

1 Задача 3-1

Рассмотрим амортизированную стоимость операции *zig*:

$$\begin{aligned} cost' &= cost + \Delta\Phi = 1 + \Phi'(x) + \Phi'(y) - \Phi(x) - \Phi(y) = \\ &= 1 + \Phi'(y) - \Phi(x) < 1 + \Phi'(x) - \Phi(x) < 1 + 3(\Phi'(x) - \Phi(x)) \end{aligned}$$

Амортизированная стоимость операции *zig - zig*:

$$\begin{aligned} cost' &= cost + \Delta\Phi = 1 + \Phi'(x) + \Phi'(y) + \Phi'(z) - \Phi(x) - \Phi(y) - \Phi(z) = \\ &= 1 + \Phi'(y) + \Phi'(z) - \Phi(x) - \Phi(y) \end{aligned}$$

Поскольку логарифм - выпуклая функция, то $\log \frac{a+b}{2} \geq \frac{\log a + \log b}{2}$, или $1 \leq \log(a+b) - \frac{\log a + \log b}{2}$. Применимо к данной функции потенциала с учетом расположения вершин, получаем $1 \leq \Phi'(x) - \frac{\Phi(x) + \Phi(z)}{2}$. Получаем:

$$\begin{aligned} cost' &\leq \Phi'(x) - \frac{\Phi(x) + \Phi'(z)}{2} + \Phi'(y) + \Phi'(z) - \Phi(x) - \Phi(y) \leq \\ &\leq \Phi'(x) - \frac{\Phi(x)}{2} + \Phi'(x) + \frac{\Phi'(z)}{2} - \Phi(x) - \Phi(x) \leq 3(\Phi'(x) - \Phi(x)) \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения для *zig - zag*. Далее амортизационная оценка операции *splay* получается аналогично случаю с функцией потенциала, зависящей от мощности поддерева.