Задача 3. Математическое ожидание числа шаров

Из письменного экзамена в ШАД 2019 года

Условие. В корзине лежит m чёрных шаров и n красных. Мы достаём из корзины случайный шар и, если он чёрный, то заменяет его на красный, а если он красный, то кладёт его обратно. Найдите математическое ожидание числа красных шаров в корзине после k итераций этой процедуры.

Ответ. : $n + m\left(1 - \left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^k\right)$

Решение. : Рассмотрим индикаторные величины

$$I_j = \mathbb{I}\{j\text{-й чёрный шар стал красным после } k \text{ итераций}\}$$

Легко видеть, что число красных шаров после k итераций замен равно $n + \mathbb{E}\left(\sum_j I_j\right) = n + \sum_j \mathbb{E}I_j$ (число шаров, которые с самого начала были красными, плюс количество чёрных шаров, сменивших цвет). Следовательно, математическое ожидание равно

$$\mathbb{E}\left(n + \sum_j I_j\right) = n + \sum_j \mathbb{E}I_j$$

Математическое ожидание любой из индикаторных величин I_j вычисляется очень легко:

$$\mathbb{E}I_j = 0 \cdot P(I_j = 0) + 1 \cdot P(I_j = 1) = P(I_j = 1)$$

Все I_j распределены одинаково. Вероятность $P(I_j = 0)$, то есть вероятность того, что j-й чёрный шар не поменял цвета после k итераций, равна вероятности того, что этот шар ни разу не был вытащен, то есть $\left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^k$. Следовательно, $P(I_j = 1) = 1 - \left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^k$ Таким образом, матожидание числа красных шаров равно

$$n + m\left(1 - \left(\frac{m+n-1}{m+n}\right)^k\right)$$