Задача 8. Рёбра в графе

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Дан граф с 40 вершинами без петель и кратных рёбер. Известно, что среди любых 5 вершин найдется одна, соединенная с четырьмя остальными. Каково минимально возможное число ребер в этом графе?

Ответ 760.

Решение. Для удобства инвертируем задачу: заменим все рёбра на «отсутствия рёбер» и наоборот. Теперь нашу задачу можно переформулировать следующим образом: какое максимальное число ребер можно провести в графе на 40 вершинах таким образом, чтобы из любых пяти хотя бы одна не была смежна с оставшимися четырьмя?

Пусть есть компонента связности из хотя бы 3 вершин. Тогда возьмем в ней связную подкомпоненту из 3 вершин. Заметим, что из оставшихся 37 вершин никакие две не могут быть смежны: ведь иначе бы мы взяли их и вместе с исходными тремя и получили бы пятёрку вершин, среди которых нет ни одной, не смежной с остальными. Далее, заметим, что от наших трёх вершин рёбра могут идти не более чем к одной вершине. Если ребра из исходных трёх ведут хотя бы к двум вершинам, возьмем исходные три вершины и эти две, и снова получится недопустимся пятёрка вершин. Получается, если есть компонента связности хотя бы из 3 вершин, то наиболее насыщенный рёбрами граф, который может получиться, — это K_4 (граф с 4 вершинами, попарно соединёнными рёбрами), в котором 6 рёбер.

Если же нет компоненты из хотя бы 3 вершин, то во всех компонентах связности по одной или по две вершины. Значит, максимум может быть 20 пар по 2 вершины, то есть 20 ребер.

Таким образом, в исходной задаче у нас может быть максимум 20 «отсутствий рёбер», то есть рёбер в нашем графе хотя бы

$$\frac{40 \cdot 39}{2} - 20 = 760$$