Теория информации Кошман Д.

Домашняя работа 1

№1

Дано: $1<2$, $3<4$, $3<5$

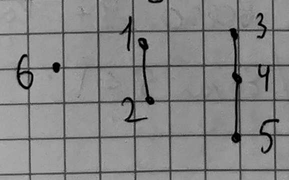
Ограничение $1<2$ выделяет половину исходов.

Ограничения $3<4$ и $3<5$ означает, что 3 — самый легкий из тройки $\{3,4,5\}$, и из симметрии выделяет треть исходов.

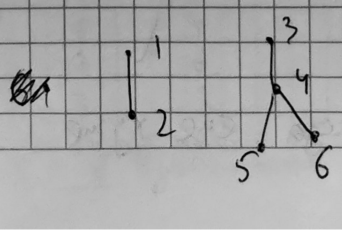
Поскольку эти два ограничения независимы, получается мы имеем $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 6! = 120$ исходов.

Грубая оценка говорит, что необходимо $\lceil \log 120 \rceil = 7$ взвешиваний. Попробуем улучшить эту оценку. Благодаря аддитивности информации, если мы будем получать максимальное кол-во бит информации на каждом взвешивании, то получим максимальное кол-во информации в целом.

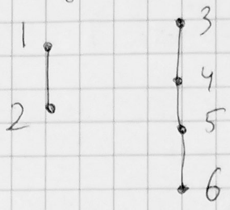
1) Заметим, что взвешивание 4 и 5 делит исходы пополам, и ничего лучше быть не может, потому что в худшем случае мы получаем 1 бит информации. Имеем:



2) Опять из симметрии взвешивание 4 и 6 дает 1 бит в худшем случае



3) Аналогично надо взвесить 5 и 6

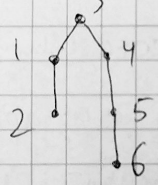


4) Мы произвели 3 взвешивания и сократили кол-во исходов до $\frac{120}{2^3} = 15$

Теперь у нас есть 4 принципиально разных варианта взвешиваний: (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)

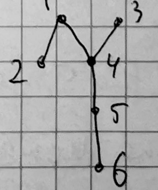
Покажем, что в худшем случае любого из них потребуется в целом 8 взвешиваний:

- Если $3<1$

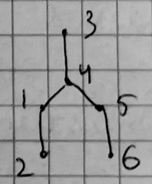


Осталось $C_5^2 = 10$ исходов, всего необх. $4 + \lceil \log 10 \rceil = 8$ вз.

- Если $1<4$



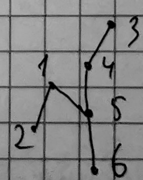
(Если $4<1$:



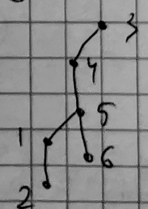
$C_4^2 = 6$ исходов)

Осталось $15-6 = 9$ исходов, всего $4 + \lceil \log 9 \rceil = 8$ вз.

- Если $1<5$



(Если $5<1$:



$C_3^1 = 3$ исхода)

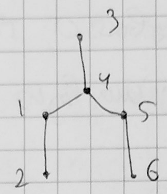
Осталось $15-3$ исхода, ещё хуже

• Если 1 < 6, это выделяет ещё большее мн-во, чем предыдущие.

Получаем нижнюю оценку в 8 взвешиваний.

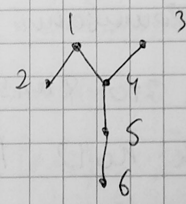
Получим верхнюю оценку, доведя до конца взвешивания, на 4-ом шаге взвесив 1 и 4:

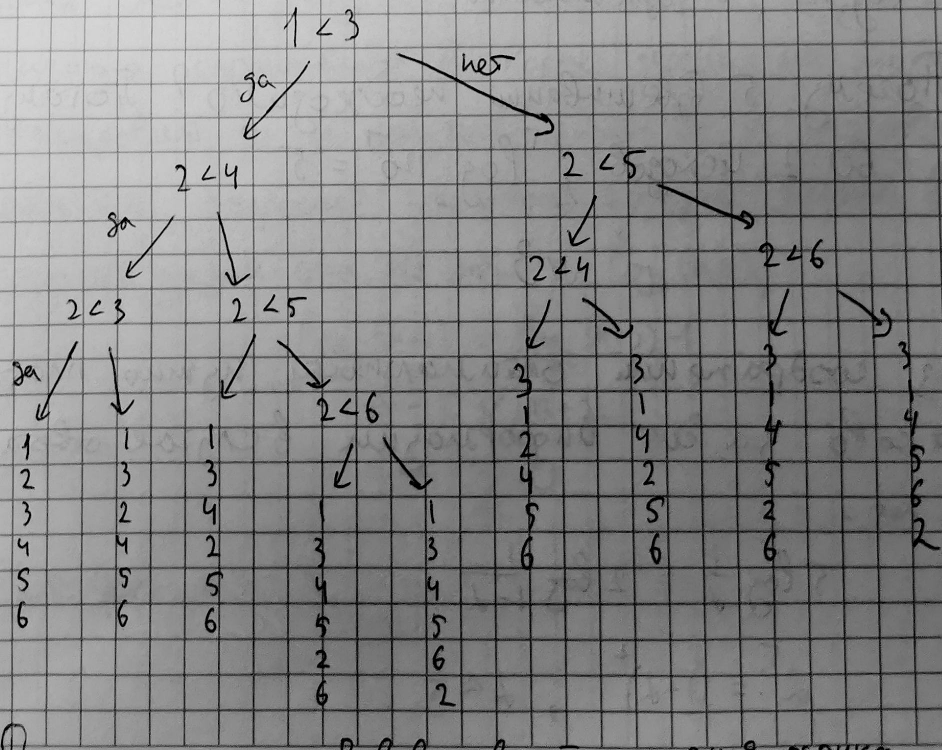
• Если 4 < 1



Известно, что чтобы слить 2 упорядоченных массива [1, 2] и [5, 6], достаточно $2\lceil\log(2+1)\rceil = 4$ взвешиваний, всего 8.

• Если 1 < 4

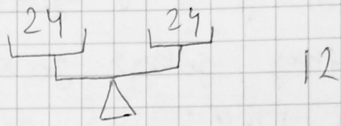




Достаточно 4 + 4 = 8 взвешиваний — точная оценка

№2

Сделаем первое взвешивание таким:



1) Если равно, можно воспользоваться тем, что из 12 монет можно найти фальшивую за 3 взвешивания, всего 4 вз.

2) Пусть левая весит меньше. Делим её пополам и взвешиваем. Если равно, то фальшивая была в правой кучке из 24, и теперь мы знаем, что фальшивая тяжелее. Достаточно $2 + \lceil \log_3 24 \rceil = 5$ взвешиваний.

Если не равно, то мы знаем, что фальшивая легче и берем легкую из двух кучек по 12. Всего достаточно $2 + \lceil \log_3 12 \rceil = 5$ взвешиваний.

Почему 5 взвешиваний необходимо? Потому что всего $60 \cdot 2$ исходов, $\lceil \log_3 120 \rceil = 5$

№3

Из соображений оптимальности, нужно платить одинаково за бит информации в случае ответа да или нет:

$$5 \log \frac{1}{\alpha} = 2 \log \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\alpha^5 = (1-\alpha)^2, \quad \alpha \approx \frac{2}{3}$$

Тогда мы в любом случае платим за 1 бит $\frac{1}{\log\frac{1}{2}}$ рублей

И всего за $\log 2^n = n$ бит платим $\frac{2n}{\log\frac{1}{2}} + o(n)$, с учетом

ошибок округления.

№4

Докажем по индукции

1) $n=1$, $\log_2(n+1) = 1$. Если вопросная сложность f меньше 1, то она константна и не зависит от своей переменной, противоречие.

2) Известно, что вопросная сложность ф-ции от n переменных не меньше $\log_2(n+1)$. Предположим, что вопросная сложность ф-ции от $n+1$ переменной меньше $\log_2(n+2)$. Тогда существует решающее дерево глубины меньше $\log_2(n+2)$. Посмотрев, про какую переменную спрашивается в корне дерева, мы можем зафиксировать ее и получить ф-цию от n существенных переменных, вопросная сложность которой меньше $\log_2(n+2) - 1$. Но по индукции она не меньше $\log_2(n+1)$,

$$\log_2(n+1) \vee \log_2(n+2) - 1$$

$$2(n+1) \vee n+2$$

$$n \underset{>}{\vee} 0$$

Противоречие.

№5

Покажем, что необходимо передать $n + O(n)$ бит информации. Предъявим трудное мн-во мощности 2^n: оно состоит из пар $(x, \bar{x})$. $|x \cup \bar{x}| = n$, а если $(x, \bar{x})$ и $(y, \bar{y})$ принадлежат одному прямоугольнику, то (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ тоже ему принадлежат, но значение f меньше n на одной из этих пар. Значит, $D(f) \geq \log 2^n = n$

Но $n + \lceil \log n \rceil$ бит достаточно: Алиса передает Бобу все свои элементы, а Боб передает ответ.

№6

Пусть протокол состоит в следующем: Алиса передает самый левый бит своего числа, который она еще не передавала, а Боб в ответ передает, совпадает ли этот бит с его. Как только Боб передаст 0, оба будут знать значение GT_n.

Поскольку вероятность, что у двух чисел из равномерного распределения совпадут первые k бит равна $\frac{1}{2^k}$, то в среднем будет передано $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^k}$ бит,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2^k} \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 6$$

То есть константа битов.

№7

Покажем, что мн-во, состоящее из всех пар является трудным.

Действительно, пусть $(x,y) \neq (u,z)$ и эти пары лежат в одноцветном прямоугольнике, т.е. $x-y = u-z$. Но тогда в этом прямоугольнике лежат и (x,z), (u,y):

$$x-z = x-y = u-z = u-y \Rightarrow z=y,\ x=u,$$ противоречие.

Тогда $D(f) \geq \log 2^{2n} = 2n$.