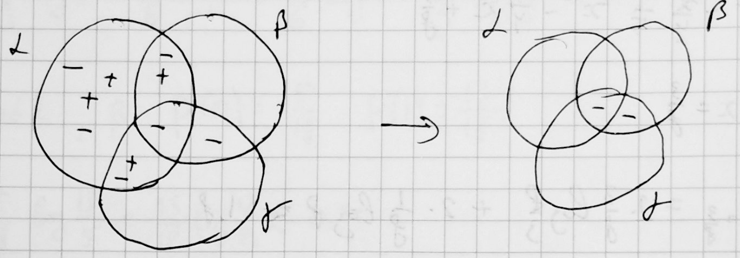
Домашняя работа 3

Кошман Дмитрий

№2

1) $H(\alpha|\beta) + H(\alpha|\gamma) \le H(\alpha) + H(\alpha|\beta,\gamma) + I(\beta:\gamma|\alpha)$

Воспользуемся методом диаграмм:

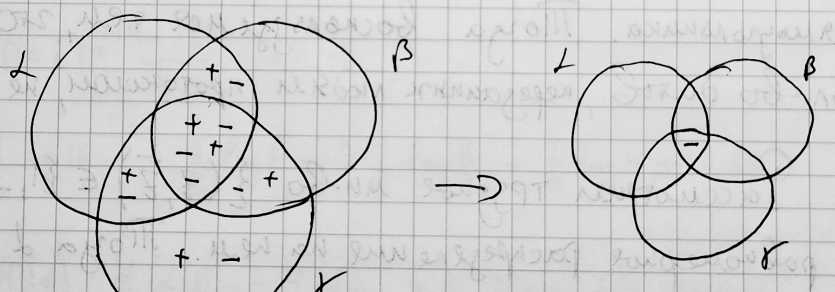


Неравенство свелось к $I(\beta:\gamma) \geq 0$

или $H(\beta) - H(\beta|\gamma) \geq 0$,

что верно из св-в условной энтропии.

2) $I(\alpha:\beta) + H(\gamma) \le I(\alpha:\beta) + I(\alpha:\gamma) + I(\beta:\gamma) + H(\gamma|\beta,\alpha)$



Неравенство свелось к $I(\alpha:\beta:\gamma) \geq 0$

Рассмотрим независимые α, β, равномерно распределенные на $\{0,1\}$ и $\gamma = \alpha+\beta \bmod 2$

Тогда $I(\alpha:\beta:\gamma) = I(\alpha:\beta) - \big(H(\langle\alpha,\beta\rangle|\gamma) - H(\alpha|\beta,\gamma) - H(\beta|\alpha,\gamma)\big) = 0 - \big(H(\langle\alpha,\beta\rangle|\gamma) - 0 - 0\big) = -H(\langle\alpha,\beta\rangle|\gamma) =$

$= -P[\gamma=0]\,H(\langle\alpha,\beta\rangle|\gamma=0) - P[\gamma=1]\,H(\langle\alpha,\beta\rangle|\gamma=1) = -\left(\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 2\right) =$

$= -1$, неравенство неверно.

№1

1) Пусть α – случайное трехзначное число, ровно одна цифра которого четна, β – произведение его цифр.

Тогда $$I(\alpha:\beta) = H(\beta) - H(\beta|\alpha) = H(\beta) = \sum_i p_i \log \frac{1}{p_i}$$

где p_i – вероятность определенного произведения цифр.

Посчитав с помощью скрипта, получим ответ:

~~$I(\alpha:\beta) \approx 17.$ бит информации~~

$I(\alpha:\beta) \approx 5$ бит информации

2) Пусть число записано в виде $\overline{abc}$

Тогда $I(a\cdot b : \text{чет}) = H(a\cdot b) - H(a\cdot b|\text{чет}) =$

$$= H(a\cdot b) - H(a\cdot b|\text{чет})\cdot P[a-\text{чет}] - H(a\cdot b|\text{чет})\, P[b-\text{чет}] - H(a\cdot b|\text{чет})\, P[c-\text{чет}] =$$

$$= H(a\cdot b) - H(b)\, P[\underset{a\neq 0}{a-\text{чет}}] - H(a)\, P[\underset{b\neq 0}{b-\text{чет}}] - H(a\cdot b)\, P[c-\text{чет}]$$

3) $I(a\cdot b : c) = H(a\cdot b) - H(a\cdot b|c) = H(a\cdot b) - H(a\cdot b) = 0$

где c – четная цифра.

Значит, произведение нечетных цифр не несет информации о четной.

In [23]:

```python
def even(x):
    return bool(x % 2 == 0)

def first_even(i, j, k):
    return even(i) and not even(j) and not even(k)

def exactly_one_even(i, j, k):
    return first_even(i, j, k) or first_even(j, k, i) or first_even(k, i, j)


bins = {}
for i in range(10):
    for j in range(10):
        for k in range(10):
            if i == 0:
                continue
            if exactly_one_even(i, j, k):
                p = i * j * k
                bins.setdefault(p, 0)
                bins[p] += 1

total = sum(bins.values())
probabilities = [i / total for i in bins.values()]
entropy = -sum(p * np.log2(p) for p in probabilities)
entropy
```

Out[23]: 5.238645247324717