Школа анализа данных
Восстановление зависимостей
Домашнее задание №1

Кошман Дмитрий

Задача 1

Пусть $C = A^T A + \alpha B^T B$
Поскольку B имеет полный ранг по столбцам, то $Bx \neq 0\, \forall x \Rightarrow ||Bx|| > 0$.
Тогда $x^T C x = x^T A^T A x + \alpha x^t B^T B x = ||Ax|| + \alpha ||Bx|| > 0 \forall x$
Значит, $Cx \neq 0\, \forall x$ и C не вырождена.

Задача 2

Интегральное уравнение:

$$\int_0^x f(t)dt = u(x);\; u(0) = 0$$

Его решение с точностью до константы:

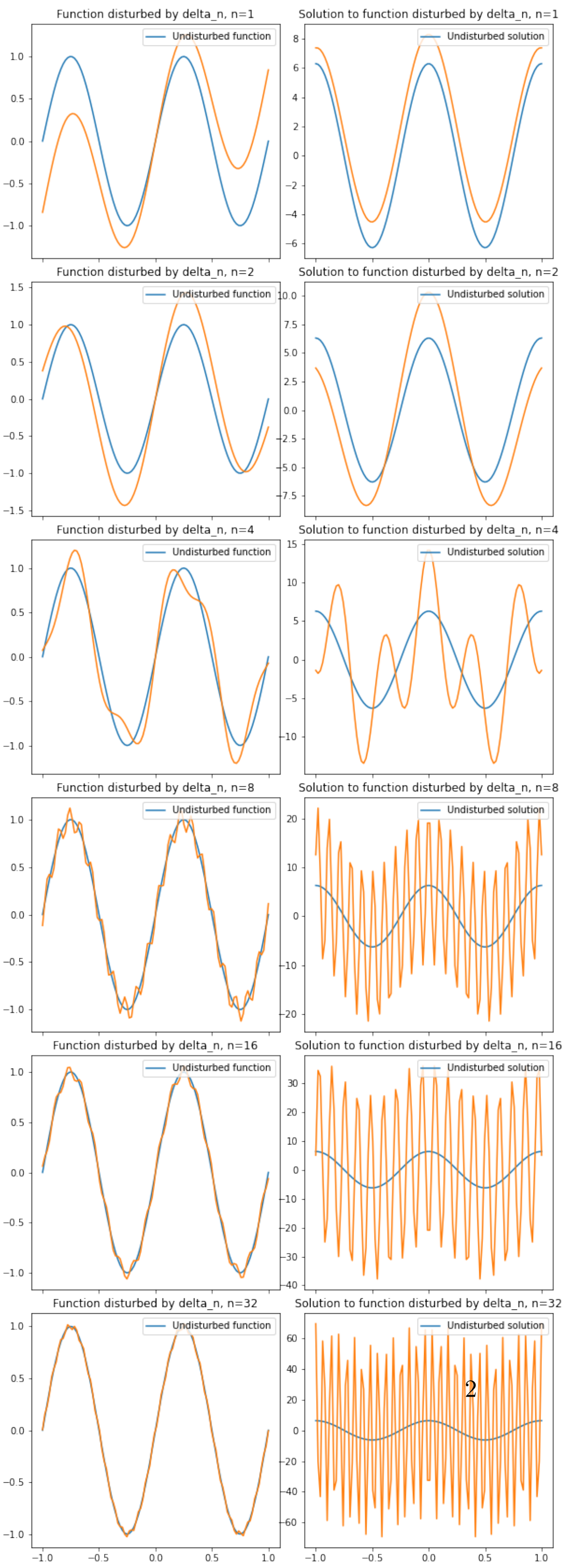
$$f(x) = u'(x)$$

Рассмотрим случай наблюдаемой функции $u(x) = \sin(2\pi x)$ и ее возмущение функциями

$$\delta_n(x) = \frac{\sin(n^2(x))}{n};\; ||\delta_n(x)|| \to 0 \text{ при } n \to \infty :$$

$$\int_0^x f_n(t)dt = u(x) + \delta_n(x) \Rightarrow f_n(x) = u'(x) + \delta'_n(x) = 2\pi \cos(2\pi x) + 2n \cos(n^2 x)$$

Рассмотрим для разных n возмущенную наблюдаемую функцию и ее решение:


Function disturbed by delta_n, n=1
Undisturbed function
Solution to function disturbed by delta_n, n=1
Undisturbed solution
Function disturbed by delta_n, n=2
Undisturbed function
Solution to function disturbed by delta_n, n=2
Undisturbed solution
Function disturbed by delta_n, n=4
Undisturbed function
Solution to function disturbed by delta_n, n=4
Undisturbed solution
Function disturbed by delta_n, n=8
Undisturbed function
Solution to function disturbed by delta_n, n=8
Undisturbed solution
Function disturbed by delta_n, n=16
Undisturbed function
Solution to function disturbed by delta_n, n=16
Undisturbed solution
Function disturbed by delta_n, n=32
Undisturbed function
Solution to function disturbed by delta_n, n=32
Undisturbed solution

Задача 3

Будем численно вычислять производную как $u'(x) \approx \hat{u}(x) = \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$, причем выбирать шаг дискретизации как $h = \sqrt{\delta}$, где δ - величина возмущения.

Покажем, что численная аппроксимация сходится к истинной производной:

$$||\hat{u} - u|| = \max_x |\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x)| = \max_x |\frac{u'(t) \cdot 2h}{2h} - u'(x)| = \max_x |u'(t) - u'(x)|,$$

Где $t \in (x-h, x+h)$. Значит, если производная равномерно непрерывна, то $u'(t) \to u'(x)$ при $h \to 0$ и $\hat{u} \to u$.

Также можно оценить погрешность, если вторая производная существует и ограничена: если $|u''(x)| < c$, то

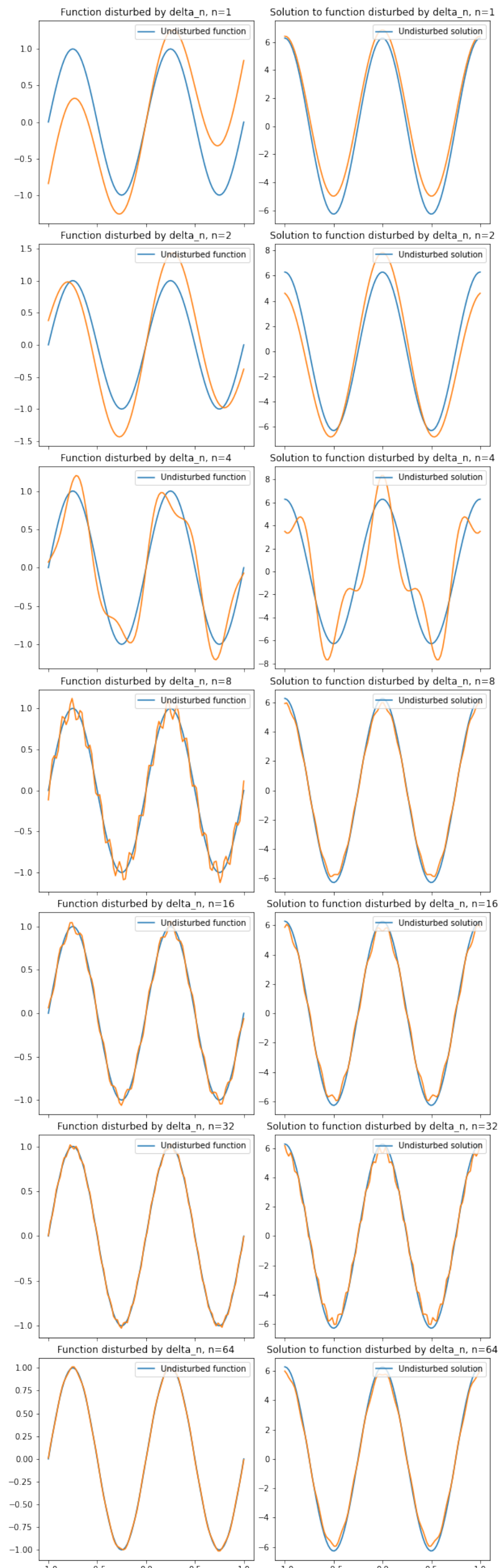
$$||\hat{u} - u|| = \max_x |u'(t) - u'(x)| \leq 2ch$$

Покажем, что $\hat{u}$ устойчива к возмущениям известной величины δ:

$$||\hat{\tilde{u}} - u'|| = ||\frac{\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x-h)}{2h} - u'(x)|| \leq ||\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x)|| + |\frac{2\delta}{2h}| =$$

$$\max_x |u'(t) - u'(x)| + \sqrt{\delta}$$

Где $t \in (x-\delta, x+\delta)$. Значит, если $\delta \to 0$, то $||\hat{\tilde{u}} - u'|| \to 0$, и решение устойчиво. Проиллюстрируем это графически, выбирая $h = \min\{0.1, \sqrt{\delta}\}$:


Function disturbed by delta_n, n=1
Solution to function disturbed by delta_n, n=1
Function disturbed by delta_n, n=2
Solution to function disturbed by delta_n, n=2
Function disturbed by delta_n, n=4
Solution to function disturbed by delta_n, n=4
Function disturbed by delta_n, n=8
Solution to function disturbed by delta_n, n=8
Function disturbed by delta_n, n=16
Solution to function disturbed by delta_n, n=16
Function disturbed by delta_n, n=32
Solution to function disturbed by delta_n, n=32
Function disturbed by delta_n, n=64
Solution to function disturbed by delta_n, n=64
Undisturbed function
Undisturbed solution