INVERS LAPLACE TRANSFORM PARTIAL FRACTION

KOWSIK ND
ROLL NO 31

1. $\frac{s+2}{(s+1)^2(s-2)}$

$L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+1)^2(s-2)}\right]$

Now

$\frac{s+2}{(s+1)^2(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s-2}$

$s+2 = A(s+1)(s-2) + B(s-2) + C(s+1)^2$

$s+2 = A(s^2-s-2) + B(s-2) + C(s^2+2s+1)$

$A+C = 0$

$-A+B+2C = 1$

$-2A-2B+C = 2$

$A = -\frac{4}{9} \quad B = -\frac{1}{3} \quad C = \frac{4}{9}$

$\therefore L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+1)^2(s-2)}\right] = L^{-1}\left[-\frac{4}{9}\frac{1}{s+1}\right] + L^{-1}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{(s+1)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{4}{9}\frac{1}{s-2}\right]$

$= -\frac{4}{9}e^{-t} - \frac{1}{3}t\cdot e^{-t} + \frac{4}{9}e^{2t}$

$= \frac{4}{9}e^{2t} - e^{-t}\left[\frac{t}{3}+1\right]$

2. $\frac{3s+2}{(s+1)(s^2+1)}$

$\frac{3s+2}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$

$3s+2 = As^2 + A + (Bs+C)(s+1)$

$= As^2 + A + 0As + Bs^2 + 0B + Bs + C + Cs$

$A+B = 0 \quad A+C = 2 \quad A+B+C = 3$

$A = 1 \quad B = -1 \quad C = 3$

$L^{-1}\left[\frac{3s+2}{(s+1)(s^2+1)}\right]$

$= L^{-1}\left[\frac{-1}{s+1} + \frac{s+3}{s^2+1}\right]$

$= -L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + 3L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$

$= -e^{-t} + \cos t + 3\sin t$

3. $\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}$

$\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5}$

$A(s^2+2s+5) + (s-1)(Bs+C) = 5s+3$

$As^2 + 2As + 5A + Bs^2 + Cs - C - Bs$

$A+B = 0 \quad 2A+C-B = 5 \quad 5A-C = 3$

$A = \frac{-1}{2} \quad B = \frac{1}{2} \quad C = -\frac{11}{2}$

$L^{-1}\left[\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right]$

$= L^{-1}\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}\right] + L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}s - \frac{11}{2}}{s^2+2s+5}\right]$

$= -\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2+2^2}\right] - \frac{11}{4}L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right]$

$= -\frac{e^t}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos 2t - \frac{11}{2}e^{-t}\sin 2t$

4. $\frac{s}{s^4+s^2+1}$

$$\frac{s}{s^4+s^2+1} = \frac{s}{(s^2+1)^2-s^2}$$

$$= \frac{s}{(s^2+s+1)(s^2+1-s)}$$

$$\frac{s}{(s^2+s+1)(s^2-s+1)} = \frac{As+B}{s^2+s+1} + \frac{Cs+D}{s^2-s+1}$$

$$(As+B)(s^2-s+1) + (Cs+D)(s^2+s+1) = s$$

$$As^3 - As^2 + As + Bs^2 - Bs + B + Cs^3 + Cs^2 + Cs + Ds^2 + Ds + D = s$$

$A+C=0 \quad -A+B+C+D=0$

$A-B+C+D=1 \quad B+D=0$

$A=-C \quad \text{---(1)}$

$-2A+B+D=0$

$-B+D=1$

$B+D=0$

$\Rightarrow D=\frac{1}{2} \quad B=-\frac{1}{2} \quad A=0 \quad C=0$

$$\therefore L^{-1}\left[\frac{s}{s^4+s^2+1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+s+1}\right] + \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-s+1}\right]$$

$$= \frac{-1}{2}L^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{4}{3}}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right] + \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{4}{5}}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}}\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{3}}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{\frac{5}{4}}te^{\frac{1}{2}t}$$

5. $\frac{s^3}{s^4-a^4}$

$$\frac{s^3}{s^4-a^4} = \frac{s^3}{(s^2)^2-(a^2)^2} = \frac{s^3}{(s^2-a^2)(s^2+a^2)}$$

$$= \frac{s^3}{(s-a)(s+a)(s^2+a^2)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s+a} + \frac{Cs+D}{s^2+a^2}$$

$$\therefore A(s+a)(s^2+a^2) + B(s-a)(s^2+a^2) + (s^2-a^2)(Cs+D) = s^3$$

$$\Rightarrow A(s^3+sa^2+as^2+a^3) + B(s^3+sa^2-as^2-a^3) + C(s^3-sa^2) + D(s^2-a^2) = s^3$$

$A+B+C=1 \quad aA-aB+D=0$

$a^2A+Ba^2-Ca^2-Da^2=0$

$a^3A-a^3B-a^2D=0$

$A+B+C=1 \quad aA-aB+D=0 \quad \text{---(1)}$

$A+B-C-D=0$

$a^3A-a^3B-a^2D=0$

$\rightarrow aA-aB-D=0 \quad \text{---(2)}$

(1) + (2)

$D=0$

$aA=aB \Rightarrow A=B$

$2A+C=1$

$2A-C=0$

$A=\frac{1}{4} \quad C=\frac{1}{2}$

$A=\frac{1}{4} \quad C=\frac{1}{2} \quad B=\frac{1}{4} \quad D=0$

P.T.O

$$L^{-1}\left[\frac{s^3}{s^4-a^4}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{s-a}\right] + \frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] + L^{-1}\left[\frac{1/2\, s}{s^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}e^{at} + \frac{1}{4}e^{-at} + \frac{1}{2}\cos(at)$$