. При этом встретятся и члены, получаемые друг из друга перестановкой слагаемых в показателе (например, $x^3x^4x^5x^3$ и $x^4x^3x^3x^5$).

Раскрытие скобок в выражении $(x^3+x^4+x^5)^4=$ $=x^{12}(1+x+x^2)^4$ можно произвести, например, по полиномиальной теореме. Но проще иной способ. Мы заметим, что $1+x+x^2=\frac{1-x^3}{1-x}$. Поэтому $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x)=\frac{x^{12}(1-x^3)^4}{(1-x)^4}=x^{12}(1-x^3)^4(1-x)^{-4}.$$

Но по формуле бинома Ньютона имеем

$$(1-x^3)^4=1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12},$$

а по формуле ряда Ньютона (см. стр. 199)

$$(1-x)^{-4}=1+4x+10x^2+20x^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{4\cdot5\ldots(n+3)}{1\cdot2\ldots n}x^n+\ldots$$

Поэтому

$$f(x)=x^{12}(1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12})\times$$
$$\times(1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5+\ldots).$$

Перемножая почленно эти разложения, найдем, что коэффициент при x^{17} в разложении равен 16. Значит, разложение можно сделать 16 способами.

Вообще, если надо найти, сколькими способами можно разбить число N на k слагаемых, принимающих значения $n_1, \ldots, n_s$, причем учитывается порядок слагаемых, то производящая функция имеет вид

$$f(x) = (x^{n_1} + x^{n_2} + \ldots + x^{n_s})^k. \qquad (76)$$

Задача упрощается, если числа $n_1, \ldots, n_s$ образуют арифметическую прогрессию — в этом случае $x^{n_1}, \ldots, x^{n_s}$ образуют геометрическую прогрессию, а это позволяет упростить выражение для $f(x)$.

Найдем, например, сколькими способами можно получить 25 очков, бросая 7 костей. Здесь надо образовать производящую функцию

$$f(x) = (x + x^2 + \ldots + x^6)^7. \qquad (77)$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии эту функцию можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \frac{x^7 (1 - x^6)^7}{(1 - x)^7} = x^7 (1 - x^6)^7 (1 - x)^{-7}.$$

Теперь разложим $(1 - x^6)^7$ по формуле бинома Ньютона, а $(1 - x)^{-7}$ — по формуле ряда Ньютона. Мы получим

$$f(x) = x^7 (1 - 7x^6 + 21x^{12} - 35x^{18} + 35x^{24} - 21x^{30} + \\ + 7x^{36} - x^{42})(1 + 7x + 28x^2 + 84x^3 + 210x^4 + 462x^5 + \ldots).$$

Перемножая эти разложения, без труда вычислим коэффициент при x^{25}. Он и даст ответ на поставленную задачу.

Аналогично решаются с помощью производящих функций и другие задачи, разобранные нами в главе IV.

Сводка результатов по комбинаторике разбиений

1. Число способов разбить n различных вещей на r различимых групп, при которых допускаются пустые группы, равно r^n.

2. Число способов разбить n различных вещей на r различимых групп, при которых все группы не пусты, равно коэффициенту при x^n в разложении функции $(e^x - 1)^r$ в степенной ряд, умноженному на $n!$. Это число можно записать в виде

$$r^n - \frac{r}{1}(r - 1)^n + \frac{r(r - 1)}{1 \cdot 2}(r - 2)^n - \ldots$$

3. Если в той же задаче группы неразличимы, то получится в $r!$ меньше способов.

4. Число способов разбить n неразличимых вещей на r различимых групп, при которых все группы не пусты, равно C_{n-1}^{r-1}.

5. Число способов разбить n неразличимых вещей на r различимых групп, причем допускаются пустые ячейки, равно C_{n+r-1}^{r-1}.

6. Число способов разбить n неразличимых вещей на r различимых групп, при которых каждая группа содержит не менее q вещей, равно $C_{n-1-r(q-1)}^{r-1}$.

7. Число способов разбить n неразличимых вещей на r различимых групп, при которых число элементов в каждой группе заключено между q и $q+s-1$, $q \leqslant x \leqslant \leqslant q+s-1$, равно коэффициенту при x^{n-rq} в разложении функции $\left(\frac{1-x^s}{1-x}\right)^r$ в степенной ряд.

8. Обозначим число способов разбиения n неразличимых вещей на r неразличимых групп, при которых нет ни одной пустой группы, через Π_n^r. Тогда имеет место рекуррентная формула

$$\Pi_n^r = \Pi_{n-1}^{r-1} + \Pi_{n-r-1}^{r-1} + \Pi_{n-2r-1}^{r-1} + \ldots$$

Справедливо равенство

$$\Pi_n^r = \Pi_{n-1}^{r-1} + \Pi_{n-r}^r.$$

При $n-r<r$ имеем $\Pi_n^r = \Pi_{n-1}^{r-1}$.

Наряду с разбиениями рассматривают упорядочивания элементов, при которых играет роль как порядок групп, так и порядок элементов в группах. Для упорядочиваний справедливы следующие утверждения:

9. Если n различных вещей упорядочиваются в r различимых групп, причем допускаются пустые группы, то число упорядочиваний равно

$$r(r+1)\ldots(r+n-1).$$

10. Если n различных вещей упорядочиваются в r различимых групп, причем все группы не пусты, то число упорядочиваний равно

$$n!\,C_{n-1}^{r-1} = \frac{n!\,(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}.$$

Если же группы неразличимы, а значит, их порядок не играет роли, то число упорядочиваний равно $\frac{n!}{r!} C_{n-1}^{r-1}$.

11. Пусть из n различных элементов всеми способами составляются r упорядоченных групп (причем можно брать не все элементы, допускаются пустые группы, а порядок групп принимается во внимание). Число таких групп равно

$$n!\left[\frac{1}{n!}+\frac{r}{1!(n-1)!}+\frac{r(r+1)}{2!(n-2)!}+\ldots\right].$$

Это выражение является коэффициентом при x^n в разложении функции $e^x(1-x)^{-r}$ в степенной ряд, умноженным на $n!$.

12. Если в той же задаче запрещаются пустые группы, то ответ равен коэффициенту при x^{n-r} в разложении функции $e^x(1-x)^{-r}$ по степеням x, умноженному на $n!$.

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ

1. Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C — три дороги. Сколько путей, проходящих через B, ведут из A в C?

2. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

3. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

4. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «камзол»?

5. То же самое из слова «здание»?

6. Бросают игральную кость с шестью гранями и запускают волчок, имеющий восемь граней. Сколькими различными способами могут они упасть?

7. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? То же самое при условии, что спуск и подъем происходят по разным путям.

8. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

? 9. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата — белый и черный? А если нет ограничений на цвет выбранных квадратов?

10. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

11. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

12. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну — на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

13. Из 3 экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника тригонометрии надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

14. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское

гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

15. Та же задача, если, кроме того, в магазине есть 3 тома, в которые входят «Рудин» и «Отцы и дети».

16. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет бо́льшую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

!17. Имеются три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть? Та же задача, если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.

18. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

19. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Та же задача, если одна из полос должна быть красной?

20. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского, на любой другой из этих пяти языков?

21. На сколько больше словарей придется издать, если число различных языков равно 10?

!22. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт по одной карте каждой масти? То же самое при условии, что среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, то есть двух королей, двух десяток и т. д.

23. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (содержащей 52 карты) по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и карты черных мастей образовывали пары (например, девятки пик и треф и валеты бубен и червей)?

24. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?

!25. Несколько человек садятся за круглый стол. Будем считать, что два способа рассадки совпадают, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколькими различными способами можно посадить четырех человек? А семь человек? Во скольких случаях два данных человека из семи оказываются соседями? Во скольких случаях данный человек (из семи) имеет двух данных соседей?

√26. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

27. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

28. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого — 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?

29. Та же самая задача, но меняются две книги одного на две книги другого.

30. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что Б не должен выступать до того, как выступит А?

31. Та же задача, но А должен выступить непосредственно перед Б.

32. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

33. Та же задача, но они садятся не за круглый стол, а на карусель и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими.

34. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? Во скольких случаях ровно один туз? Во скольких случаях не менее двух тузов? Ровно два туза?

35. На железнодорожной станции имеется m светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый и зеленый?

36. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства (наибольшее число зубов равно 32)?

37. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, а трое — спиной к паровозу, остальным трем безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

38. В местком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

39. Из состава конференции, на которой присутствует 52 человека, надо избрать делегацию, состоящую из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

40. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита.

41. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение пяти дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

42. Аналогичная задача, если яблок m, а груш n.

43. Аналогичная задача, когда имеется 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина.

44. У отца есть 5 попарно различных апельсинов, которые он выдает своим восьми сыновьям так, что каждый получает либо один апельсин, либо ничего. Сколькими способами можно это сделать?

45. Аналогичная задача, если число апельсинов, получаемых каждым сыном, не ограничено.

46. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? В слове «парабола»? В слове «ингредиент»?

47. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А сколькими способами можно

составить команду из 4 человек для участия в эстафете $100+200+$ $+400+800$?

48. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

49. Имеется n абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить три пары?

50. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? Сколькими способами можно купить 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

51. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

52. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может встречаться в записи числа несколько раз?

53. Поезду, в котором находится n пассажиров, предстоит сделать m остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками? Та же задача, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на данной остановке.

54. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых данные два элемента a и b не стоят рядом? Данные три элемента a, b, c не стоят рядом (в любом порядке)? Никакие два из элементов a, b, c не стоят рядом?

55. В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга перенумеровать их в порядке, отражающем их успехи в соревновании по мнению судей. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой доле случаев соревнования победитель будет определен?

56. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

57. Сколько ожерелий можно составить из семи бусинок разных размеров (надо использовать все 7 бусинок)?

58. Сколько ожерелий можно составить из пяти одинаковых бусинок и двух большего размера?

59. В селении проживает 2000 жителей. Доказать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы.

60. Компания из семи юношей и десяти девушек танцует. Если в каком-то танце участвуют все юноши, то сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце? Сколько имеется вариантов, если учитывать лишь то, какие девушки остались неприглашенными? Решить те же вопросы, если относительно двух девушек можно с уверенностью сказать, что они будут приглашены на танец?

61. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых? Та же задача, если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов.

62. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

63. Имеется 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько имеется комбинаций для выбора нескольких птиц так, чтобы среди выбранных были и куры, и утки, и гуси?

64. Сколькими способами можно разбить $m+n+p$ предметов на три группы так, чтобы в одной было m, в другой n, а в третьей p предметов?

65. На полке находятся $m+n$ различных книг, из которых m в черных переплетах, а n в красных. Сколько существует перестановок этих книг, при которых книги в черных переплетах занимают первые m мест? Сколько положений, в которых все книги в черных переплетах стоят рядом?

66. Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы? В группу могут входить 1, 2, 3, ..., 15 человек. Та же задача для случая выбора из n человек.

67. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число

$$q = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые натуральные числа (включая делители 1 и q). Чему равна их сумма?

68. Сколькими способами 12 полтинников можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?

69. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

70. Сколькими способами можно надеть 5 различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

71. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует за одно предложение и учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение?

72. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

73. Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется один и только один раз?

74. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?

75. Сколько различных браслетов можно сделать из пяти одинаковых изумрудов, шести одинаковых рубинов и семи одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?

76. Сколькими способами можно из тех же камней выбрать три камня для кольца?

77. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

78. У мужа 12 знакомых — 5 женщин и 7 мужчин, а у жены — 7 женщин и 5 мужчин. Сколькими способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 — жена?

79. На каждом борту лодки сидят по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть

31 кандидат, причем 10 человек хотят сидеть на левом борту лодки, 12 — на правом, а для 9 безразлично, где сидеть?

80. В урне лежат жетоны с числами 1, 2, 3, ..., 10. Из нее вынимают 3 жетона. Во скольких случаях сумма написанных на них чисел равна 9? Не меньше 9?

81. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были все четыре масти?

82. Хор состоит из 10 участников. Сколькими способами можно в течение трех дней выбирать по 6 участников, так, чтобы каждый день были различные составы хора?

83. Человек имеет 6 друзей и в течение 20 дней приглашает к себе 3 из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькими способами может он это сделать?

84. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают женщин) и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины. Сколькими способами могут они распределиться между этими предприятиями?

85. Сколько слов, содержащих по пяти букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать, то есть такие слова, как «пресс» или «ссора», не допускаются?

86. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек и никому не дают двух книг сразу? Та же задача, если никому не дают двух экземпляров одной и той же книги, но могут быть вручены две или три различные книги.

87. Берутся домино от $(0, 0)$ до (n, n). Показать, что число домино с суммой очков $n-r$ равно числу домино с суммой очков $n+r$ и это число равно $\frac{1}{4}(2n-2r+3)$. Найти общее число всех домино.

88. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие 2 женщины не сидели рядом?

89. Сколькими способами можно выбрать из 16 лошадей шестерку для запряжки так, чтобы вошли 3 лошади из шестерки $ABCA'B'C'$, но ни одна из пар AA', BB', CC'?

90. Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слова, в которые входят 4 различных согласных и 3 различных гласных? Во скольких из этих слов никакие 2 согласные не стоят рядом?

91. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Шестеро знают английский, шестеро — немецкий, семеро — французский. Четверо знают английский и немецкий, трое — немецкий и французский, двое — французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Только французский?

92. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром — 38 человек, с ветчиной — 42 человека, и с сыром и с колбасой — 28 человек, и с колбасой и с ветчиной — 31 человек, и с сыром и с ветчиной — 26 человек. Все три вида бутербродов взяли 25 человек, а несколько человек вместо бутербродов захватили с собой пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

93. Компания, состоящая из 10 супружеских пар, разбивается на 5 групп по 4 человека для лодочной прогулки. Сколькими способами можно разбить их так, чтобы в каждой лодке оказались двое мужчин и двое женщин?

94. Во скольких случаях даный мужчина окажется в одной лодке со своей женой?

95. Во скольких случаях данные двое мужчин окажутся в одной лодке со своими женами?

96. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если каждая из них может повторяться несколько раз?

97. Найти количество шестизначных чисел таких, что сумма трехзначного числа, образованного первыми тремя цифрами, и трехзначного числа, образованного последними тремя цифрами, меньше 1000.

98. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

99. Сколькими способами можно переставить буквы слова «Юпитер» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

100. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?

101. Сколькими способами можно переставить буквы слова «опоссум» так, чтобы буква «п» шла непосредственно после буквы «о»?

102. Сколькими способами можно переставить буквы слова «обороноспособность» так, чтобы две буквы «о» не шли подряд?

103. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

104. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

105. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «параллелизм» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

106. Сколькими способами можно переставить буквы слова «пастух» так, чтобы между двумя гласными были две согласные буквы?

107. Сколькими способами можно переставить буквы слова «логарифм» так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

108. Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» две согласных и одну гласную букву? Так же задача, если среди выбранных букв есть буква «ф»?

109. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «огород» так, чтобы три буквы «о» не стояли рядом?

110. Та же задача, но запрещается, чтобы две буквы «о» стояли рядом.

111. Сколькими различными способами можно выбрать несколько букв из фразы «Око за око, зуб за зуб»? Порядок букв не учитывается.

112. Сколькими способами можно выбрать из этой фразы три буквы?

113. Сколькими способами можно выбрать из этой фразы три буквы, если учитывать порядок выбранных букв?

114. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «пастухи» так, чтобы как гласные, так и согласные шли в алфавитном порядке?

115. Сколькими способами можно переставить буквы слова «кофеварка» так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались? То же самое для слова «самовар».

116. Сколькими способами можно переставить буквы слова «Абакан» так, чтобы согласные шли в алфавитном порядке? То же самое при дополнительном условии, что две буквы «а» не идут подряд.

117. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «тик-так» так, чтобы одинаковые буквы не шли друг за другом? То же самое для слова «тартар».

118. Сколькими способами можно выбрать 4 буквы из слова «тартар», если не учитывать порядка выбранных букв? Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 132 132?

119. Сколько неотрицательных целых чисел, меньших чем миллион, содержат все цифры 1, 2, 3, 4? Сколько чисел состоит только из этих цифр?

120. Найти сумму четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 3, 4.

121. То же самое для цифр 1, 2, 2, 5.

122. То же самое для цифр 1, 3, 3, 3.

123. То же самое для цифр 1, 1, 4, 4.

124. То же самое для всех пятизначных чисел, которые можно получить путем перестановок цифр 0, 1, 2, 3, 4. Цифра 0 не должна быть первой.

125. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно написать с помощью цифр 8 и 9?

126. То же самое с помощью цифр 9, 8, 7.

127. То же самое с помощью цифр 9, 8, 0 (записи, начинающиеся с нуля, считаются недопустимыми).

128. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые можно написать цифрами 1, 2, 3, 4.

129. Найти сумму всех возможных пятизначных чисел, которые можно написать цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и в которых каждая цифра повторяется один и только один раз. Та же задача для пятизначных чисел, которые можно написать цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

130. Сколько нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694 (каждую цифру можно использовать не более одного раза)? А четных?

131. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых три цифры четные, а три — нечетные?

132. Та же задача, если допускаются и «шестизначные» числа, начинающиеся с нуля.

133. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых сумма цифр четная (первая цифра предполагается отличной от нуля)? Та же задача, если берут все числа от 1 до 999 999?

134. Сколько имеется десятизначных чисел, у которых сумма цифр равна трем (первая цифра предполагается отличной от нуля)? Та же задача, но берут все числа от 1 до 9 999 999 999.

135. Сколько имеется девятизначных чисел, у которых все цифры различные?

136. Сколько существует целых чисел от 0 до 999, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

137. Сколько существует целых чисел от 0 до 999, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

138. Во сколько чисел от 0 до 999 входит цифра 9? Во сколько чисел она входит дважды? Во сколько чисел входит цифра 0? Во сколько чисел она входит дважды? Во сколько чисел входят цифры 0 и 9? Цифры 8 и 9? Сколько есть чисел от 0 до 999 999, в которые не входят две идущие друг за другом одинаковые цифры?

139. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123 153?

140. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 12 335 233?

141. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр числа 1 233 145 254 так, чтобы две одинаковые цифры не шли друг за другом?

142. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 12 312 343 так, чтобы три цифры 3 не шли друг за другом?

143. Сколькими способами можно переставить цифры числа 12 341 234 так, чтобы никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом?

144. Та же задача для числа 12 345 254.

145. Сколькими способами можно переставить цифры числа 1 234 114 546 так, чтобы три одинаковые цифры не шли друг за другом?

146. Сколькими способами можно это сделать так, чтобы никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом?

147. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетной?

148. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три числа так, чтобы их сумма была четной?

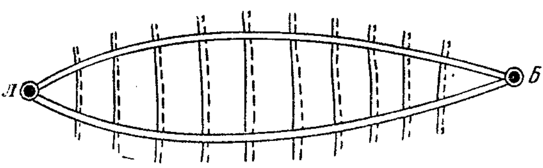


Рис. 34.

149. Из Лондона в Брайтон ведут 2 шоссе, соединяемых 10 проселочными дорогами (рис. 34). Сколькими способами можно проехать из Лондона в Брайтон так, чтобы дорога не пересекала себя?

150. Пусть при том же условии два путешественника выезжают из Лондона по разным шоссе. Сколькими способами может произойти путешествие так, что ни один участок шоссе они не проезжают в одном и том же направлении?

151. Из Лондона в Кембридж ведут 3 шоссе, пересекаемые 4 проселочными дорогами (рис. 35). Сколькими способами можно

совершить путешествие, если ни по одному участку шоссе не едут в направлении Лондона и ни один участок не проезжают дважды?

152. Имеется неограниченное количество монет достоинством в 10, 15 и 20 коп. Сколькими способами можно выбрать 20 монет?

153. Надо отгадать, какие пять монет держит в руке партнер? Монеты бывают достоинством в 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 коп. и 1 руб. Сколько может быть дано неверных ответов?

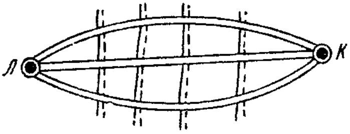


Рис. 35.

154. Сколько существует пятизначных чисел? Во скольких из них все цифры четны? Во скольких все цифры нечетны? Во скольких не входят цифры, меньше чем 6? Во скольких нет цифр, больших чем 3? Сколько из них содержат все цифры 1, 2, 3, 4, 5? Сколько содержат все цифры 0, 2, 4, 6, 8?

155. Стороны каждой из двух игральных костей помечены числами 0, 1, 3, 7, 15, 31. Сколько различных сумм может получиться при метании этих костей?

156. Стороны каждой из трех игральных костей помечены числами 1, 4, 13, 40, 121, 364. Сколько различных сумм может получиться при их метании?

157. Кидают шесть игральных костей, помеченных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Во скольких случаях они дадут один вид очков? Два вида? Три вида? Четыре вида? Пять видов? Шесть видов? (Все кости считаются различимыми друг от друга.)

158. Бросают n игральных костей. Сколько может получиться различных результатов (результаты, отличающиеся лишь порядком очков, считаются одинаковыми; на каждой кости нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков)?

159. Сколькими различными способами можно представить число 1 000 000 в виде произведения трех сомножителей? Представления, отличающиеся порядком сомножителей, считаются различными.

160. Та же задача при условии, что порядок сомножителей не учитывается.

161. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

162. Сколькими способами можно распределить $3n$ различных предметов между тремя людьми так, чтобы каждый получил n предметов?

163. Даны $2n$ элементов. Рассматриваются всевозможные разбиения их на пары, причем разбиения, отличающиеся друг от друга только порядком элементов внутри пар и порядком расположения пар, считаются совпадающими. Сколько существует различных таких разбиений?

164. Та же задача, но разбиваются nk элементов на n групп по k элементов в каждой группе.

165. Сколькими способами можно разбить 30 рабочих на 3 бригады по 10 человек в каждой бригаде? На 10 групп по 3 человека в каждой группе?

166. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по два туза?

167. Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по 2 книги в каждой (порядок бандеролей не принимается во внимание)?

168. Сколькими способами можно разложить 9 книг на 4 бандероли по 2 книги и 1 бандероль в 1 книгу?

169. Та же задача, если надо составить 3 бандероли по 3 книги в каждой.

170. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, 1 апельсин, 1 сливу, 1 лимон, 1 грушу, 1 айву и 1 финик?

171. Сколькими способами можно выполнить этот раздел так, чтобы каждый получил по 4 плода?

172. Лица A, B и C имеют по 3 яблока каждый и, кроме того, A имеет 1 грушу, 1 сливу и 1 айву, B имеет 1 апельсин, 1 лимон и 1 финик, а C имеет 1 мандарин, 1 персик и 1 абрикос. Сколькими способами могут они распределить между собой эти фрукты так, чтобы каждый получил по 6 штук?

173. Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты 13 игрокам по 4 карты каждому игроку? Та же задача с условием, что каждый имеет по одной карте каждой масти. Та же задача при условии, что один имеет карты всех четырех мастей, а все остальные — карты одной и той же масти.

174. Сколькими способами можно вынуть 4 карты из полной колоды так, чтобы были 3 масти? Так, чтобы были 2 масти?

175. Сколькими способами можно раздать 52 карты четырем игрокам так, чтобы каждый получил по три карты трех мастей и четыре карты четвертой масти?

176. Сколькими способами можно раздать 18 различных предметов 5 участникам так, чтобы четверо из них получили по 4 предмета, а пятый — 2 предмета. Та же задача, но трое получают по 4 предмета, а двое — по 3 предмета.

177. Имеется 14 пар различных предметов. Найти полное число выборок из этих предметов? (Две выборки отличаются друг от друга своим составом, но не порядком предметов).

178. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара могут быть разложены в 6 различных пакетов (некоторые пакеты могут быть пустыми)?

179. Сколькими способами можно разложить 3 руб. и 10 полтинников в 4 различных пакета?

180. Доказать, что количество разбиений числа n на несколько слагаемых равно количеству разбиений числа $2n$ на n слагаемых (порядок слагаемых не принимается во внимание).

181. n предметов расположены в ряд. Сколькими способами можно выбрать из них три предмета так, чтобы не брать никаких двух соседних элементов?

182. Ребенок ставит на первые две линии шахматной доски белые и черные фигуры (по два коня, два слона, две ладьи, ферзя и короля каждого цвета). Сколькими способами он может это сделать?

183. Сколькими способами можно расставить эти фигуры на всей доске?

184. Решите ту же задачу, если расставляются и все пешки (по 8 пешек каждого цвета).

185. Сколькими способами можно поставить 15 белых и 15 черных шашек на 24 поля так, чтобы на каждом поле были или

только белые, или только черные шашки? (Так располагаются шашки в восточной игре «нарды».)

186. Сколькими способами можно расставить 20 белых шашек на шахматной доске так, чтобы это расположение переходило само в себя при вращениях доски на 90°?

187. Сколькими способами можно расставить 20 белых шашек на шахматной доске так, чтобы это расположение было симметрично относительно линии, делящей доску пополам?

188. То же самое при условии, что шашки ставятся на черные поля.

189. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черные поля доски так, чтобы это положение было симметрично относительно центра доски?

190. То же самое, но при симметрии должны меняться цвета шашек.

191. Сколькими способами можно поставить 20 белых шашек на крайние линии шахматной доски так, чтобы это расположение не менялось при повороте доски на 90°?

192. Сколькими способами можно расположить 20 белых шашек на крайних линиях шахматной доски так, чтобы на противоположных сторонах доски шашки стояли симметрично относительно линий, делящих пополам доску?

193. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых шаров и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, и лузы считаются различными.

194. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых шаров, 1 черный шар и 1 красный шар?

195. Сколькими способами можно раздать 27 книг лицам A, B и C так, чтобы A и B вместе получили вдвое больше книг, чем C?

196. В лифт сели 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на четырех этажах так, чтобы на каждом этаже вышел по крайней мере один человек?

197. Сколькими способами можно выбрать из чисел от 1 до 100 три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

198. Сколькими способами можно выбрать из $3n$ последовательных целых чисел три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

199. Имеется n белых и один черный шар. Сколькими способами можно положить некоторые из этих шаров в $n+1$ луз, если в каждую лузу помещается не более одного шара?

200. Сколькими способами можно расставить m белых и n черных шаров так, чтобы между белыми и черными шарами было $2r-1$ контактов? $2r$ контактов?

201. Сколькими способами можно получить 8 оценок не ниже 3 по разным предметам так, чтобы сумма была равна 30?

202. Доказать, что $m+n$ предметов можно переставить так, чтобы ровно n осталось на месте, $\frac{(m+n)!\,D_m}{m!\,n!}$ способами (см. стр. 73)

203. Доказать, что r различных вещей можно разделить между $n+p$ людьми так, чтобы данные n получили по крайней мере по одному предмету;

$$S_r=(n+p)^r-n(n+p-1)^r+C_n^2(n+p-2)^r-\ldots+(-1)^n p^r$$

способами?

204. Доказать, что количество разбиений числа $2r+x$ на $r+x$ отличных от нуля слагаемых таково же, как и количество разбиений r на неотрицательные слагаемые.

205. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя. Сколькими способами может произойти голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)? Та же задача, но учитывается лишь число голосов, полученных каждым кандидатом, но не то, кто за него голосовал.

206. Доказать, что число способов разделить $2n$ неразличимых предметов на три неразличимые части так, чтобы сумма любых двух была больше третьей, равна числу способов разделить таким же образом $2n-3$ предметов.

207. Доказать, что нечетное число предметов можно выбрать из n предметов 2^{n-1} способами.

208. Доказать, что число способов, которыми два человека могут разделить $2n$ предметов одного сорта, $2n$ предметов другого сорта из $2n$ предметов третьего сорта так, чтобы каждый получил $3n$ предметов, равно $3n^2+3n+1$.

209. Если добавить $2n$ предметов четвертого сорта, то число способов раздела, при котором каждый получает $4n$ предметов, равно

$$\frac{1}{3}(2n+1)(8n^2+8n+3).$$

210. Если предметы делятся на неразличимые части, то ответы будут

$$\frac{1}{2}(3n^2+3n+2) \quad \text{и} \quad \frac{1}{3}(n+1)(8n^2+4n+3).$$

211. Доказать, что если есть m сортов предметов по $2n$ предметов каждого сорта, то число способов деления на две равные части выражается формулой

$$C_{mn+m-1}^{m-1}-C_m^1C_{mn+m-2n-2}^{m-1}+$$
$$+C_m^2C_{mn+m-4n-3}^{m-1}-\ldots\pm C_m^xC_{mn+m-1-x(2n+1)}^{m-1}\mp\ldots$$

212. Сколькими способами можно положить пять белых шаров, пять черных шаров и пять красных шаров в три различных ящика, кладя по пять шаров в каждый ящик?

213. Если есть три сорта вещей по n предметов каждого сорта, то их можно распределить между тремя лицами A, B, C так, чтобы каждый получил n предметов

$$C_{n+2}^2C_{n+2}^2-3C_{n+3}^4=\frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4)$$

способами.

214. Сколькими способами можно посадить рядом 3 англичан, 3 французов и 3 турок так, чтобы никакие три соотечественника не сидели рядом?

215. Та же задача при условии, что рядом не могут сидеть никакие два соотечественника.

216. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 3 англичан, 3 французов и 3 турок так, чтобы никакие два соотечественника не сидели рядом?

217. Сколькими способами можно наклеить марки на 40 коп., используя марки достинством в 5, 10, 15 и 20 коп., расположенные в одну линию? (Расположения, отличающиеся порядком марок, рассматриваются как различные, число марок не ограничено).

218. Сколькими способами можно разменять рубль на монеты достоинством в 10, 15, 20 и 50 коп.?

219. Сколькими способами можно составить 78 *г*, пользуясь восемью разновесками в 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50 *г*? При этом считается, что применение двух разных разновесок, хотя бы и одного веса дает новую комбинацию.

220. Имеется шесть шаров: 3 черных, 1 красный, 1 белый и 1 синий. Сколькими способами можно составить из них ряд, содержащий 4 шара?

221. Сколькими способами можно представить натуральное число n в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых также является натуральным числом (представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

222. Сколько и каких цифр понадобится, чтобы написать все числа от 1 до 999 999 включительно? От 1 до $10^n - 1$ включительно?

223. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, пользуясь тремя цифрами 1, 2, 3 при дополнительном условии, что цифра 3 применяется в каждом числе ровно два раза? Сколько написанных чисел делится на 9?

224. Будем говорить, что два числа, входящие в размещение, образуют инверсию, если большее из них написано ранее, чем меньшее. Сколько инверсий во всех перестановках чисел 1, 2, ..., n?

225. Доказать, что число разбиений n на 3 части таких, что никакие две части не равны друг другу, есть

$$E\left[\frac{1}{12}(n^2 - 6n + 12)\right].$$

226. Доказать, что число разбиений $12n+5$ на 4 части таких, что ни одна часть не превосходит $6n+2$, есть

$$\frac{1}{2}(n+1)(12n^2+9n+2).$$

227. Доказать, что число разбиений $12n+5$ на 4 части, при которых никакая часть не превосходит $6n+2$ и никакие две части не равны, есть

$$\frac{n}{2}(12n^2+3n-1).$$

228. Найти количество троек натуральных чисел, образующих геометрическую прогрессию и не превосходящих 100.

229. Сколькими способами можно расставить в ряд 6 англичан, 7 французов и 10 турок так, чтобы каждый англичанин стоял между французом и турком, но никакие француз и турок не стояли рядом?

230. То же самое для 5 англичан, 7 французов и 10 турок.

231. Сколько решений имеет задача: найти два числа такие, что их наибольший общий делитель равен G, а наименьшее общее кратное $M=G\,a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$ (a, b, c, d — простые числа).

232. Решите ту же задачу, но без слов «наименьший» и «наибольший».

233. Сколько можно составить сочетаний из 20 букв по 6 так, чтобы в каждом сочетании никакая буква не входила более двух раз?

234. Имеется $p+q+r$ букв: p букв α, q букв β и r букв γ. Они переставляются всеми способами так, чтобы α начинались раньше, чем β, а β раньше, чем γ. Сколькими способами возможна такая перестановка?

235. Линия в 30 *см* закрашивается в следующем порядке: красный, белый, синий, красный, белый, синий и т. д. Начинается с красного цвета, а кончается синим. Каждый цвет занимает всего 10 *см*, полосы не меньше 2 *см*, причем длины полос — целые числа. Сколько возможно способов окраски? А если снять условие, что все кончается синим цветом? Показать, что если ни одна полоса не меньше 3 *см*, то в 153 случаях последним будет синий цвет, в 71 — белый и в 81 — красный.

236. У меня есть 6 друзей, с каждым из которых я обедал 8 раз, с каждыми двумя — 5 раз, с каждыми тремя — 4 раза, с каждыми четырьмя — 3 раза, с каждыми пятью — 2 раза, со всеми шестью — 1 раз, а без каждого из них — 8 раз. Сколько раз я обедал один?

237. Два экзаменатора, работая одновременно, экзаменуют класс в 12 человек по двум предметам. Каждый экзаменующийся отвечает по 5 минут по каждому предмету. Сколькими способами могут экзаменаторы распределить между собой работу так, чтобы ни одному школьнику не пришлось отвечать сразу по двум предметам?

238. Сколькими способами 6 человек могут выбрать из 6 пар перчаток по правой и левой перчатке так, чтобы ни один не получил пары? То же самое для 9 пар и 6 человек.

239. Буквы, входящие в выражение $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, переставляются всеми способами, при которых рядом с каждой буквой (слева или справа) стоит такая же буква. Доказать, что число таких перестановок равно 6. Для $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ — тоже 6. Для $\alpha^4\beta^4\gamma^4$ — 90, для $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ — 426.

240. В шахматной олимпиаде участвуют представители n стран по 4 представителя от каждой страны. Сколькими способами они могут встать в ряд так, чтобы рядом с каждым был представитель той же страны?

241. Клетки шахматной доски раскрашиваются в 8 цветов так, что в каждом горизонтальном ряду встречаются все 8 цветов, а в каждом вертикальном ряду не встречаются подряд две клетки, окрашенные в тот же самый цвет. Сколькими способами возможна такая окраска?

242. Имеются n одинаковых вещей и еще n различных вещей. Сколькими способами можно выбрать из них n вещей? Сколькими способами можно упорядочить все $2n$ вещей?

243. m французов и n англичан стоят в ряд так, что рядом с каждым стоит хотя бы один его соотечественник. Показать, что число возможных расстановок равно

$$m!\,n!\left[1+\left(C_{m-2}^{0}+C_{m-3}^{1}\right)\left(C_{n-2}^{0}+C_{n-3}^{1}\right)+\right.$$
$$+\left(C_{m-3}^{1}+C_{m-4}^{2}\right)\left(C_{n-3}^{1}+C_{n-4}^{2}\right)+$$
$$\left.+\left(C_{m-4}^{2}+C_{m-5}^{3}\right)\left(C_{n-4}^{2}+C_{n-5}^{3}\right)+\ldots\right]$$

244. Сколько шестизначных чисел содержит ровно три различные цифры?

245. Сколько m-значных чисел содержит ровно k различных цифр?

246. Рассматриваются все k-размещения чисел 1, 2, ..., n, при которых четные числа стоят на местах с четными номерами, а нечетные — на местах с нечетными номерами. Сколько таких размещений расположено в порядке возрастания чисел (например, имеют вид 3678)?

247. Даны $2n$ элементов $a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, a_n$, причем $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. Во скольких перестановках из этих $2n$ элементов ни одна пара одинаковых элементов не стоит рядом?

248. Даны n наборов, в каждый из которых входит q одинаковых элементов, причем элементы различных наборов различны. Во скольких перестановках этих nq элементов нет идущих подряд одинаковых элементов?

249. Решите ту же задачу при условии, что элементы располагаются по окружности.

250. На книжной полке стоят n книг. Сколькими способами можно выбрать из них p книг так, чтобы между любыми двумя выбранными книгами, равно как и после p-й выбранной книги, было не менее s книг?

251. Числа, выражающие количество участников математической олимпиады из 5, 6, 7, 8, 9 и 10 классов, образуют арифметическую прогрессию. Число премий для каждого класса равно разности этой прогрессии. Доказать, что число способов вручения премий не изменится, если все премии отдать ученикам 10 класса (предполагается, что все премии различны).

252. На клетчатой бумаге построен квадрат $ABCD$ со стороной в 4 клетки, после чего проведены все кратчайшие пути из вершины A в вершину C, проходящие по сторонам клеток. Показать, что число путей равно 70, причем через 4 отрезка проходят 35 путей, через 8—20 путей, через 4—18 путей, через 4—15 путей, через 4—12 путей, через 4—10 путей, через 4—5 путей, через 4—4 пути, через 4—1 путь.

Исследовать аналогичным образом перекрестки: 1 проходят 36 раз, 4—35 раз, 4—30 раз, 4—15 раз, 4—5 раз, 4—40 раз, 2—1 раз (концевые точки исключены).

253. Сколько существует треугольников, вершины которых являются вершинами данного выпуклого шестиугольника?

254. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений 4, 5, 6, 7?

255. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длина каждого ребра которых является целым числом от 1 до 10?

256. На плоскости проведены 4 прямые линии, из которых никакие две не являются параллельными и никакие 3 не проходят через одну точку. Сколько получилось треугольников?

257. На плоскости задано n точек, из которых p лежат на одной прямой, а кроме них никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

258. На прямой взяты p точек, а на параллельной ей прямой — еще q точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

259. Пусть при том же условии на еще одной параллельной прямой взяты r точек, причем никакие три точки не лежат на одной прямой, пересекающей все три параллели. Сколько получится дополнительных треугольников?

260. Каждая сторона квадрата разбита на n частей. Сколько можно построить треугольников, вершинами которых являются точки деления?

261. На плоскости проведены n прямых линий, из которых никакие две не являются параллельными и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

262. На плоскости проведено n прямых линий, из которых p проходят через точку A и q — через точку B и, кроме того, никакие три прямые не проходят через одну точку, ни одна прямая не проходит через обе точки A и B и никакие две не параллельны. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

263. На сколько частей делят плоскость n прямых линий, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну и ту же точку?

264. На сколько частей делят пространство n плоскостей, из которых никакие 4 не проходят через одну и ту же точку, никакие 3 не проходят через одну и ту же прямую и никакие 2 не параллельны?

265. На плоскости даны пять точек. Среди прямых, соединяющих эти пять точек, нет параллельных, перпендикулярных и совпадающих. Проводим через каждую точку перпендикуляры ко всем прямым, которые можно построить, соединяя попарно остальные четыре точки. Каково максимальное число точек пересечения этих перпендикуляров между собой, если не считать данные пять точек?

266. Сколькими способами можно составить треугольники, стороны которых являются целыми числами, большими n и не превосходящими $2n$. Сколько среди них равнобедренных и сколько равносторонних?

267. Доказать, что число треугольников с целочисленными сторонами, длина сторон которых не больше чем $2n$, равно $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$. Если же исключить равнобедренные, то это число равно $\frac{1}{6}n(n-1)(4n-5)$.

268. Доказать, что число треугольников, длина сторон которых не превышает $2n-1$, равно $\frac{1}{6}n(n+1)\ (4n-1)$, а после исключения равнобедренных треугольников остается $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3)$ треугольников.

269. На плоскости проведены n прямых линий, никакие три из которых не проходят через одну точку. Доказать, что число неупорядоченных групп по n точек пересечения, из которых никакие три не лежат на одной прямой, равно $\frac{1}{2}(n-1)!$

270. Имеется n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько есть r-звенных замкнутых ломаных с вершинами в этих точках?

271. На одной прямой взяты n точек, а на параллельной ей прямой — m точек. Эти точки соединяют прямыми. Доказать, что число точек пересечения проведенных прямых равно $\frac{mn(m-1)(n-1)}{2}$. (Мы считаем, что никакие три из проведенных прямых не пересекаются в одной точке, а заданные $m+n$ точек не учитываются.)

272. Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие 4 — на одной окружности. Через каждые две из этих точек проводится прямая, а через каждые три — окружность. Найти наибольшее число точек пересечения всех проведенных прямых со всеми окружностями.

273. В пространстве даны n точек, никакие четыре из которых не лежат на одной плоскости. Через каждые три точки проводится плоскость, причем никакие две из этих плоскостей не параллельны. Найти число прямых, получающихся при пересечении этих плоскостей, а также число таких прямых, не проходящих ни через одну заданную точку.

274. Из n отрезков длины $1, 2, \ldots, n$ выбирают 4 так, чтобы получился описанный четырехугольник. Доказать, что это можно сделать $\frac{2n(n-2)(2n-5)-3+3(-1)^n}{48}$ способами. Сколько получится четырехугольников, если можно брать стороны одинаковой длины?

275. Даны n точек, никакие четыре из которых не лежат на одной окружности. Через каждые три из них проводят окружность. Каково наибольшее число точек пересечения этих окружностей?

276. Доказать, что если n плоскостей проходит через центр сферы, то в общем случае они делят сферу не более чем на n^2-n+2 частей.

277. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани куба шестью различными красками? Два способа считаются геометрически совпадающими, если один можно перевести в другой движением куба как твердого тела.

278. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани тетраэдра четырьмя различными красками?

279. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани октаэдра восемью различными красками?

280. Решить аналогичные задачи для правильных додекаэдра и икосаэдра.

281. Рассмотреть в предыдущих задачах случаи, когда число красок меньше числа граней (например, куб закрашивается двумя красками, тремя красками, четырьмя красками, пятью красками).

282. Сколько существует треугольников с целочисленными сторонами и с периметром 40? А с периметром 43?

283. Доказать, что число треугольников с целочисленными сторонами и с периметром $4n+3$ на $n+1$ больше числа треугольников с целочисленными сторонами и периметром $4n$.

284. Доказать, что число треугольников с целочисленными сторонами и периметром N дается таблицей

N	Число треугольников	N	Число треугольников
$12n$	$3n^2$	$12n+6$	$3n^2+3n+1$
$12n+1$	$n(3n+2)$	$12n+7$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+2$	$n(3n+1)$	$12n+8$	$(n+1)(3n+1)$
$12n+3$	$3n^2+3n+1$	$12n+9$	$3n^2+6n+3$
$12n+4$	$n(3n+2)$	$12n+10$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+5$	$(n+1)(3n+1)$	$12n+11$	$3n^2+7n+4$

285. Автобусная сеть города устроена следующим образом:

1. С любой остановки на любую другую можно попасть без пересадки.

2. Для любой пары маршрутов найдется, и притом единственная, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой.

3. На каждом маршруте ровно n остановок.

Сколько автобусных маршрутов в городе?

286. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что

1. С любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки.

2. Для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой.

3. На каждом маршруте не менее трех остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

287. Можно ли провести в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов ни были взяты, найдется остановка, не лежащая ни на одном из них, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки?

288. Какое наибольшее число различных шаров можно построить в пространстве так, чтобы они касались трех данных плоскостей и данного шара?

289. Через каждую из трех данных точек проведем по m прямых так, чтобы среди них не было двух, паралельных между собой, и трех, пересекающихся в одной точке. Найти число точек пересечения этих прямых.

290. В пространстве даны n точек, из которых m лежат в одной плоскости P, а остальные расположены так, что никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Сколько можно провести плоскостей так, чтобы они содержали по три данные точки?

291. На плоскости даны три точки A, B, C. Проведем через точку A m прямых, через B — n прямых и через C — p прямых. При этом среди проведенных прямых нет трех, пересекающихся в одной точке, и двух, параллельных между собой. Найти число треугольников, вершины которых являются точками пересечения этих прямых и не совпадают с заданными точками A, B, C.

292. Сколько существует треугольников, у которых вершины являются вершинами данного выпуклого n-угольника, но стороны не совпадают со сторонами этого n-угольника?

293. На плоскости проведены n прямых, и на каждой из них взято по p точек так, что ни одна из этих точек не является точкой пересечения прямых и никакие три точки не лежат на одной прямой, отличной от заданных. Найти число треугольников с вершинами в этих точках.

294. Доказать, что число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника, лежащих вне этого многоугольника, равно $\frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)$, а лежащих внутри него равно $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ (предполагается, что никакие две диагонали не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке).

295. На окружности расположено n точек. Сколько сущестует различных многоугольников (не обязательно выпуклых), вписанных в эту окружность, вершинами которых служат данные точки? А сколько выпуклых многоугольников?

296. На плоскости проведены m параллельных прямых. Кроме того, на той же плоскости проведены n прямых, не параллельных ни между собой, ни уже проведенным ранее. Ни одна из прямых не проходит через точку пересечения двух других прямых. На сколько областей делится плоскость проведенными прямыми?

297. Даны 11 точек, из которых 5 лежат на одной окружности. Кроме них, никакие 4 не лежат на одной окружности. Сколько окружностей можно провести так, чтобы каждая из них содержала по крайней мере 3 точки из числа заданных?

298. На плоскости дано 10 попарно пересекающихся прямых, причем никакие 3 прямые не проходят через одну точку и никакие 4 не касаются одной и той же окружности. Сколько можно построить окружностей, каждая из которых касается 3 прямых из числа заданных 10?

299. Найти число всех выпуклых k-угольников, вершинами которых служат k из n вершин выпуклого n-угольника, причем две соседние вершины k-угольника должны быть разделены по меньшей мере s вершинами n-угольника.

300. Параллелограмм пересекается двумя рядами прямых, параллельных его сторонам; каждый ряд состоит из r линий. Сколько параллелограммов в получившейся фигуре?

301. На сколько частей разбивается выпуклый n-угольник своими диагоналями, если никакие три из них не пересекаются в одной точке внутри n-угольника?

302. Пусть есть одна карта с числом 1, две карты с числом 2, три карты с числом 3 и т. д. Доказать, что число способов вытянуть две карты так, чтобы получить сумму n, равно $\frac{n}{12}(n^2-1)$ или $\frac{n}{12}(n^2-4)$ в зависимости от того, нечетно или четно n.

303. Имеются $3n+1$ предметов, из которых n одинаковых, а остальные различны. Доказать, что из них можно извлечь n предметов 2^{2n} способами.

304. Дана последовательность чисел 1, 2, 3, ..., $2n$. Сколькими способами можно извлечь из нее три числа, образующие арифметическую прогрессию? То же самое для последовательности чисел 1, 2, 3, ..., $2n+1$.

305. На плоскости проведено несколько замкнутых кривых, каждая из которых пересекает все остальные по крайней мере в двух точках. Пусть n_r — число точек, в которых пересекаются r кривых. Доказать, что число замкнутых областей, ограниченных дугами этих кривых и не содержащих внутри себя таких дуг, равно

$$1+n_2+2n_3+\ldots+rn_{r+1}+\ldots$$

306. На плоскости проведены два пучка прямых линий с центрами A и B, один из которых содержит m, а другой n прямых. Пусть никакие две прямые не параллельны и ни одна прямая не проходит через обе точки A и B. На сколько частей прямые этих пучков делят плоскость?

307. Можно ли каждый из 77 телефонов соединить ровно с 15 другими?

308. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок в выражении

$$(7x^3-13y^2+5z^2)^{1964}(y^3-8y^2+6y+z)^2+(2x^2+18y^3-21)^{1965}.$$

309. В ящике лежит 100 разноцветных шариков: 28 красных, 20 зеленых, 12 желтых, 20 синих, 10 белых и 10 черных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, чтобы среди них обязательно оказалось 15 шариков одного цвета?

310. Можно раскрасить либо все грани куба в белый цвет, либо все в черный цвет, либо часть в белый цвет, часть в черный цвет. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы ни переворачивать куб.)

311. Решите ту же задачу при условии, что раскрашиваются не грани, а вершины куба.

312. Модели многогранников делаются из плоских разверток. В развертке грани прилегают друг к другу ребрами, а модель строится путем загибания картонной развертки вдоль ребер. Таких различных разверток правильный тетраэдр имеет две. Сколько их имеет куб?

313. Правильный додекаэдр можно выкрасить в 4 цвета так, чтобы любые две смежные грани были различных цветов. Сколько имеется геометрически различных способов решения этой задачи?

314. Из шести ребер тетраэдра можно выбрать четыре ребра, образующих замкнутый пространственный четырехугольник. Этот четырехугольник содержит все вершины тетраэдра. То же самое можно сделать с кубом — мы получим восьмиугольник, содержащий все вершины куба. Можно ли сделать то же самое с октаэдром, додекаэдром, икосаэдром? Сколько будет решений для каждого многогранника?

315. В начале координат находится частица. Через единицу времени она распадается на две частицы, одна из которых сдвигается на единицу длины влево, а другая — вправо. Этот процесс

повторяется через каждую единицу времени, причем две частицы, оказавшиеся в одной точке, взаимно уничтожаются (так что, например, через две единицы времени остается две частицы). Сколько частиц будет через 129 единиц времени? Через n единиц времени?

316. Некоторый алфавит состоит из шести букв, которые для передачи по телеграфу кодированы так:

•; —; • •; — —; • —; — •

При передаче одного слова не сделали промежутков, отделяющих букву от буквы, так что получилась сплошная цепочка точек и тире, состоящая из 12 знаков. Сколькими способами можно прочитать переданное слово?

317. Каких чисел от 1 до 10 000 000 будет больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в записи которых ее нет?

318. Из точек и тире составляются всевозможные «слова», в которые входит ровно семь знаков. Какое наибольшее число слов можно выбрать из них так, чтобы любые два выбранных слова отличались по крайней мере тремя знаками?

319. Сколькими способами можно раскрасить n красками окружность, разделенную на p частей (p — простое)? Способы, совпадающие при повороте окружности вокруг центра, считаются совпадающими.

320. На листе клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток расставлены числа 1, 2, 3, ..., n^2 по одному в каждой клетке так, что числа, стоящие на каждой вертикали и горизонтали, образуют арифметическую прогрессию. Найти число таких расположений.

321. У человека на голове не более 300 000 волос. Доказать, что в Москве живут не менее 10 человек, у которых число волос одинаково (население Москвы около 6 млн. человек).

322. Дано $2n+1$ предметов. Доказать, что из них можно выбрать нечетное число предметов столькими же способами, как и четное.

323. Доказать, что 1 руб. можно разменять монетами в 2 и 5 коп. большим числом способов, чем монетами в 3 и 5 коп.

324. Сколькими способами можно разменять 20 коп. на монеты достоинством в 1, 2 и 5 коп.?

325. Доказать, что с помощью стандартного набора разновесок: 1 *мг*, 2 *мг*, 2 *мг*, 5 *мг*, 10 *мг*, 20 *мг*, 20 *мг*, 50 *мг*, 100 *мг*, 200 *мг*, 200 *мг*, 500 *мг*, 1 *г* и т. д. можно составить любой вес, выраженный целым числом миллиграммов.

326. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найти сумму всех четырехзначных четных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра может повторяться).

327. Колода из $2n$ карт тасуется следующим образом: ее делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в заданном порядке). Например, карта с номером $n+1$ становится первой, первая — второй, с номером $n+2$ — третьей, вторая — четвертой и т. д. Доказать, что через r раз карта, первоначально находившаяся на p-м месте, попадет на место, x, где x — остаток от деления $p2^r$ на $2n+1$.

328. Доказать, что если в условии задачи 327 колода содержит $6m+2$ карт, то карты с номерами $2m+1$ и $4m+2$ будут все время меняться местами.

329. Если при том же условии колода содержит $14m+6$ карт, то после трех тасовок указанным способом карты $2m+1$, $2(2m+1)$, $3(2m+1)$, $4(2m+1)$, $5(2m+1)$, $6(2m+1)$ вернутся на исходные места.

330. Если при том же условии 2^x-1 делится на $2n+1$, то колода из $2n$ карт после x тасовок придет в первоначальное положение.

331. Колода карт тасуется следующим образом: сначала берется первая карта, вторая карта кладется на нее, а третья — под нее и т. д. Доказать, что если колода содержит $6n-2$ карт, то карта $2n$ остается на месте.

332. 22 карты подвергаются указанной выше тасовке. Доказать, что карта 8 все время остается на месте, 5 и 14 меняются местами, а 3, 13, 18 переходят друг в друга по кругу.

333. Доказать, что при том же условии: колода в 16 карт придет в первоначальное положение через 5 раз, колода в 32 карты — после 6 раз, 42 карты — 8 раз, 28 и 36 карт — 9 раз, 12, 20, 46 карт — 10 раз, 22 и 52 карты — 12 раз, 14 карт — 14 раз, 18 карт — 18 раз, 26 карт — 26 раз, 30 карт — 30 раз, 50 карт — 50 раз.

334. Квадрат разделен на 16 равных квадратов. Сколькими способами можно раскрасить их в белый, черный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?

335. 15 школьников строят для прогулки в 5 рядов по 3 человека в ряду. Сколько раз можно это сделать так, чтобы никакие 2 школьника не оказались дважды вместе?

336. Доказать, что если n — целое, то $(n^2)!/(n!)^{n+1}$ — целое; если m и n — нечетные, то $(mn)!/(m!)^{\frac{n+1}{2}}(n!)^{\frac{m+1}{2}}$ — целое.

337. n предметов расположены по кругу. Доказать, что если f_n — число перестановок этих предметов, при которых ни один предмет не следует за тем, за которым он следовал первоначально, то

$$f_n+f_{n+1}=D_n$$

(см. стр. 73).

338. Найти число целых решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_p=m$, если все неизвестные удовлетворяют неравенству $0\leqslant l\leqslant x_k\leqslant n$.

339. Имеется 7 экземпляров одной книги, 8 — другой и 9 — третьей. Сколькими способами можно разделить их между двумя лицами так, чтобы каждый получил 12 книг?

340. Выписаны все n-сочетания с повторениями, составленные из n букв. Показать, что каждая буква встретится C_{2n-1}^n раз.

341. От A до B 999 *км*. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых написаны расстояния до A и до B (0,999), (1,998), ..., (999,0). Сколько среди них таких, на которых есть только две различные цифры?

342. Составляются всевозможные размещения с повторениями, которые можно сделать из m белых и n черных шаров. Показать, что их число равно $P(m+1, n+1)-2$.

343. Составлены всевозможные размещения с повторениями из m белых и n черных шаров. Показать, что общее число белых

шаров во всех размещениях

$$1+\frac{mn+m-1}{n+2}P(m+1,\ n+1),$$

а черных —

$$1+\frac{mn+n-1}{m+2}P(m+1,\ n+1).$$

Проверить ответ задачи на слове «Гаага».

344. Доказать, что число размещений по 1, 2, ..., $m+n+1$, которые можно сделать из m белых шаров, n черных шаров и одного красного шара, в которые входит красный шар, равно

$$1+\frac{mn+m+n}{m+n+4}P(m+2,\ n+2).$$

345. Полное число размещений, которые можно сделать из m белых шаров, n черных шаров и одного красного шара, равно

$$\frac{(m+1)(n+1)}{m+n+3}P(m+2,\ n+2)-1.$$

Проверить ответ на слове «окорок».

346. У меня 7 друзей. Сколькими способами могу я приглашать их к себе обедать по 3 в течение 7 дней так, чтобы никакие 3 из них не встретились у меня дважды?

347. Если я хочу иметь 7 разных компаний по 3 и никого не оставить не приглашенным, то это можно сделать

$$A_{35}^{7}-7A_{20}^{7}+21A_{10}^{7}$$

способами.

348. Если я хочу иметь 7 разных компаний по 3 и ни один друг не ходит каждый день, это можно сделать $A_{35}^{7}-7A_{15}^{7}$ способами.

349. Показать, что полное число размещений из $n\geqslant 2$ предметов (по 1, 2, ..., n) является ближайшим целым к $en!-1$.

350. Если выписать все эти размещения, то число раз, сколько встретится каждый предмет, является ближайшим целым к $e(n-1)(n-1)!$

351. Монету бросают $2n$ раз. Доказать, что число вариантов, при которых герб ни в один момент не выпал чаще решки, равно

$$1+\left(C_{n}^{1}\right)^{2}+\ldots+\left(C_{n}^{n}\right)^{2}=C_{2n}^{n}.$$

352. Сколькими способами можно распределить $3n$ разных книг между тремя лицами так, чтобы числа книг образовали арифметическую прогрессию?

353. Имеется n пар, состоящих из одинаковых букв, причем разные пары состоят из разных букв. Эти буквы упорядочиваются всеми возможными способами так, чтобы никакие две одинаковые буквы не шли подряд. Доказать, что число различных упорядочиваний равно

$$\frac{1}{2^{n}}\left[(2n)!-\frac{n}{1}2(2n-1)!+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2^{2}(2n-2)!-\ldots\right].$$

354. Имеется r различных вещей, которые распределяются между $n+p$ лицами так, чтобы по крайней мере n из них получили не менее одной вещи. Доказать, что число способов раздела равно

$$(n+p)^r - n(n+p-1)^r + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n+p-2)^r - \ldots$$

355. Обозначим через Π_n^k число способов раздела n различных вещей на k групп. Доказать, что при $n>1$

$$1 - \Pi_n^2 + 2!\,\Pi_n^3 - 3!\,\Pi_n^4 + \ldots = 0.$$

356. Имеется m ячеек, в первой из которых лежат n предметов, во второй $2n$ предметов, ..., в m-й — mn предметов. Сколькими способами можно выбрать по n предметов из каждой ячейки?

357. В корзине лежат $2n+r$ яблок и $2n-r$ груш. Доказать, что при заданном n число выборов n яблок и n груш будет наибольшим, если $r=0$.

358. 1000 точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого расположено еще 500 точек так, что никакие три из этих 1500 точек не лежат на одной прямой. Данный тысячеугольник разрезан на треугольники так, что все указанные 1500 точек являются вершинами треугольников, и никаких других вершин эти треугольники не имеют. Сколько получится треугольников при таком разрезании?

359. Пять человек играют несколько партий в домино (двое на двое), причем каждый играющий имеет каждого один раз своим партнером и два раза своим противником. Найти количество сыгранных партий и все способы распределения играющих.

360. Из точки O на плоскости проводят все замкнутые ломаные длины $2n$, стороны которых лежат на линиях клетчатой бумаги со стороной клетки, равной 1. Найти число этих ломаных, если ломаная может проходить один и тот же отрезок несколько раз.

361. На листе бумаги нанесена сетка из n горизонтальных и n вертикальных прямых. Сколько различных $2n$-звенных замкнутых ломаных можно провести по линиям сетки так, чтобы каждая ломаная имела звенья на всех горизонтальных и всех вертикальных прямых?

362. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3 красными и 7 синими шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено (две погремушки считаются одинаковыми, если одна из них может быть получена из другой только передвижением шариков по кольцу и переворачиванием).

363. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, причем каждые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Доказать, что каждый присутствующий знаком с одинаковым числом человек.

364. На окружности взято несколько точек; одни из них обозначены буквой A, другие — буквой B. На каждой из дуг, на которые окружность делится взятыми точками, ставим по следующему правилу: если обе концевые точки обозначены буквами A, то ставим число 2; если обе концевые точки обозначены буквами B, то ставим $1/2$; если же концевые точки дуги обозначены разными буквами, то ставим число 1. Доказать, что произведение всех поставленных чисел равно 2^{a-b}, где a — число точек, обозначенных буквой A, а b — число точек, обозначенных буквой B.

365. Горизонтали шахматной доски обозначаются, как обычно, цифрами от 1 до 8, а вертикали — буквами от a до h. Пусть теперь a, b, c, d, e, f, g, h — произвольные числа. Напишем на каждом поле доски произведение чисел, обозначающих соответствующие горизонталь и вертикаль, и расставим 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Чему равно произведение закрытых чисел?

366. Оргкомитет олимпиады состоит из 11 человек. Материалы олимпиады хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколькими ключами следует снабдить каждого члена оргкомитета, чтобы доступ в сейф был возможен, когда соберутся любые 6 членов оргкомитета, и не был возможен, если соберется меньше 6 членов?

367. Имеется кусок цепи из 60 звеньев. Каждое звено весит 1 *г*. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы с помощью раскованных звеньев и получившихся кусков можно было получить любой вес, выражающийся целым числом от 1 до 60? Решите ту же задачу, если для взвешивания можно пользоваться двухчашечными весами.

368. Сколько существует пар целых чисел x, y, заключенных между 1 и 1000, таких, что x^2+y^2 делится на 49?

369. Сколько двузначных чисел в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат?

370. Найти сумму всех четырехзначных чисел, составленных из этих цифр от 1 до 6 и делящихся на 3.

371. Найти сумму всех четырехзначных четных чисел, которые можно составить из цифр от 0 до 5.

372. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $|x|+|y|\leqslant 1000$?

373. На окружности даны точки A_1, A_2, ..., A_{16}. Построим всевозможные выпуклые многоугольники, вершины которых находятся среди точек A_1, A_2, ..., A_{16}. Разобьем эти многоугольники на две группы. В первую группу отнесем все многоугольники, одной из вершин которых является точка A_1, а во вторую — все остальные многоугольники. В какой группе больше многоугольников?

374. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Найти число клеток, на которых он может оказаться через $2n$ ходов.

375. Имеется 1955 точек. Какое наибольшее число троек точек можно из них выбрать так, чтобы каждые две тройки имели общую точку?

376. Числа от 1 до 100 000 000 выписаны подряд так, что получилась последовательность цифр 123456...100 000 000. Доказать, что число всех цифр этой последовательности равно числу нулей в последовательности 1, 2, 3, ..., 10^9.

377. Сколько существует четырехзначных чисел от 0001 до 9999, у которых сумма двух первых цифр равна сумме двух последних цифр?

378. В школе изучают $2n$ предметов. Все ученики учатся на 4 и 5. Никакие два ученика не учатся одинаково, ни про каких двух нельзя сказать, что один учится лучше другого. Доказать, что число учеников в школе не больше C_{2n}^{n} (мы считаем, что один ученик учится лучше другого, если по всем предметам у него оценки не хуже, чем у второго, а по некоторым — лучше).

379. Пусть M_r — число размещений без повторений из m элементов по r, а N_r — число размещений без повторений из n элементов по r. Доказать, что число размещений из $m+n$ элементов по r выражается формулой $(M+N)^r$, где после возведения в степень надо заменить все показатели индексами.

380. Найти коэффициент при x^8 в разложении

$$(1+x^2-x^3)^9.$$

381. Найти коэффициент при x^m в разложении

$$(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\ldots+(1+x)^n$$

по степеням x. Разобрать отдельно случаи $m<k$, $m\geqslant k$.

382. Найти коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$.

383. В каком из выражений $(1+x^2-x^3)^{1000}$ или $(1-x^2+x^3)^{1000}$ будет после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{17}?

384. Пусть a_0, a_1, a_2, … — коэффициенты в разложении $(1+x+x^2)^n$ по возрастающим степеням x. Доказать, что

а) $a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\ldots-a_{2n-1}a_{2n}=0$,

б) $a_0^2-a_1^2+a_2^2-\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}^2=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}(-1)^{n-1}a_n^2$,

в) $a_r-na_{r-1}+C_n^2a_{r-2}-\ldots+(1)^rC_n^ra_0=0$, если r не кратно 3,

г) $a_0+a_2+a_4+\ldots=\frac{1}{2}(3^n+1)$,

$a_1+a_3+a_5+\ldots=\frac{1}{2}(3^n-1)$.

385. Найти число различных (не подобных между собой) членов разложения

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^3,$$

получающихся после возведения в степень.

386. Найти коэффициент при x^k в разложении

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^2.$$

387. Доказать, что

$$\frac{\left[C_{n+1}^{r+1}-C_n^r\right]C_{n-1}^{r-1}}{\left(C_n^r\right)^2-C_{n+1}^{r+1}C_{n-1}^{r-1}}=r.$$

388. Доказать, что

$$C_n^1+6C_n^2+6C_n^3=n^3,$$

$$1+7C_n^1+12C_n^2+6C_n^3=(n+1)^3.$$

389. Доказать, что

$$1+14C_n^1+36C_n^2+24C_n^3=(n+1)^4-n^4,$$

$$C_n^1+14C_n^2+36C_n^3+24C_n^4=n^4.$$

390. Доказать, что

$$1-3C_n^2+9C_n^4-27C_n^6+\ldots=(-1)^n 2^n \cos\frac{2n\pi}{3}$$

$$C_n^1-3C_n^3+9C_n^5-\ldots=\frac{(-1)^{n+1}\,2^{n+1}}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

391. Доказать, что

а) $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$,

б) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$,

в) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$,

г) $C_n^0+C_n^4+C_n^8+\ \ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$.

392. Доказать, что при $n\geqslant 2$ и $|x|<1$ имеем

$$(1+x)^n+(1-x)^n\leqslant 2^n.$$

393. Доказать, что при $m>n$

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{m(m-1)\ldots(m-x+1)}=\frac{m+1}{m-n+1}$$

и

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}}=\frac{2n+1}{n+1}.$$

394. Доказать, что

$$\frac{m}{1}+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}=$$

$$=\frac{n}{1}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m+1)}{1\cdot 2\ldots m}.$$

395. Доказать, что

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^{x}}=\frac{2}{n+1}.$$

396. Доказать, что

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

397. Доказать, что

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{2(n+q+1)}{(q+1)(q+2)(q+3)}.$$

398. Доказать, что

$$\left(C_n^1\right)^2 + 2\left(C_n^2\right)^2 + 3\left(C_n^3\right)^2 + \ldots + n\left(C_n^n\right)^2 = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.$$

399. Доказать тождество

$$\frac{1}{[(n-1)!]^2} + \frac{1}{1!\,2!}\,\frac{1}{[(n-2)!]^2} + \frac{1}{2!\,3!}\,\frac{1}{[(n-3)!]^2} + \ldots$$
$$\ldots = \frac{(2n-1)!}{[n!\,(n-1)!]^2}.$$

400. Доказать, что

$$\frac{(n+r-1)!}{r!} - \frac{n}{1}\,\frac{(n+r-3)!}{(r-2)!} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{(n+r-5)!}{(r-4)!} - \ldots$$
$$\ldots = \frac{n!\,(n-1)!}{r!\,(n-r)!}.$$

401. Вычислить следующие суммы:

а) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$,

б) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)\,C_n^n$,

в) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)\,C_n^n$,

г) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n-1)\,C_n^n$,

д) $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n\,(n+1)\,C_n^n$,

е) $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \ldots + (4n-1)\,C_n^n$,

ж) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\,nC_n^n$,

з) $\dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+1}$,

и) $\dfrac{C_n^0}{2} + \dfrac{C_n^1}{3} + \dfrac{C_n^2}{4} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+2}$,

к) $\dfrac{C_n^0}{1} - \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} - \ldots + (-1)^n\dfrac{C_n^n}{n+1}$,

л) $\left(C_n^0\right)^2 - \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 - \ldots + (-1)^n\left(C_n^n\right)^2$.

402. Найти наибольший коэффициент в разложениях

$$(a+b+c)^{10}, \quad (a+b+c+d)^{14}.$$

403. Обозначим через Y_n коэффициенты разложения функции $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ в степенной ряд

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + Y_1 x + Y_2 x^2 + \ldots$$

Выразить Y_n через биномиальные коэффициенты. Найти разложение для $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$.

404. Доказать, что числа Y_n удовлетворяют соотношениям:

а) $Y_n + \frac{1}{2} Y_1 Y_{n-1} + \frac{1}{3} Y_2 Y_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n+1} Y_n = \frac{1}{2} Y_{n+1}$,

б) $Y_0 Y_n + Y_1 Y_{n-1} + Y_2 Y_{n-2} + \ldots + Y_n Y_0 = 4^n$,

в) $$\frac{Y_0 Y_n}{1(n+1)} + \frac{Y_1 Y_{n-1}}{2 \cdot n} + \frac{Y_2 Y_{n-2}}{3(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{Y_n Y_0}{(n+1) \cdot 1} = \frac{Y_{n+1}}{n+2}.$$

405. В числовом треугольнике

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

каждое число равно сумме чисел, расположенных в предыдущей строке над этим числом и над его соседями справа и слева (если не все такие числа присутствуют, то они считаются равными нулю). Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, найдется четное число.

406. Первая строка числового треугольника

$$\begin{array}{l} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 1957 \qquad 1958 \\ \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 3915 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{array}$$

состоит из чисел 0, 1, ..., 1958. Элементы каждой следующей строки являются суммами элементов предыдущей строки, стоящих слева и справа от данного числа. Доказать, что элемент последней строки треугольника делится на 1958.

407. Рассматривается ряд чисел Фибоначчи u_n : $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=2$, $u_4=3$, $u_5=5$ и т. д. (мы начали его с членов 0 и 1, а не 1 и 2, как в главе VI). Доказать, что а) Для любых m и n имеем

$$u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}.$$

б) Для любых m и $n=km$ число u_n делится на u_m.

в) Два соседних члена ряда Фибоначчи взаимно просты.

408. Найти наибольший общий делитель 1000-го и 770-го членов ряда Фибоначчи.

409. Найдется ли среди первых 100 000 001 первых членов ряда Фибоначчи число, оканчивающееся четырьмя нулями?

410. В ряде Фибоначчи выбрано 8 подряд идущих чисел. Доказать, что их сумма не входит в этот ряд.

411. Доказать, что

а) $u_2+u_4+\ldots+u_{2n}=u_{2n+1}-1$,

б) $u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}=u_{2n}$,

в) $u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_nu_{n+1}$,

г) $u_{n+1}^2=u_nu_{n+2}+(-1)^n$,

д) $u_1u_2+u_2u_3+\ldots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2$,

е) $u_1u_2+u_2u_3+\ldots+u_{2n}u_{2n+1}=u_{2n+1}^2-1$,

ж) $nu_1+(n-1)u_2+(n-2)u_3+\ldots+2u_{n-1}+u_n=$
$$=u_{n+4}-(n+3),$$

з) $u_3+u_6+\ldots+u_{3n}=\dfrac{u_{3n+2}-1}{2}$,

и) $u_{3n}=u_{n+1}^3+u_n^3-u_{n-1}^3$.

412. Докажите, что любое натуральное число N можно представить в виде суммы чисел Фибоначчи, причем каждое число входит в сумму не более одного раза, и никакие два соседних числа не входят вместе.

413. Пусть $p\geqslant q\geqslant r$ — целые числа такие, что $p<q+r$ и $p+q+r=2s$. Имеется p черных, q белых и r красных шаров. Показать, что число способов раздела этих шаров между двумя лицами, при которых каждый получает s шаров, равно

$$s^2+s+1-\frac{1}{2}(p^2+q^2+r^2).$$

414. Если $q+r<p$, то ответ в предыдущей задаче увеличивается на $\dfrac{1}{2}(p-s)(p-s-1)$.

415. Имеется $pq+r$ разных предметов, где $0\leqslant r<p$. Они делятся между p людьми возможно ровнее (все получают либо q, либо $q+1$ предметов). Показать, что число способов такого раздела равно

$$C_p^r\,\frac{(pq+r)!}{(q+1)^r\,(q!)^p}.$$

416. Вычислить сумму

$$\sum_{i_n=1}^{m} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1.$$

417. Доказать тождество

$$C_{n+m}^{m} = \sum P(k_1, \dots, k_m, n-k_1 - \dots - k_m + 1),$$

где суммирование распространено на все целые неотрицательные решения уравнения $k_1+2k_2+\dots+mk_m=m$.

418. Найти общее решение рекуррентных соотношений:

а) $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$,

б) $a_{n+2}+3a_{n+1}-10a_n=0$,

в) $a_{n+2}-4a_{n+1}+13a_n=0$,

г) $a_{n+2}+9a_n=0$,

д) $a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=0$,

е) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$,

ж) $a_{n+3}+3a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n=0$,

з) $a_{n+4}+4a_n=0$.

419. Найти a_n, зная рекуррентное соотношение и начальные члены:

а) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$, $a_1=1$, $a_2=-7$,

б) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$, $a_1=2$, $a_2=4$,

в) $a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0$, $a_1=-\frac{1}{4}$, $a_2=-\frac{1}{2}$,

г) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$, $a_1=1$, $a_2=-3$, $a_3=-29$.

420. Найти такую последовательность, что $a_1=\cos\alpha$, $a_2=\cos 2\alpha$ и

$$a_{n+2}-2\cos\alpha\, a_{n+1}+a_n=0.$$

421. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n=n^k$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k}-C_k^1 a_{n+k-1}+C_k^2 a_{n+k-2}+\dots+(-1)^k C_k^k a_n=0.$$

422. Найти последовательность такую, что

$$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=2^n.$$

423. Из тождества $(1+x)^p(1+x)^{-k-1}=(1+x)^{p-k-1}$ выведите, что

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{k+s}^{s} C_p^{n-s} = C_{p-k-1}^{n}\ ^{1)}.$$

424. Из тождества $(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-q-1}=(1-x)^{-m-q-2}$ выведите, что

$$\sum_{s=0} C_{p-s}^{m} C_{q-s}^{q} = C_{p+q+1}^{p-m}.$$

---

[1]) Здесь и далее сумма распространена на целые неотрицательные значения s, для которых определена левая часть равенства.

425. Из тождества $(1+x)^n=(1-x^2)^n(1-x)^{-n}$ выведите, что

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_{n+k-2s}^{n} C_{n+1}^{s}=C_{n+1}^{k}.$$

426. Из тождества $(1+x)^n(1-x^2)^{-n}=(1-x)^{-n}$ выведите, что

$$\sum_{s=0} C_n^{k-2s} C_{n+s-1}^{s}=C_{n+k-1}^{k}.$$

427. Из тождества $(1-x^2)^{-p-1}=(1+x)^{-p-1}(1-x)^{-p-1}$ выведите, что

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_{p+2k-s}^{p} C_{p+s}^{p}=C_{p+k}^{k}.$$

428. Из тождеств

$$(1-x)^{-2p}\left[1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right]^{-p}=(1-2x)^{-p}$$

и

$$(1-x)^{2p}\left[1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right]^{p}=(1-2x)^{p}$$

выведите, что

$$\sum_{s=0} C_{p+s}^{s} C_{2p+m}^{2p+2s+1}=2^{m-1} C_{m+p-1}^{p}$$

и

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{m-2s}=2^p C_p^m.$$

429. Докажите, что

$$\sum_{s=0} C_{p+s}^{s} C_{2p+m}^{2p+2s}=2^{m-1}\frac{2p+m}{m} C_{m+p-1}^{p}.$$

430. Из тождеств

$$(1-x)^{\pm 2p}\left[1+\frac{2x}{(1-x)^2}\right]^{\pm p}=(1+x^2)^{\pm p}$$

выведите формулы

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_{p+s-1}^{s} C_{2m+2p+s}^{2m+1-s} 2^s=0,$$

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_{p+s-1}^{s} C_{2m+2p+s-1}^{2m-s} 2^s=(-1)^m C_{p+m-1}^{m},$$

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{2m+1-s} 2^s=0,$$

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{2m-s} 2^s=C_p^m,$$

С их помощью докажите, что

$$\sum_{s=0} C_{2p+2m}^{2s} C_{p+m-s}^{p} = 2^{2m}(p+m)\frac{(p+2m-1)!}{p!\,(2m)!},$$

$$\sum_{s=0} C_{2p+2m+1}^{2s+1} C_{p+m-s}^{p} = 2^{2m}(2p+2m+1)\frac{(p+2m)!}{p!\,(2m+1)!},$$

$$\sum_{s=1} C_{2p+2m}^{2s-1} C_{p+m-s}^{p} = 2^{2m-1} C_{p+2m-1}^{p},$$

$$\sum_{s=0} C_{2p+2m+1}^{2s} C_{p+m-s}^{p} = 2^{2m} C_{p+2m}^{p}.$$

431. Рассматривая формулы

$$[(1+x)^p \pm (1-x)^p]^2 = (1+x)^{2p} + (1-x)^{2p} \pm 2(1-x^2)^p,$$

$$[(1+x)^p + (1-x)^p]\,[(1+x)^p - (1-x)^p] = (1+x)^{2p} - (1-x)^{2p}$$

при положительных и отрицательных значениях p, докажите, что

$$2\sum_{s=0} C_p^{2s} C_p^{2m-2s} = C_{2p}^{2m} + (-1)^m C_p^m,$$

$$2\sum_{s=0} C_p^{2s+1} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p}^{2m+2} + (-1)^m C_p^{m+1},$$

$$2\sum_{s=0} C_p^{2s} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p}^{2m+1},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p} C_{p+2m-2s}^{p} = C_{2p+2m+1}^{2p+1} + C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s}^{p-1} = C_{2p+2m+1}^{2p-1} - C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p} C_{p+2m-2s+1}^{p} = C_{2p+2m+2}^{2p+1}.$$

432. Рассматривая выражение

$$\left[(1+x)^{p+1} \pm (1-x)^{p+1}\right]\left[(1+x)^p \pm (1-x)^p\right]$$

при всех комбинациях знаков, выведите формулы

$$2\sum_{s=0} C_{p+1}^{2s} C_p^{2m-2s} = C_{2p+1}^{2m} + (-1)^m C_p^m,$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+1}^{2s} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p+1}^{2m+1} - (-1)^m C_p^m,$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+1}^{2s+1} C_p^{2m-2s} = C_{2p+1}^{2m+1} + (-1)^m C_p^m,$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+1}^{2s+1} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p+1}^{2m+2} + (-1)^m C_p^{m+1},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s-1}^{p-1} C_{p+2m-2s}^{p} = C_{2p+2m}^{2p} + C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s-1}^{p-1} C_{p+2m-2s+1}^{p} = C_{2p+2m+1}^{2p} + C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s}^{p} = C_{2p+2m+1}^{2p} - C_{p+m}^{p},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s+1}^{p} = C_{2p+2m+2}^{2p} - C_{p+m+1}^{p}.$$

433. Из соотношения

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^m (1-x)^{-n-1} = \frac{(-1)^m}{x^m}(1-x)^{m-n-1}$$

выведите, что

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_m^{m-k+s} C_{n+s}^{n} = C_{m-n-1}^{k}.$$

434. Докажите, что

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_m^s C_s^n = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ (-1)^n, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

435. Из равенства

$$(1-x)^{-n}(1-x^h)^n = (1+x+\ldots+x^{h-1})^n$$

выведите, что

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{m-sh}^{n-1} C_n^s = \begin{cases} 0, & \text{если } m > hn-1, \\ 1, & \text{если } m = hn-1. \end{cases}$$

436. Из тождества

$$(1-x)^{-n-1}(1-x^h)^n = \frac{(1+x+\ldots x^{h-1})^n}{1-x}$$

выведите, что при $m \geqslant hn$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{m-sh}^{n} C_n^s = h^n.$$

437. Из тождества

$$(1+x)^{\pm p}(1-x)^{\pm p} = (1-x^2)^{\pm p}$$

выведите, что

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_p^{m-s} C_p^s = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_p^{\frac{m}{2}}, & \text{если} \quad m \text{ — четно,} \\ 0, & \text{если} \quad m \text{ — нечетно,} \end{cases}$$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_{p+m-s}^p C_{p+s}^p = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_{p+\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, & \text{если} \quad m \text{ — четно,} \\ 0, & \text{если} \quad m \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

438. Докажите, что

$$\sum_{s=0} (-1)^s \left[C_m^s\right]^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_m^{\frac{m}{2}}, & \text{если} \quad m \text{ — четно,} \\ 0, & \text{если} \quad m \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

439. Обозначим выражение

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$$

через $(a)_n$. Доказать, что

$$(a+b)_n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (a+m)_{n-m} (b-m+1)_m.$$

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1. По правилу произведения получаем $5\cdot 3=15$ путей.
2. По тому же правилу имеем $100^2=10\,000$ способов выбора.
3. 20.
4. 8.
5. 9.
6. 48.
7. 25; 20.
8. 480; 437.
9. 1024; 4032.
10. Белый квадрат выбираем 32 способами и вычеркиваем соответствующие горизонталь и вертикаль. На оставшейся части доски есть 24 черных квадрата. Всего $32\cdot 24=768$ способов выбора.
11. По правилу произведения $12\cdot 9\cdot 10=1080$ способов.
12. $6\cdot 5=30$ способов.
13. $3\cdot 7\cdot 7=147$.
14. Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо том, содержащий два романа и экземпляр третьего романа. По правилам суммы и произведения получаем $6\cdot 3\cdot 4+5\cdot 4+7\cdot 6=134$ способа.
15. Можно купить еще том, содержащий романы «Рудин» и «Отцы и дети» и один экземпляр «Дворянского гнезда». Добавляется $3\cdot 3=9$ способов, а всего имеем 143 способа.
16. Большее число выборов, если взято яблоко, так как $11\cdot 10>$ $>12\cdot 9$.
17. $6\cdot 8\cdot 10=480$; если первые два волчка упали на сторону «1», то третий волчок может упасть 10 способами; аналогично рассматриваются случаи, когда на такую сторону падают другие два волчка; всего получаем $6+8+10$ способов, но при этом один способ (когда на сторону «1» падают все три волчка) считается трижды; поэтому остается 22 способа.
18. Так как порядок красок не играет роли, то $C_5^3=10$ способов.
19. Здесь порядок красок уже важен; поэтому имеем $A_5^3=60$ способов. Если одна полоса красная, то имем $3\cdot A_4^2=36$ способов.
20. $A_5^2=20$ словарей.
21. $A_{10}^2-A_5^2=70$.

22. Получаем размещения с повторениями из 13 карт по 4. Всего $13^4=28\,561$ способ. Если среди карт не должно быть пар, то имеем размещения без повторений; их число $A_{13}^4=17\,160$.

23. Так как достаточно выбрать одну черную и одну красную карту, то получаем $13^2=169$ способов выбора.

24. Ребенок может получить либо одно, либо два, либо три имени, причем все имена различны. Всего $300+300\cdot 299+300\cdot 299\cdot 298=$ $=26\,820\,600$ различных имен.

25. Отношение соседства сохраняется при циклических перестановках и при симметричном отражении. В случае 4 человек мы имеем $2\cdot 4=8$ преобразований, сохраняющих отношение соседства. Так как общее число перестановок 4 человек равно $4!=24$, то имеем $^{24}/_{8}=3$ различных способа рассадки. Если за столом сидят 7 человек, то имеем $7!/14=360$ способов, вообще, в случае n человек $(n-1)!/2$ способов. Число способов, при которых 2 данных человека сидят рядом, вдвое больше числа способов посадить 6 человек (в силу возможности поменять этих людей местами). Значит, оно равно $5!=120$. Точно так же число способов, при которых данный человек имеет данных двух соседей, равно $4!=24$.

26. В одной команде играет один юноша, а в другой — двое. Юношей можно разбить на команды 3 способами. После этого надо выбрать в первую команду 3 девушек из 5. Это можно сделать $C_5^3=10$ способами Всего по правилу произведения получаем $3\cdot 10=$ $=30$ способов разбивки на команды.

27. Число способов разбить n различных предметов на k групп равно k^n. В нашем случае имеем $3^6=729$ способов.

28. По правилу произведения $7\cdot 9=63$ способа.

29. Первый может выбрать книги для обмена $C_7^2=21$ способом, а второй $C_9^2=36$ способами. Всего $21\cdot 36=756$ способов обмена.

30. Разобьем все способы упорядочить ораторов на пары, состоящие из способов, которые получаются друг из друга перестановкой А и Б. В каждой паре есть лишь один способ, удовлетворяющий поставленному условию. Поэтому имеем $5!/2=60$ способов.

31. Если А выступает непосредственно перед Б, мы можем считать их за одного оратора. Поэтому имеем $4!=24$ способа.

32. Выбор мест для мужчин и для женщин можно сделать двумя способами. После этого мужчин можно посадить на выбранные места $5!$ способами. Столько же способов рассадить женщин. Всего получаем $2(5!)^2=28\,800$ способов.

33. Получаем в 10 раз меньше способов, чем в предыдущей задаче, то есть 2880 способов.

34. Общее число способов вынуть 10 карт равно C_{52}^{10}. Число способов, при которых не выбирают ни одного туза, равно C_{48}^{10}. Поэтому хотя бы один туз будет в $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}$ случаях. Ровно один туз в $C_4^1C_{48}^9$ случаях, не менее двух тузов в $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}-4C_{49}^9$ случаях и ровно два туза в $C_4^2C_{48}^8$ случаях (выбираем двух тузов C_4^2 способами и еще 8 карт из 48 C_{48}^8 способами).

35. 3^m способов (см. задачу 27).

36. Зашифруем каждый набор зубов последовательностью нулей и единиц (нуль ставится, если на данном месте нет зуба, и единица, если есть). Число таких последовательностей равно 2^{32}. Так как каждому жителю соответствует своя последовательность, то число жителей не больше чем 2^{32}.

37. Сначала выберем, кто из трех пассажиров, которым безразлично как сидеть, сядет лицом к паровозу. Этот выбор можно сделать 3 способами. На каждой скамье можно пересаживать пассажиров 5! способами. Всего получаем $3(5!)^2=43\,200$ способов.

38. $A_9^4=3024$.

39. $C_{52}^5=2\,598\,960$.

40. Номеров, содержащих одну букву $32\cdot 10^4$, две буквы $32^2\cdot 10^4$ и три буквы $32^3\cdot 10^4$. Всего по правилу суммы $33\,820\cdot 10^4$ номеров.

41. Из пяти дней надо выбрать два, в которые даются яблоки. Всего $C_5^2=10$ способов.

42. C_{m+n}^m.

43. $P(2, 3, 4)=1260$.

44. Так как апельсины различны, то имеем $A_8^5=6720$ способов.

45. Каждый апельсин может попасть любому из 8 сыновей. Поэтому имеем $8^5=32\,768$ способов.

46. $P(4, 3, 3, 2, 1, 1)$; $P(3, 1, 1, 1, 1, 1)$; $P(2, 2, 2, 1, 1, 1)$.

47. $C_{30}^4=27\,405$; $A_{30}^4=657\,720$.

48. $P(2, 2, 2, 1, 1)=5040$.

49. Сначала выбираем 6 абонентов C_n^6 способами. Располагаем этих абонентов в любом порядке и разбиваем на пары (первый, второй, потом третий, четвертый и, наконец, пятый, шестой). Это можно сделать 6! способами Так как абонентов можно переставлять внутри каждой пары, а также несуществен порядок пар, то общее число способов надо разделить на $2^3\cdot 3!=48$. Всего получаем $\dfrac{n!}{48(n-6)!}$ способов.

50. $\bar{C}_{10}^{12}=C_{21}^{12}$; $\bar{C}_{10}^{8}=C_{17}^{8}$; C_{10}^{8}.

51. Можно выбрать двух, трех или четырех женщин. Двух женщин можно выбрать C_4^2 способами. После этого надо выбрать 4 мужчин, что можно сделать C_7^4 способами. По правилу произведения получаем $C_4^2C_7^4$ способов. Если выбирают трех женщин, то получают $C_4^3C_7^3$ способов, а если четырех, — то $C_4^4C_7^3$ способов. Всего

$$C_4^2C_7^4+C_4^3C_7^3+C_4^4C_7^3=371 \text{ способ.}$$

52. Число должно оканчиваться 1 из 5 комбинаций: 12, 24, 32, 44, 52; первые же две цифры могут быть произвольными. Всего получаем $5^2\cdot 5=125$ чисел.

53. Каждый из n пассажиров может выбрать любую из m остановок. Поэтому имеем m^n способов распределения. Если учитывать лишь количество пассажиров, вышедших на каждой из остановок, то получаем C_{m+n-1}^{m-1} способов.

54. Если a и b стоят рядом, мы можем объединить их в один знак. Учитывая, что a и b можно переставить местами, получаем $2(n-1)!$ перестановок, в которых a и b стоят рядом. Поэтому они не стоят рядом в $n!-2(n-1)!$ перестановках. Точно так же получаем, что a, b и c не стоят рядом в $n!-6(n-2)!$ перестановках. Никакие два из элементов a, b, c не стоят рядом в $n!-6(n-1)!+$ $+6(n-2)!$ перестановках (по формуле включений и исключений).

55. Три судьи могут выбрать победителя 10^3 способами. $A_{10}^3=720$ случаях они назовут трех различных кандидатов. Поэтому совпадение хотя бы у двух судей будет в 280 случаев. Доля таких случаев равна 0,28.

56. Так как каждый студент может получить три вида оценок, то имеем $3^4=81$ способ сдачи экзаменов.

57. Так как ожерелья остаются неизменными при циклических перестановках бусинок и при переворачивании, то можно составить $\frac{7!}{14}=360$ видов ожерелий.

58. Виды ожерелий отличаются друг от друга числом маленьких бусинок, заключенных между двумя большими. Поэтому имеем три вида ожерелий.

59. В русском алфавите 33 буквы, но по крайней мере с 4 букв Ъ, Ь, Ы, Й, имена не начинаются. Поэтому общее число различных инициалов не больше $29^2=841$, что меньше 2000.

60. $A_{10}^7=604\,800$; $C_{10}^3=120$. Если две девушки заведомо будут приглашены на танец, то имеется A_7^2 вариантов выбора их партнеров; оставшиеся 5 юношей выбирают партнершу из числа 8 девушек, что может быть сделано A_8^5 способами, а всего имеем $A_7^2A_8^5=282\,240$ способов. Наконец, если данные две девушки приглашены на танец, то еще пять девушек можно выбрать C_8^5 способами.

61. Офицера можно выбрать C_3^1 способами, сержантов C_6^2 способами и рядовых C_{60}^{20} способами. Всего по правилу произведения получаем $C_3^1C_6^2C_{60}^{20}$ способов выбора Если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов, то получаем $C_5^1C_{60}^{20}$ способов выбора.

62. Четырех девушек можно выбрать C_{12}^4 способами. После этого выбираем A_{15}^4 способами юношей (здесь уже существен порядок!). Всего $C_{12}^4A_{15}^4=17\,417\,400$ способов.

63. Каждая курица может либо войти, либо не войти в число выбранных. Поэтому имеем 2^3 способов выбора кур. Так как по условию хотя бы одна курица должна быть выбрана, получаем 7 способов выбора кур. Точно так же есть $2^4-1=15$ способов выбора

уток и $2^2-1=3$ способа выбора гусей. Всего $7\cdot 15\cdot 3=315$ способов.

64. Это число равно $P(m, n, p)=\dfrac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}$.

65. Книги в черных переплетах можно переставить $m!$ способами, а в красных — $n!$ способами. Всего по правилу произведения $m!n!$ способов. Если книги в черных переплетах стоят рядом, то надо еще выбрать для них место между книгами в красных переплетах. Это можно сделать $n+1$ способами. Всего получаем

$$m!n!(n+1)=m!(n+1)! \text{ способов.}$$

66. Каждый из 15 человек может или войти или не войти в группу. Так как группа не может быть пустой, то получаем $2^{15}-1=32\,767$ способов. Для n человек имеем 2^n-1 способов.

67. Число p_k может войти в данный делитель α с показателями $0, 1, \ldots, \alpha_k$ — всего α_k+1 способами. По правилу произведения число делителей равно $(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_n+1)$. Чтобы найти сумму делителей, рассмотрим выражение

$$\left(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1}\right)\ldots\left(1+p_n+\ldots+p_n^{\alpha_n}\right).$$

Если раскрыть в нем скобки, то получим сумму, в которую каждый делитель входит ровно один раз. По формуле для суммы геометрической прогрессии получаем, что эта сумма равна

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}.$$

68. Сначала положим в каждый пакет по одному полтиннику. После этого надо распределить 7 полтинников по 5 пакетам. Это можно сделать $C_{11}^4=330$ способами (см. стр. 217).

69. Добавим к 20 книгам 4 одинаковых разделяющих предмета и рассмотрим все перестановки полученных объектов. Их число равно $24!/4!$. Каждой перестановке соответствует свой способ расстановки книг.

70. Точно так же, как в предыдущей задаче, получаем, что число способов равно $8!/3!=6720$.

71. Так как учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение, то надо распределить 30 одинаковых «предметов» по 5 «ящикам». Для этого добавим 4 одинаковых разделяющих предмета и возьмем все перестановки полученных объектов. Их число равно $P(30, 4)=46\,376$. Каждой перестановке соответствует свое распределение голосов.

72. 12 книг можно переплести в переплеты 3 цветов 3^{12} способами. Из них в $3\cdot 2^{12}$ случаях книги будут переплетены в не более чем два цвета, а в 3 случаях — в один цвет. По формуле включений и исключений в $3^{12}-3\cdot 2^{12}+3=519\,156$ случаях книги будут переплетены в переплеты всех трех цветов.

73. Добавим к 32 буквам 5 одинаковых «перегородок» и рассмотрим все перестановки полученных объектов, при которых ни одна перегородка не стоит в начале или конце и никакие две перегородки не стоят рядом. Буквы переставляются 32! способами, а для перегородок имеем 31 место и их можно поставить C_{31}^5 способами. Учитывая, что порядок слов несуществен, получаем $32!\,C_{31}^5/6!$ способов составить слова.

74. 12 человек можно выбрать C_{17}^{12} способами. В C_{15}^{10} случаях в число выбранных входят данные два человека. Поэтому остается $C_{17}^{12}-C_{15}^{10}$ допустимых выборов.

75. Камни можно переставлять $P(5, 6, 7)$ способами. При циклических перестановках и при симметриях браслет остается неизменным. Получаем $P(5, 6, 7)/36=\frac{18!}{36\cdot 5!\,6!\,7!}$ способов.

76. Если все выбранные камни одного вида, то 3 способа, если выбраны 2 вида камней, то $2C_3^1=6$ способов, и если все три камня различны, то 1 способ. Всего 10 способов.

77. Чашки могут быть расставлены A_4^3 способами, блюдца A_5^3 и чайные ложки A_6^3 способами. Всего по правилу произведения $A_4^3\cdot A_5^3A_6^3=172\,800$ способов.

78. Если муж пригласит в гости k женщин, то число приглашенных им мужчин равно $6-k$. Тогда жена пригласит $6-k$ женщин и k мужчин. По правилам суммы и произведения такой выбор можно сделать числом $\sum\limits_{k=0}^{5}\left(C_5^k\right)^2\left(C_7^{6-k}\right)^2=267\,148$ способов.

79. На левом борту могут сидеть 0, 1, 2, 3 или 4 человека из числа тех, кому безразличен выбор борта. Если из их числа выбрано k человек, то надо выбрать еще $4-k$ человек из числа 10, предпочитающих левый борт. После этого остается $12+(9-k)$ кандидатов, из которых выбираем 4 гребцов на правый борт. Всего имеем $C_9^kC_{10}^{4-k}C_{21-k}^4$ способов выбора. Суммируя по k, получаем ответ

$$\sum_{k=0}^{4}C_9^kC_{10}^{4-k}C_{21-k}^4=$$

$$=\frac{9!\,10!}{4!}\sum_{k=0}^{4}\frac{(21-k)!}{k!\,(9-k)!\,(4-k)!\,(6+k)!\,(17-k)!}.$$

80. Число 9 можно разбить на три различных слагаемых тремя способами: $9=1+2+6=1+3+5=2+3+4$. Сумма, меньшая, чем 9, будет в 4 случаях: $1+2+3=6$, $1+2+4=7$, $1+2+5=1+3+4=8$. Так как 3 жетона можно вынуть C_{10}^3 способами, то в $C_{10}^3-4=116$ случаях сумма не меньше 9.

81. Сначала выберем по одной карте каждой масти. Это можно сделать 13^4 способами. После этого выберем еще две карты. Если они разных мастей, то это можно сделать $C_4^2\cdot 12^2=864$ способами. Комбинируя эти способы с различными способами выбрать первые 4 карты и учитывая возможность перестановки порядка выбора двух карт одной масти, получаем $216\cdot 13^4$ способов. Если новые две карты имеют одну и ту же масть, то получаем $4\cdot C_{12}^2=264$ спо-

собов выбора. По тем же соображениям они приводят к $88 \cdot 13^4$ способам выбора всех карт. Всего получаем $304 \cdot 13^4$ способов.

82. В первый день участников можно выбрать $C_{10}^6 = 210$ способами, во второй — $C_{10}^6 - 1 = 209$ и в третий $C_{10}^6 - 2 = 208$ способами. Всего $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9\,129\,120$ способов.

83. Так как $C_6^3 = 20$, то каждый способ выбора компании будет использован ровно один раз. Число перестановок этих способов равно $20!$.

84. Каждый юноша может выбирать из 5 мест работы, а каждая девушка — из 4 мест. Всего получаем $5^3 \cdot 4^2 = 2000$ способов выбора.

85. На первом месте можно написать любую из 33 букв, а на каждом из следующих — любую из 32 букв (исключается предшествующая буква). Всего имеем $33 \cdot 32^4 = 34\,503\,008$ слов.

86. Сначала выберем призеров, а потом распределим между ними книги. По правилу произведения получаем $C_{20}^6 P(3, 2, 1)$ способов. Во втором случае сначала выберем, кто получил первую книгу, потом, кто получил вторую, и, наконец, кому досталась третья книга. Всего получаем $C_{20}^3 C_{20}^2 C_{20}^1$ способов распределения.

87. Поставим в соответствие каждой кости (p, q) кость $(n - p,\ n - q)$. Если $p + q = n - r$, то $(n - p) + (n - q) = n + r$. Значит, число костей с суммой очков $n - r$ равно числу костей с суммой очков $n + r$. Общее число всех костей домино равно C_{n+1}^2.

88. По условию задачи места, занятые женщинами и мужчинами, чередуются. Поэтому имеем $2(7!)^2$ способов.

89. Выберем по одной лошади из каждой пары AA', BB', CC' (8 способов выбора), трех лошадей из остальных 10 ($C_{10}^3 = 120$ способов) и выберем порядок запрягания лошадей (6! способов). Всего $8 \cdot 6!\, C_{10}^3 = 691\,200$ способов.

90. Согласные можно выбрать C_9^4 способами, а гласные C_7^3 способами. Выбранные 7 букв можно переставлять 7! способами. Всего получаем $C_4^9 C_7^3 \cdot 7!$ способов. Если никакие две согласные не стоят рядом, то порядок букв такой: СГСГСГС. Здесь мы имеем лишь $3!4!$ перестановок и $C_9^4 C_7^3 3!\,4!$ слов.

91. По формуле включений и исключений число работающих равно $6+6+7-4-3-2+1=11$. Только английский язык знают $6-4-2+1=1$, только французский знают $7-3-2+1=3$.

92. По формуле включений и исключений пирожки взяли $92-47-38-42+28+31+26-25=25$ человек.

93. Мужчин можно разбить на пары $\frac{10!}{(2!)^5 5!}$ способами (учитывая перестановки внутри пар и перестановки самих пар). Женщины разбиваются $10!/(2!)^5$ способами (здесь уже играет роль порядок пар). Всего $(10!)^2/2^{10}5!$ способов.

94. Сначала выберем одного мужчину и одну женщину, которые окажутся в той же лодке, что и выбранная ранее пара

(9^2 способов). После этого разбиваем оставшихся на 4 группы $\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ способами. Всего $\frac{(9!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ способов.

95. Если данные двое мужчин попадают в одну и ту же группу (и в ней же находятся их жены), то остальные могут разбиться на группы $\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ способами. Если же они попадают в разные группы, то эти группы можно дополнить $\left(A_8^2\right)^2$ способами, после чего разбить остальных на группы $\frac{6!}{2^6 \cdot 3!}$ способами. Всего получаем $17(8!)^2/2^8 4!$ способов.

96. Так как числа не могут начинаться с нуля, то имеем $7^4-7^3=$ $=2058$ чисел.

97. Если число, изображенное первыми тремя цифрами, равно x, то число, изображенное последними тремя цифрами, может принимать значения $0, 1, \ldots, 999-x$, а всего $-1000-x$ значений. Так как x меняется от 100 до 999, то нам надо найти сумму натуральных чисел от 1 до 900. Она равна 405 450.

98. Белые шашки можно расставить C_{32}^{12} способами. После выбора 12 полей для белых шашек остается 20 полей для черных, на которые их можно поставить C_{20}^{12} способами. Всего $C_{32}^{12}C_{20}^{12}$ способов.

99. Разбиваем все перестановки букв слова «Юпитер» на классы так, что перестановки одного и того же класса отличаются друг от друга только порядком гласных. Число классов равно $P_6/P_3=120$. Лишь одна перестановка из каждого класса удовлетворяет поставленному условию. Поэтому их число тоже равно 120.

100. В перестановках, где 4 буквы «е» идут подряд, их можно объединить и считать одной буквой. Поэтому число таких перестановок равно 5! Остается $P(4, 1, 1, 1, 1)-5!=1560$ перестановок.

101. Если «п» идет непосредственно после «о», то эти буквы можно объединить. Поэтому число искомых перестановок равно $P(2, 1, 1, 1, 1)=360$.

102. Сначала расставим все буквы слова «обороноспособность», отличные от буквы «о», $P(3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ способами. После этого выбираем 7 из 12 мест, на которые можно вставить буквы «о». Всего получаем $P(3, 2, 2, 1, 1, 1, 1) \cdot C_{12}^{7}$ способов.

103. Как гласные, так и согласные можно переставлять друг с другом $P(2, 1, 1)=12$ способами. Если согласные уже расставлены, то для гласных остается 5 мест. Поэтому места для них можно выбрать $C_5^4=5$ способами. Всего имеем $5 \cdot 12^2=720$ способов.

104. Выпишем гласные в данном порядке. Тогда для буквы «ф» имеем 5 мест. После того как она вписана, имеем 6 мест для буквы «ц» и, наконец, 7 мест для буквы «т». Всего $5 \cdot 6 \cdot 7=210$ способов.

105. Как и в предыдущей задаче, получаем, что число способов равно $A_{11}^7/P_3=277\,200$ (следует учесть, что буква «л» входит в наше слово трижды).

106. Сначала фиксируем последовательность гласных (2 способа), затем поставим между этими гласными 4 согласные $\big(A_4^2=12$

способов). Первую из оставшихся согласных можно поставить до или после обеих гласных (2 способа), а для второй имеем уже три места. Всего получаем $2\cdot 12\cdot 2\cdot 3=144$ способа.

107. Выберем 3 буквы из 5 согласных и поставим их на указанные места $\left(A_5^3\right.$ способов$\left.\right)$. Оставшиеся 5 букв произвольным образом расставим на остальные 5 мест (5! способов). Всего $5!\,A_5^3=$ $=7200$ способов.

108. По правилу произведения $C_5^2C_3^1=30$ способов; $C_4^1C_3^1=12$ способов.

109. $P(3,1,1,1)-4!=96$ способов (см. задачу 100).

110. Сначала расставим согласные (3! способов). Для 3 букв «о» остается 4 места, и их можно расставить 4 способами. Всего 24 способа.

111. Буква «о» может входить в число выбранных 0, 1, 2, 3 или 4 раза (5 способов), буква «к» — 3-мя способами и т. д. Всего получаем $5\cdot 3\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 3=2025$ комбинаций.

112. Число комбинаций, в которых все три буквы различны, равно $C_6^3=20$, комбинаций, содержащих ровно 2 различные буквы $6\cdot 5=30$, и комбинаций, содержащих только одну букву, равно 2. Всего 52 способа выбора.

113. Если учитывать и порядок букв, получаем $A_6^3+3A_6^2+2=$ $=212$ способов.

114. Так как порядок и гласных и согласных букв определен, надо лишь выбрать из 7 мест 3 места для гласных. Это можно сделать C_7^3 способами.

115. Для слова «кофеварка» первая и последняя буквы должны быть согласными. Согласные можно переставлять $P(2, 1, 1, 1)$ способами, а гласные — $P(2, 1, 1)$ способами. Всего имеем $P(2, 1, 1, 1)\cdot P(2, 1, 1)=720$ способов. Для слова «самовар» имеем $P_4\cdot P(2, 1)=72$ перестановки.

116. Надо выбрать из 6 мест 3 места для буквы «а». Это можно сделать $C_6^3=20$ способами. Если добавить условие, что никакие две буквы «а» не идут подряд, то для для них есть лишь 4 места, и мы имеем $C_4^3=4$ способа.

117. Буквы слова «тик-так» можно переставить 180 способами. Из этих перестановок в 60 рядом стоят две буквы «т» (мы не учитываем дефис), в 60 — две буквы «к» и в 24 — обе буквы. По формуле включений и исключений получаем $180-60-60+24=84$ допустимые перестановки. Для слова «тартар» имеем $90-30-30-30+$ $+12+12+12-6=30$ допустимых перестановок.

118. Есть 3 комбинации, содержащие все 3 буквы «т», «а», «р», и 3 комбинации, содержащие по 2 различные буквы. Всего 6 комбинаций. Различных четырехзначных чисел из цифр числа 123 123 можно составить $3P(2, 1, 1)+3P(2, 2)=54$.

119. По формуле включений и исключений получаем, что все цифры 1, 2, 3, 4 содержат $10^6-4\cdot 9^6+6\cdot 8^6-4\cdot 7^6+6^6=23\,160$ чисел. Только из цифр 1, 2, 3, 4 состоят $4+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6=$ $=\dfrac{4^7-4}{3}=5460$ чисел.

120. Каждая цифра появляется в каждом разряде 6 раз ($P_4/4$). Поэтому, складывая цифры первого разряда, получаем сумму $6(1+2+3+4)=60$, второго разряда — 600 и т. д. Всего получаем $60+600+6000+60\,000=66\,660$.

121. Здесь общее число перестановок равно 12, причем цифры 1 и 5 появляются в каждом разряде по 3 раза, а цифра 2 — по 6 раз. Поэтому сумма цифр в первом разряде равна $3\cdot 1+3\cdot 5+6\cdot 2=30$. Общая сумма равна $30+300+3000+30\,000=33\,330$.

122. Аналогично получаем, что сумма равна 11 110.

123. Сумма равна 16 665.

124. Если снять ограничение, что цифра 0 не является первой, получим сумму 2 666 640. Сумма чисел, «начинающихся на 0», равна 66 660. Поэтому сумма пятизначных чисел, не начинающихся цифрой «0», равна 2 599 980.

125. Так как с помощью цифр «8» и «9» можно написать 2^k k-значных чисел, то общее количество искомых чисел равно $\sum_{k=1}^{6} 2^k=126$.

126. Аналогично получаем $\sum_{k=1}^{6} 3^k=1092$.

127. Так как первой цифрой не может быть 0, то получаем $2\sum_{k=1}^{5} 3^k=728$ чисел.

128. Каждая цифра в каждом разряде повторяется $4^2=16$ раз. Поэтому сумма цифр первого разряда равна $16(1+2+3+4)=160$, второго — 1600 и третьего — 16 000. Сумма равна 17 760.

129. В первом случае сумма равна 3 999 960. Во втором случае каждая цифра повторяется в каждом разряде A_8^4 раз, и мы получаем сумму цифр в первом разряде $A_8^4\ (1+2+\ldots+9)=75\,600$, а вся сумма равна 839 991 600.

130. На последнем месте может стоять либо цифра 3, либо 9, а остальные цифры можно переставлять $3!$ способами. Всего получаем 12 нечетных чисел. Точно так же получаем, что количество четных чисел равно 12.

131. Места для нечетных цифр можно выбрать $C_6^3=20$ способами. На каждом месте может стоять одна из 5 цифр (либо четная, либо нечетная). Всего получаем $20\cdot 5^6$ чисел. Но из них $10\cdot 5^5$ начинаются с нуля. Остается $20\cdot 5^6-10\cdot 5^5=281\,250$ чисел.

132. $C_6^3\cdot 5^6=312\,500$ чисел.

133. На 1-м месте может стоять одна из 9 цифр, на 2-м, 3-м, 4-м и 5-м — одна из 10 цифр, а на последнем — одна из 5 цифр (ее четность определена). Всего получаем $9\cdot 10^4\cdot 5=450\,000$ чисел. Если взять все числа от 1 до 999 999, получим 499 999 чисел.

134. Если отбросить нули, то остальные цифры дают одну из следующих последовательностей: 3; 2, 1; 1, 2; 1, 1, 1. Осталось расположить нули так, чтобы первая цифра была отлична от нуля. Для 3 это можно сделать одним способом, для 2, 1 и 1, 2 — девятью способами (по числу нулей между этими цифрами), для 1, 1, 1 —

C_9^2 способами. Всего $1+9+45=55$ чисел. Если взять все числа от 1 до 9 999 999 999, то надо выбирать места для цифр, отличных от нуля. Для 3 это можно сделать C_{10}^1, для 2, 1 и 1, 2 — C_{10}^2 способами и для 1, 1, 1 — C_{10}^3 способами. Всего получаем $C_{10}^1+2C_{10}^2+ + C_{10}^3=340$ чисел.

135. На первом месте может стоять любая из 9 цифр 1, 2, ..., 9. Второе место может занять любая из 9 оставшихся цифр, третье — любая из 8 цифр и т. д. Всего получаем $9 \cdot 9!$ чисел.

136. Количество чисел от 0 до 999, делящихся на 5, равно $E\left(\frac{1000}{5}\right)$, где $E(x)$ — целая часть x. Точно так же на 7 делится $E\left(\frac{1000}{7}\right)$ чисел и на 35 — $E\left(\frac{1000}{35}\right)$ чисел. По формуле включений и исключений получаем, что

$$1000-E\left(\frac{1000}{5}\right)-E\left(\frac{1000}{7}\right)+E\left(\frac{1000}{35}\right)=686$$

чисел не делится ни на 5, ни на 7.

137. Точно так же находим, что количество искомых чисел равно 228.

138. Количество чисел, записываемых без цифры 9, равно 729. Поэтому цифру 9 содержат 1000—729=271 число. Ровно 2 раза цифра 9 входит в 27 чисел (099, 909, 990, 199 и т. д.). Нуль входит в 1 однозначное, 9 двузначных и 171 трехзначное число, а всего в 181 число. Дважды нуль входит в 9 чисел. Обе цифры 0 и 9 входят в 36 чисел (если третья цифра отлична от 0 и 9, то имеем $2 \cdot 2 \cdot 8$ вариантов, а если она равна 0 или 9, то еще 4 варианта). Цифры 8 и 9 входят в 54 числа. Количество n-значных чисел, не содержащих двух идущих подряд одинаковых цифр, равно 9^n при $n>1$ и 10 при $n=1$. Поэтому количество таких чисел от 0 до 999 999 равно $10+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6=597\,871$.

139. Четырехзначное число может состоять либо из четырех различных цифр (1, 2, 3, 5), либо из двух одинаковых и двух различных цифр (1, 1, 2, 3; 1, 1, 2, 5; 1, 1, 3, 5; 1, 2, 3, 3; 1, 3, 3, 5; 2, 3, 3, 5), либо, наконец, из двух пар одинаковых цифр (1, 1, 3, 3). Поэтому общее количество таких чисел равно

$$P_4+6P(2,\ 1,\ 1)+P(2,\ 2)=24+6 \cdot 12+6=102.$$

140. Таким же образом, как в предыдущей задаче, получаем ответ:

$$2P(2,\ 1,\ 1,\ 1)+3P(3,\ 1,\ 1)+2P(2,\ 2,\ 1)+3P(4,\ 1)=255.$$

141. В шестизначное число могут войти одна, две или три пары одинаковых цифр. Одну пару можно выбрать C_5^1 сопособами. Число перестановок из 4 различных и 2 одинаковых цифр равно $P(2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)=6!/2!=360$. Из них в $5!=120$ перестановках две одинаковые цифры идут подряд. Значит, в этом случае получаем $5(360-120)= =1200$ шестизначных чисел. Две пары одинаковых цифр можно выбрать $C_5^2=10$ способами, после чего $C_3^2=3$ способами можно выбрать еще две цифры. Общее число перестановок этих цифр равно $P(2, 2, 1, 1)=180$, причем в $2\cdot\frac{5!}{2!}=120$ из них есть хотя бы одна пара следующих друг за другом одинаковых цифр, а в $4!=24$ перестановках — две такие пары. По формуле включений и исключений получаем, что этот случай дает $10\cdot 3(180-120+24)=2520$ нужных нам чисел. Аналогично находим, что три пары одинаковых цифр имеют

$$C_5^3\left(\frac{6!}{(2!)^3}-3\cdot\frac{5!}{(2!)^2}+3\cdot\frac{4!}{2!}-3!\right)=300$$

нужных нам чисел. Всего получаем 4020 чисел.

142. Общее количество пятизначных чисел, которые можно составить из данных цифр, равно

$$3\cdot\frac{5!}{2!}+C_3^2C_2^1\frac{5!}{(2!)^2}+C_3^1\cdot\frac{5!}{3!}+C_2^1\cdot\frac{5!}{3!\,2!}=440.$$

Из их числа в $3P_3+2\frac{P_3}{2!}=24$ цифра 3 идет подряд три раза. Получаем 416 искомых чисел.

143. Общее число перестановок данных цифр равно $P(2, 2, 2, 2)$. Из них в $P(2, 2, 2, 1)$ перестановках данная цифра стоит два раза подряд, в $P(2, 2, 1, 1)$ повторяются подряд данные 2 цифры, в $P(2, 1, 1, 1)$ — данные 3 цифры и в $P(1, 1, 1, 1)$ — данные 4 цифры. По формуле включений и исключений получаем, что никакие 2 цифры не повторяются в

$$P(2, 2, 2, 2)-4P(2, 2, 2, 1)+6P(2, 2, 1, 1)-\\-4P(2, 1, 1, 1)+P(1, 1, 1, 1)=864$$

перестановках.

144. Аналогично получаем, что число перестановок равно

$$\frac{8!}{(2!)^3}-3\cdot\frac{7!}{(2!)^2}+3\cdot\frac{6!}{2!}-5!=2220.$$

145. Точно так же имеем

$$\frac{10!}{(3!)^2}-2\cdot\frac{8!}{3!}+6!=88\,080.$$

146. Аналогично получаем ответ 20 040.

147. Если выбрано одно число, то второе можно выбрать 10 способами (поскольку его четность уже известна). Учитывая возможность перестановки этих двух чисел, получаем $\frac{20\cdot 10}{2}=100$ способов выбора.

148. Либо все три выбранных числа четны, либо одно четно и два нечетны. Поэтому получаем $C_{15}^3+C_{15}^1C_{15}^2=2030$ способов выбора.

149. В 11 точках пути есть выбор между двумя возможностями. Поэтому число путей равно $2^{11}=2048$.

150. Так как выбор в начальной точке уже сделан, то остается $2^{10}=1024$ возможностей.

151. Таким же образом находим, что число способов равно $3^5=243$.

152. Если выбрано p монет достоинством в 10 коп., то 15-копеечных монет можно взять $0, 1, \ldots, 20-p$ — всего $21-p$ способами. Так как p меняется от 0 до 20, то всего имеем $1+2+3+\ldots+21=231$ способ выбора.

153. Число различных комбинаций монет равно $C_{13}^5=1287$. Поэтому неверных ответов может быть 1286.

154. Количество пятизначных чисел равно 90 000, из них каждая цифра является четным числом в $4\cdot 5^4=2500$ случаях, нечетным — в $5^5=3125$ случаях. Цифры, меньшие чем 6, не входят в $4^5=1024$ случаях, а большие чем 3, в $3\cdot 4^4=768$ случаях. Все цифры 1, 2, 3, 4, 5 содержат $5!=120$ чисел, а все цифры 0, 2, 4, 6, 8 содержат $4\cdot 4!=96$ чисел.

155. Из условия задачи видно, что различные броски дают одинаковую сумму, лишь если они получаются друг из друга перестановкой костей. Поэтому число различных сумм равно $C_6^2+6=21$.

156. Точно так же получаем ответ $C_6^3+2C_6^2+6=56$.

157. Один вид очков будет в 6 случаях. Два вида могут выпасть следующими тремя способами: одна кость первого вида и 5 костей второго вида, либо две кости первого вида и четыре кости второго вида, либо по три кости каждого вида. В первом случае вид костей можно выбрать A_6^2 способами, причем любая из 6 костей может дать очки первого вида. Это дает $6A_6^2=180$ случаев. Точно так же вариант 2+4 дает $A_6^2P(2, 4)=450$ случаев, а вариант 3+3 — $C_6^2P(3, 3)=300$ случаев. Итак, два вида очков получаются в $180+450+300=930$ случаях. Для трех видов очков мы сначала находим все разбиения числа 6 на 3 слагаемых: $6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$. В соответствии с этим получаем

$$\frac{1}{2!}A_6^3P(1, 1, 4)=1800,$$
$$A_6^3P(1, 2, 3)=7200,$$
$$\frac{1}{3!}A_6^3P(2, 2, 2)=1800,$$

а всего 10 800 случаев, когда выпадают ровно 3 вида очков.

На 4 слагаемых число 6 разбивается так: $6=1+1+1+3=1+1+2+2$. Эти варианты дают $\frac{1}{3!}A_6^4P(1, 1, 1, 3)=7200$ и $\frac{1}{(2!)^2}A_6^4P(1, 1, 2, 2)=16\,200$, а всего 23 400 случаев, когда выпадает 4 вида очков.

Для 5 видов очков мы имеем $\frac{1}{4!}A_6^5P(1, 1, 1, 1, 2)=10\,800$ случаев, а для 6 — $6!=720$ случаев. Отметим, что $6+930+10\,800+23\,400+10\,800+720=6^6$.

158. При броске кости разбиваются на группы по числу выпавших очков. Поэтому нам надо найти число способов разбить n костей на 6 групп. Это число равно C_{n+5}^{5} (см. стр. 217).

159. Так как $1\,000\,000=2^6\cdot 5^6$, то любое разложение миллиона на три множителя имеет вид

$$1\,000\,000=(2^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1})(2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2})(2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}),$$

где α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 — неотрицательные целые числа такие, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3=6$. Так как 6 разбивается на 3 неотрицательных целых слагаемых $C_8^2=28$ способами, то, если учитывать порядок множителей, число разложений равно $28^2=784$.

160. Полученные в предыдущей задаче разложения распадаются на три класса: либо все три множителя совпадают, либо два совпадают, а третий отличается от них, либо все три различны. Первый класс состоит из одного разложения $1\,000\,000=100\cdot 100\cdot 100$. Найдем число разложений второго класса. Если совпадающие множители имеют вид $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$, то получаем, что $2\alpha+\alpha_3=2\beta+\beta_3=6$. Но уравнение $2x+y=6$ имеет 4 решения в целых неотрицательных числах: $x=0$, $y=6$, $x=1$, $y=4$, $x=2$, $y=2$; $x=3$, $y=0$. Так как любое α можно комбинировать с любым β, получаем 16 вариантов для $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$. Один из них, а именно $2^2\cdot 5^2$, надо отбросить как приводящий к разложению первого класса. Остается 15 вариантов. Каждый из них приводит к трем разложениям в зависимости от места, которое занимает третий множитель. Значит, второй класс состоит из 45 разложений. Если не учитывать порядка сомножителей, получаем 15 разложений. Наконец, число разложений третьего класса равно $784-1-45=738$. Они распадаются на группы, отличающиеся лишь порядком сомножителей и состоящие из 6 разложений каждая. Поэтому, если не учитывать порядка сомножителей, мы имеем $1+15+123=139$ разложений.

161. Каждая монета может попасть в один из двух карманов. Поэтому имеем 2^9 способов.

162. Расставим предметы в некотором порядке и отдадим первому человеку первые n предметов, второму — вторые n предметов и последнему — оставшиеся предметы. Поскольку порядок элементов в группах не играет роли, получаем $C_{3n}^{n}C_{2n}^{n}=\frac{(3n)!}{(n!)^3}$ способов раздела.

163. Совершенно так же, как в предыдущей задаче, получаем, что число разбиений равно $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

164. Аналогично получаем ответ $\frac{(nk)!}{(k!)^n n!}$.

165. $\frac{30!}{(10!)^3 3!}$, $\frac{30!}{(3!)^{10} 10!}$.

166. 4 туза можно разделить пополам $\frac{4!}{(2!)^3}=3$ способами, а остальные 32 карты $\frac{32!}{(16!)^2 2!}$ способами. Так как эти разбиения можно двумя способами комбинировать друг с другом, получаем $\frac{3\cdot 32!}{(16!)^2}$ способов разбиения.

167. Число способов равно $\frac{10!}{2^5\cdot 5!}=945.$

168. 945.

169. $9!/(3!)^4=280.$

170. 6 яблок трое могут разделить C_8^2 способами, а каждый из остальных фруктов может достаться любому из трех человек, и их можно разделить 3^6 способами. Всего получаем $3^6C_8^2=20\,412$ способов раздела.

171. Сначала распределим яблоки. Так как каждый получает не более 4 яблок, то с точностью до перестановок это распределение можно сделать одним из следующих способов: $6=4+2+0=4+1+1=$ $=3+3+0=3+2+1=2+2+2$. Если яблоки распределены по схеме $4+2+0$, то надо еще выбрать 2 фрукта из 6 для второго, а остальные отдать третьему. Это можно сделать C_6^2 способами. Учитывая возможность перестановок людей, получаем $3!\,C_6^2$ способов раздела. При схеме $4+1+1$ надо выбрать для второго 3 фрукта из 6 $\left(C_3^6\right.$ способов$\left.\right)$. Так как два человека имеют поровну яблок, то число перестановок людей равно $P(2,\ 1)=3$. При схеме $3+3+0$ надо выбрать один фрукт из 6 для первого и один фрукт из оставшихся 5 для второго. Здесь также 3 перестановки людей. Точно так же рассматриваются остальные схемы. Всего получаем

$$6C_6^2+3C_6^3+3C_6^1C_5^1+6C_6^1C_5^2+C_6^2C_4^2=690$$

способов распределения.

172. Так как $9=6+3+0=6+2+1=5+4+0=5+2+2=4+3+2=$ $=3+3+3$, то, как и в предыдущей задаче, получаем

$$6\left[C_9^3+C_9^4+C_9^1C_8^2+C_9^1C_8^3+C_9^2C_7^3\right]+$$
$$+3\left(C_9^1C_8^4+C_9^2C_7^2\right)+C_9^3C_6^3=19\,068$$

способов распределения.

173. Колоду можно сдать 13 игрокам $\frac{52!}{(4!)^{13}}$ способами (см. задачу 162). Если каждый должен иметь по одной карте каждой масти, то для каждой масти получаем перестановку из 13 карт; поскольку перестановки мастей не зависят друг от друга, то по правилу произведения получаем $(13!)^4$ способов. В третьем случае один игрок может выбрать по карте каждой масти 13^4 способами. После этого оставшиеся 12 карт каждой масти можно разделить на 3 группы $\frac{12!}{(4!)^3\,3!}$ способами, а все оставшиеся карты $\frac{(12!)^4}{(4!)^{12}\,(3!)^4}$ способами. Эти группы можно раздать 12 игрокам 12! способами. Учитывая, что игрок, имеющий все масти, может быть выбран 13 способами, получаем для третьего случая ответ $\frac{(13!)^5}{(4!)^{12}\,(3!)^4}$.

174. 4 карты из полной колоды можно вынуть C_{52}^4 способами. Ровно 3 масти будут в $A_4^2\left(C_{13}^1\right)^2 C_{13}^2=518\,184$ случаях — мы выбираем отсутствующую и повторяющуюся масти A_4^2 способами, после чего выбираем две карты повторяющейся масти C_{13}^2 способами и по одной карте еще двух мастей $\left(C_{13}^1\right)^2$ способами. Ровно две масти будут в $C_4^2\left(C_{13}^2\right)^2+A_4^2C_{13}^3C_{13}^1=81\,120$ случаях. В самом деле, это возможно либо если имеем по две карты двух мастей, либо одна карта одной масти и три другой. В первом случае надо выбрать две масти и по две карты каждой из этих мастей, а во втором выбрать первую и вторую масти (здесь уже играет роль порядок мастей), а потом взять три карты первой и одну карту второй масти.

175. Разобьем 13 карт каждой масти по схеме 3+3+3+4. Это можно сделать $\frac{13!}{4!(3!)^4}$ способами. Группы из 4 карт можно раздать игрокам 4! способами, а группы из 3 карт каждой масти — 3! способами. Всего получаем $(3!)^4 4!$ способов распределения групп. Карты же можно раздать

$$\left(\frac{13!}{4!\,(3!)^4}\right)^4 4!\,(3!)^4=\frac{(13!)^4}{(4!)^3\,(3!)^{12}}$$

способами.

176. Располагаем участников раздела в некотором порядке. После этого располагаем всеми способами 18 предметов по порядку и делим на 4 группы по 4 предмета и 1 группу в 2 предмета. Группу в 2 предмета отдаем одному из 5 участников раздела, а остальные группы даем остальным (первую группу — первому, вторую — второму и т. д.). Так как порядок элементов в группах не играет роли, получаем $\frac{5\cdot 18!}{(4!)^4\,2!}$ способов раздела. Во втором случае точно так же получаем $\frac{18!\,C_5^2}{(4!)^3(3!)^2}$ способов.

177. Для каждой пары предметов есть три возможности — в выборку могут войти два, один или ни одного предмета из этой пары. Поэтому число выборок равно $3^{14}=4\,782\,969$.

178. 4 черных шара можно разложить в 6 пакетов C_9^5 способами. Для белых и синих шаров имеем столько же способов. По правилу произведения получаем $\left(C_9^5\right)^3=2\,000\,376$ способов.

179. Таким же образом получаем ответ $C_6^3C_{13}^3=5720$.

180. Изобразим каждое разбиение числа n на слагаемые в виде точечной диаграммы. Если добавить к этой диаграмме столбик из n точек, получим диаграмму для разбиения числа $2n$ на n слагаемых.

181. Выберем любые три натуральных числа от 1 до $n-2$ и прибавим к большему из них 2, а ко второму по величине 1. Получим три числа, никакие два из которых не следуют друг за другом. Они и дают номера выбираемых предметов. Таким образом, выбор можно сделать C_{n-2}^3 способами.

182. $P(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{16!}{2^6}$ способами.

183. Мы можем занять свободные поля одинаковыми шашками и получить перестановку из 48 шашек и указанных в задаче фигур. Число таких перестановок равно $P(48, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{64!}{2^6 48!}$.

184. Таким же путем получаем ответ $P(32, 8, 8, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$.

185. Пусть занято p полей белыми и q полей черными шашками. 15 белых шашек можно поставить на p полей так, чтобы все поля оказались заняты, C_{14}^{p-1} способами, а 15 черных шашек на q полей C_{14}^{q-1} способами. Выбрать p полей для белых шашек и q полей для черных можно $P(p, q, 24-p-q)$ способами. Поэтому полное число способов равно

$$\sum_{p,\,q} P(p,q,24-p-q)\, C_{14}^{p-1} C_{14}^{q-1},$$

где суммирование распространено на все p и q такие, что

$$1 \leqslant p \leqslant 15, \quad 1 \leqslant q \leqslant 15, \quad p+q \leqslant 24.$$

186. Объединим в одну группу клетки, переходящие друг в друга при вращениях доски на 90°. По условию шашки заполняют 5 таких групп, а общее число групп равно 16. Поэтому имеем $C_{16}^5 = 4368$ способов расстановки.

187. Решается аналогично предыдущей задаче. Имеем C_{32}^{10} способов.

188. Полей стало вдвое меньше, имеем C_{16}^{10} способов.

189. Надо на одной половине доски поставить 6 белых и 6 черных шашек на 16 черных полей. Это возможно $P(6, 6, 4) = \frac{16!}{6!\,6!\,4!}$ способами.

190. Надо на одной половине доски выбрать 12 полей из 16 и поставить на них любые шашки, а на второй половине занять симметричные поля шашками противоположного цвета. Выбор полей можно сделать C_{16}^{12} способами, а цвет шашек, занимающих эти 12 полей, выбирается 2^{12} способами. Всего получаем $2^{12} C_{16}^{12} = 7\,454\,720$ способов.

191. Положение шашек определяется тем, какие 5 полей из 7 полей первой горизонтали заняты белыми шашками. Поэтому имеем $C_7^5 = 21$ способ.

192. Положения разбиваются на два класса в зависимости от того, занято или нет угловое поле. Если угловые поля заняты, то на первых вертикали и горизонтали стоят еще 8 шашек на 12 неугловых полях. Их можно расставить $C_{12}^8 = 495$ способами. Если же угловые поля свободны, то на 12 неугловых полях первых

вертикали и горизонтали стоят 10 шашек. Их можно расставить $C_{12}^{10}=66$ способами. Всего имеем 561 способ расстановки.

193. 7 белых шаров можно разместить в 9 лузах C_{15}^{8} способами, а 2 черных шара — C_{10}^{8} способами. Всего имеем $C_{15}^{8}\cdot C_{10}^{8}=289\,575$ способов.

194. Аналогично получаем $C_{15}^{8}\left(C_{9}^{8}\right)^2=521\,235$ способов.

195. Сначала выберем 9 книг для лица C. Это можно сделать C_{27}^{9} способами. Оставшиеся 18 книг можно разделить между A и B 2^{18} способами. Всего имеем $2^{18}C_{27}^{9}$ способов раздела.

196. 8 пассажиров могут распределиться между этажами 4^8 способами. Из них в 3^8 случаях на данном этаже, в 2^8 — на данных двух этажах и в 1 — на данных трех этажах не выйдет ни один пассажир. По формуле включений и исключений получаем ответ $4^8-4\cdot 3^8+6\cdot 2^8-4=40\,824$.

197. Возможны следующие случаи: на 3 делится все три слагаемых, одно слагаемое и ни одно из слагаемых. В первом случае слагаемые можно выбрать C_{33}^{3} способами. Во втором случае одно слагаемое дает в остатке 1, а другое — 2. Так как чисел от 1 до 100, дающих в остатке 1, имеется 34, а чисел, делящихся на 3, а также дающих в остатке 2, имеем по 33, то во втором случае имеем $C_{34}^{1}\left(C_{33}^{1}\right)^2$ способов. Если все три слагаемых не делятся на 3, то они дают либо остатки 1, 1 и 1, либо остатки 2, 2 и 2. Соответственно получаем C_{34}^{3} или C_{33}^{3} случаев. Всего имеем $2C_{33}^{3}+C_{34}^{3}+C_{34}^{1}\left(C_{33}^{1}\right)^2=$ $=53\,922$ способа выбора.

198. Задача решается аналогично предыдущей. Ответ

$$3C_n^3+\left(C_n^1\right)^3=\frac{n}{2}\left(3n^2-3n+2\right).$$

199. Если положено p белых шаров, то занятые лузы можно выбрать C_{n+1}^{p} способами. После этого для черного шара остается $n-p+1$ луз, а кроме того, его можно совсем не класть. Получаем $n-p+2$ возможностей. Поэтому ответ имеет вид $\sum\limits_{p=0}^{n}(n-p+2)\times$ $\times C_{n+1}^{p}=\sum\limits_{s=1}^{q} sC_q^s+\sum\limits_{p=0}^{q-1} C_q^p$. Так как $\sum\limits_{s=1}^{q} sC_q^s=q2^{q-1}$ и $\sum\limits_{p=0}^{q-1} C_q^p=2^q-1$ (см. задачу 401а), то получаем ответ $(q+2)2^{q-1}-1$.

200. Обозначим непустую совокупность белых шаров буквой Б, а черных шаров буквой Ч. Из условия задачи следует, что шары располагаются по одной из схем ЧБЧБ... ЧБ или БЧБЧ... БЧ, причем в каждую схему входят r пар. Но распределить m белых шаров между r непустыми совокупностями можно C_{m-1}^{r-1} способами. Для черных шаров имеем C_{n-1}^{r-1} способов, а всего $2C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^{r-1}$ способов. Точно так же выводим, что $2r$ контактов будут в $C_{m-1}^{r}C_{n-1}^{r-1}+$ $+C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^{r}$ случаях,

201. Обозначим через $A(m, n)$ число способов набрать m баллов в ходе n экзаменов (не получив при этом ни одной двойки). Тогда ясно, что $A(30,8)=A(25,7)+A(26,7)+A(27,7)$ и т. д. Продолжая уменьшение m, через несколько шагов получим ответ 784.

202. Сначала выберем n предметов, остающихся на месте. Это можно сделать C_{m+n}^{n} способами. Остальные m предметов переставляем так, чтобы ни один не остался на месте. Это можно сделать D_m способами (см. стр. 73). Всего имеем $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}D_m$ способов.

203. r вещей можно распределить между $n+p$ людьми $(n+p)^r$ способами; при этом в $(n+p-1)^r$ случаях данный человек не получит ни одного предмета; в $(n+p-2)^r$ — данные два человека ничего не получают и т. д. Применяя формулу включений и исключений, приходим к доказываемому результату.

204. Первый столбец разбиения $2r+x$ на $r+x$ отличных от нуля слагаемых содержит $r+x$ элементов. Отбрасывая его, получаем диаграмму разбиения r на неотрицательные слагаемые.

205. Так как каждый может голосовать за любого из n человек, то имеем n^n способов голосования. Во втором случае надо разделить n голосов между n кандидатами. Это можно сделать C_{2n-1}^{n-1} способами.

206. Пусть число $2n$ разбито на три части требуемым образом: $2n=a+b+c$, причем $a\leqslant b\leqslant c$. Тогда $a\neq 1$ — в противном случае мы имели бы $b+c=2n-1$, и потому $b<c$, чего не может быть, поскольку $b+1>c$. Кроме того, $a+b>c$, причем числа $a+b$ и c имеют одинаковую четность. Значит, $a+b\geqslant c+2$. Но тогда числа $a-1$, $b-1$, $c-1$ образуют разбиение для $2n-3$, причем $(a-1)+(b-1)>$ $>c-1$. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между разбиениями чисел $2n$ и $2n-3$.

207. Вытекает из равенства

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots=2^{n-1}.$$

208. Пусть первый получил x предметов первого сорта, y предметов второго сорта и z предметов третьего сорта. Тогда $x+y+z=$ $=3n$, причем $0\leqslant x,\ y,\ z\leqslant 2n$. Таким образом, нам надо найти число решений уравнения $x+y+z=3n$ в целых неотрицательных числах, не превосходящих $2n$. Если отбросить условия $x\leqslant 2n$, $y\leqslant 2n$, $z\leqslant$ $\leqslant 2n$, то число решений равно числу способов раздела $3n$ одинаковых предметов между тремя лицами, то есть C_{3n+2}^2. Найдем теперь число решений, в которых $x>2n$. Оно равно общему числу решений в целых неотрицательных числах уравнений $y+z=k$, $0\leqslant$ $\leqslant k<n$, то есть $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. В стольких же решениях $y>2n$ и $z>2n$. Отбрасывая их, получаем $3n^2+3n+1$ решение.

209. Задача решается аналогичным образом. Мы получаем

$$C_{4n+3}^3-4\sum_{k=0}^{2n-1}C_{k+2}^2=C_{4n+3}^3-4C_{2n+2}^3=\frac{1}{3}(2n+1)\left(8n^2+8n+3\right).$$

210. Так как части неразличимы, то решения x, y, z и $2n-x$, $2n-y$, $2n-z$ уравнения $x+y+z=3n$ отождествляются. Одно решение, а именно $x=n$, $y=n$, $z=n$, отождествляется при этом с самим собой, а остальные — с отличными от них решениями. Поэтому ответ имеет вид

$$\frac{3n^2+3n}{2}+1.$$

Аналогично рассматривается случай, когда имеем вещи 4 сортов.

211. Здесь надо найти число целых решений уравнения x_1+ $+x_2+\ldots+x_m=mn$, удовлетворяющих условиям $0\leqslant x_k\leqslant 2n$, $1\leqslant$ $\leqslant k\leqslant m$. Если отбросить ограничение $0\leqslant x_1\leqslant 2n$, то получаем C_{mn+m-1}^{m-1} решений. Найдем число решений, для которых $x_1>2n$: Оно равно общему числу решений всех уравнений

$$x_2+x_3+\ldots+x_m=k,$$

где $0\leqslant k\leqslant mn-2n-1$, то есть

$$\sum_{k=0}^{mn-2n-1} C_{k+m-2}^{m-2}=C_{mn-2n+m-2}^{m-1}.$$

Столько же решений, для которых $x_2>2n$ и т. д. Значит, надо отбросить $C_m^1C_{mn+m-2n-2}^{m-1}$ решений. При этом некоторые решения (а именно, те, для которых, скажем, и $x_1>2n$, и $x_2>2n$) отбрасываются дважды. Применяя формулу включений и исключений, приходим к доказываемому результату.

212. 231 способом. Относительно решения см. следующую задачу.

213. Обозначим через x_1, x_2, x_3 количество предметов первого сорта, а через y_1, y_2, y_3 — второго сорта, получаемых соответственно лицами A и B. Тогда имеем уравнения $x_1+x_2+x_3=n$ и $y_1+y_2+y_3=$ $=n$, причем должны выполняться условия $x_k+y_k\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant m$. Если отбросить ограничения $x_k+y_k\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant m$, то получим C_{n+2}^2 решений первого уравнения и C_{n+2}^2 решений второго уравнения, а всего $\left(C_{n+2}^2\right)^2$ решений. При этом число решений, для которых нарушается условие $x_1+y_1\leqslant n$, равно общему числу целых неотрицательных решений систем уравнений $x_2+x_3=r$, $y_2+y_3=s$, где $0\leqslant r<n$, $0\leqslant s<n$ и $r+s<n$. Система $x_2+x_3=r$, $y_2+y_3=s$ имеет $(r+1)(s+1)$ целых неотрицательных решений. Поэтому общее число решений наших систем равно

$$\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-s-1}(r+1)(s+1)=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)(n-s)(n-s+1)=$$

$$=\sum_{s=0}^{n-1}C_{s+1}^1C_{n-s+1}^2=C_{n+3}^4$$

(см. стр. 57). Столько же решений не удовлетворяют условиям $x_2+y_2\leqslant n$ и $x_3+y_3\leqslant n$. Отбрасывая эти решения, получаем

$$\left(C_{n+2}^2\right)^2-3C_{n+3}^4$$

решений. При $n=5$ имеем 231 решение.

214. 9 человек можно пересаживать 9! способами. Найдем, во скольких перестановках 3 англичанина сидят рядом. Все такие перестановки получаются из одной пересаживанием между собой англичан (3! способов) и пересаживанием 6 французов и турок и компании 3 англичан (7! способов). Всего получаем 3! 7! перестановок. Во стольких же перестановках рядом сидят 3 француза и во стольких же — 3 турка. Далее, в $(3!)^2 5!$ перестановках рядом сидят и англичане, и французы, а в $(3!)^4$ перестановках и англичане, и французы, и турки. По формуле включений и исключений получаем ответ

$$9!-3\cdot 3!\,7!+3\,(3!)^2\,5!-(3!)^4=283\,824.$$

215. Общее число перестановок равно 9!. Найдем число перестановок, в которых данные два англичанина сидят рядом. Если мы объединим их, то получим перестановки 8 объектов. Но, кроме того, их можно пересаживать друг с другом. Поэтому всего имеем 2!8! перестановок. При этом данных двух англичан можно выбирать C_3^2 способами, а всего мы имеем три различных национальности. Поэтому соответствующий член в формуле включений и исключений равен $3C_3^2 2!8!$. Теперь найдем, во скольких перестановках рядом сидят данные два англичанина и, кроме того, данные два француза. Если объединить в пару рядом сидящих соотечественников, то получим 7 переставляемых объектов. Кроме того, можно пересаживать друг с другом сидящих рядом соотечественников. Всего имеем $(2!)^2 7!$ перестановок. Кроме того, две пары соотечественников можно выбрать $\left(C_3^2\right)^3$ способами. Поэтому соответствующее слагаемое в формуле включений и исключений равно $\left(C_3^2\right)^3(2!)^2\,7!$. Далее рассматриваются следующие случаи: рядом сидят

а) три соотечественника,

б) по два представителя каждой национальности,

в) три представителя одной национальности и два — другой,

г) три представителя одной национальности и три другой,

д) три представителя одной национальности, два другой и два третьей,

е) три представителя одной национальности, три другой и два третьей,

ж) по три представителя каждой национальности.

Применяя формулу включений и исключений, получаем ответ

$$9!-9\cdot 2!\,8!+27\,(2!)^2\,7!+3\cdot 3!\,7!-(2!)^3\,6!-18\cdot 3!\,2!\,6!+$$
$$+3\,(3!)^2\,5!+27\cdot 3!\,(2!)^2\,5!-9\,(3!)^2\,2!\,4!+(3!)^4.$$

216. Эта задача решается аналогично предыдущей, но иным образом подсчитывается число перестановок, в которых данные соотечественники сидят рядом. Двух англичан можно посадить рядом $2!9$ способами, после чего всех остальных можно пересаживать $7!$ способами. Если взять двух англичан и двух французов, то число способов посадки, при которых эти соотечественники сидят рядом, равно $(2!)^2 9\cdot 6!$. Именно, мы 9 способами можем выбрать места для англичан, после чего объединить в пару двух французов и взять всевозможные перестановки этой пары и оставшихся 5 человек. Учитывая возможность поменять местами как сидящих рядом англичан, так и сидящих рядом французов, получаем указанное число перестановок. Аналогично рассматриваются остальные возможности. Всего получаем

$$9!-9\cdot 2!9\cdot 7!+27(2!)^2 9\cdot 6!+3\cdot 3!9\cdot 6!-$$
$$-(2!)^3 9\cdot 5!-18\cdot 3!2!9\cdot 5!+3(3!)^2 9\cdot 4!+$$
$$+27\cdot 3!(2!)^2 9\cdot 4!-9(3!)^2 2!9\cdot 3!+(3!)^3 9\cdot 2!$$

способов.

217. Обозначим число способов наклеить марки на сумму N коп. через $F(N)$. Разобьем эти способы на классы в соответствии с достоинством последней марки. Мы получим реккурентное соотношение

$$F(N)=F(N-5)+F(N-10)+F(N-15)+F(N-20).$$

Используя это соотношение и равенство $F(5)=1$, получаем, что $F(40)=108$.

218. Обозначим через $F(n_1, \ldots, n_m; N)$ число способов оплатить сумму N коп. монетами в $n_1, \ldots, n_m$. Тогда имеет место рекуррентное соотношение

$$F(n_1, \ldots, n_m; N)=F(n_1, \ldots, n_{m-1}; N)+F(n_1, \ldots, n_m; N-n_m)$$

(см. стр. 107). Используя это и аналогичные соотношения, находим, что $F(10, 15, 20, 50; 100)=20$.

219. С помощью рекуррентного соотношения получаем, что задача имеет 4 решения.

220. Ряд может содержать 3, 2 или 1 черный шар. Если он содержит 3 черных шара, то четвертый шар можно выбрать тремя способами, после чего переставить 3 черных шара и 1 шар иного цвета $P(3, 1)=4$ способами. Всего 12 способов. Аналогично, если взять 2 черных шара, получаем $C_3^2 P(2, 1, 1)=36$ возможностей, а если 1, то $4!$ возможностей. Всего можно составить $12+36+24=$ $=72$ ряда.

221. Число таких представлений равно числу разбиений n одинаковых шаров на 3 непустые группы, то есть C_{n-1}^2.

222. Найдем сначала, сколько понадобится нулей, чтобы записать все числа от 1 до 999 999. На последнем месте нуль в 99 999 числах (10, 20, ..., 999 990), на втором — в 99 990, на третьем — в 99 900 и т. д. Всего имеем $99\,999+99\,990+99\,900+$ $+99\,000+90\,000=488\,889$. Общее же число цифр равно $9+2\cdot 90+$ $+3\cdot 900+4\cdot 9000+5\cdot 90\,000+6\cdot 900\,000=5\,888\,889$. Так как все цифры, кроме нуля, входят одинаковое число раз, то каждая из них входит

$$\frac{5\,888\,889-4\,888\,889}{9}=600\,000 \text{ раз.}$$

223. Сначала выберем места, на которых стоит цифра 3 (это можно сделать C_{10}^2 способами). После этого ставим на оставшихся 8 местах цифры 1 или 2, что можно сделать 2^8 способами. Всего получаем $2^8 C_{10}^2 = 11\,520$ способов.

Сумма цифр любого из написанных чисел лежит между $8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 14$ и $8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 22$. Поэтому, если число делится на 9, сумма его цифр равна 18. Следовательно, единицы и двойки имеют сумму 12. Эта сумма получается, если взять 4 единицы и 4 двойки. Итак, наше число содержит 4 единицы, 4 двойки и 2 тройки. Из этих цифр можно составить

$$P(4,\ 4,\ 2) = \frac{10!}{4!\,4!\,2!} = 3150$$

различных чисел.

224. Пусть числа a и b образуют в данной перестановке инверсию. Если их поменять местами, получим новую перестановку, в которой они уже не образуют инверсии. Мы имеем $n!$ перестановок, в каждой из которых можно C_n^2 способами выбрать числа a и b. В половине случаев эти числа образуют инверсию. Значит, число инверсий равно $\frac{n!}{2} C_n^2$.

225. Число n можно $C_{n-1}^2 = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ способами представить в виде суммы трех целых положительных слагаемых (считая различными представления, отличающиеся порядком слагаемых). Из них при четном n в $\frac{n-2}{2}$, а при нечетном n в $\frac{n-1}{2}$ представлениях два слагаемых равны. Кроме того, если n делится на 3, то имеется представление, в котором равны все три слагаемых. Применяя формулу включений и исключений, без труда получаем, что число представлений с попарно различными слагаемыми выражается следующими формулами:

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-2) + 2 = \frac{n^2 - 6n + 12}{2}, \quad \text{если} \quad n = 6k,$$

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-1) = \frac{n^2 - 6n + 5}{2}, \quad \text{если} \quad n = 6k + 1,$$

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-2) = \frac{n^2 - 6n + 8}{2}, \quad \text{если} \quad n = 6k + 2,$$

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-1) + 2 = \frac{n^2 - 6n + 9}{2}, \quad \text{если} \quad n = 6k + 3,$$

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-2) = \frac{n^2 - 6n + 8}{2}, \quad \text{если} \quad n = 6k + 4,$$

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-1) = \frac{n^2 - 6n + 5}{2}, \quad \text{если} \quad n = 6k + 5.$$

Если не учитывать порядок слагаемых, то получим в 6 раз меньше представлений. Нетрудно проверить, что выражения, получаемые при этом, являются не чем иным, как целой частью $\frac{n^2-6n+12}{12}$ при соответствующих значениях n.

226. Число $12n+5$ можно C^3_{12n+4} способами представить в виде четырех слагаемых (считая различными представления, отличающиеся порядком слагаемых). Число представлений, в которых $x=y$, равно числу решений уравнений $2x+z+t=12n+5$ в целых положительных числах. Так как уравнение $z+t=12n-2k+5$ имеет $12n-2k+4$ решений в целых положительных числах, то общее число таких решений равно

$$\sum_{k=1}^{6n+1}(12n-2k+4)=(6n+1)(6n+2)=2C^2_{6n+2}.$$

Число решений, в которых $x=y=z$, равно числу решений уравнений $3x+t=12n+5$, то есть $4n+1$.

Найдем, во скольких решениях есть слагаемые, большие чем $6n+2$. Пусть $x=k\geqslant 6n+3$. Тогда $y+z+t=12n+5-k$. Но число $12n+5-k$ можно $C^2_{12n+4-k}$ способами представить в виде суммы трех целых положительных слагаемых. Поэтому решений, при которых $x\geqslant 6n+3$, имеется

$$\sum_{k=6n+3}^{12n+2} C^2_{12n+4-k}=C^3_{6n+2}.$$

Так как вместо x можно было взять любое из слагаемых, мы имеем $C^3_{12n+4}-4C^3_{6n+2}$ решений, в которых все слагаемые не превосходят $6n+2$.

Далее, число решений уравнения $2x+z+t=12n+5$, в которых $z\geqslant 6n+3$, равно $3n(3n+1)\,2C^2_{3n+1}$. Поэтому число решений, в которых $x=y$ и все слагаемые не превосходят $6n+2$, равно $2\left[C^2_{6n+2}-\right.$ $\left.-2C^2_{3n+1}\right]$. Поскольку вместо x и y можно взять любую другую пару букв, общее число решений, в которых равны два слагаемых и все слагаемые не превосходят $6n+2$, равно

$$2C^2_4\left[C^2_{6n+2}-2C^2_{3n+1}\right].$$

Наконец, число решений уравнения $3x+t=12n+5$, для которых $t\geqslant 6n+3$, равно $2n$. Поэтому общее число решений, в которых равны три слагаемых и все слагаемые не превосходят $6n+2$, равно $4(2n+1)$.

Если отбросить из всех представлений те, для которых два слагаемых совпадают, то представления, в которых совпадают три слагаемых, окажутся отброшены трижды. Поэтому в формуле включений и исключений их число надо умножить на два. Всего получаем

$$\left[C^3_{12n+4}-4C^3_{6n+2}\right]-2C^2_4\left[C^2_{6n+2}-2C^2_{3n+1}\right]+8(2n+1)=$$
$$=12n(12n^2+3n-1)$$

представлений, в которых различны все слагаемые,

$$2C_4^2\left[C_{6n+2}^2-2C_{3n+1}^2\right]-12(2n+1)=12n(9n+4)$$

представлений, содержащих ровно три различных слагаемых, и $4(2n+1)$ представлений, в которых есть два различных слагаемых.

Все представления разобьем на классы такие, что два представления одного класса отличаются друг от друга только порядком слагаемых. Тогда представления первого типа разбиваются на классы, состоящие из 24 элементов, второго типа — из 12 элементов и третьего типа — из 4 элементов. Поэтому число разбиений требуемого типа равно

$$\frac{n}{2}(12n^2+3n-1)+n(9n+4)+2n+1=\frac{n+1}{2}(12n^2+9n+2).$$

227. По ходу решения предыдущей задачи мы нашли, что число представлений, в которых все слагаемые различны, равно $12n(12n^2+3n-1)$. Поскольку мы не учитываем теперь порядка слагаемых, то получаем $\frac{n}{2}(12n^2+3n-1)$ разбиений.

228. Каждая геометрическая прогрессия определяется первым членом и знаменателем q. Если прогрессия возрастает, то должно выполняться неравенство $aq^2\leqslant 100$, откуда следует, что $a\leqslant\frac{100}{q^2}$. Значит, число возрастающих трехчленных прогрессий со знаменателем q равно $E\left(\frac{100}{q^2}\right)$. Общее число прогрессий равно

$$2\left[E\left(\frac{100}{4}\right)+E\left(\frac{100}{9}\right)+E\left(\frac{100}{16}\right)+\ldots+E\left(\frac{100}{100}\right)\right]=102$$

(множитель 2 связан с тем, что одну и ту же тройку чисел можно рассматривать и как возрастающую, и как убывающую прогрессию).

229. Обозначим буквой Ф множество из нескольких стоящих подряд французов, а буквой Т — множество из нескольких стоящих подряд турок. Буква «а» означает англичанина. Из условия задачи следует, что возможен один из следующих типов расположения: ФаТаФаТаФаТаФ или ТаФаТаФаТаФаТ. При первом типе мы должны разбить 7 французов на 4 непустые группы (это можно сделать C_6^3 способами), 10 турок на 3 непустые группы $\left(C_9^2\right.$ способов$\left.\right)$, после чего поставить эти группы по порядку на соответствующие места и переставить всеми возможными способами соотечественников друг с другом. Получаем $6!\,7!\,10!\,C_6^3C_9^2$ способов расстановки. Второй тип расположения дает таким же путем $6!\,7!\,10!\,C_6^2C_9^3$ способов расстановки. Всего получаем

$$6!\,7!\,10!\left[C_6^3C_9^2+C_6^2C_9^3\right]=6!\,7!\,10!\,1980$$

решений.

230. Точно так же, как в предыдущей задаче, получаем $5!7!10!\times\times 1080$ решений.

231. Искомые два числа отличаются друг от друга множителями a^{α}, b^{β}, c^{γ}, d^{δ} — каждый из этих четырех множителей входит в одно из чисел и не входит в другое. Так как 4 множителя можно распределить между двумя числами $2^4=16$ способами, то задача имеет 16 решений. Если не учитывать порядок чисел, то имеем 8 решений.

232. Искомые числа имеют вид GA и GB, где A и B — делители числа $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$. Это число имеет $N=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)$ делителей (см. задачу 67). Поэтому A и B можно выбрать C_{N+1}^2 способами, если не различать пары (GA, GB) и (GB, GA), и N^2 способами, если различать такие пары.

233. Существует C_{20}^6 сочетаний, в которых различны все буквы, $C_{20}^1C_{19}^4$ сочетаний, в которых совпадают две буквы, и т. д. Всего получаем

$$C_{20}^6+C_{20}^1C_{19}^4+C_{20}^2C_{18}^4+C_{20}^3=146\,400$$

сочетаний.

234. Искомые перестановки начинаются с нескольких букв α, после которых идет буква β, а далее буквы могут идти в любом порядке. Если вначале стоят k букв α и одна буква β, то оставшиеся буквы можно переставлять $P(p-k, q-1, r)$ способами. Суммируя по k от 1 до p, получаем, что число искомых перестановок равно

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{(p+q+r-k-1)!}{(p-k)!\,(q-1)!\,r!}=C_{q+r-1}^{r}\sum_{k=1}^{p}C_{p-k+q+r-1}^{p-k}.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{p}C_{p-k+q+r-1}^{p-k}=C_{p+q+r-1}^{p-1}.$$

Поэтому имеем $C_{q+r-1}^{r}C_{p+q+r-1}^{p-1}$ перестановок.

235. Числа, выражающие длины полос каждого цвета, образуют представление числа 10 в виде суммы слагаемых, принимающих натуральные значения от 2 до 10, причем играет роль порядок слагаемых. Число таких разбиений на k слагаемых равно коэффициенту при x^{10} в разложении выражения

$$(x^2+x^3+\ldots+x^{10})^k=\left(\frac{x^2-x^{11}}{1-x}\right)^k=x^{2k}\left(1-x^9\right)^k(1-x)^{-k}=$$

$$=x^{2k}\left(1-kx^9-\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^{18}-\ldots\right)\left(1+kx+\frac{k(k+1)}{1\cdot 2}x^2+\right.$$

$$\left.+\frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+\frac{k(k+1)\ldots(k+9)}{10!}x^{10}+\ldots\right).$$

Отсюда сразу находим, что при $k=1$ искомый коэффициент равен 1, при $k=2$ он равен 7, при $k=3$ равен 15, при $k=4$ равен 10 и при $k=5$ равен 1. Так как количество полос каждого цвета при данном способе окраски одинаково, а длину полос различных цветов можно комбинировать произвольно, получаем $1^3+7^3+15^3+10^3+1^3=4720$ способов окраски.

Снимем теперь условие, что последним является синий цвет. Если окраска заканчивается красным цветов, то он встречается на один раз чаще, чем белый и синий. В этом случае число способов равно $1+7\cdot 1^2+15\cdot 7^2+10\cdot 15^2+1\cdot 10^2=3093$. Точно так же если последний цвет белый, то число способов окраски равно $1^2+7^2\cdot 1+$ $+15^2\cdot 7+10^2\cdot 15+1^2\cdot 10=3135$. Всего имеем 10 948 способов.

Если ни одна полоса не меньше 3 *см*, то задача сводится к подсчету числа представлений 10 в виде суммы k натуральных слагаемых, принимающих значения от 3 до 10. При $k=1$ имеем одно представление, при $k=2$ — пять представлений, при $k=3$ — три представления. Поэтому окраска заканчивается синим цветов 1^3+ $+5^3+3^3=153$ раза, красным цветом $1+5\cdot 1^2+3\cdot 5^2=81$ раз и белым цветом $1^2+5^2\cdot 1+3^2\cdot 5=71$ раз.

236. Так как со всеми шестью друзьями я обедал один раз, а с каждыми пятью — два раза, то по одному разу я обедал с каждой пятеркой друзей в отсутствие шестого. Но тогда с каждыми четырьмя я обедал 3 раза (два обеда впятером и один вшестером), с каждыми тремя — 4 раза и с каждыми двумя — 5 раз. С каждым из друзей на этих обедах я встретился 7 раз. Значит, по одному разу я обедал вдвоем с каждым другом. Каждый друг отсутствовал на 6 обедах (5 обедах вдвоем и 1 обеде впятером). Так как без каждого из друзей я обедал 8 раз, то 2 раза я обедал один.

237. 12 учеников могут установить очередь к каждому экзаменатору 12! способами, а к двум экзаменаторам — $(12!)^2$ способами. При этом в $C_{12}^1\cdot 11!$ случаях хотя бы один ученик должен будет одновременно отвечать обоим экзаменаторам, в $C_{12}^2\cdot 10!$ случаях такая участь постигнет двоих учеников и т. д. Применив формулу включений и исключений, получим, что число разумных способов распределения равно

$$(12!)^2\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ \ldots\ +\frac{1}{12!}\right]=12!\cdot 176\,214\,841.$$

238. Аналогично получаем ответы

$$(6!)^2\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ \ldots\ +\frac{1}{6!}\right]=190\,800$$

и

$$\left(A_9^6\right)^2-C_6^1A_9^1\left(A_8^5\right)^2+C_6^2A_9^2\left(A_7^4\right)^2-C_6^3A_9^3\left(A_6^3\right)^2+$$
$$+C_6^4A_9^4\left(A_5^2\right)^2-C_6^5A_9^5\left(A_4^1\right)^2+C_6^6A_9^6.$$

239. Из условия следует, что одинаковые буквы выражения $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ входят в перестановки попарно. Поэтому получаем перестановки из 3 элементов $a=\alpha^2$, $b=\beta^2$, $c=\gamma^2$, а их число равно 6. То же самое имеет место для перестановок букв выражения $\alpha^3\beta^3\gamma^3$. В перестановках букв выражения $\alpha^4\beta^4\gamma^4$ одинаковые буквы тоже встречаются попарно. Положим временно $\alpha^2=a_1$, $\alpha^2=a_2$; $\beta^2=b_1$,

$\beta^2=b_2$ и $\gamma^2=c_1$, $\gamma^2=c_2$ [1]). Тогда мы имеем перестановки из 6 элементов a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, число которых равно 720. Но эти перестановки распадаются на группы перестановок, отличающихся друг от друга перестановками элементов a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2. В каждую группу входит 8 перестановок, и все эти перестановки соответствуют одной и той же перестановке букв выражения $\alpha^4\beta^4\gamma^4$. Значит, число перестановок букв этого выражения равно $\frac{720}{8}=90$.

Наконец, рассмотрим перестановки букв выражения $\alpha^5\beta^5\gamma^5$. Если положить временно $\alpha^2=a_1$, $\alpha^3=a_2$, $\beta^2=b_1$, $\beta^3=b_2$, $\gamma^2=c_1$, $\gamma^3=c_2$, то каждая допустимая перестановка букв выражения $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ является перестановкой букв a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. Но некоторые перестановки букв a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 дают одну и ту же перестановку букв α, β, γ. Например, $a_1a_2b_1c_2b_2c_1$ и $a_2a_1b_1c_2b_2c_1$ дают $\alpha^5\beta^2\gamma^3\beta^3\gamma^2$. Это имеет место, если какая-нибудь пара букв (a_1, a_2), (b_1, b_2) или (c_1, c_2) стоит рядом. Буквы a_1 и a_2 стоят рядом в $2\cdot 5!$ перестановках, равно как и буквы (b_1, b_2) и (c_1, c_2). Буквы обеих пар (a_1, a_2) и (b_1, b_2) стоят рядом в $(2!)^2 4!$ перестановках (равно как и пар (a_1, a_2), (c_1, c_2) или (b_1, b_2), (c_1, c_2)). Наконец, все три пары стоят рядом в $(2!)^3 3!=48$ перестановках. По формуле включений и исключений получаем, что в $6!-6\cdot 5!+3(2!)^2\cdot 4!-(2!)^3 3!=240$ перестановках ни одна пара букв не стоит рядом, в

$$3\,[2\cdot 5!-2\,(2!)^2\,4!+(2!)^3\,3!]=288$$

перестановках рядом стоит в точности одна из пар букв (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), а в

$$3\,[(2!)^2\,4!-(2!)^3\,3!]=144$$

перестановках рядом стоят в точности буквы двух таких пар. Отсюда следует, что искомое число перестановок букв α, β, γ равно

$$240+\frac{288}{2!}+\frac{144}{(2!)^2}+\frac{48}{(2!)^3}=426$$

(если буквы a_1 и a_2 стоят рядом, то их перестановка не меняет порядка букв α, β, γ).

240. Разобьем сначала игроков каждой страны на упорядоченные пары. Для каждой страны это можно сделать $\frac{4!}{2}=12$ способами (порядок самих пар несуществен). Всего получим 12^n способов разбиения. Пары можно переставлять друг с другом $(2n)!$ способами. Поэтому общее число допустимых перестановок равно $12^n(2n)!$

241. Первую горизонталь можно раскрасить 8! способами. Каждую следующую горизонталь надо раскрашивать так, чтобы окраска каждой клетки отличалась от окраски лежащей под ней клетки. Это можно сделать

$$8!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}\right]=14\,833$$

---

[1]) Временно мы не учитываем, что, на самом деле, $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ и $c_1=c_2$.

способами. По правилу произведения получаем, что общее число способов раскраски равно $8!(14833)^7$.

242. Из n различных вещей можно 2^n способами сделать выборку (в которую могут войти $0, 1, \ldots, n$ вещей). После того как сделана эта выборка, добавим недостающие вещи из числа n одинаковых. Поэтому имеем 2^n способов выбора. Число перестановок всех $2n$ вещей равно $\frac{(2n)!}{n!}$.

243. В каждой допустимой перестановке как англичане, так и французы стоят группами, состоящими не менее чем из двух человек. При этом число групп французов отличается от числа групп англичан не более чем на 1. Подсчитаем, сколькими способами можно разбить n англичан на p упорядоченных групп так, чтобы каждая группа содержала не менее двух человек. Для этого надо расположить их в некотором порядке ($n!$ способов), после чего взять второй, третий, ... и т. д. вплоть до промежутка $n—2$ и поставить в них $p—1$ «перегородок» так, чтобы никакие две перегородки не были смежными друг с другом. Согласно результатам стр. 95 это можно сделать C_{n-p-1}^{p-1} способами. Всего имеем $n!\,C_{n-p-1}^{p-1}$ способов. Точно так же m французов можно разбить на s групп указанного вида $m!\,C_{m-s-1}^{s-1}$ способами. Эти способы можно комбинировать друг с другом следующими методами:

а) p групп англичан и $p-1$ групп французов,

б) p групп англичан и p групп французов, причем впереди стоят англичане,

в) p групп англичан и p групп французов, причем впереди стоят французы,

г) p групп англичан и $p+1$ групп французов. Значит, общее число способов выражается формулой

$$m!\,n!\,\Big[2\left(C_{m-2}^{0}C_{n-2}^{0}+C_{m-3}^{1}C_{n-3}^{1}+C_{m-4}^{2}C_{n-4}^{2}+\ldots\right)+$$
$$+\left(C_{m-2}^{0}C_{n-3}^{1}+C_{m-3}^{1}C_{n-4}^{2}+\ldots\right)+$$
$$+\left(C_{m-3}^{1}C_{n-2}^{0}+C_{m-4}^{2}C_{n-3}^{1}+\ldots\right)\Big].$$

Раскрывая скобки в формуле на стр. 234, получаем тот же самый результат.

244. Сначала найдем количество чисел, в которые не входит цифра нуль. Три цифры, входящие в число, можно выбрать $C_9^3=84$ способами. Из трех цифр можно составить 3^6 шестизначных чисел, из двух — 2^6 и из одной 1^6. По формуле включений и исключений существует

$$3^6-C_3^1 2^6+C_3^2 1^6=540$$

шестизначных чисел, в которые входят все три выбранные нами цифры. Поэтому общее количество шестизначных чисел, в которые входят ровно три отличные от нуля цифры, равно $84\cdot 540=45\,360$.

Если в число входит нуль, то нам надо выбрать еще две входящие в него цифры. Это можно сделать $C_9^2=36$ способами.

Пусть, скажем, выбраны 0, 1 и 2. Тогда первой цифрой числа должно быть 1 или 2. Если, например, первой цифрой является 1, то остальные пять цифр могут быть любыми из числа 0, 1 или 2 при условии, что среди них встречаются 0 и 2. По формуле включений и исключений получаем, что эти пять цифр можно выбрать

$$3^5 - C_2^1 2^5 + 1^6 = 180$$

способами. Но тогда общее число шестизначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2 и содержащих все эти цифры, равно $2 \cdot 180 = 360$, а всего шестизначных чисел, составленных из трех цифр, среди которых встречается нуль, равно $36 \cdot 360 = 12\,960$. Всего получаем $45\,360 + 12\,960 = 58\,320$ чисел.

245. Точно так же, как в задаче 244, получаем ответ

$$C_9^k \left[k^m - C_k^1 (k-1)^m + C_k^2 (k-2)^m - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^m\right] + \\ + (k-1) C_9^{k-1} \left[k^{m-1} - C_{k-1}^1 (k-1)^{m-1} + C_{k-1}^2 (k-2)^{m-1} - \ldots \right. \\ \left. \ldots + (-1)^{k-2} C_{k-1}^{k-2} 1^{m-1}\right].$$

246. Обозначим число размещений такого вида через $\Gamma_n^{(k)}$. Эти размещения разбиваются на два класса. К первому относятся начинающиеся на 1, а ко второму — все остальные. Если размещение начинается на 1, то вычтем из всех входящих в него чисел 1 и отбросим стоящий впереди нуль (например, 14 589 перейдет при этом сначала в 03 478, а потом в 3478). Получится $(k-1)$-размещение того же типа, но состоящее из чисел $1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому число размещений первого класса равно $\Gamma_{n-1}^{(k-1)}$. Каждое размещение второго класса начинается с числа, большего 1. Вычтем из всех чисел, входящих в такое размещение, число 2. Мы получим k-размещение того же типа, в которое входят числа $1, 2, \ldots, (n-2)$. Поэтому число размещений второго класса равно $\Gamma_{n-2}^{(k)}$. Таким образом, справедлива рекуррентная формула

$$\Gamma_n^{(k)} = \Gamma_{n-1}^{(k-1)} + \Gamma_{n-2}^{(k)}.$$

Положим $F_n^{(k)} = C_N^k$, где $N = E\left(\frac{n+k}{2}\right)$. Мы имеем

$$F_{n-1}^{(k-1)} + F_{n-2}^{(k)} = C_{N-1}^{k-1} + C_{N-1}^k = C_N^k = F_n^{(k)}.$$

Таким образом, числа $F_n^{(k)}$ удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и числа $\Gamma_n^{(k)}$.

Покажем теперь, что $F_n^{(n)} = \Gamma_n^{(n)}$ и $F_{n+1}^{(n)} = \Gamma_{n+1}^{(n)}$. Для этого заметим, что числа $1, 2, \ldots, n$ можно единственным образом расположить в порядке возрастания, а потому $\Gamma_n^{(n)} = 1 = C_n^n = F_n^{(n)}$. Из чисел $1, 2, \ldots, n+1$ тоже единственным образом можно выбрать n чисел в соответствии с поставленными условиями. Поэтому и

$\Gamma_{n+1}^{(n)}=1=C_n^n=F_{n+1}^{(n)}$. Из доказанного вытекает, что для всех значений n и k имеет место равенство

$$\Gamma_n^{(k)}=F_n^{(k)}=C_N^k,$$

где, напомним, $N=E\left(\frac{n+k}{2}\right)$.

247. Заданные элементы можно переставлять

$$P(2,2,\ldots,2)=\frac{(2n)!}{2^n}$$

способами. Найдем, во скольких перестановках элементы данных k пар стоят рядом. В таких перестановках можно объединить рядом стоящие элементы одной и той же пары. Мы получим тогда перестановку из k различных элементов и элементов, принадлежащих $n-k$ парам. Число таких перестановок равно $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$. Так как k пар можно выбрать C_n^k способами, то по формуле включений и исключений получаем, что в

$$\frac{(2n)!}{2^n}-C_n^1\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}+C_n^2\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}-\ldots+(-1)^nC_n^nn!$$

перестановках никакие два одинаковых элемента не стоят рядом.

248. Совершенно так же, как и в предыдущей задаче, получаем ответ

$$\frac{(qn)!}{(q!)^n}-C_n^1\frac{(qn-q+1)!}{(q!)^{n-1}}+C_n^2\frac{(qn-2q+2)!}{(q!)^{n-2}}-\ldots$$

249. Данные элементы можно переставлять $\frac{(qn)!}{(q!)^n}$ способами. Подсчитаем, во скольких перестановках элементы данных k q-наборов стоят подряд. Выберем один из этих q-наборов. Его элементы можно поместить подряд на окружности qn способами. После того как он помещен, объединим элементы каждого из оставшихся $k-1$ наборов и рассмотрим всевозможные перестановки полученных $k-1$ новых элементов и остальных $(n-k)q$ элементов. Их число равно $\frac{(qn-qk+k-1)!}{(q!)^{n-k}}$, причем легко видеть, что каждой такой перестановке соответствует свое расположение элементов на окружности. Поэтому число перестановок, в которых элементы данных k наборов стоят подряд, равно $\frac{qn(qn-qk+k-1)!}{(q!)^{n-k}}$. Так как сами наборы можно было выбирать C_n^k способами, то по формуле включений и исключений получаем, что число искомых перестановок равно

$$qn\left[\frac{(qn-1)!}{(q!)^n}-C_n^1\frac{(qn-q)!}{(q!)^{n-1}}+\right.$$
$$\left.+C_n^2\frac{(qn-2q+1)!}{(q!)^{n-2}}-\ldots+(-1)^nC_n^n(n-1)!\right].$$

250. Присоединим к каждой выбранной книге следующие за ней s книг. Тогда нам надо будет выбрать p предметов из $n-ps$. Это можно сделать C_{n-ps}^{p} способами.

251. Если разность прогрессии равна d, а число участников олимпиады из 5 класса равно a, то премии можно распределить $A_a^d A_{a+d}^d A_{a+2d}^d \ldots A_{a+5d}^d$ способами. Если же все премии отдать ученикам 10 класса, то их можно распределить A_{a+5d}^{6d} способами. Равенство

$$A_a^d A_{a+d}^d A_{a+2d}^d \ldots A_{a+5d}^d = A_{a+5d}^{6d}$$

вытекает из очевидного тождества $A_n^m A_{n+k}^k = A_{n+k}^{m+k}$.

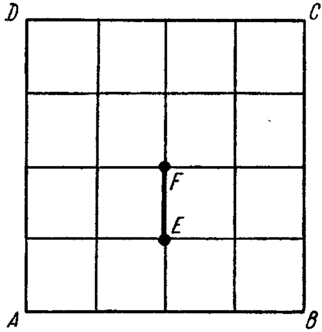


Рис. 36.

252. Для решения задачи надо рассмотреть отрезки и перекрестки различного положения и подсчитать число проходящих через них путей. Например, через отрезок EF (рис. 36) проходит 18 путей ($C_3^1 = 3$ пути ведут из точки A в E и $C_4^2 = 6$ путей ведут из F в C). Через точку E проходят 30 путей — из A в E ведут 3 пути и из E в C $C_5^2 = 10$ путей. Аналогично рассматриваются другие отрезки и точки.

253. $C_6^3 = 20$.

254. Мы имеем сочетания с повторениями из элементов 4 сортов по три элемента в сочетании. Их число равно

$$\overline{C}_4^3 = C_6^3 = 20.$$

255. $\overline{C}_{10}^3 = C_{12}^3 = 220$.

256. 4 треугольника.

257. Если бы никакие 3 из n точек не лежали на одной прямой, то было бы C_n^3 треугольников с вершинами в этих точках. Но p точек лежат на одной прямой, и поэтому C_p^3 треугольников надо отбросить. Остается $C_n^3 - C_p^3$ треугольников.

258. Можно взять две вершины на одной прямой, а третью — на другой. Поэтому получаем $C_p^2 C_q^1 + C_p^1 C_q^2 = \frac{pq}{2}(p+q-2)$ треугольников.

259. Добавляется

$$C_r^2\left(C_p^1 + C_q^1\right) + C_r^1\left(C_p^2 + C_q^2\right) + C_r^1 C_p^1 C_q^1 = \frac{r}{2}(p+q)(p+q+r-2)$$

треугольников.

260. Треугольники могут быть двух видов: либо все три вершины лежат на разных сторонах квадрата, либо две вершины лежат на одной стороне квадрата, а третья — на какой-нибудь другой. В первом случае надо выбрать три стороны квадрата из четырех ($C_4^3=4$ способов выбора), а потом на каждой из трех сторон по одной точке из $n-1$. Всего имеем $4\left(C_{n-1}^1\right)^3$ способов выбора. Во втором случае надо выбрать сторону, где лежат две вершины (4 способа выбора) и две точки из $n-1$ (C_{n-1}^2 способов), после чего выбрать одну из оставшихся трех сторон (три способа) и точку на ней (C_{n-1}^1 способов). Всего во втором случае имеем $12C_{n-1}^1C_{n-1}^2$ способов выбора. Итого получили

$$4\left(C_{n-1}^1\right)^3+12C_{n-1}^1C_{n-1}^2=2\,(n-1)^2\,(5n-8)$$

способов.

261. C_n^2 точек пересечения.

262. n прямых в общем положении имеют C_n^2 точек пересечения. Но p прямых, проходящих через точку A, дают одну точку пересечения вместо C_p^2, а q прямых, проходящих через точку B, — одну точку вместо C_q^2. Поэтому остается $C_n^2-C_p^2-C_q^2+2$ точек пересечения.

263. Пусть на плоскости проведены $k-1$ прямых. Проведем еще одну прямую. Она разбивается точками пересечения с ранее проведенными прямыми на k частей, каждая из которых соответствует одному новому куску плоскости. Поэтому n прямых разбивают плоскость на $1+1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}\;(n^2+n+2)$ частей.

264. Пусть уже проведены $k-1$ плоскостей. Проведем еще одну плоскость. Она пересекается с ранее проведенными плоскостями по $k-1$ прямой, которые делят ее на $\frac{1}{2}(k^2-k+2)$ частей. Каждая из этих частей соответствует новой части пространства. Поэтому n плоскостей делят пространство на

$$1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+2)=\frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$$

частей.

265. Проведено $C_5^2=10$ прямых. Через каждую точку, например C, проходят 4 прямые. Следовательно, из этой точки выходят 6 перпендикуляров. Рассмотрим какие-либо две точки, например B и C. Перпендикуляры, опущенные из точки B на прямые, проходящие через точку C, пересекают все перпендикуляры, опущенные из точки C. Из точки C выходят 3 прямых, не проходящих через B. Значит, из B на них можно опустить 3 перпендикуляра. Они пересекаются с перпендикулярами, опущенными из точки C, в $3\cdot 6=18$ точках. Каждый из перпендикуляров, опущенных из точки B на другие 3 прямые, проходящие через C, пересекает лишь 5 перпендикуляров, опущенных из точки C, так как он параллелен одному из этих перпендикуляров, ибо опущен на одну прямую с ним. Получается еще 15 точек. Следовательно, перпендикуляры, опущенные из двух точек, пересекаются в $18+15=33$ точках. Но из 5 точек можно составить 10 пар. Это дало бы $33\cdot 10=330$ точек пересечения, но некоторые из этих точек совпадают. Именно, любые 3 из 5 данных точек образуют треугольник. Высоты этого треугольника (являющиеся некоторыми из наших перпендикуляров) пересекаются в одной точке, а мы эту точку учли 3 раза. Так как таких треугольников $C_5^3=10$, то надо отбросить 20 точек, и остается 310 возможных точек пересечения.

266. Любые три целых числа x, y, z, удовлетворяющие неравенствам $n+1\leqslant x,\ y,\ z\leqslant 2n$, могут быть сторонами треугольника. Поэтому число треугольников с такими сторонами равно $\overline{C}_n^3=C_{n+2}^3$. Чтобы найти число равнобедренных треугольников, заметим, что при данном основании мы имеем n равнобедренных треугольников. Значит, их общее число равно n^2. Число равносторонних треугольников равно n.

267. Нам надо найти количество троек натуральных чисел x, y, z таких, что $x\leqslant y\leqslant z\leqslant 2n$ и $x+y>z$. Пусть задано $x=p$. Тогда y принимает значения от p до $2n$. Когда y пробегает значения от p до $2n-p+1$, каждому значению y соответствует p значений z, удовлетворяющих неравенствам $y\leqslant z<y+p$, $z\leqslant 2n$. Если же y принимает значения от $2n-p+2$ до $2n$, то число соответствующих значений z равно $2n-y+1$. Всего при заданном $x=p$ получаем

$$2p(n-p+1)+\sum_{y=2n-p+2}^{2n}(2n-y+1)=2pn-\frac{3}{2}p^2+\frac{3}{2}p$$

пар (y, z) таких, что x, y, z удовлетворяют поставленным условиям. Отсюда вытекает, что общее число треугольников, для которых $1\leqslant x\leqslant n$ и $1\leqslant y,\ z\leqslant 2n$, равно

$$\sum_{p=1}^{n}\left(2pn-\frac{3}{2}p^2+\frac{3}{2}p\right)=\frac{n}{2}(n+1)^2.$$

В силу задачи 266 существует C_{n+2}^3 треугольников, для которых $x\geqslant n+1$. Поэтому всего имеем

$$\frac{n}{2}(n+1)^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

треугольников.

Количество равнобедренных треугольников с основанием $x=2k$ равно $2n-k$, а с основанием $2k+1$ тоже $2n-k$. Поэтому общее число равнобедренных треугольников равно

$$\sum_{k=1}^{n}(2n-k)+\sum_{k=0}^{n-1}(2n-k)=3n^2.$$

Исключая их, получаем

$$\frac{n(n+1)(4n+5)}{6} - 3n^2 = \frac{n(n-1)(4n-5)}{6}$$

треугольников.

268. Эта задача решается подобно задаче 267. Число треугольников с заданным значением $x=p\leqslant n-1$ равно $2np-\frac{3}{2}p^2+\frac{p}{2}$, а всех треугольников, для которых $x\leqslant n-1$, имеем

$$\sum_{p=1}^{n-1}\left(2np-\frac{3}{2}p^2+\frac{p}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n-1)}{2}.$$

Число же треугольников, для которых $x\geqslant n$, равно C_{n+2}^3, а потому всего имеем

$$\frac{n(n+1)(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

треугольников. Число равнобедренных треугольников равно

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2n-k-1)+\sum_{k=0}^{n-1}(2n-k-1)=3n^2-3n+1,$$

а разносторонних —

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}-3n^2+3n-1=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3).$$

269. Поскольку мы берем n точек пересечения и никакие три из них не лежат на одной прямой, то на каждой прямой лежат две и только две точки из выбранной группы. Поэтому, чтобы задать такую группу, занумеруем данные прямые и выберем на первой из них точку пересечения со второй прямой, на второй — точку пересечения с третьей, ..., на n-й — точку пересечения с первой прямой. Получаем искомую группу точек, причем все такие группы могут быть получены описанным методом. Учитывая, что циклическая перестановка точек и изменение порядка их обхода не меняют группу точек, получаем, что число групп равно $\frac{P_n}{2n}=\frac{1}{2}(n-1)!$

270. Мы можем выбрать r вершин, идущих в данном порядке A_n^r способами. Так как циклическая перестановка вершин и изменение порядка обхода не меняют многоугольника, получаем $\frac{1}{2r}A_n^r$ многоугольников.

271. Выберем две точки на одной прямой и две точки на другой. Им соответствуют две точки пересечения прямых, проходящих через эти точки (точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения боковых сторон). Так как на первой прямой можно выбрать C_n^2 пар точек, а на второй C_m^2, то число точек пересечения равно $2C_n^2C_m^2$.

272. n точек определяют C_n^3 окружностей. Из их числа C_{n-1}^2 проходят через данную точку и C_{n-2}^1 — через данные две точки. Поэтому прямая, проходящая через две данные точки, имеет не более $2C_{n-2}^3+\left(2C_{n-1}^2-C_{n-2}^1\right)+2$ точек пересечения с окружностями. Так как через n точек проходит C_n^2 прямых, то имеем не более чем

$$C_n^2\left[2C_{n-2}^3+2C_{n-1}^2-C_{n-2}^1+2\right]$$

точек пересечения.

273. Каждая прямая пересечения определяется двумя плоскостями, а каждая плоскость — тремя заданными точками. Прямые распадаются на классы в соответствии с тем, сколько точек из задающих первую плоскость входит в число точек, задающих вторую плоскость. Все точки различны в $\frac{1}{2}C_n^3C_{n-3}^3$ случаях (выбираем три точки из n и еще три точки из оставшихся $n-3$, причем порядок выбора не играет роли). Если одна точка входит в обе тройки, то получаем $\frac{3}{2}C_n^3C_{n-3}^2$ способов выбора, а если две точки входят в обе тройки, то $\frac{3}{2}C_n^3C_{n-3}^1$ способов выбора. Всего имеем

$$\frac{1}{2}C_n^3\left(C_{n-3}^3+3C_{n-3}^2+3C_{n-3}^1\right)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2+2)}{72}$$

прямых. Из их числа

$$\frac{1}{2}C_n^3C_{n-3}^3=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{72}$$

не проходит ни через одну заданную точку.

274. Обозначим стороны четырехугольника через a, b, c, d. Не теряя общности, можно считать, что a — наименьшая из сторон, c — противоположная ей сторона и что $b<d$. Тогда $a<b<d$ и $a<c$. Кроме того, так как четырехугольники описаны вокруг окружности, то $a+c=b+d$. Отсюда следует, что $a+c>2b$. Поэтому при заданных значениях a и b длина c может принимать значения от $2b-a+1$ до n и должно выполняться неравенство $2b-a\leqslant n-1$.

Итак, мы доказали, что $b\leqslant\frac{a+n-1}{2}$ и что $2b-a+1\leqslant c\leqslant n$. Обозначим $E\left(\frac{a+n-1}{2}\right)$ через s. Тогда при заданном значении a имеем

$$\sum_{b=a+1}^{s}(n+a-2b)=(s-a)(n-s-1)$$

четырехугольников.

Пусть n — четное число, $n=2m$. Тогда при нечетных значениях a, $a=2k-1$, имеем $s=E\left(\frac{n+a-1}{2}\right)=m+k-1$ и, следовательно, $(m-k)^2$ четырехугольников, а при четных значениях a, $a=2k$, имеем $s=E\left(\frac{n+a-1}{2}\right)=m+k-1$ и, следовательно, $(m-k-1)(m-k)$ четырехугольников. Суммируя по a, получаем, что общее число четырехугольников равно

$$\sum_{k=1}^{m}(m-k)^2+\sum_{k=1}^{m}(m-k)(m-k+1)=$$

$$=\frac{m(m-1)(4m-5)}{6}=\frac{n(n-2)(2n-5)}{24}.$$

Случай, когда n нечетно, рассматривается аналогично.

Если допускать, чтобы у четырехугольников были одинаковые стороны, то a, b, c, d должны удовлетворять соотношениям $a\leqslant b\leqslant\leqslant d\leqslant n$, $a\leqslant c$ и $a+c=b+d$, откуда следует, что $b\leqslant\frac{a+n}{2}$ и $2b-a\leqslant c\leqslant n$. Если положить $E\left(\frac{a+n}{2}\right)=s$, то число четырехугольников с заданным значением a равно $(n-s+1)(s-a+1)$.

При четном значении n получаем $\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$ четырехугольников, а при нечетном — $\frac{(n+1)(2n^2+7n+3)}{24}$.

275. Число проведенных окружностей равно C_n^3, причем через данную точку проходят C_{n-1}^2 окружностей, а через данные две точки C_{n-2}^1 окружностей. Возьмем одну из этих окружностей, проведенную через точки A, B, C. Мы имеем $C_n^3-3C_{n-1}^2+3C_{n-2}^1-1$ окружностей, не проходящих ни через одну из этих точек. Выбранная окружность пересекается с каждой из них в двух точках. Далее, имеем $3\left(C_{n-1}^2-2C_{n-2}^1+1\right)$ окружностей, проходящих через одну из точек A, B, C и не проходящих через две из этих точек. Они дают по одной точке пересечения, отличной от A, B, C. Остальные окружности пересекаются с выбранной в двух из точек A, B, C. Таким образом, данная окружность дает

$$2\left(C_n^3-3C_{n-1}^2+3C_{n-2}^1-1\right)+3\left(C_{n-1}^2-2C_{n-2}^1+1\right)=$$

$$=\frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6}$$

точек пересечения, отличных от A, B, C. Всего получаем

$$\frac{1}{2}C_n^3\frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6}=\frac{5(2n-1)}{3}C_n^5$$

точек пересечения, отличных от заданных. Добавляя эти n точек, получаем, что наибольшее число точек пересечения равно

$$\frac{5(2n-1)}{3} C_n^5 + n.$$

276. При добавлении плоскости $k+1$ к ранее проведенным k ($k=1, 2, \ldots$) плоскостям получается $2k$ новых частей, а $2+2+4+6+\ldots+2(n-1)=n^2-n+2$.

277. Общее число способов раскрасить 6 граней в 6 различных цветов равно $6!=720$. Разобьем эти способы на классы, состоящие из раскрасок, которые можно совместить движениями. Куб можно совместить с собой 24 способами (6 способами выбирается грань, в которую переходит фиксированная грань куба, после чего остаются 4 вращения куба, при которых данная грань переходит сама в себя). Поэтому каждый класс состоит из 24 способов раскраски, а число геометрически различных способов раскраски равно $^{720}/_{24}=30$.

278. Решается точно так же, как и задача 277. Число способов раскраски равно $4!/12=2$.

279. Имеем $8!/24=1680$ способов раскраски.

280. Для додекаэдра $12!/60$, а для икосаэдра $20!/60$ способов раскраски.

282. Нам надо найти количество троек натуральных чисел x, y, z таких, что $x \leqslant y \leqslant z$, $x+y+z=40$ и $x+y>z$. Из этих неравенств вытекает, что z может принимать значения, удовлетворяющие неравенствам $14 \leqslant z \leqslant 19$. Если $z=19$, то $x+y=21$, причем $x \leqslant y \leqslant 19$. Поэтому $11 \leqslant y \leqslant 19$, и мы имеем 9 треугольников с $z=19$. Точно так же устанавливаем, что число треугольников, для которых $z=18$, 17, 16, 15, 14, равно соответственно 8, 6, 5, 3, 2, а всего имеем 33 треугольника. Точно также получаем, что число треугольников с периметром 43 равно 44.

283. Возьмем треугольник с периметром $4n$. Пусть его стороны равны x, y, z. Прибавляя к длинам этих сторон по 1, получим числа $x+1$, $y+1$, $z+1$, являющиеся длинами сторон треугольника с периметром 43. Но, кроме того, имеем треугольники со сторонами $(1, 2n+1, 2n+1)$, $(2, 2n, 2n+1)$, $\ldots$, $(n+1, n+1, 2n+1)$, которые не могут быть получены описанным образом.

284. Пусть $N=12n$. Нам надо найти количество троек натуральных чисел x, y, z таких, что $x \leqslant y \leqslant z$, $x+y+z=12n$ и $x+y>z$. Из этих неравенств следует, что $4n \leqslant z \leqslant 6n-1$. При этом если $z=2k$, то $x+y=12n-2k$, а число целочисленных решений этого уравнения таких, что $x \leqslant y \leqslant z=2k$, равно $3k-6n+1$. Если же $z=2k+1$, то имеем $3k-6n+2$ решений. Поэтому число треугольников равно

$$\sum_{k=2n}^{3n-1} (3k-6n+1) + \sum_{k=2n}^{3n-1} (3k-6n+2) = 3n^2.$$

Остальные случаи разбираются точно так же. При переходе от N к $N+3$ можно использовать рассуждения, аналогичные проведенным при решении задачи 282.

285. Докажем, что через каждую остановку проходит ровно n маршрутов. Пусть l — один из маршрутов, и B — остановка, расположенная вне этого маршрута (рис. 37). В силу условия 1 из остановки B можно попасть одним из маршрутов на каждую из n

остановок $A_1, \ldots, A_n$ маршрута l. При этом в силу условия 2 каждый из маршрутов, проходящих через B, проходит через какую-то из остановок $A_1, \ldots, A_n$ (иначе с этого маршрута нельзя было бы пересесть на маршрут l) и притом только через одну из них (иначе с этого маршрута можно было бы пересесть на маршрут l на двух остановках). При этом никакие два из проходящих через B маршрута не проходят через одну и ту же остановку маршрута l (иначе с одного из этих маршрутов можно было бы пересесть на другой на двух остановках — на остановке B и на той остановке маршрута l, через которую оба они проходят). Отсюда следует, что через остановку B проходит столько же маршрутов, сколько имеется остановок на маршруте l, то есть равно n маршрутов.

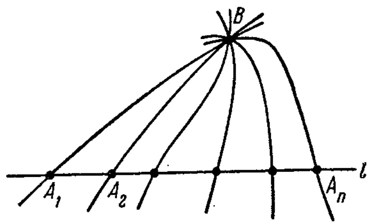


Рис. 37.

Нам осталось доказать, что через каждую из остановок $A_1, \ldots, A_n$, расположенных на маршруте l, также проходит ровно n маршрутов. Для этого достаточно показать, что для любой из этих остановок есть не проходящий через нее маршрут l' (он по условию имеет n остановок, а тогда, как мы знаем, через эту остановку проходит n маршрутов). Так как общее число маршрутов не менее двух, то, помимо l, есть еще хотя бы один маршрут l' (рис. 38), пересекающийся с маршрутом l в единственной точке, скажем A_1. Тогда остановки $A_2, \ldots, A_n$ расположены вне маршрута l', и потому через них проходит по n маршрутов. Пусть B — еще одна остановка на маршруте l'. Маршрут, проходящий через B и A_2, не проходит через A_1, и потому через A_1 также проходит ровно n маршрутов. Таким образом, через любую остановку проходит ровно n маршрутов.

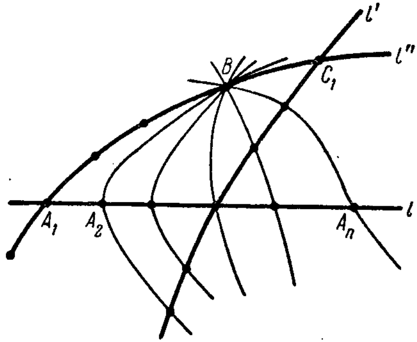


Рис. 38.

Так как для каждой остановки можно найти не проходящий через нее маршрут, а на каждом маршруте есть n остановок, то через каждую остановку проходит n маршрутов. Возьмем один из этих маршрутов l. Через каждую остановку этого маршрута проходит $n-1$ маршрутов, отличных от l, причем в силу условия 2 никакие два из этих маршрутов не совпадают друг с другом (иначе они имели бы две общие остановки), и любой маршрут входит в число получаемых таким путем. Итак, число отличных от l маршрутов равно $n(n-1)$, а всего мы имеем $n(n-1)+1$ маршрутов.

286. Пусть на одном из маршрутов l имеем n остановок. Из решения задачи 285 видно, что через любую остановку B, лежащую вне маршрута l, проходит ровно n маршрутов. Покажем, что на произвольном маршруте l', отличном от l, имеем ровно n остановок. В силу условия 3 на l' расположено не менее трех остановок, причем в силу условия 2 лишь одна из этих остановок является в то же время остановкой маршрута l. Вне маршрута l' расположено $n-1$ остановок маршрута l. Покажем, что, помимо этого, вне l' расположена еще хотя бы одна остановка, не лежащая на l. Действительно, пусть A_1 есть одна из $n-1$ остановок маршрута l, расположенных вне l', а C_1 есть одна из остановок маршрута l', расположенных вне l (таких остановок имеется не менее чем 2). В силу условия 1 существует маршрут l'', проходящий через остановки A_1 и C_1, причем в силу условия 3 на этом маршруте, помимо A_1 и C_1, имеется еще по крайней мере одна остановка B_1, которая будет расположена вне l' и вне l. Через эту остановку B_1, как мы знаем из решения задачи 284, проходит n маршрутов. Каждый из этих n маршрутов пересекается с маршрутом l' в одной-единственной точке. При этом через каждую остановку маршрута l' проходит хотя бы один маршрут, соединяющий ее с остановкой B. Поэтому число остановок на маршруте l' равно числу маршрутов, проходящих через остановку B, то есть равно n.

Как мы видели при решении задачи 285, в этом случае число маршрутов выражается формулой $n(n-1)+1$. Так как по условию это число равно 57, то надо решить уравнение $n^2-n+1=57$. Решая его, находим, что $n=8$.

287. Возможно; рассмотрим, например, 10 прямых плоскости таких, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, и будем считать, что прямые — это автобусные маршруты, а точки их пересечения — остановки. При этом с каждой остановки можно проехать на любую другую без пересадки, если они лежат на одной прямой, и с одной пересадкой, если они лежат на различных прямых. Если даже отбросить в этой схеме одну прямую, то все же останется возможность проехать с каждой остановки на любую другую, сделав в пути не более одной пересадки. Но если отбросить две прямые, то одна остановка — точка пересечения этих двух прямых, не будет совсем обслуживаться оставшимися маршрутами, и с этой остановки будет невозможно проехать ни на какую другую остановку.

288. Шар может касаться любой из плоскостей с одной из двух сторон, а данного шара — изнутри или извне. Поэтому можно построить 16 различных шаров.

289. Каждая из m прямых, проведенных через точку A, пересекается с $2m$ прямыми. Поэтому прямые, проходящие через точку A, дают $2m^2$ точек пересечения. Общее число точек пересечения, отличных от данных трех, равно $3m^2$.

290. Обозначим точки, лежащие в одной плоскости, через $A_1, \ldots, A_m$, а остальные — через $B_1, \ldots, B_{n-m}$. Каждая плоскость определяется выбором трех точек. В число этих точек могут войти три, две, одна или ни одной точки из числа $A_1, \ldots, A_m$. В соответствии с этим получаем, что количество плоскостей равно

$$1+C_m^2C_{n-m}^1+C_m^1C_{n-m}^2+C_{n-m}^3.$$

291. Число точек пересечения, лежащих на каждой из прямых, проходящих через A, равно $n+p$, через B — $m+p$ и через C — $m+n$. Так как через A проходят m прямых, через B — n прямых и через C — p прямых, то общее число точек пересечения равно

$$\frac{1}{2}[m(n+p)+n(m+p)+p(m+n)]=mn+mp+np.$$

Из них можно $C^3_{mn+mp+np}$ способами выбрать тройку точек, но в $mC^3_{n+p}+nC^3_{m+p}+pC^3_{m+n}$ случаях мы получим точки, лежащие на одной прямой Поэтому число треугольников равно

$$C^3_{mn+mp+np}-mC^3_{n+p}-nC^3_{m+p}-pC^3_{m+n}.$$

292. Выберем произвольно первую вершину треугольника. Это можно сделать n способами. После этого нам надо выбрать еще две вершины среди $n-3$ точек, не смежных с данной, так, чтобы они были не смежны друг с другом. Это можно сделать C^2_{n-4} способами (см. стр. 95). Поскольку любую из трех вершин можно считать первой, то имеем $\frac{n}{3}C^2_{n-4}=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$ способов выбора.

293. Разобьем все треугольники на два класса — те, у которых все вершины лежат на различных прямых, и те, у которых две вершины лежат на одной прямой. Число треугольников первого класса равно $p^3C^3_n$ (мы выбираем C^3_n способами три прямые, на которых лежат вершины, после чего на каждой из этих прямых выбираем по одной точке из p). Число треугольников второго класса равно $\frac{1}{2}p^2(p-1)n(n-1)$ (мы выбираем прямую, на которой лежат две вершины, затем две точки на этой прямой, после чего берем прямую, где лежит одна вершина, и точку на этой прямой). Общее число треугольников равно

$$p^3C^3_n+\frac{1}{2}p^2(p-1)n(n-1)=\frac{n(n-1)p^2(pn+p-3)}{6}.$$

294. Каждая внутренняя точка пересечения диагоналей однозначно определяется заданием 4 вершин n-угольника — концов пересекающихся диагоналей. Поэтому их число равно C^4_n. Найдем теперь общее число точек пересечения диагоналей. Из каждой вершины n-угольника выходят $n-3$ диагоналей, а всего мы имеем $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей. Каждая диагональ AB пересекается со всеми диагоналями, соединяющими вершины, отличные от A и B. Поэтому мы имеем

$$\frac{n(n-3)}{2}-2(n-3)+1=\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1$$

точек пересечения диагонали AB с остальными диагоналями. Так как общее число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$, а каждая точка пересечения считается при этом дважды, то всего имеем

$$\frac{n(n-3)[(n-3)(n-4)+2]}{8}$$

точек пересечения диагоналей. Вычитая из этого числа количество внутренних точек пересечения, получаем, что число внешних точек пересечения равно $\frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}$.

295. Каждый r-угольник определяется выбором r точек из n, взятых в определенном порядке, причем циклическая перестановка точек не меняет r-угольника, равно как и изменение ориентации. Поэтому число r-угольников равно $\frac{1}{2r}A_n^r$, а вообще число многоугольников $\sum_{r=3}^{n}\frac{1}{2r}A_n^r$. Число выпуклых многоугольников равно $\sum_{r=3}^{n}C_n^r$.

296. m параллельных прямых делят плоскость на $m+1$ полос. Каждая новая прямая добавляет столько кусков, на сколько частей она делится уже проведенными прямыми. Так как мы проводим еще n прямых, то получаем

$$m+1+(m+2)+\ldots+(m+n)=\frac{n(2m+n+1)}{2}$$

частей.

297. Разобьем окружности на классы по числу заданных точек, лежащих на данной окружности. Одна окружность (а именно, данная) содержит все эти точки, $C_5^2C_6^1$ — содержат две точки, $C_5^1C_6^2$ — одну точку и C_6^3 — не содержит ни одной точки. Всего получаем $1+C_5^2C_6^1+C_5^1C_6^2+C_6^3=156$ окружностей.

298. Каждым трем прямым соответствуют 4 касающиеся их окружности. Поэтому всего имеем $4C_{10}^3=480$ окружностей.

299. Выберем s идущих подряд вершин n-угольника $A_1, \ldots, A_s$ и разобьем все k-угольники, удовлетворяющие поставленному в задаче условию, на два класса. К первому классу отнесем все k-угольники, одна из вершин которых совпадает с одной из выбранных вершин, а ко второму классу — все остальные k-угольники. k-угольники первого класса разобьем на s подклассов в соответствии с тем, какая из вершин A_m, $1\leqslant m\leqslant s$, принадлежит k-угольнику (очевидно, что эти подклассы не имеют общих элементов).

Найдем число k-угольников, для которых одной из вершин является A_m. Для этого отбросим вершину A_m и идущие за ней по часовой стрелке s вершин (ни одна из них не является вершиной k-угольника). Нам надо выбрать из оставшихся $n-s-1$ вершины

$k-1$ вершин так, чтобы после каждой из них было не менее чем s выбранных вершин. Это можно сделать C_{n-ks-1}^{k-1} способами (см. задачу 250). Поэтому число k-угольников с вершиной A_m равно C_{n-ks-1}^{k-1}, а общее число k-угольников первого класса равно sC_{n-ks-1}^{k-1}.

Найдем теперь число k-угольников второго класса. Для этого «разрежем» окружность между вершинами A_s и A_{s+1}. Нам надо выбрать k вершин так, чтобы после каждой выбранной вершины шли по крайней мере s оставшихся (при этом ни одна из вершин $A_1, \ldots, A_s$ не будет выбрана). Это можно сделать C_{n-ks}^{k} способами. Таким образом, общее число k-угольников, удовлетворяющих поставленному условию, равно $sC_{n-ks-1}^{k-1}+C_{n-ks}^{k}$.

300. Каждый параллелограмм определяется двумя парами параллельных прямых. Поэтому имеем $\left(C_{r+2}^{2}\right)^{2}$ параллелограммов.

301. Будем проводить диагонали последовательно из вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Каждая новая диагональ дает столько новых частей, на сколько кусков она разбивается ранее проведенными диагоналями, то есть на одну часть больше, чем число точек ее пересечения с ранее проведенными диагоналями. Поскольку каждая точка пересечения при этом получается один раз, то общее число новых частей равно сумме числа точек пересечения и числа диагоналей. Так как вначале мы имели одну часть, то всего имеем

$$1+\frac{n(n-3)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\frac{n(n-3)(n^2-3n+14)}{24}+1$$

частей (см. задачу 294).

302. Пусть n четно, $n=2k$. Тогда n следующими способами может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

$$n=1+(2k-1)=2+(2k-2)=\ldots=k+k.$$

Но карту с числом 1 можно вынуть единственным образом, с числом 2 — двумя способами и т. д. А две карты с числом $k>1$ можно выбрать C_k^2 способами. Поэтому всего имеем

$$1(2k-1)+2(2k-2)+\ldots+(k-1)(k+1)+\frac{k(k-1)}{2}=$$
$$=\sum_{s=1}^{k-1}s(2k-s)+\frac{k(k-1)}{2}=\frac{2k(k^2-1)}{3}=\frac{n(n^2-4)}{12}$$

способов получить сумму $n=2k$. Если же n нечетно, $n=2k-1$, то

$$n=1+(2k-2)=2+(2k-3)=\ldots=(k-1)+k,$$

и число способов равно

$$\sum_{s=1}^{k-1}s(2k-s-1)=\frac{k(k-1)(2k-1)}{3}=\frac{n}{12}(n^2-1).$$

303. Разобьем выборки на классы по числу вошедших в них одинаковых предметов Количество выборок, содержащих k одинаковых предметов, равно C_{2n+1}^{n-k}. Поэтому общее число выборок равно

$$C_{2n+1}^{n}+C_{2n+1}^{n-1}+\ldots+C_{2n+1}^{0}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}=2^{2n}.$$

304. Если первый член прогрессии равен a, а ее разность d, то третий член равен $a+2d$ По условию $a+2d\leqslant 2n$. Это неравенство имеет при заданном d $2n-2d$ решений. Всего получаем

$$(2n-2)+(2n-4)+\ldots+2=n(n-1)$$

решений. Так как каждую из полученных прогрессий можно рассматривать и как возрастающую, и как убывающую, получаем $2n(n-1)$ прогрессий. Для последовательности чисел $1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, 2n+1$ имеем $2n^2$ прогрессий.

305. Докажем утверждение с помощью индукции по числу s кривых. Если $s=1$, то оно очевидно, так как точек пересечения нет и число областей равно 1. Пусть утверждение уже доказано для s кривых. Возьмем систему из s кривых, имеющих n_r точек пересечений кратности r, $r=2, 3, \ldots$ (точка — кратности r, если в ней пересекаются r кривых). Тогда они ограничивают $1+n_2+\ldots$ $\ldots+rn_{r+1}+\ldots$ замкнутых областей. Проведем кривую $s+1$, и пусть она имеет k_r точек пересечения кратности r с ранее проведенными кривыми, $r=2, 3, \ldots$, а всего $k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}$ точек пересечения. Эти точки пересечения разбивают ее на $k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}$ частей. Каждая часть проведенной кривой соответствует одной новой области, а потому теперь число областей окажется равным

$$(1+n_2+\ldots+rn_{r+1}+\ldots)+(k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}+\ldots). \quad (*)$$

Но если новая кривая прошла через точку пересечения кратности r ранее проведенных кривых, то теперь эта точка стала точкой пересечения кратности $r+1$.

Обозначим через n_r' количество точек пересечения кратности r в новой системе кривых. Ясно, что $n_{r+1}'=n_{r+1}-k_{r+1}+k_r$ (от ранее имевшихся точек пересечения кратности $r+1$ надо отнять k_{r+1} точек, имевших кратность $r+1$, увеличивших ее, и прибавить k_r точек, имевших кратность r и увеличивших ее). Но тогда

$$\begin{aligned}1+n_2'+2n_3'+\ldots+rn_{r+1}'=&\\ =1+(n_2-k_3+k_2)+2(n_3-k_4+k_3)+\ldots&\\ \ldots+r(n_{r+1}-k_{r+1}+k_r)+\ldots=&\\ =(1+n_2+2n_3+\ldots+rn_{r+1}+\ldots)+(k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}+\ldots)&\end{aligned}$$

Мы доказали, таким образом, что $1+n_2'+2n_3'+\ldots+rn_{r+1}'+\ldots$ равно числу областей для новой системы кривых (см. формулу $(*)$). В силу принципа математической индукции утверждение верно для любого числа кривых.

306. Прямые первого пучка разбивают плоскость на $2m$ частей. Первая прямая второго пучка пересекается со всеми m прямыми первого пучка и дает $m+1$ новых частей. Все остальные прямые второго пучка имеют $m+1$ точек пересечения с ранее проведенными прямыми. Поэтому мы имеем всего

$$2m+m+1+(n-1)(m+2)=nm+2n+2m-1$$

частей.

307. Нельзя, так как в противном случае число соединений равнялось бы дробному числу $\frac{77\cdot 15}{2}$.

308. Сумма коэффициентов равна значению выражения при $x=y=z=1$. Подставляя эти значения, получаем, что сумма равна -1.

309. Максимальное число шариков, среди которых нет 15 одинаковых, равно 74 (10 белых, 10 черных, 12 желтых и по 14 красных, зеленых и синих). Если же взять 75 шариков, то среди них найдется 15 шариков одного цвета.

310. Расклассифицируем способы раскраски по числу белых граней. Существует единственный способ раскраски, не содержащий ни одной белой грани, и один способ, содержащий одну белую грань. В случае двух белых граней есть два способа раскраски — белые грани либо имеют общее ребро, либо противоположны. При трех белых гранях снова имеем два способа: либо есть две противоположные белые грани, либо все белые грани примыкают к одному и тому же углу. Случаи 4, 5 и 6 белых граней сводятся к рассмотренным выше путем замены цветов на противоположные. Всего получаем $1+1+2+2+2+1+1=10$ способов раскраски.

311. Пусть теперь окрашиваются вершины куба. Тогда есть 1 способ раскраски без белых вершин, 1 способ с одной белой вершиной, 3 — с двумя белыми вершинами (белые вершины лежат на одном ребре, на одной диагонали грани или на одной диагонали куба), 3 способа с тремя белыми вершинами (три вершины лежат на одной грани, либо две лежат на одном ребре, а третья — на одной диагонали грани с какой-то из этих двух вершин, либо три вершины попарно лежат на одной диагонали грани, см. рис. 39). С четырьмя белыми вершинами есть 5 способов раскраски (все четыре вершины лежат на одной грани, либо три вершины A, B, C лежат на одной грани, а четвертая — на одном ребре с вершиной A, либо с вершиной B, либо диаметрально противоположна вершине B; либо две вершины лежат на одном ребре, а две другие — на диаметрально противоположном ему ребре). Случаи 5, 6, 7 и 8 белых вершин сводятся к разобранным выше заменой цветов на противоположные. Всего имеем $1+1+3+3+5+3+3+1+1=21$ способ раскраски.

312. Куб имеет 11 разверток (рис. 40). Шесть первых решений дают те развертки, в которых четыре грани куба расположены в одной полосе развертки. Последующие четыре развертки — это те, у которых есть три грани в одной полосе, но нет четырех граней. И наконец, в последнем решении ни в одной полосе нет трех граней.

313. Есть лишь 4 способа такой окраски. Относительно доказательства этого утверждения отсылаем читателя к книге Г. Штейнгауза «Сто задач», Физматгиз, 1959, задача № 40.

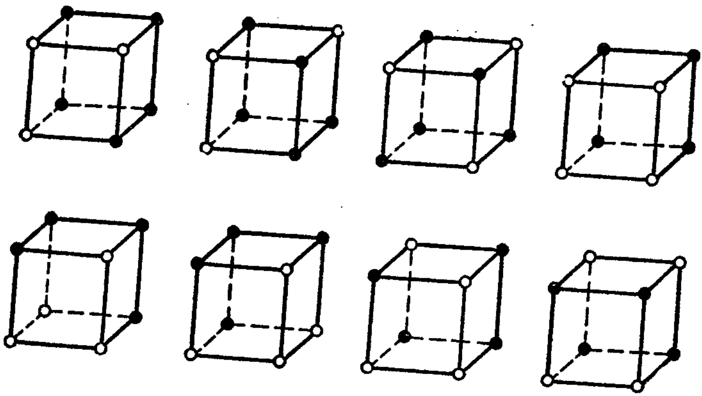


Рис. 39.

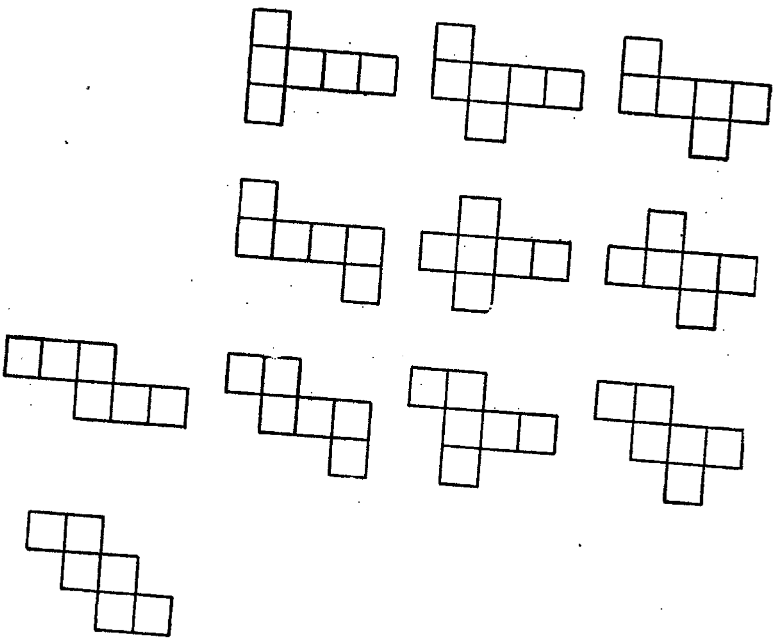


Рис. 40.

314. См. упомянутую книгу Г. Штейнгауза, задача № 44.

315. Докажем сначала, что через 2^n единиц времени остаются только две частицы, расположенные соответственно в точках с координатами 2^n и -2^n. При $n=1$ это утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано при $n=k$. На протяжении следующих 2^k-1 шагов эти частицы не взаимодействуют, и по предположению индукции через 2^k шагов каждая из них даст лишь две частицы, удаленные от них влево и вправо на 2^k. Иными словами, мы получим одну частицу в точке 2^{k+1}, две — в точке O и одну — в точке -2^{k+1}. Частицы в точке O взаимно уничтожатся, и останутся две частицы. Утверждение доказано.

Таким образом, через 128 шагов останутся две частицы в точках с координатами 128 и -128. А через 129 шагов получим четыре частицы в точках 129, 127, -127 и -129.

Если $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_s}$, $k_1>k_2>\ldots>k_s$, то мы получаем 2^s частиц, координаты которых имеют вид $\pm2^{k_1}\pm2^{k_2}\pm\ldots\pm2^{k_s}$ (допускаются любые комбинации знаков). Это утверждение легко доказывается индукцией по s: при $s=1$ оно уже доказано. Пусть оно уже доказано при $s<m$, и $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_m}$. Тогда после $\left(n-2^{k_m}\right)$-го шага мы получим 2^{m-1} частиц, расположенных в точках с координатами $\pm2^{k_1}\pm2^{k_2}\pm\ldots\pm2^{k_{m-1}}$. Расстояние между ближайшими частицами не меньше, чем $2^{k_{m-1}+1}$. Поэтому в течение $2^{k_{m-1}}-1$ шагов частицы, порождаемые разными «центрами», не взаимодействуют друг с другом, и через 2^{k_m} шагов каждый центр даст две частицы, находящиеся от него на расстоянии $\pm2^{k_m}$. Иными словами, мы получим частицы в точках вида $\pm2^{k_1}\pm\ldots\pm2^{k_m}$. Наше утверждение доказано.

316. Чтобы раскодировать слово, достаточно указать промежутки между знаками, являющиеся начальными для букв, кодируемых двумя знаками. Эти промежутки надо выбирать среди 11, причем никакие два из них не могут стоять рядом (мы имеем всего 13 промежутков, считая начальный и конечный, но из условий ясно, что нельзя брать ни конечный промежуток, ни стоящий перед ним). Если слово содержит p «двузначных» букв, то надо выбрать p промежутков. Это можно сделать C_{12-p}^p способами. Поэтому имеем

$$C_{12}^0+C_{11}^1+C_{10}^2+C_9^3+C_8^4+C_7^5+C_6^6=233$$

способов прочитать данное слово.

317. Количество p-значных чисел, запись которых не содержит единицы, равно $8\cdot9^{p-1}$. Значит, между 1 и 10 000 000 имеется

$$8(1+9+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6)=9^7-1=4\,782\,968$$

чисел, запись которых не содержит 1. Это меньше чем половина 10^7.

318. Рассмотрим первые три знака каждого слова. Эти знаки образуют не более чем $2^3=8$ комбинаций. Покажем, что каждой комбинации этих знаков соответствует **не более** двух слов. Иными словами, покажем, что если три слова имеют общие три первых знака, то хотя бы два из них имеют еще два общих знака. В самом деле, выпишем таблицу, состоящую из четырех последних знаков каждого из этих трех слов. В каждом столбце совпадают по крайней мере два знака. Так как число пар, составленных из трех слов, равно 3, а число столбцов — четырем, то хотя бы для двух слов совпадение имеет место в двух столбцах. А это и значит, что слова имеют еще два совпадающих знака, а всего 5 совпадающих знаков, что противоречит условию.

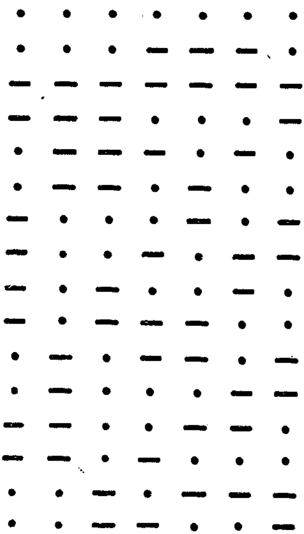


Рис. 41.

Таким образом, каждой комбинации первых трех знаков соответствует не более двух слов. Поэтому общее число слов не превышает 16. На рис. 41 изображены 16 слов, удовлетворяющих поставленному условию.

319. Так как p — простое число, то при поворотах окружности в себя переходят лишь окраски, сделанные одним цветом. Число таких окрасок равно n. Остальные способы раскраски (их число равно $n^p - n$) распадаются на классы по p раскрасок в каждом классе, причем раскраски одного класса переходят друг в друга при вращении окружности. Поэтому они дают $\frac{n^p - n}{p}$ способов раскраски. Всего имеем $\frac{n^p - n}{p} + n$ способов. По ходу решения задачи мы доказали так называемую малую теорему Ферма: если p — простое число, то для любого целого n число $n^p - n$ делится на p.

320. Так как 1 — наименьшее из заданных чисел, то оно должно стоять в углу, причем 2 должно стоять рядом с ним в одной вертикали или горизонтали. Тогда числа $1, 2, \ldots, n$ попадут в одну и ту же вертикаль или горизонталь. Наименьшим из оставшихся чисел является $n+1$. Оно должно занять место рядом с 1. Продолжая это рассуждение, убеждаемся, что числа располагаются однозначно определенным образом. Но мы можем поставить вначале 1 в любой из углов доски и выбрать либо вертикальное, либо горизонтальное направление для последовательности $1, 2, \ldots, n$. Поэтому имеем 8 расположений.

321. В противном случае население Москвы превосходило бы число 9 300 000.

322. Если мы выбрали нечетное число предметов, то число оставшихся предметов четно.

323. Число способов разменять 1 руб. монетами в 2 и 5 коп. равно числу целых неотрицательных решений уравнения $2x+5y=$ $=100$. Ясно, что y может принимать любое четное значение от 0 до 20. При размене на монеты в 5 и 3 коп. надо решать уравнение

$3x+5y=100$. Здесь y принимает лишь значения 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, число которых меньше 21.

324. Надо найти число целых неотрицательных решений уравнения $x+2y+5z=20$, или, что то же самое, неравенства $2y+5z\leqslant 20$. Ясно, что z может принимать лишь 0, 1, 2, 3 и 4 значений, которым соответствуют 11, 8, 6, 3 и 21 возможных значений y, а всего получаем 49 решений.

325. Так как $3=2+1$, $4=2+2$, $6=5+1$, $7=5+2$, $8=5+2+1$, $9=5+2+2$, то с помощью указанных разновесок можно составить любой целый вес от 1 до 9 *мг*. Точно так же составляются веса, выражаемые десятками, сотнями миллиграммов и т. д.

326. Среднее значение последней цифры равно 2, второй и третьей — 2, 5 и первой — 3. Общее количество чисел равно $5\cdot 6\cdot 6\cdot 3=540$. Поэтому их сумма равна $540(3000+250+25+2)=1\,769\,580$.

327. Утверждение очевидно при $r=1$ — после первого шага карта, находившаяся на p-м месте, при $p\leqslant n$ попадает на место $2p$, а при $p>n$ — на место $2p-2n-1$. В обоих случаях номер нового места — остаток от деления $2p$ на $2n+1$. Пусть утверждение уже доказано для r, то есть пусть после r шагов карта с номером p заняла место x, где $2^r p=k(2n+1)+x$. На следующем шагу она займет место y, где $2x=l(2n+1)+y$, $l=0$ или 1. Но тогда

$$2^{r+1}p=2k(2n+1)+2x=(2k+l)(2n+1)+y,$$

где $y<2^{r+1}p$. Это значит, что y — остаток от деления $2^{r+1}p$ на $2n+1$. В силу принципа математической индукции наше утверждение доказано.

328. Непосредственно вытекает из результата задачи 327.

329. Следует из результата задачи 327.

330. В самом деле, в этом случае остаток от деления $2^x p$ на $2n+1$ равен p.

331. В самом деле, после карты с номером $2n$ идут $2n-1$ карт с четными номерами, которые и лягут выше карты $2n$.

332. Утверждение относительно карты 8 вытекает из результата задачи 331. Остальные проверяются непосредственно.

333. Запишем под номером каждой карты номер, который она получает после указанной тасовки

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 11 & 6 & 12 & 5 & 13 & 4 & 14 & 3 & 15 & 2 & 16 & 1 \end{matrix} \qquad (*)$$

Из этой таблицы видно, что, например, при первой тасовке 1 переходит в 9, при второй 9 переходит в 13, потом 13 — в 15, затем 15 — в 16 и, наконец, 16 переходит в 1. Это можно изобразить в виде цикла (1, 9, 13, 15, 16, 1). Вся перестановка распадается на такие циклы. Кроме указанного выше, имеем еще циклы (2, 8, 5, 11, 14, 2), (3, 10, 4, 7, 12, 3) и цикл, состоящий только из числа 6. Каждый цикл состоит из одного или 5 различных чисел, и потому после пяти раз все карты займут первоначальное положение. Остальные случаи разбираются точно так же.

334. В первой строке мы можем расположить цвета в любом порядке (24 способа), после чего в первом столбце можем любым образом расположить три цвета, отличные от цвета углового квадрата (6 способов). Предположим, что выбраны цвета, указанные в таблице. Так как в вертикальных и горизонтальных рядах должны быть представлены все цвета, то во втором ряду может быть одна из следующих комбинаций цветов: черный, белый, синий, красный; черный, красный, синий, белый; черный, синий, белый, красный.

б	ч	к	с
ч	б	с	к
к	с	б	ч
с	к	ч	б

В первом из этих вариантов однозначно определяется окраска клеток второго вертикального ряда и остаются две возможности окраски оставшихся 4 клеток. Каждый из остальных двух вариантов тоже приводит к двум возможностям окраски. Всего получаем $4!\cdot 3!\times\times 2\cdot 3=144$ способа окраски.

335. Разобьем школьников на тройки каким-нибудь способом. Из каждой тройки можно выбрать три неупорядоченные пары (например, из тройки abc можно выбрать пары ab, ac, bc). Всего данному способу разбиения соответствуют 15 пар, ни одна из которых не должна встречаться при других способах разбиения. Но из 15 школьников можно составить $C_{15}^2=105$ пар. Поэтому число различных способов разбиения не может превышать $105:15=7$. Следующая таблица показывает, что значение 7 достигается, то есть что школьников можно разбивать на тройки с выполнением указанного условия в течение 7 дней:

klo	*ino*	*jmo*	*ilm*	*jln*	*ijk*	*kmn*
iab	*jac*	*lad*	*nae*	*kaf*	*mag*	*oah*
ncd	*mdb*	*kbc*	*ocg*	*mch*	*lce*	*icf*
mef	*keg*	*ieh*	*jfb*	*obe*	*ofd*	*jde*
jgh	*lhf*	*nfg*	*khd*	*idg*	*nhb*	*lbg*

336. Число $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ равно числу способов выбрать из n^2 предметов n неупорядоченных групп по n предметов в каждой и потому — целое число. Целым является и число $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n\, n!}$ — это число способов разбить mn предметов на n неупорядоченных групп по m предметов в каждой группе. По той же причине целым является и $\dfrac{(mn)!}{(n!)^m\, m!}$. Но тогда $\left[\dfrac{(mn)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}}\,(n!)^{\frac{m+1}{2}}}\right]^2$ — целое число как произведение двух целых чисел. Поскольку m и n нечетны, то $\dfrac{(mn)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}}\,(n!)^{\frac{m+1}{2}}}$ — рациональное число, квадрат которого — целое число. Значит, и само это число — целое.

337. См. стр. 80.

338. Это число равно коэффициенту при x^m в многочлене

$$(x^l+x^{l+1}+\ldots+x^n)^p=x^{lp}(1-x^{n-l+1})^p(1-x)^{-p}.$$

Применяя формулу бинома Ньютона, получаем, что этот коэффициент равен

$$C^m_{m-(l-1)p-1}-C^1_pC^{m+l-n-1}_{m-(l-1)(p-1)-n-1}+C^2_pC^{m+2(l-n-1)}_{m-(l-1)(p-2)-2n-1}+\ldots$$

339. Обозначим через x, y, z количество книг первого, второго и третьего вида, полученных первым участником. По условию задачи имеем $x+y+z=12$, причем $0\leqslant x\leqslant 7$, $0\leqslant y\leqslant 8$, $0\leqslant z\leqslant 9$. Число целых решений уравнения, удовлетворяющих данным неравенствам, равно коэффициенту при t^{12} в разложении произведения

$$(1+t+\ldots+t^7)(1+t+\ldots+t^8)(1+t+\ldots+t^9).$$

Это произведение можно переписать так:

$$\frac{(1-t^8)(1-t^9)(1-t^{10})}{(1-t)^3}=(1-t^8-t^9-t^{10}+t^{17}+\ldots)\times$$
$$\times(1+3t+6t^2+10t^3+15t^4+\ldots+91t^{12}+\ldots).$$

Ясно, что после раскрытия скобок мы получим при t^{12} коэффициент 60. Поэтому раздел может быть совершен 60 способами.

340. Число всех n-сочетаний с повторениями из n букв равно C^n_{2n-1}, следовательно, в них входит nC^n_{2n-1} букв. Так как все буквы входят одинаковое число раз, то каждая входит C^n_{2n-1} раз.

341. Сумма чисел, написанных на столбце, равна 999. Поэтому если оба числа трехзначные и одно из них имеет вид $\overline{abc}$, то другое имеет вид $\overline{9-a,\ 9-b,\ 9-c}$. Если же одно из чисел однозначно или двузначно, то второе начинается с цифры 9, причем на таких столбах написано a, $\overline{99(9-a)}$ или $\overline{ab}$, $\overline{9(9-a)(9-b)}$. Так как на столбах должны быть только две различные цифры, то либо $a=b=c$, либо два числа из a, b, c совпадают, а третье является дополнением этих чисел до 9. Количество чисел первого вида равно 10 (111, 222, ..., 999 и еще 0). Каждое же число второго вида определяется выбором пары различных цифр трехзначного числа, в которое входят обе эти цифры. Пару различных цифр можно выбрать $C^2_{10}=45$ способами. Каждой паре соответствуют 6 трехзначных чисел (например, 221, 212, 122, 112, 121, 211). Поэтому общее количество чисел второго рода равно $6\cdot 45=270$, а всего имеем 280 столбов, на которых написаны только две различные цифры.

342. Искомое число есть $\sum\limits_{p=0}^{m}\sum\limits_{q=0}^{n}P(p,q)-1$. (Мы отбрасываем пустое размещение.) Так как $\sum\limits_{q=0}^{n}P(p,q)=P(p+1,q)$, то имеем

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} P(p, q)-1=\sum_{p=0}^{m} P(p+1, n)-1=P(m+1, n+1)-2.$$

343. В силу предыдущей задачи число размещений, содержащих ровно k белых шаров, равно $P(k+1, n+1)-P(k, n+1)$. Поэтому белые шары входят $\sum\limits_{k=1}^{m} k\,[P(k+1, n+1)-P(k, n+1)]$ раз. Это выражение преобразуется так:

$$\sum_{k=1}^{m} kP(k+1, n+1)-\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)P(k+1, n+1)=$$

$$=mP(m+1, n+1)-\sum_{k=0}^{m-1} P(k+1, n+1)=$$

$$=mP(m+1, n+1)-P(m, n+2)+1=$$

$$=1+\frac{mn+m-1}{n+2}P(m+1, n+1).$$

Аналогично доказывается утверждение о черных шарах.

344. Искомое число равно сумме

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}(p+q+1)P(p, q).$$

Но

$$\sum_{q=0}^{n}(p+q+1)P(p, q)=(p+1)\sum_{q=0}^{n} P(p, q)+\sum_{q=1}^{n} qP(p, q)=$$

$$=(p+1)\left[P(p+1, n)+\sum_{q=1}^{n} P(p+1, q-1)\right]=$$

$$=(p+1)[P(p+1, n)+P(p+2, n-1)]=(p+1)P(p+2, n).$$

Поэтому сумма равна

$$\sum_{p=0}^{m}(p+1)P(p+2, n)=$$

$$=\sum_{p=0}^{m}(p+2)P(p+2, n)-\sum_{p=0}^{m} P(p+2, n)=$$

$$=(n+1)P(m+1, n+2)-P(m+2, n+1)+1=$$

$$=1+\frac{mn+m+n}{m+n+4}P(m+2, n+2).$$

345. Суммируя результаты, полученные в задачах 342 и 344, приходим к требуемому результату.

346. Общее число пар, которые можно составить из 7 человек, равно $C_7^2=21$. В каждую тройку (a, b, c) входят 3 пары $((a, b)$, (a, c) и $(b, c))$. Поэтому в течение 7 дней все пары будут представлены по одному разу. Поскольку в течение 7 дней будут обедать 21 человек, то каждый друг посетит меня 3 раза, то есть будет участвовать в трех тройках.

Выберем сначала тройки, в которые входит первый друг. Это можно сделать $\frac{6!}{(2!)^3\,3!}$ способами (число способов разбить 6 человек на 3 пары). Когда эти тройки выбраны, остаются две возможности выбора троек, в которые входит второй гость (например, если первый входит в тройки 1, 2, 3; 1, 4, 5; 1, 6, 7, то второй входит либо в тройки 2, 4, 6; 2, 5, 7, либо в тройки 2, 4, 7; 2, 5, 6). После этого распределение остальных гостей определяется однозначно. Учитывая воможность перестановок троек гостей, получаем

$$\frac{6!}{(2!)^3\,3!}\cdot 2\cdot 7!=151\,200 \text{ способов.}$$

347. Из 7 человек можно составить $C_7^3=35$ троек, из 6 человек — $C_6^3=20$, из пяти — $C_5^3=10$ и из четырех $C_4^3=4$ тройки. Поэтому общее число вариантов приглашения равно A_{35}^7. В $7A_{20}^7$ случаях один друг окажется неприглашенным, а в $21A_{10}^7$ случаях — два друга. Применяя формулу включений и исключений, получаем требуемый результат.

348. Если один из друзей приходит каждый день, то из остальных можно составить $C_6^2=15$ пар. Поэтому общее число компаний, в которых участвует один и тот же человек, равно $7A_{15}^7$. Остается $A_{35}^7-7A_{15}^7$ способов приглашения.

349. Размещения могут состоять из 1, 2, ..., n предметов. Поэтому полное число размещений равно

$$A_n^n+A_n^{n-1}+\ldots+A_n^1=n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\ldots+\frac{n!}{(n-1)!}=$$
$$=n!\left[2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right].$$

С другой стороны,

$$en!-1=n!\left[2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right]. \quad (*)$$

Но при любом натуральном $n\geqslant 2$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots<$$
$$<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots=\frac{1}{n}.$$

Поэтому выражение, стоящее в формуле (*) в квадратных скобках, меньше $\frac{1}{2}$. Этим доказано наше утверждение.

350. Общее число предметов во всех размещениях равно

$$nA_n^n+(n-1)A_n^{n-1}+\ldots+A_n^1=n!\left[n+\frac{n-1}{1!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right]=$$

$$=(n-1)n!\left[\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\ldots-\frac{n-2}{(n-1)!}\right)\right].$$

Легко проверить, что

$$1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\frac{3}{4!}-\ldots-\frac{n-2}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-1)!}.$$

Так как все предметы входят одно и то же число раз, то каждый из них войдет

$$N=(n-1)(n-1)!\left[\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right]+1\right.$$

раз.

С другой стороны,

$$(n-1)(n-1)!\,e=(n-1)(n-1)!\times$$

$$\times\left[1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\ldots\right]=$$

$$=(n-1)(n-1)!\left[1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right]+$$

$$+(n-1)\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\right],$$

и потому

$$N-(n-1)(n-1)!\,e=1-(n-1)\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\ldots\right]<\frac{1}{2}.$$

Значит, N — ближайшее целое число к $(n-1)(n-1)!e$.

351. См. стр. 83.

352. Один из трех получает n книг. Эти n книг можно выбрать C_{3n}^n способами. Остальные $2n$ книг распределяем между оставшимися двумя лицами. Каждая из книг может попасть либо к одному, либо к другому, а потому число способов распределения этих книг равно 2^{2n}. Поскольку n книг можно отдать любому из трех, то получаем $3\cdot 2^{2n}C_{3n}^n$ способов распределения.

353. Число различных упорядочиваний, в которых не разрываются данные k пар букв, равно $2^k(2n-k)!$. Эти k пар можно выбрать C_n^k способами. Применяя формулу включений и исключений, приходим к требуемому результату,

354. Число способов раздела, при которых данные k человек не получат ни одной вещи, равно $(n+p-k)^r$. Применяя формулу включений и исключений, приходим к требуемому результату.

355. $r!\,\Pi_n^r$ равно числу способов разложить n различных предметов по r ящикам. Это число равно коэффициенту при x^n в разложении $(e^x-1)^r$, умноженному на $n!$ Отсюда следует, что

$$n!\left[1-\Pi_n^2+2!\,\Pi_n^3-3!\,\Pi_n^4+\ldots\right]$$

является коэффициентом при x^n в разложении суммы ряда

$$(e^x-1)-\frac{1}{2}(e^x-1)^2+\frac{1}{3}(e^x-1)^3-\frac{1}{4}(e^x-1)^4+\ldots$$

Так как

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots=\ln(1+x), \qquad (*)$$

то сумма этого ряда равна $\ln[1+(e^x-1)]=x$. Поэтому при $n>1$ выражение (*) равно нулю.

356. Из первой ячейки — одним способом, из второй C_{2n}^n, ..., из k-й C_{kn}^n способами. Всего имеем

$$C_{2n}^nC_{3n}^n\ldots C_{mn}^n=\frac{(mn)!}{(n!)^m}$$

способов.

357. Нам надо доказать неравенство

$$C_{2n+r}^nC_{2n-r}^n\leqslant\left(C_{2n}^n\right)^2.$$

Его можно переписать в виде

$$\frac{(2n+r)(2n+r-1)\ldots(2n+1)}{(n+r)(n+r-1)\ldots(n+1)}\leqslant\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Это неравенство вытекает из того, что при $0\leqslant k<n$ имеем $\frac{2n+k}{n+k}<$ $<\frac{2n-k}{n-k}$.

358. Сосчитаем сумму углов всех получившихся треугольников. Сумма углов, имеющих вершину в одной из внутренних точек, равна 360°. Так как имеется 500 таких точек, то им соответствуют углы, сумма которых равна 360°·500. Теперь рассмотрим углы, вершины которых совпадают с вершинами 1000-угольника. Их сумма равна сумме внутренних углов 1000-угольника, то есть равна 180°·998. Всего получаем 180°·1998. Так как сумма углов каждого треугольника равна 180°, то получили 1998 треугольников.

359. Каждый из игроков сыграет 4 партии, а всего будет сыграно 5 партий. Предположим, что в первой партии пара (a, c) играла против пары (b, d). Тогда в трех следующих играх a должен иметь партнерами соответственно b, d, e, а в пятой не принимать участия. Игрок e должен принять участие во всех играх,

кроме первой, причем во второй и третьей он будет противником a. На свободное место во второй партии можно взять или игрока c, или игрока d, а в третьей партии — игрока b или c. Но если выбрать во второй партии игрока d, то в третьей придется выбрать игрока c (иначе игрок c пропустит две партии), а тогда в четвертой партии должен отсутствовать игрок d, а b и c будут партнерами. Но тогда в пятой партии партнерами будут b и e, с одной стороны, и c и d — с другой. Если же выбрать во второй партии игрока c, то и в третьей придется выбрать игрока c (иначе e и c дважды будут партнерами), в четвертой — c и d, а в пятой игроки b и c будут играть против d и e. Таким образом, каждый выбор для игроков первой партии определяет два возможных разбиения игроков в дальнейшем. Так как порядок следующих 4 партий можно менять 24 способами, то всего получаем 48 возможностей. Для первой партии можно выбрать игроков 15 способами (число способов разбить 5 человек на 2 пары и запасного игрока). Каждый из этих способов определяет 48 возможностей хода матча в дальнейшем, а всего 720 возможностей. Если не учитывать порядка партий, остается 6 возможностей.

360. Число замкнутых ломаных равно $\left(C_{2n}^{n}\right)^2$ (см. стр. 147).

361. Каждая ломаная задается координатами своих вершин. Эти координаты образуют конечную последовательность вида

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \ldots, (a_n, b_1)$$

или

$$(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2), \ldots, (a_1, b_n).$$

Эти последовательности определяются заданием перестановок $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ и указанием, какому из двух видов принадлежит последовательность. Так как циклическая перестановка координат не меняет ломаной, то число ломаных равно $\frac{(n!)^2}{2n}$.

362. Разобьем погремушки на классы, отнеся к m-му классу погремушки, для которых наименьшее число синих шариков между двумя красными равно m. При $m=0$ имеем 4 вида погремушек (третий красный шарик примыкает к двум другим или отделен от них одним, двумя или тремя синими шариками). При $m=1$ имеем два красных шарика, разделенных синим. Третий красный шарик может отделяться от ближайшего красного одним, двумя или тремя синими шариками. Поэтому при $m=1$ есть 3 вида погремушек. При $m=2$ имеем только один вид погремушек. Всего — 8 видов.

363. Пусть кто-то из собравшихся — назовем его X — имеет m знакомых $a_1, \ldots, a_m$. По условию никакие два человека из числа $a_1, \ldots, a_m$ друг с другом не знакомы (поскольку они знакомы с X). Поэтому для любых двух человек a_i, a_j должен найтись еще один общий знакомый, кроме X. Этот человек не может быть знаком с X, а разным парам соответствуют разные люди (если бы кто-нибудь был общим знакомым для двух различных пар (a_i, a_j) и (a_k, a_l), то он имел бы с X по крайней мере трех общих знакомых). Таким образом, число всех людей, не знакомых с X, не меньше, чем число всех пар людей из числа $a_1, \ldots, a_m$, то есть не меньше, чем C_m^2.

С другой стороны, каждый человек, не знакомый с X, имеет с ним ровно двух общих знакомых, разумеется, из числа $a_1, \ldots, a_m$. При этом разным людям соответствуют разные пары (если бы одна пара (a_i, a_j) соответствовала двум разным людям, то a_i и a_j имели бы больше двух общих знакомых, поскольку они знакомы и с X). Отсюда вытекает, что число людей, не знакомых с X, и не больше, чем C_m^2, а потому равно $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$. Но тогда общее число n присутствующих равно $1 + m + \frac{m(m-1)}{2}$. Рассматривая равенство $n = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2}$ как квадратное уравнение относительно m, мы видим, что оно имеет только один положительный корень, а это и означает, что для всех людей число m их знакомых одно и то же.

364. Проверка показывает, что перестановка двух рядом стоящих букв A и B не изменяет произведения (достаточно рассмотреть комбинации $AABA$, $BABB$ и $AABB$). Поэтому можно считать, что сначала идут все буквы A, а потом — все буквы B. Но тогда утверждение становится очевидным.

365. На каждой вертикали и каждой горизонтали стоит одна ладья. Поэтому каждое из чисел a, b, c, d, e, f, g, h, равно как и каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, войдет в произведение ровно один раз. Поэтому произведение $8!abcdefgh$.

366. Пусть собрались 5 членов оргкомитета. По условию задачи у них нет ключа по крайней мере к одному замку, причем ключ к этому замку имеется у каждого из остальных шести членов. Поскольку это происходит при любой комбинации 5 членов, то общее число замков равно $C_{11}^5 = 462$. Так как к каждому замку имеется шесть ключей, то общее число ключей равно $462 \cdot 6 = 2772$, а каждый член оргкомитета имеет $2772 : 11 = 252$ ключа.

Если бы число членов оргкомитета равнялось n, а число членов, необходимое и достаточное для того, чтобы открыть сейф, было m, то число замков было бы C_n^{m-1}, а число ключей у каждого члена комиссии $\frac{n-m+1}{n} C_n^{m-1}$.

367. Выясним сначала, какова наибольшая длина цепи такой, что после расковывания k звеньев можно получить любой вес от 1 до n. Рассмотрим для этого, каково наиболее выгодное расположение раскованных звеньев. Так как число раскованных звеньев равно k, то с их помощью можно получить любой вес от 1 до k. Но вес $k+1$ мы уже не сможем получить, если у нас не будет еще одной части. Ясно, что выгоднее всего, чтобы эта часть состояла из $k+1$ звеньев, тогда мы сможем получить любой вес от 1 до $2k+1$. Далее нам понадобятся части весов $2(k+1), 4(k+1), \ldots, 2^k(k+1)$. С их помощью можно будет получить любой вес от 1 до

$$n = k + [(k+1) + 2(k+1) + 4(k+1) + \ldots + 2^k(k+1)] =$$

$$= k + (k+1)(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1}(k+1) - 1.$$

Итак, если $2^k k \leqslant n < 2^{k+1}(k+1)$, то можно обойтись k расковываниями, но нельзя обойтись $k-1$ расковываниями. В частности, поскольку $2^3 \cdot 3 \leqslant 60 \leqslant 2^4 \cdot 4 - 1$, то для цепи из 60 звеньев надо расковать 3 звена, получив куски 4, 8, 16 и 29 *г*.

Если пользоваться двухчашечными весами, то к k раскованным звеньям надо присоединить кусок весом $2k+1$ (кладя его на одну чашку весов, а остальные звенья — на другую, мы можем получить любой вес от $k+1$ до $2k$, а кладя его вместе с другими звеньями — любой вес от $2k+1$ до $3k+1$). Следующие куски должны иметь вес $3(2k+1)$, $9(2k+1)$, ..., $3^k(2k+1)$. С их помощью можно получить любой вес от 1 до

$$k+[(2k+1)+3(2k+1)+\ldots+3^k(2k+1)]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[(2k+1)\,3^{k+1}-1\right].$$

В частности, для цепи в 60 *г* надо расковать два звена и получить куски весом 5, 15 и 38 *г*.

368. Если x при делении на 7 дает остатки 0, 1, 2. 3, 4, 5, 6, то x^2 дает соответственно остатки 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. Поэтому x^2+y^2 делится на 7 (а тем более на 49) лишь в случае, когда x и y делятся на 7. Поэтому число пар (с учетом порядка) равно $\left[E\left(\frac{1000}{7}\right)\right]^2 = 142^2 = 20\,164$. Если не учитывать порядка, получим $\bar{C}^2_{142} = 10\,153$ пары.

369. Если данное число равно $10a+b$, то, сложив его с числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке, получим $11(a+b)$. Так как это — полный квадрат, а $2 \leqslant a+b \leqslant 18$, то $a+b=11$. Получаем 8 возможностей: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

370. Первые три цифры числа произвольны, а последняя принимает одно из двух значений (определяемых остатком от деления суммы первых трех цифр на 3). Поэтому если на каком-то месте задать цифру, то остальные цифры можно выбрать $6^2 \cdot 2=72$ способами. Следовательно, сумма цифр первого разряда равна $72(1+2+3+4+5+6)=1512$, а сумма всех чисел равна $1512+15\,120+151\,200+1\,512\,000=1\,679\,832$.

371. На последнем месте может быть одна из цифр 0, 2, 4. Если задана одна из этих цифр, то второе и третье места может занимать любая из шести цифр, а первое — любая из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Всего получаем $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6=180$ возможностей. Значит, сумма цифр первого разряда равна $(2+4)\cdot 180=1080$. Точно так же находим, что сумма цифр второго разряда равна $(1+2+3+4+5)900=13\,500$, третьего — 135 000, а четвертого — 1 620 000. Всего получаем сумму 1 769 580.

372. Уравнение $x+y=k$ имеет $k-1$ целочисленных решений, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x$, $1 \leqslant y$. Поэтому неравенство $|x|+|y| \leqslant 1000$ имеет

$$4\sum_{k=2}^{1000}(k-1)=1\,998\,000$$

решений, для которых $|x| \neq 0$ и $|y| \neq 0$. Кроме того, оно имеет 3996 решений, для которых одно из неизвестных равно нулю и одно решение вида $x=0$, $y=0$. Всего 2 001 997 решений.

373. Если добавить к вершинам любого многоугольника, не содержащего точку A_1, эту точку, получим многоугольник, содержащий A_1. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех многоугольников, не содержащих A_1, и частью множества многоугольников, содержащих A_1. При этом соответствии нет многоугольников, соответствующих треугольникам, одной из вершин которых является A_1. Поэтому многоугольников, содержащих точку A_1, больше.

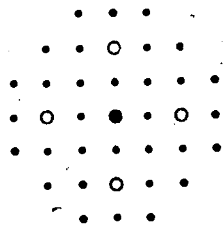


Рис. 42.

374. За четное число ходов конь может попасть на клетки того же цвета, что и та, где он стоит вначале. Нам будет удобнее повернуть доску на 45° и изображать лишь клетки этого цвета, заменяя каждую клетку ее центром. Тогда клетки, на которые конь может попасть за 2 хода, изобразятся схемой на рис. 42. Число этих клеток равно 33. Каждая из клеток является центром такой же фигуры, показывающей, куда может попасть конь за следующие два хода. Объединяя эти фигуры, получим фугуру, изображенную на рис. 43. Она распадается на квадрат, содержащий $9^2=81$ точку и четыре трапеции, каждая из

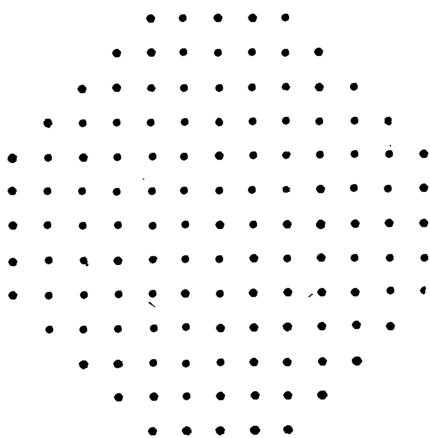


Рис. 43.

которых содержит по $7+5=12$ точек. Всего получаем $81+4\cdot 12=$ $=129$ точек.

После $2n$ ходов получим фигуру, распадающуюся на квадрат со стороной $4n$, который содержит $(4n+1)^2$ точек и 4 трапеции, каждая из которых содержит

$$(4n-1)+(4n-3)+\ \dots\ +(2n+1)=3n^2$$

точек. Всего получаем

$$12n^2+(4n+1)^2=28n^2+8n+1$$

точек. Итак, за $2n$, $n>1$, ходов конь может попасть на одну из $28n^2+8n+1$ клеток.

375. Если взять тройки, содержащие один и тот же элемент, скажем a, то они удовлетворяют поставленному условию, причем их число равно $C_{1954}^2=1\,907\,481$. Покажем, что нельзя выбрать большего числа троек, попарно имеющих общий элемент. Предположим, что мы выбрали $N>C_{1954}^2$ таких троек и $(a,\ b,\ c)$ — одна из них. Так как любая из $N-1$ оставшихся троек имеет хотя бы один общий элемент с выбранной, то по крайней мере для одного из элементов a, b, c, скажем a, найдется $\frac{N-1}{3}$ содержащих его троек, причем $\frac{N-1}{3}>635\,808$. Не более чем 3906 троек содержат, кроме a, один из элементов b, c. Поэтому найдется тройка вида $(a,\ d,\ e)$, где d и e отличны от b и c. Точно так же найдутся тройки вида $(a,\ f,\ g)$ и $(a,\ h,\ j)$, причем f и g отличны от b, c, d, e, а h, j — от b, c, d, e, f, g.

Любая из заданных N троек имеет хотя бы один общий элемент с каждой из четырех троек $(a,\ b,\ c)$, $(a,\ d,\ e)$, $(a,\ f,\ g)$, $(a,\ h,\ j)$. Ясно, что одним из этих общих элементов должен быть элемент a, так как иначе тройка содержала бы четыре различных элемента, что невозможно. Итак, все тройки содержат элемент a, а потому их число не превышает C_{1954}^2 вопреки предположению.

376. Данная последовательность содержит $9+2\cdot 90+3\cdot 900+\ldots+8\cdot 90\,000\,000+9$ цифр. Подсчитаем число нулей в последовательности $1,\ 2,\ \ldots,\ 10^9$. Запишем все числа от 1 до 10^9-1 в виде девятизначных чисел, добавив впереди нужное число нулей (например, 000 000 003), а число 10^9 заменим на 000 000 000. В результате получим $9\cdot 10^9$ цифр, причем каждая цифра входит столько же раз, сколько и любая другая. Поэтому имеем $9\cdot 10^8$ нулей. Но среди этих нулей часть является добавленной нами: $8\cdot 9$ нулей для однозначных чисел, $7\cdot 90$ для двузначных и т. д. Если их отбросить, останется $9\cdot 10-8\cdot 9-7\cdot 90-\ldots-9\cdot 10^7$ нулей. Легко видеть, что эта сумма равна $2\cdot 9+2\cdot 90+\ldots+8\cdot 9\cdot 10^7$, то есть числу цифр первой последовательности.

377. Если сумма первых двух цифр равна k, то при $k\leqslant 9$ имеем $(k+1)^2$ чисел с указанным свойством, а при $k>9$ $(19-k)^2$ таких чисел. Всего получаем

$$2(1^2+\ldots+9^2)+10^2=670 \text{ чисел.}$$

378. Обозначим множество предметов, по которым ученик a учится на 5, через A_a. Все такие множества состоят не более чем из $2n$ элементов, причем по условию задачи ни одно из них не является частью другого. Разобьем эти множества на классы, отнеся к k-му классу множества, состоящие из k элементов. Пусть наименьшее число элементов в множествах нашей совокупности r. Покажем, что если $r<n$, то можно заменить данную совокупность множеств другой, так, чтобы

а) ни одно множество новой совокупности не было частью другого;

б) число множеств в новой совокупности было больше, чем в первоначальной;

в) наименьшее число элементов в множествах новой совокупности равно $r+1$.

Для этого возьмем все множества, состоящие из r элементов, и присоединим к каждому из них всевозможными способами по одному не принадлежащему им элементу. Остальные же множества нашей совокупности оставим неизменными. Ясно, что после этой операции мы получим совокупность, в которой наименьшее число элементов множеств равно $r+1$. При этом ни одно множество новой совокупности не является частью другого — если бы множество B содержало новое множество A', то оно содержало бы и то множество A r-го класса, из которого A' получилось присоединением одного элемента, а это противоречит условию. Отметим, кроме того, что ни одно из новых множеств не совпадает с первоначально заданными множествами. Например, пусть новое множество получилось путем присоединения к множеству A элемента x. Если бы оно совпало с первоначально заданным множеством B, то это значило бы, что B содержит A вопреки условию.

Нам осталось показать, что число новых множеств больше, чем число первоначальных. Для этого заметим, что из каждого множества A r-го класса есть $2n-r$ не принадлежащих ему элементов, а потому из него получается $2n-r$ новых множеств. Но некоторые из этих множеств совпадают друг с другом (например, из множеств (a, b) и (b, c) можно получить путем присоединения одного элемента одно и то же множество (a, b, c)). Но данное множество из $r+1$ элементов лишь $(r+1)$-м способом может быть получено из множеств, содержащих r элементов. Поэтому если число множеств r-го класса равнялось m и из них получилось p различных новых множеств, то $m(2n-r)\leqslant p(r+1)$. Поскольку при $r<n$ имеем $2n-r>r+1$, то отсюда вытекает, что $m\leqslant p$, то есть что число множеств увеличилось.

Повторяя описанный прием, мы можем заменить все множества, содержащие меньше чем n элементов, множествами из n элементов, сохранив условие а) и получив больше множеств, чем первоначально. Таким же образом можно заменить все множества, содержащие более n элементов (они последовательно заменяются множествами, получаемыми отбрасыванием одного элемента). В результате мы получим совокупность множеств, состоящих из n элементов и содержащую больше множеств, чем первоначально заданная. Но из $2n$ элементов можно составить лишь C_{2n}^n множеств по n элементов. Значит, число множеств было не больше C_{2n}^n, иными словами, в школе было не более C_{2n}^n учеников.

379. Будем называть первые m элементов элементами первого сорта, а вторые n элементов — элементами второго сорта. Разобьем все размещения из $m+n$ элементов по r на классы, отнеся к k-му классу размещения, в которые входит ровно k элементов первого сорта. Тогда k-й класс содержит $C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$ размещений. В самом деле, мы можем C_r^k способами выбрать места, на которых стоят элементы первого сорта, после чего A_m^k способами заполнить эти места элементами первого сорта, и A_n^{r-k} способами заполнить оставшиеся $r-k$ мест элементами второго сорта.

Таким образом, число размещений из $m+n$ элементов по r равно $\sum_{k=0}^{r} C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$ или, в принятых обозначениях, $\sum_{k=0}^{r} C_r^k M_k N_{r-k}$. Но это не что иное, как результат раскрытия скобок в выражении $(M+N)^r$ и последующей замены показателей индексами.

Отметим, что число размещений k-го класса можно сосчитать и так: мы выбираем k элементов первого сорта, $r-k$ элементов второго сорта и всевозможными способами переставляем эти элементы. Это можно осуществить $P(k, r-k)\, A_m^k A_n^{r-k} = C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$ способами.

380. Показатель степени 8 может быть следующими способами составлен из показателей 2 и 3: $8=2+2+2+2=2+3+3$. Это означает, что если обозначить x^2 через y, а x^3 через z, то искомый коэффициент равен сумме коэффициентов при y^4 и yz^2 в разложении $(1+y-z)^9$. По формуле возведения многочлена в степень этот коэффициент равен $P(2, 2, 2, 2, 1)+P(3, 3, 2, 1)=378$.

381. Мы имеем

$$(1+x)^k + \ldots + (1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^k}{x}.$$

Поэтому коэффициент при x^m равен $C_{n+1}^{m+1} - C_k^{m+1}$, если $m<k$, и C_{n+1}^{m+1}, если $m \geqslant k$.

382. Мы имеем $17=7+5+5$, а 18 не разбивается на сумму положительных слагаемых, кратных 5 и 7. Поэтому x^{17} входит с коэффициентом $C_{20}^1 C_{19}^2 = 3420$, а x^{18} — с коэффициентом нуль.

383. Мы имеем $17=2+2+2+2+2+2+2+3=2+2+2+2+3+3+$ $+3=2+3+3+3+3+3$. Поэтому в разложении $(1+x^2-x^3)^{1000}$ член с x^{17} имеет коэффициент

$$-C_{1000}^7 C_{993}^1 - C_{1000}^4 C_{996}^3 - C_{1000}^1 C_{999}^5,$$

а в разложении $(1-x^2+x^3)^{1000}$ — коэффициент

$$-C_{1000}^7 C_{993}^1 + C_{1000}^4 C_{996}^3 - C_{1000}^1 C_{999}^5.$$

Ясно, что второй коэффициент больше.

384. Нам дано, что

$$(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n}. \qquad (*)$$

Покажем сначала, что $a_k = a_{2n-k}$. Для этого положим $x=\frac{1}{y}$ и умножим обе части равенства на y^{2n}. Мы получим, что

$$(y^2+y+1)^n = a_0 y^{2n} + a_1 y^{2n-1} + \ldots + a_{2n}. \qquad (**)$$

Сравнивая разложения (*) и (**), получаем, что $a_k = a_{2n-k}$.

Заменим теперь x на $-x$. Мы получим. что

$$(1-x+x^2)^n=a_0-a_1x+a_2x^2-\ldots+a_{2n}x^{2n}. \qquad (***)$$

Перемножая разложения (*) и (***), выводим, что

$$(1+x^2+x^4)^n=\sum_{k=0}^{4n}(-1)^k(a_0a_k-a_1a_{k-1}+\ldots+a_ka_0)\,x^k. \quad (****)$$

Ясно, что разложение левой части равенства содержит лишь члены с четными степенями x, а потому коэффициент при x^{2n-1} равен нулю. Но в правой части коэффициентом при x^{2n-1} является

$$-(a_0a_{2n-1}-a_1a_{2n-2}+a_2a_{2n-3}-\ldots-a_{2n-1}a_0)=$$
$$=-(a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\ldots-a_{2n-1}a_{2n}).$$

Тем самым доказано равенство а).

Заметим теперь, что разложение (****) можно представить по формуле (*) в виде

$$(1+x^2+x^4)^n=a_0+a_1x^2+a_2x^4+\ldots+a_{2n}x^{4n}.$$

Отсюда следует, что коэффициент при x^{2n} в этом разложении равен a_n. С другой стороны, по формуле (****) он равен

$$a_0a_{2n}-a_1a_{2n-1}+a_2a_{2n-2}-\ldots+a_{2n}a_0=$$
$$=2a_0^2-2a_1^2+2a_2^2-\ldots+(-1)^n a_n^2.$$

Отсюда непосредственно вытекает равенство б).

Перепишем равенство (*) в виде

$$(1-x^3)^n=(1-x)^n(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n}x^{2n}).$$

Отсюда вытекает, что

$$1-C_n^1x^3+C_n^2x^6-\ldots+(-1)^n C_n^nx^{3n}=$$
$$=\left(1-C_n^1x+C_n^2x^2-\ldots+(-1)^n C_n^nx^n\right)\times$$
$$\times(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n}x^{2n}).$$

Если r не делится на 3, то коэффициент при x^r в левой части равен нулю. В правой же части коэффициент при x^r равен

$$a_r-C_n^1a_{r-1}+C_n^2a_{r-2}-\ldots+(-1)^r C_n^ra_0.$$

Значит, это выражение равно нулю, если r не делится на 3, и равно $(-1)^k C_n^k$, если $r=3k$. Тем самым доказано соотношение в).

Полагая в разложении (*) $x=1$, получаем, что

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2n}=3^n.$$

Полагая $x=1$ в разложении (**), получаем, что

$$a_0-a_1+a_2-\ldots+a_{2n}=1.$$

Складывая и вычитая эти равенства, приходим к соотношениям г).

385. Имеем C_n^1 членов вида x_k^3, $2C_n^2$ — вида $x_j^2x_k$, $j\neq k$, и C_n^3 — вида $x_ix_jx_k$, $i\neq j$, $i\neq k$, $j\neq k$, а всего $C_n^1+2C_n^2+C_n^3$ членов.

386. Мы имеем

$$(1+x+\ldots+x^{n-1})^2=\frac{(x^n-1)^2}{(x-1)^2}=(x^n-1)^2(x-1)^{-2}=$$
$$=(x^{2n}-2x^n+1)(1+2x+3x^2+\ldots+mx^{m-1}+\ldots).$$

Поэтому коэффициент при x^k равен $k+1$, если $0\leqslant k\leqslant n-1$, и $2n-k-1$, если $n\leqslant k\leqslant 2n-2$. Ответ можно записать следующим образом: $n-|n-k-1|$.

387. Так как $C_{n+1}^{r+1}=\frac{n+1}{r+1}C_n^r$, $C_n^r=\frac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}$, то левую часть равенства можно записать в виде

$$\frac{\frac{n}{r}\left(\frac{n+1}{r+1}-1\right)\left(C_{n-1}^{r-1}\right)^2}{\left(\frac{n^2}{r^2}-\frac{(n+1)\,n}{(r+1)\,r}\right)\left(C_{n-1}^{r-1}\right)^2}=\frac{\frac{n\,(n-r)}{r\,(r+1)}}{\frac{n\,(n-r)}{r^2\,(r+1)}}=r.$$

388. Число размещений с повторениями из n элементов по 3 равно n^3. Разобьем эти размещения на классы, отнеся к k-му классу размещения, содержащие ровно k различных типов элементов. Число размещений первого класса равно C_n^1, второго — $6C_n^2$ (имеется n способов выбора элемента, входящего два раза в размещение, $n-1$ способов — для элемента, входящего один раз, и после этого — три перестановки этих элементов), а число размещений третьего класса равно $A_n^3=6C_n^3$. Всего имеем $C_n^1+6C_n^2+6C_n^3$ размещений. Отсюда вытекает первое соотношение. Чтобы доказать второе соотношение, аналогичным образом разбиваем на классы размещения с повторениями, содержащие хотя бы один элемент фиксированного типа. Мы получаем, что

$$(n+1)^3-n^3=1+6C_n^1+6C_n^2,$$

откуда и следует доказываемое соотношение.

389. Доказывается точно так же, как утверждение 388, но рассматриваются размещения с повторениями из элементов n типов по 4 элемента в каждом.

390. Рассмотрим равенство

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\left\{1+C_n^1(-i\sqrt{3})+C_n^2(-i\sqrt{3})^2+C_n^3(-i\sqrt{3})^3+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^n}\left\{1-3C_n^2+9C_n^4-\ldots-i\sqrt{3}\left[C_n^1-3C_n^3+\ldots\right]\right\}.$$

Приравнивая действительные и мнимые части в обеих частях полученного равенства, получаем доказываемые соотношения.

391. Рассмотрим тождество

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^n x^n$$

и положим в нем последовательно $x=1$, ε, ε^2, где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, и потому $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Получаем

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n,$$

$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2 + \ldots + C_n^n\varepsilon^n,$$

$$(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon^2 + C_n^2\varepsilon^4 + \ldots + C_n^n\varepsilon^{2n}.$$

Но $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=0$, если k не делится на 3, и $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=3$, если k делится на 3. Следовательно,

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 3\left(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots\right).$$

Так как

$$1+\varepsilon = -\varepsilon^2 = -\left(\cos\frac{2\pi n}{3} + i\sin\frac{2\pi n}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$1+\varepsilon^2 = -\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3},$$

то

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

Отсюда и следует, что

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

Два другие равенства получаются аналогично предыдущему при рассмотрении сумм

$$2^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^n, \quad 2^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n.$$

Равенство г) выводится аналогичным образом из рассмотрения выражения $(1+i)^n$.

392. Мы имеем

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2k} x^{2k}.$$

Коэффициенты этого многочлена положительны. Поэтому наибольшее значение многочлен принимает при $x=1$. Это значение равно 2^n.

393. Мы имеем

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{n!\,(m-x)!}{m!\,(n-x)!} = \frac{1}{C_m^n}\sum_{x=0}^{n} C_{m-x}^{m-n} = \frac{C_{m+1}^{m-n+1}}{C_m^n} = \frac{m+1}{m-n+1}$$

и

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{n!\,C_n^r}{(2n)!} \sum_{x=0}^{n} \frac{(x+r)!\,(2n-x-r)!}{x!\,(n-x)!} =$$

$$= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{x=0}^{n} C_{x+r}^{r} C_{2n-x-r}^{n-r} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} C_{2n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

394. Сумма в левой части равенства сводится к

$$\sum_{k=1}^{n} C_{m+k-1}^{k} = C_{m+n}^{m} - 1.$$

Тому же значению равна сумма, стоящая в правой части.

395. Имеем

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^{x}} = \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \sum_{x=1}^{n} \frac{x\,(2n-x-1)!}{(n-x)!} =$$

$$= \frac{2n}{(2n-1)\,C_{2n-2}^{n-1}} \sum_{x=1}^{n} C_{2n-x-1}^{n-1} - \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{x=1}^{n} C_{2n-x}^{n} =$$

$$= \frac{2nC_{2n-1}^{n-1}}{(2n-2)\,C_{2n-2}^{n-1}} - \frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-1}^{n-1}} = \frac{2}{n+1}.$$

396. Имеем

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{(n-1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} \frac{x\,(n+q-x)!}{(n-x)!} =$$

$$= \frac{(n+q+1)\,(n-1)!\,q!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x}^{n-x} -$$

$$- \frac{(n-1)!\,(q+1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x+1}^{n-x} =$$

$$= \frac{(n+q+1)\,(n-1)!\,q!}{(n+q)!} C_{n+q}^{n-1} - \frac{(n-1)!\,(q+1)!}{(n+q)!} C_{n+q+1}^{n-1} =$$

$$= \frac{n+q+1}{q+1} - \frac{n+q+1}{q+2} = \frac{n+q+1}{(q+1)\,(q+2)}.$$

397. Имеем

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_{n+q}^{x}} = \frac{(n-2)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^{n} \frac{x\,(x-1)\,(n+q-x)!}{(n-x)!}.$$

Далее, используя тождество

$$x(x-1)=(n+q-x+1)(n+q-x+2)+ \\ +(n+q+1)[n+q-2(n+q-x+1)],$$

получаем, что наша сумма равна

$$\frac{(n-2)!}{(n+q)!}\left[(q+2)!\sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x+2}^{n-x}-\right.$$

$$-2(n+q+1)(q+1)!\sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x+1}^{n-x}+$$

$$\left.+(n+q)(n+q+1)q!\sum_{x=1}^{n} C_{n+q-x}^{n-x}\right]=$$

$$=\frac{(n-2)!\,q!}{(n+q)!}\left[(q+1)(q+2)C_{n+q+2}^{n-1}-\right.$$

$$\left.-2(n+q+1)(q+1)C_{n+q+1}^{n-1}+(n+q)(n+q+1)C_{n+q}^{n-1}\right].$$

Подставляя значения C_{n+q+2}^{n-1}, C_{n+q+1}^{n-1}, C_{n+q}^{n-1} и преобразуя, получаем требуемую формулу.

398. Мы знаем, что $C_{n-1}^{k-1}=\frac{k}{n}C_n^k$. Так как

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+\ \ldots\ +C_n^kx^k+\ \ldots\ +C_n^nx^n, \qquad (*)$$

то отсюда следует, что

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+\ \ldots\ +kC_n^kx^{k-1}+\ \ldots\ +nC_n^nx^{n-1} \qquad (**)$$

(читатель, знакомый с дифференциальным исчислением, может получить эту формулу, почленно продифференцировав обе части равенства (*)).

Перемножим разложения (*) и (**). Мы получаем, что

$$n(1+x)^{2n-1}=\left(1+C_n^1x+\ \ldots\ +C_n^nx^n\right)\left(C_n^1+\ \ldots\ +nC_n^nx^{n-1}\right).$$

Сравнив коэффициенты при x^{n-1} в обеих частях равенства, приходим к доказываемому соотношению.

399. Рассмотрим все n сочетания с повторениями из элементов n типов. Их число равно C_{2n-1}^n. Разобьем эти сочетания на классы, отнеся к k-му классу сочетания, в которые входят элементы ровно k различных типов. В k-й класс входят $C_n^kC_{n-1}^{n-k}$ сочетаний (мы выбираем C_n^k способами k типов элементов, входящих в сочетания этого класса, а из элементов данных k типов можно составить C_{n-1}^{n-k} n-сочетаний с повторениями, в которые входят элементы всех k типов). Таким образом, имеем $C_{2n-1}^n=\sum_{k=1}^{n} C_n^kC_{n-1}^{n-k}$.

Выражая числа $C_{2n-1}^{n}, C_{n}^{k}, C_{n-1}^{n-k}$ через факториалы, приходим к доказываемому соотношению.

400. Доказываемое равенство можно записать так:

$$C_{n+r-1}^{r}-C_{n}^{1}C_{n+r-3}^{r-2}+C_{n}^{2}C_{n+r-5}^{r-4}-\ldots=C_{n}^{r}.$$

Для доказательства возьмем все r-сочетания с повторениями из элементов n типов и найдем двумя способами число всех таких сочетаний, состоящих лишь из элементов различных сортов. С одной стороны, это число равно C_{n}^{r}. С другой стороны, число r-сочетаний с повторениями из элементов n сортов, в которые по крайней мере дважды входят элементы данных k сортов, равно $C_{n+r-2k-1}^{r-2k}$. Так как эти k сортов можно выбрать C_{n}^{k} способами, то, применяя формулу включений и исключений, приходим к доказываемому соотношению.

401. а) Положим $S_{n}=C_{n}^{1}+2C_{n}^{2}+3C_{n}^{3}+\ldots+nC_{n}^{n}$. В силу равенства $C_{n}^{k}=C_{n}^{n-k}$ имеем $S_{n}=nC_{n}^{0}+(n-1)C_{n}^{1}+\ldots+C_{n}^{n-1}$. Складывая, получаем

$$2S_{n}=n\left[C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+\ldots+C_{n}^{n}\right]=2^{n}n,$$

и потому $S_{n}=2^{n-1}n$. б) Таким же образом устанавливаем, что $S_{n}=(n+1)2^{n-1}$. в) $S_{n}=(n-2)2^{n-1}+1$. г) $S_{n}=(n+1)2^{n}$. д) $S_{n}=0$. е) Мы имеем

$$S_{n}=4\left(C_{n}^{1}+2C_{n}^{2}+\ldots+nC_{n}^{n}\right)-\\-\left(C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+\ldots+C_{n}^{n}\right)=2^{n-1}n-2^{n}+1.$$

ж) Мы имеем $C_{n}^{k}=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}$. Поэтому

$$S_{n}=C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{1}-2\left(C_{n-1}^{1}+C_{n-1}^{2}\right)+\\+3\left(C_{n-1}^{2}+C_{n-1}^{3}\right)-\ldots+(-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1}=\\=C_{n-1}^{0}-C_{n-1}^{1}+C_{n-1}^{2}-\ldots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}.$$

Эта сумма равна 1 при $n=1$ и 0 при $n>1$. з) Эта сумма равна

$$S_{n}=\frac{1}{n+1}\left[C_{n+1}^{1}+C_{n+1}^{2}+\ldots+C_{n+1}^{n+1}\right]=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

и) Так как $C_{n}^{k}=\dfrac{(k+2)(k+1)}{(n+1)(n+2)}C_{n+2}^{k+2}$, то эта сумма равна

$$S_{n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(C_{n+2}^{2}+2C_{n+2}^{3}+\ldots+(n+1)C_{n+2}^{n+2}\right)=\\=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\left(C_{n+2}^{1}+2C_{n+2}^{2}+\ldots+(n+2)C_{n+2}^{n+2}\right)-\right.\\\left.-\left(C_{n+2}^{1}+\ldots+C_{n+2}^{n+2}\right)\right].$$

Применяя результаты задач а) и б), получаем, что

$$S_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[2^{n+1}(n+2)-2^{n+2}+1\right]=\frac{2^{n+1}n+1}{(n+1)(n+2)}.$$

к) Перепишем сумму в виде

$$S_n=\frac{1}{n+1}\left[C_{n+1}^1-C_{n+1}^2+\ldots+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}\right]=\frac{1}{n+1},$$

так как выражение в квадратных скобках равно 1.

л) Если n нечетно, то $S_n=0$, а если $n=2k$ четно, то $S_n=(-1)^k C_{2k}^k$. Для доказательства надо перемножить разложения $(1+x)^n$ и $(1-x)^n$, после чего найти коэффициент при x^n.

402. Наибольшим коэффициентом в первом разложении является коэффициент при $a^3b^3c^4$ (или $a^3b^4c^3$, $a^4b^3c^3$). Он равен $P(3,\ 3,\ 4)=4200$. Во втором разложении наибольшим является коэффициент $P(4,\ 4,\ 3,\ 3)$ при $a^3b^3c^4d^4$.

403. По формуле бинома Ньютона имеем

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n. \quad (*)$$

Поэтому коэффициент Y_n при x^n равен

$$Y_n=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)\cdot 2^n}{n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=C_{2n}^n.$$

Для $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ имеем по формуле бинома Ньютона разложение

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{1-2n}x^n.$$

Но

$$\frac{Y_n}{1-2n}=-\frac{C_{2n}^n}{2n-1}=-\frac{2n!}{(n!)^2(2n-1)}=$$

$$=-\frac{2}{n}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}=-\frac{2}{n}Y_{n-1}.$$

Поэтому

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n-1}}{n}x^n, \quad (**)$$

где положено $Y_0=1$.

404. а) Перемножим разложения (*) и (**). Мы получим, что

$$1=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}Y_nx^n\right)\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n-1}}{n}x^n\right)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[Y_n-2\left(Y_{n-1}+\frac{1}{2}Y_{n-2}Y_1+\ldots+\frac{1}{n}Y_{n-1}\right)\right]x^n.$$

Отсюда сразу вытекает доказываемое равенство.

б) Возведем разложение (*) в квадрат. Мы получим, что

$$(1-4x)^{-1}=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}Y_nx^n\right)^2=$$

$$=1+(Y_0Y_1+Y_1Y_0)x+(Y_0Y_2+Y_1Y_1+Y_2Y_0)x^2+\ldots$$

$$\ldots+(Y_0Y_n+Y_1Y_{n-1}+\ldots+Y_nY_0)x^n+\ldots$$

Так как

$$(1-4x)^{-1}=1+4x+4^2x^2+\ldots+4^nx^n+\ldots,$$

то сразу получаем доказываемое равенство.

в) Возвести в квадрат разложение (**).

405. Будем обозначать четные числа буквой Ч, а нечетные — буквой Н. Первые 4 элемента третьей строки имеют запись НЧНЧ, четвертой — ННЧН, пятой — НЧЧЧ, шестой — НННЧ и седьмой НЧНЧ. После этого цикл повторяется (первые 4 элемента каждой строки определяются первыми четырьмя элементами предыдущей строки). Поэтому в каждой строке будет хотя бы одно четное число.

406. Покажем, что каждая строка треугольника является арифметической прогрессией, причем сумма равноудаленных от концов элементов строки делится на 1958. Доказательство проведем с помощью индукции по номеру строки. Для первой строки утверждение очевидно. Пусть оно доказано для n-й строки. Возьмем три соседних элемента a, $a+d$, $a+2d$, n-й строки. В строке $n+1$ им соответствуют элементы $2a+d$, $2a+3d$, разность которых равна $2d$. Значит, в строке $n+1$ имеем прогрессию с разностью $2d$. Чтобы найти сумму равноудаленных от концов элементов этой строки, достаточно найти сумму первого и последнего элемента. Но если первые два элемента n-й строки равны a и b, а ее последние два элемента равны c и d, то сумма первого и последнего элементов n-й строки равна $(a+b)+(c+d)=2(a+d)$ и потому по предположению индукции делится на 1958. Значит, для любой строки сумма первого и последнего элементов делится на 1958, а тогда этим свойством обладает и сумма двух элементов предпоследней строки, то есть последний элемент таблицы.

407. а) Докажем равенство с помощью индукции по $n+m$. Пусть для всех k и s таких, что $k+s<n+m$, доказано равенство а). Тогда имеем

$$u_{n+m}=u_{n+m-1}+u_{n+m-2}=$$

$$=u_{n-1}u_{m-1}+u_nu_m+u_{n-1}u_{m-2}+u_nu_{m-1}=$$

$$=u_{n-1}(u_{m-1}+u_{m-2})+u_n(u_m+u_{m-1})=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}. \qquad (*)$$

Поскольку при $m+n=1$ равенство (*) непосредственно проверяется, оно справедливо для любых m и n.

б) Проведем доказательство с помощью индукции по k. При $k=1$ утверждение тривиально. Пусть уже доказано, что u_{km} делится на u_m. По равенству (*) имеем

$$u_{(k+1)m} = u_{km+m} = u_{km-1}u_m + u_{km}u_{m+1},$$

и потому $u_{(k+1)m}$ также делится на u_m. По индукции выводим, что все u_{nm} делятся на u_m.

в) Пусть u_n и u_{n+1} делятся на $k \neq 1$. Тогда и $u_{n-1}=u_{n+1}-u_n$ делилось бы на k. Продолжая это рассуждение, мы получили бы, что $u_1=1$ делится на k, а это невозможно.

408. Будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b через (a, b). Из равенства $u_{m+n}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}$ следует, что (u_{m+n}, u_n) является делителем $u_{n-1}u_m$ и, поскольку u_n и u_{n-1} взаимно просты, делителем u_m. Обратно, (u_m, u_n) является делителем u_{m+n}. Поэтому $(u_m, u_n)=(u_{m+n}, u_n)$. Но тогда если $n=km+q$, то $(u_m, u_n)=(u_m, u_q)$. Применяя алгоритм Евклида, убеждаемся, что $(u_m, u_n)=u_{(m,n)}$. В частности, $(u_{1000}, u_{770})=u_{10}=55$.

409. Рассмотрим последовательность, составленную из последних четырех цифр чисел Фибоначчи. Так как количество четырехзначных чисел вида 0000, 0001, ..., 9999 равно 10^4, то количество пар таких чисел равно 10^8. Значит, среди первых 100 000 001 чисел Фибоначчи найдутся две пары (u_m, u_{m+1}) и (u_n, u_{n+1}), $n>m$, такие, что u_m и u_n, равно как u_{m+1} и u_{n+1}, имеют одинаковые последние четыре цифры. Но тогда числа u_n-u_m и $u_{n+1}-u_{m+1}$ оканчиваются четырьмя нулями. Так как

$$u_{n-1}-u_{m-1}=(u_{n+1}-u_{m+1})-(u_n-u_m),$$

то и $u_{n-1}-u_{m-1}$ также оканчивается четырьмя нулями. Продолжая уменьшать индекс и учитывая, что $u_0=0$, получаем, что число u_{n-m} оканчивается четырьмя нулями.

410. Пусть выбраны числа u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ..., u_{n+7}, выразим их через u_n и u_{n+1}:

$$u_{n+2}=u_n+u_{n+1}, \quad u_{n+3}=u_n+2u_{n+1}, \quad u_{n+4}=2u_n+3u_{n+1},$$
$$u_{n+5}=3u_n+5u_{n+1}, \quad u_{n+6}=5u_n+8u_{n+1}, \quad u_{n+7}=8u_n+13u_{n+1}.$$

Следовательно, сумма этих чисел равна $21u_n+33u_{n+1}$. Но $u_{n+8}=13u_n+21u_{n+1}$, $u_{n+9}=21u_n+34u_{n+1}$. Из неравенства $u_{n+8}<21u_n+33u_{n+1}<u_{n+9}$ ясно, что $21u_n+33u_{n+1}$ не является числом Фибоначчи.

411. Утверждение а) доказывается по индукции. При $n=1$ оно очевидно. Пусть оно справедливо для n

$$u_2+u_4+\ldots+u_{2n}=u_{2n+1}-1.$$

Прибавим к обеим частям равенства u_{2n+2}. Так как $u_{2n+2}+u_{2n+1}=u_{2n+3}$, получаем $u_2+u_4+\ldots+u_{2n+2}=u_{2n+3}-1$. Тем самым наше утверждение доказано. Точно так же доказывается утверждение б).

Утверждение в) также доказывается с помощью математической индукции.

Для доказательства утверждения г) заметим, что

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1} =$$
$$= u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2.$$

Поэтому $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n \left[u_1^2 - u_0 u_2\right] = (-1)^n$.

Утверждения д) и е) будем доказывать совместно. При $n=1$ они очевидны. Пусть они уже доказаны при $n=k$. По утверждению г) имеем тогда

$$u_1u_2 + u_2u_3 + \ldots + u_{2k}u_{2k+1} + u_{2k+1}u_{2k+2} =$$
$$= u_{2k+1}^2 - 1 + u_{2k+1}u_{2k+2} = u_{2k+1}u_{2k+3} - 1 = u_{2k+2}^2$$

и

$$u_1u_2 + \ldots + u_{2k+1}u_{2k+2} + u_{2k+2}u_{2k+3} =$$
$$= u_{2k+2}^2 + u_{2k+2}u_{2k+3} = u_{2k+2}u_{2k+4} = u_{2k+3}^2 - 1.$$

Следовательно, эти утверждения верны и при $n=k+1$, а потому и при всех n.

Для доказательства равенства ж) заметим, что в силу а) и б) $u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1} = u_{n+3} - 1$. Поэтому если имеет место равенство ж), то

$$(n+1)u_1 + nu_2 + \ldots + 2u_n + u_{n+1} =$$
$$= u_{n+4} - (n+3) + u_{n+3} - 1 = u_{n+5} - (n+4).$$

Так как равенство ж) верно при $n=1$, то оно верно при всех n.

Соотношение з) без труда вытекает из того, что

$$\frac{u_{3n+2}-1}{2} + u_{3n+3} = \frac{u_{3n+5}-1}{2}.$$

Для доказательства соотношения и) положим $m=n$ в формуле $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$. Мы получим, что $u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$. Точно так же доказывается, что $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$. Полагая в той же формуле $m=2n$, получаем, что

$$u_{3n} = u_{n-1}u_{2n} + u_n u_{2n+1} =$$
$$= u_{n-1}\left(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2\right) + u_n\left(u_n^2 + u_{n+1}^2\right) = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$$

412. Пусть $u_n \leqslant N < u_{n+1}$. Тогда $0 \leqslant N - u_n < u_{n-1}$ и потому найдется такое $s < n-1$, что $u_s \leqslant N - u_n < u_{s+1}$. Но тогда $0 \leqslant N - u_n - u_s < u_{s-1}$, причем $s-1 < n-2$. Через несколько шагов мы получим, что $N = u_n + u_s + u_p + \ldots + u_r$, причем соседние индексы $n, s, p, \ldots, r$ отличаются друг от друга по крайней мере на 2.

413. Это число способов равно коэффициенту при x^s в разложении выражения

$$(1 + x + \ldots + x^p)(1 + x + \ldots + x^q)(1 + x + \ldots + x^r) =$$
$$= \left(1 - x^{p+1}\right)\left(1 - x^{q+1}\right)\left(1 - x^{r+1}\right)(1-x)^{-3} =$$
$$= \left(1 - x^{p+1} - x^{q+1} - x^{r+1} - \ldots\right)\left(1 + 3x + 6x^2 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + C_{n+2}^2 x^n + \ldots\right).$$

Так как $p<q+r$, то $p<s$, $q<s$, $r<s$, и этот коэффициент имеет вид

$$C_{s+2}^2 - C_{s-p+1}^2 - C_{s-q+1}^2 - C_{s-r+1}^2 =$$

$$= \frac{(s+2)(s+1)}{2} - \frac{(s-p+1)(s-p)}{2} - \frac{(s-q+1)(s-q)}{2} - \frac{(s-r+1)(s-r)}{2}.$$

Раскроем скобки и примем во внимание, что $p+q+r=2s$. После преобразований получим $s^2+s+1-\frac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)$.

414. Если $q+r<p$, то $q<s$, $r<s$, но $p\geqslant s$ и потому коэффициент равен $C_{s+r}^2 - C_{s-q+1}^2 - C_{s-r+1}^2$. Отсюда вытекает наше утверждение.

415. Все предметы можно переставить $(pq+r)!$ способами. После этого выберем r человек из p, которые получат $q+1$ предметов (C_p^r способов) и раздадим им предметы по порядку, выдавая соответственно q или $q+1$ предметов. Так как результат не зависит от порядка элементов в группах, то $C_p^r(pq+r)!$ надо разделить на $(q!)^{p-r}[(q+1)!]^r=(q!)^p(q+1)^r$.

416. Так как $\sum\limits_{i_0=1}^{i_1} 1 = i_1 = C_{i_1}^1$, то $\sum\limits_{i_1=1}^{i_2}\sum\limits_{i_0=1}^{i_1} 1 = \sum\limits_{i_1=1}^{i_2} C_{i_1}^1 = C_{i_2+1}^2$.

Далее, имеем $\sum\limits_{i_2=1}^{i_3}\sum\limits_{i_1=1}^{i_2}\sum\limits_{i_0=1}^{i_1} 1 = \sum\limits_{i_2=1}^{i_3} C_{i_2+1}^2 = C_{i_3+2}^3$. Отсюда ясно, что вычисляемая сумма равна C_{n+m}^{n+1}.

417. Разобьем все перестановки из m белых и n черных шаров на классы. К классу $(k_1, \ldots, k_m)$ отнесем перестановки, в которых есть k_1 изолированно стоящий белый шар, k_2 пар, k_3 троек, $\ldots$, k_m рядом стоящих m белых шаров. Ясно, что $k_1+2k_2+\ldots+mk_m=m$. Сосчитаем число перестановок класса $(k_1, \ldots, k_m)$. Если n черных шаров поставлены по порядку, то у нас есть $n+1$ мест, куда можно ставить белые шары. Из этих мест k_1 мест окажутся заняты одним белым шаром, k_2 — двумя, $\ldots$, k_m мест — m белыми шарами и $n-k_1-\ldots-k_m+1$ мест останутся свободными. Поэтому число способов распределить места для белых шаров, то есть число перестановок класса $(k_1, \ldots, k_m)$, равно $P(k_1, \ldots, k_m, n-k_1-\ldots-k_m+1)$. Поскольку общее число перестановок m белых и n черных шаров равно C_{n+m}^m, получаем доказываемое соотношение.

418. а) Решая характеристическое уравнение $r^2-7r+12=0$, находим корни $r_1=3$, $r_2=4$. Поэтому общее решение имеет вид $a_n=C_13^n+C_24^n$. б) Точно так же получаем $a_n=C_12^n+C_2(-5)^n$. в) Имеем $a_n=C_1(2+3i)^n+C_2(2-3i)^n$. г) $a_n=C_1(3i)^n+C_2(-3i)^n$. д) $r_1=r_2=-2$. Поэтому $a_n=(-2)^n(C_1+C_2n)$. е) Характеристическое уравнение таково: $r^3-9r^2+26r-24=0$. Его корни $r_1=2$, $r_2=3$, $r_3=4$. Поэтому $a_n=C_12^n+C_23^n+C_34^n$. ж) $r_1=r_2=r_3=-1$. Поэтому $a_n=(-1)^n(C_1+C_2n+C_3n^2)$. з) Характеристическое уравнение имеет вид $r^4+4=0$. Его корни: $r_{1,2}=1\pm i$, $r_{3,4}=-1\pm i$.

Поэтому

$$a_n = 2^{1/2}[C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n + C_3(-1+i)^n + C_4(-1-i)^n].$$

419. а) Решая характеристическое уравнение $r^2-5r+6=0$, получаем, что $r_1=2$, $r_2=3$, и потому $a_n=C_1 2^n+C_2 3^n$. Полагая $n=1$ и $n=2$, получаем для отыскания C_1 и C_2 систему уравнений

$$2C_1+3C_2=1, \quad 4C_1+9C_2=-7.$$

Из нее находим $C_1=5$, $C_2=-3$, и потому $a_n=5\cdot 2^n-3^{n+1}$.

б) Имеем $a_n=2^n(C_1+C_2 n)$. Полагая $n=1$, $n=2$, получаем систему уравнений $C_1+C_2=1$, $C_1+2C_2=1$, из которой выводим, что $C_1=1$, $C_2=0$, и потому $a_n=2^n$.

в) $$a_n=\frac{1}{2^{n+2}}[(-1+i\sqrt{3})^n+(-1-i\sqrt{3})^n].$$

г) $a_n=2^n+3^n-4^n$.

420. Характеристическое уравнение имеет вид $r^2-2r\cos\alpha+1=0$. Его корнями являются $r_{1,2}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$. Поэтому $a_n=C_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+C_2(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$. Полагая $n=1$, 2, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(C_1+C_2)\cos\alpha+(C_1-C_2)\,i\sin\alpha=\cos\alpha,\\ (C_1+C_2)\cos 2\alpha+(C_1-C_2)\,i\sin 2\alpha=\cos 2\alpha.\end{cases}$$

Отсюда $C_1=C_2=\frac{1}{2}$, $na_n=\frac{1}{2}[(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n]$. В силу формулы Муавра $a_n=\cos n\alpha$.

421. Вытекает из того, что характеристическое уравнение

$$r^k-C_k^1 r^{k-1}+C_k^2 r^{k-2}+\ldots+(-1)^k=0$$

можно записать в виде $(r-1)^k=0$. Оно имеет корень $r=1$ кратности k. Поэтому одним из решений рекуррентного уравнения является $a_n=n^k$ (см. стр. 178).

422. $$a_n=\frac{n}{12}\cdot 2^n+C_1(-4)^n+C_2 2^n.$$

423. Мы имеем

$$(1+x)^p=1+C_p^1x+C_p^2x^2+\ldots+C_p^mx^m+\ldots+C_p^px^p, \quad (*)$$

$$(1+x)^{-k-1}=1-C_{k+1}^1x+C_{k+2}^2x^2-\ldots+(-1)^s C_{k+s}^s x^s+\ldots, \quad (**)$$

$$(1+x)^{p-k-1}=1-C_{p-k-1}^1x+\ldots+(-1)^n C_{p-k-1}^n x^n+\ldots$$

Перемножим разложения (*) и (**) и найдем коэффициент при x^n. Он равен $\sum\limits_s(-1)^{n-s}C_{k+n-s}^{n-s}C_p^s=\sum\limits_s(-1)^sC_{k+s}^sC_p^{n-s}$. Отсюда сразу вытекает доказываемое тождество. Остальные тождества до задачи 438 включительно доказываются аналогично.

439. Доказывается с помощью индукции по n.