

# Numerikus módszerek 1.

Bevezető

Krebsz Anna

ELTE IK

## **Dr. Krebsz Anna**

docens, ELTE IK Numerikus Analízis tanszék

e-mail: [krebsz@inf.elte.hu](mailto:krebsz@inf.elte.hu)

honlap: <http://numanal.inf.elte.hu/~krebsz>

szoba: 2-302.

**Tárgy:** Numerikus módszerek 1. előadás  
Prog. inf. BSc

**Kód:** IP-08abcNM1E és IP-18abNM1E (IK)

**Félév:** 2023/2024 ősz

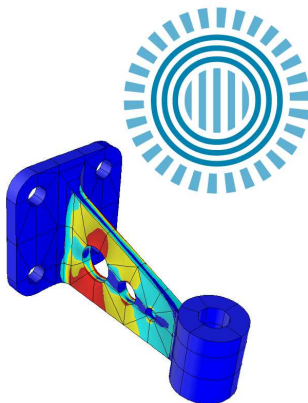
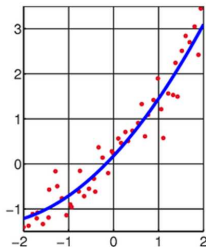
**Helyszín:** Déli tömb, 0-804. Lóczy terem és Teams

**Időpont:** Csütörtök 10:10 - 11:50-ig 10 perc szünettel

A numerikus analízis célja olyan módszerek kidolgozása és elemzése, amelyek matematikai illetve **műszaki, természettudományos problémák** pontos vagy közelítő **számítógépes megoldását** célozzák meg.

Az első két félévben a **lineáris algebra** és az **analízis** numerikus módszereit tárgyaljuk. Ez egy bevezető kurzus a numerikus módszerekbe.

$$\sqrt{2}$$



## 1 I. félév.

- Gépi számábrázolás. Hibaszámítás.
- Lineáris egyenletrendszerek megoldása (direkt / iteratív).  
(Gauss-elimináció, LU-felbontás, LDU-felbontás, Cholesky-felbontás, QR-felbontás Gram–Schmidt-ortogonalizációval és Householder-transzformációval, mátrixnormák, Banach-féle fixponttétel, Jacobi-iteráció, Gauss–Seidel-iteráció, Richardson-iteráció)
- Nemlineáris egyenletek megoldása.  
(intervallumfelezés, fixpont iterációk, Newton-módszer, szelőmódszer, húrmódszer)
- Polinomok gyökeinek becslése. Horner-algoritmus a polinom és deriváltjainak helyettesítései értékeinek számítására.

## 2 II. félév

- Sajátértékfeladatok megoldása (csak A szakirányon)
- Interpoláció, approximáció
- Numerikus integrálás

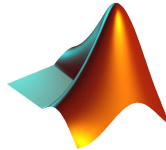
Könyvek, jegyzetek (Numerikus analízis, Numerikus módszerek)

- Gergó Lajos
- Stoyan Gisbert
- Móricz Ferenc
- Linalg: Csörgő István

Elektronikus segédanyagok:

- **Előadás diásorai a Canvasban.**
- Példatár: Krebsz–Bozsik
- A Numerikus Analízis Tanszék, illetve oktatóinak honlapján:  
`http://numanal.inf.elte.hu/~{hegedus,krebsz,laszlo,soveg}`

- 1 Példák kézzel és Matlab-ban. (A legtöbb gépteremben legálisan hozzáférhető, lehet vele ismerkedni. Az A szakirányon a következő félévben kötelező.)



- 2 Előadás diasorok. (Elérhetőek lesznek a Canvasban. Definíciók, tételek, bizonyítások, példák. Néha krétás kiegészítés a táblán.)



## Gyakorlati jegy:

- két évfolyam zh-ból és
- beadható HF-ből,
- részletek a gyakorlaton és a Canvasban.

## Vizsga:

- „Canvas kvíz megajánlott jeggyel” (45 perc):

A megajánlott jegyek így alakulnak:

- 0-7 - elégtelen (1)
  - 8-11 - elégséges (2)
  - 12-15 - közepes (3)
- „szóbeli vizsga”: egy tétel részletes kidolgozása: definíciók, tételek, bizonyítások. A jó vagy jeles jegyet a kidolgozás teljessége és értése dönti el.
  - Az írásbeli és szóbeli együtt adja a vizsga jegyét.

**Kérdések?**

# A matematikai modellezés (kör) folyamata és a hibaforrások megjelenése

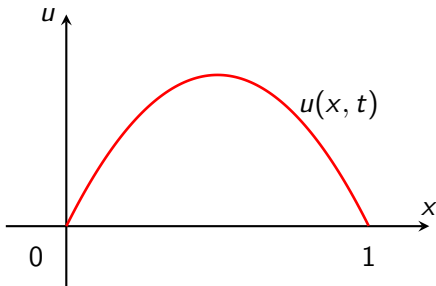
- A valóság egy részét vizsgálva igyekszünk a jelenséget fizikai, kémiai, stb. törvények alapján matematikailag leírni, egy lehetséges **matematikai modellt** megalkotni. Ez általában az adott tudományterületen dolgozó szakember feladata a rendelkezésre álló törvények, elvek felhasználásával. A valóságot csak közelíteni tudja, ezzel megjelenik a **modellhiba**.
- A modell pontos megoldása gyakran nem állítható elő véges lépésben, **közelítő módszerekre** van szükségünk. Elkészül a program, a végtelen eljárást véggel helyettesítjük, az itt megjelenő hibát **képlethibának** nevezzük.

# A matematikai modellezés (kör) folyamata és a hibaforrások megjelenése

- A modell **bemenő paraméterei** általában mérési adatok, melyek pontatlanok, itt megjelenik a **mérési (vagy öröklött) hiba**.
- A közelítő módszer bemenő adatait véges aritmetikában ábrázoljuk, ezzel megjelenik az **input hiba**.
- A véges aritmetikában történő számolás során kerekítés, túl- illetve alulcsordulás léphet fel. Ezek a **műveleti (kerekítési) hibák**.
- A megvalósított **közelítő módszert teszteljük** és összehasonlítjuk a várt eredménnyel. Ha a kapott eredmény rossz, akkor előlről kezdjük az egyes lépések finomításával.

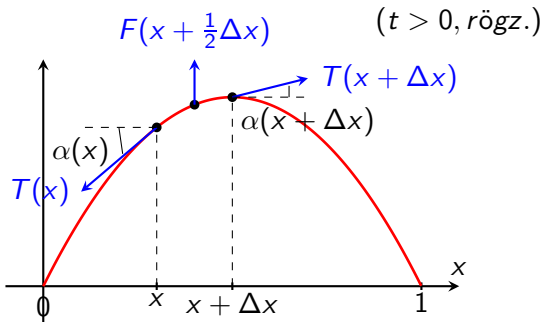
Húzzunk ki egy egységnyi hosszú rugalmas fémszálat és rögzítsük a végpontjait. Feszítsük meg,  $t = 0$  időpontban engedjük el és hagyjuk rezegni.

**Feladat:** a rugalmas szál rezgésének meghatározása, vagyis az  $u(x, t)$  elmozdulás meghatározása az  $x$  pontban és  $t > 0$  időpontban.



## Fizikai feltételek:

- 1 A szál tömegeloszlása homogén ( $\varrho(x) \equiv \varrho$ ).
- 2 A szál tökéletesen rugalmas, azaz a szálban feszítő erő ( $T(x)$ ) érintő irányú.
- 3 A nehézségi erő szálra gyakorolt hatását elhanyagoljuk.
- 4 A szálra ható kitérítő erő ( $F(x)$ ) függőleges irányú és nem túl nagy.



# A rezgő húr differenciálegyenlete

- Az erők vízszintes komponensei kiegyenlítik egymást:

$$T(x) \cos(\alpha(x)) = T(x + \Delta x) \cos(\alpha(x + \Delta x)) = V(\text{állandó})$$

Ha  $V$  nem állandó, akkor elmozdul a szál (a 4. feltétel nem teljesül).

- Az  $x$  és  $x + \Delta x$  pontokban ébredő feszítő erők függőleges komponenseinek különbsége az  $x + \frac{\Delta x}{2}$  pontban ható kitérítő erőt egyenlíti ki:

$$\begin{aligned} F\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) &= T(x + \Delta x) \sin(\alpha(x + \Delta x)) - T(x) \sin(\alpha(x)) \approx \\ &\approx \underbrace{(\Delta x \cdot \varrho)}_{\text{tömeg}} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)}_{\text{gyorsulás}} = m \cdot a \end{aligned}$$

## A rezgő húr differenciálegyenlete

A kapott egyenletet osszuk le  $V$ -vel:

$$\frac{T(x + \Delta x) \sin(\alpha(x + \Delta x))}{T(x + \Delta x) \cos(\alpha(x + \Delta x))} - \frac{T(x) \sin(\alpha(x))}{T(x) \cos(\alpha(x))} \approx \frac{(\Delta x \cdot \varrho)}{V} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

$$\tan(\alpha(x + \Delta x)) - \tan(\alpha(x)) \approx \frac{(\Delta x \cdot \varrho)}{V} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \approx \frac{(\Delta x \cdot \varrho)}{V} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

Leosztunk  $\Delta x$ -szel

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \approx \frac{\varrho}{V} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t).$$



# A rezgő húr differenciálegyenlete

$\Delta x \rightarrow 0$  esetén a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\rho}{V} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

hiperbolikus differenciálegyenletet kapjuk.

Kiegészítjük a kezdeti feltételekkel és peremfeltételekkel:

$$u(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = s(x) : \quad \text{a szál alakja kezdetben}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = v(x) : \quad \text{az elengedés pillanatában a kezdősebesség.}$$

További egyszerűsítéseket teszünk, csak az időtől független speciális esettel foglalkozunk a továbbiakban.

## Stacionárius eset:

$t_0$  : egy adott időpillanat,

$$U(x) := u(x, t_0)$$

$$A(x) := \frac{\rho}{V} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t_0) \quad \text{a de. jobboldala}$$

Ekkor a következő elliptikus de-t kapjuk:

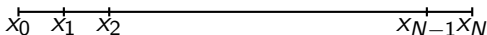
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x) = A(x)$$

$$U(0) = U(1) = 0.$$

**A de. numerikus megoldása véges differencia módszerrel:**

Elkészítjük a  $[0; 1]$  intervallum  $N$  részre történő egyenletes felosztását:

$$h = \frac{1}{N}, \quad x_i = ih \quad (i = 0, \dots, N)$$



Ezekben a diszkrét pontokban felhasználjuk a jobboldali függvény értékét  $A_i := A(x_i)$  és a megoldást is ezekben a pontokban keressük  $u_i := U(x_i)$ .

Tegyük fel, hogy a pontos megoldás  $U \in D^3(0; 1)$  és alkalmazzuk a Taylor-formulát:

$$U(x+h) = U(x) + U'(x)h + \frac{1}{2}U''(x)h^2 + \frac{1}{3!}U'''(\xi_1)h^3$$

$$U(x-h) = U(x) - U'(x)h + \frac{1}{2}U''(x)h^2 - \frac{1}{3!}U'''(\xi_2)h^3$$

Összeadva és átrendezve

$$U(x+h) + U(x-h) = 2U(x) + U''(x)h^2 + \frac{1}{3!}h^3(U'''(\xi_1) - U'''(\xi_2))$$

$$\frac{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)}{h^2} = U''(x) + \frac{h}{6}(U'''(\xi_1) - U'''(\xi_2))$$

Ezzel megkaptuk az  $U''(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x)$  operátor 3 pontos közelítő sémáját:

$$\frac{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)}{h^2} \approx U''(x).$$

Ahogy láttuk a fenti képletben a közelítés hibája  $h$ -val arányos.

A diszkretizált pontokat behelyettesítve a következő LER-t kapjuk:

$$\frac{U(x_{i+1}) - 2U(x_i) + U(x_{i-1}))}{h^2} = A(x_i) \quad (i = 1, \dots, N-1)$$
$$U(x_0) = U(x_N) = 0.$$

A bevezetett jelölésekkel:

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = h^2 A_i \quad (i = 1, \dots, N-1)$$

$$u_0 = u_N = 0.$$

Mátrix alakban

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = -h^2 \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{bmatrix}$$

$(N-1) \times (N-1)$  méretű LER (lineáris egyenletrendszer).

Megoldása a gyors Gauss-eliminációval (progonka módszerrel) történik, lásd a félév során.