Задача 1. Предел отношения

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. Известно, что $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin x} = 2$. Чему равен предел $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{f(x)}$?

Ответ. $\frac{3}{2}$

Решение. Поскольку

$$f(x) = \frac{f(x)}{\sin x} \cdot \sin x \longrightarrow 2 \cdot 0 = 0 \ (x \to 0),$$

мы имеем дело с неопределённостью вида $\frac{0}{0}$.

Перепишем искомый предел в виде

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{f(x)}$$

Дробь $\frac{\sin x}{f(x)}$ стремится к $\frac{1}{2}$. Предел первого сомножителя можно найти с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{\cos x} = \frac{3/1}{1} = 3$$