Домашняя работа 4 Кошман Д.

№2

Поскольку в данном слове букв "c" больше, проще будет посчитать, сколько слов с тем же составом стоит после данного. Обозначим тройкой (x, y, z) кол-во букв a, b, c и посчитаем кумулятивные суммы, проходя слово справа налево:

| a | b | c | b | c | c | c | b | a | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2,4,4) | (1,4,4) | (1,3,4) | (1,3,3) | (1,2,3) | (1,2,2) | (1,2,1) | (1,2,0) | (1,1,0) | (0,1,0) |

Всего слов с тем же составом: $P(2,4,4) = \frac{10!}{2!\,4!\,4!}$

Все слова, идущие после данного разделим на непересекающиеся классы по первой отличной букве:

b... $- P(2,3,4)$

c... $- P(2,4,3)$

ac... $- P(1,4,3)$

abcc... $- P(1,3,2)$

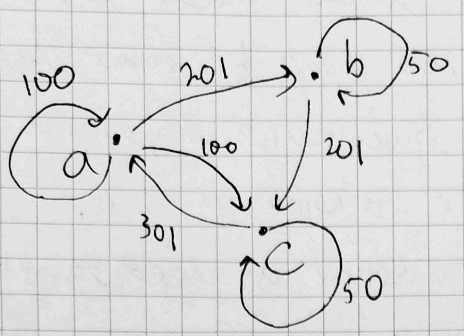
abcbcccc... $-$ ~~...~~ 0

abcbcccbb... $- P(1,0,0)$

~~Ответ~~: $P(2,4,4) - 2\cdot P(2,3,4) - P(1,3,4) - P(1,2,3) - 1 = 1549$

№3

Представим задачу в виде графа:




Поскольку $d^+(v)=d^-(v)$, $\forall v$ то слово заканчивается на "a", и все искомые слова изоморфны эйлеровым циклам.
Если разделить все ребра на три стэка по вершине, из которой они исходят:

a?    b?    c?

$\left.\right\}$ aa × 100, ab × 201, ac × 100

$\left.\right\}$ bb × 50, bc × 201

$\left.\right\}$ cc × 50, ca × 301

И по очереди брав ребро из стэка, соответствующего текущей вершине и переходя по этому ребру, видно, что отображение эйлеровых циклов в перестановки внутри стэков инъективно. Значит,

$$N \le P(201,100,100)\cdot P(201,50)\cdot P(301,50)$$

Теперь отбросим по одному ребру ab, bc, ca из стэков и начнем обрабатывать их, начиная с "a". В какой-то момент мы окажемся в пустом стэке. Поскольку $d^+(v)=d^-(v)$ $\forall v$, этот стэк может быть только первый. Переходим во второй стэк, используя отложенное ребро ab. Заметим, что во втором стэке остались только петли bb, поскольку все 200 ребер ab были использованы, после чего мы оказались в "a". Значит, все 200 ребер bc тоже были использованы. Когда стэк b закончится, перейдем в c, прокрутим оставшиеся циклы cc и перейдем в a.

Получим инъективное отображение из перестановок уменьшенных стэков и эйлеровых циклов:

$$N \geq P(200,100,100) \cdot P(200,50) \cdot P(300,50)$$

Отношение первой и второй оценки: $\frac{401}{201} \cdot \frac{251}{201} \cdot \frac{351}{301} < 100$

Ответ: $N \approx P(200,100,100) \cdot P(200,50) \cdot P(300,50)$

№1

Сделаем грубую оценку, используя обобщенное нер-во Фано:

$$H(\alpha|\beta) \leq (1-p)\log n + p\varepsilon \log(n-1) + p h(\varepsilon)$$

где $n=3$, $\varepsilon = 0.2$, $h(\varepsilon) = \frac{\log 5}{5} + \frac{4\log\frac{5}{4}}{5} = \log 5 - \frac{8}{5}$

$$H(\alpha|\beta) = H(\alpha) - I(\alpha:\beta) = \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 6}{6} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{\log 3}{2}$$

Получаем:

$$\frac{1}{6} + \frac{\log 3}{2} - \log 3 \leq p\left(-\log 3 + \frac{1}{5} + \log 5 - \frac{8}{5}\right)$$

$$p \leq \frac{\frac{\log 3}{2} - \frac{1}{6}}{\frac{7}{5} - \log\frac{5}{3}} \approx 0.944$$