

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen werden definiert als die Summe aus einer reellen Zahl a und dem Produkt einer weiteren reellen Zahl b mit der imaginären Zahl i .

$$c := a + b \cdot i$$

$$a, b \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{C}$$

Beispiel: ...

Imaginäre Zahlen

Imaginäre Zahlen wurden in der Mathematik definiert, um folgende Gleichung lösen zu können:

$$x^2 + 1 = 0$$

Umformung:

...

Imaginäre Zahlen

Problem:

Das Quadrat egal welcher (reellen) Zahl (negativ oder positiv) ergibt immer eine positive Zahl:

$$(-a)^2 = a^2$$

$$a^2 = a^2$$

Deshalb wird die imaginäre Zahl i definiert:

$$i = \sqrt{-1} \text{ oder } i^2 = -1$$

Reelle Zahlen

Komplexe Zahlen

Operationen mit komplexen Zahlen

Operationen mit komplexen Zahlen

$$c = a + b \cdot i$$

Addition:

$$a + b = (x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$$

Operationen mit komplexen Zahlen

Multiplikation:

Operationen mit komplexen Zahlen

Konjugat:

$$c = a + b \cdot i$$

$$\bar{c} = a - b \cdot i$$

Inverse:

$$c_{inv} = \frac{1}{c}$$

$$c_{inv} \cdot c = 1$$

Operationen mit komplexen Zahlen

Absoluter Wert (Länge):

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Operationen mit komplexen Zahlen

Winkel:

$$\tan(\phi) = \frac{b}{a}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Operationen mit komplexen Zahlen

Winkel - Alternative:

$$\phi = \arctan 2(\operatorname{Im}(z), \operatorname{Re}(z)).$$

$$\arctan 2(y, x) \mapsto \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, y > 0 \\ \pm\pi & x < 0, y = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0, y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$