Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen werden definiert als die Summe aus einer reellen Zahl a und dem Produkt einer weiteren reellen Zahl b mit der imaginären Zahl i.

$$c := a + b \cdot i$$

$$a, b \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{C}$$

Beispiel: $2 + i, 3 - i, 3i$

Imaginäre Zahlen

Imaginäre Zahlen wurden in der Mathematik definiert, um folgende Gleichung lösen zu können:

$x^2 + 1 = 0$

Umformung:

$$
\begin{align}
x^2 + 1 &= 0 & &| -1 \\
x^2 &= -1 & &| \sqrt{} \\
x &= \sqrt{-1}
\end{align}
$$

Imaginäre Zahlen

Problem:

Das Quadrat egal welcher (reellen) Zahl (negativ oder positiv) ergibt immer eine positive Zahl:

$$(-a)^2 = a^2$$

$$a^2 = a^2$$

Deshalb wird die imaginäre Zahl i definiert:

$i = \sqrt{-1}$ oder $i^2 = -1$

Reelle Zahlen

Komplexe Zahlen

Operationen mit komplexen Zahlen

Operationen mit komplexen Zahlen

$c = a + b \cdot i$

Addition:

$a + b = (x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$

Operationen mit komplexen Zahlen

Multiplikation:

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= (x + yi) \cdot (u + vi) \\
&= x(u + vi) + yi(u + vi) \\
&= xu + xvi + yiu + yivi \\
&= xu + yivi + xvi + yiu \\
&= xu + yvi^2 + xvi + yui \\
&= (xu + yvi^2) + (xvi + yui) \\
&= (xu - yv) + (xvi + yui)
\end{aligned}
$$

Operationen mit komplexen Zahlen

Konjugat:

$$c = a + b \cdot i$$

$$\bar{c} = a - b \cdot i$$

Inverse:

$$c_{inv} = \frac{1}{c}$$

$$c_{inv} \cdot c = 1$$

Operationen mit komplexen Zahlen

Absoluter Wert (Länge):

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Operationen mit komplexen Zahlen

Winkel:

$\tan(\phi) = \frac{b}{a}$

$\phi = \arctan(\frac{b}{a})$

Operationen mit komplexen Zahlen

Winkel - Alternative:

$\phi = \arctan 2(\mathrm{Im}(z), \mathrm{Re}(z)).$

$$\arctan 2(y, x) \mapsto \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0,\ y > 0 \\ \pm\pi & x < 0,\ y = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0,\ y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$