

# 计算水力学

李 丹

二〇二一年三月

本页刻意留白

# 前言

本讲义将简要介绍流体控制方程、有限差分法和线性方程组求解方法。

本页刻意留白

# 目录

## 第一章 绪论

|     |      |   |
|-----|------|---|
| 1.1 | 引言   | 1 |
| 1.2 | 课程内容 | 2 |

## 第二章 控制方程

|       |                    |    |
|-------|--------------------|----|
| 2.1   | 纳维-斯托克斯方程          | 3  |
| 2.1.1 | 连续性微分方程            | 3  |
| 2.1.2 | 动量方程               | 4  |
| 2.2   | 雷诺时均方程             | 8  |
| 2.2.1 | 紊流物理量时均值定义及性质      | 8  |
| 2.2.2 | 雷诺时均连续性方程          | 9  |
| 2.2.3 | 雷诺时均运动方程           | 9  |
| 2.2.4 | 零方程紊流模型            | 10 |
| 2.3   | 平面二维浅水方程           | 12 |
| 2.3.1 | 浅水假设和水深平均积分法则      | 12 |
| 2.3.2 | 沿水深平均的连续性方程        | 13 |
| 2.3.3 | 沿水深平均的运动方程         | 14 |
| 2.3.4 | 二维平面浅水方程不同形式       | 17 |
| 2.4   | 一维非恒定流基本控制方程       | 18 |
| 2.4.1 | 一维连续性方程            | 18 |
| 2.4.2 | 一维运动方程             | 19 |
| 2.4.3 | 圣维南方程不同形式          | 21 |
| 2.5   | 偏微分方程类型和性质         | 22 |
| 2.5.1 | 偏微分方程形式            | 22 |
| 2.5.2 | 控制方程的数学分类及其对数值解的影响 | 22 |
| 2.5.3 | 初始条件与边界条件          | 23 |

## 第三章 有限差分法

|     |      |    |
|-----|------|----|
| 3.1 | 泰勒展开 | 25 |
|-----|------|----|

|                       |             |    |
|-----------------------|-------------|----|
| 3.2                   | 离散基础知识      | 26 |
| 3.2.1                 | 一阶偏导数的差分表达式 | 27 |
| 3.2.2                 | 二阶偏导数的差分表达式 | 28 |
| 3.2.3                 | 待定系数法       | 30 |
| 3.2.4                 | 多项式拟合法      | 32 |
| 3.3                   | 差分方程        | 33 |
| 3.4                   | 显式方法和隐式方法   | 34 |
| 3.4.1                 | 显式方法        | 34 |
| 3.4.2                 | 隐式方法        | 37 |
| 3.5                   | 相容性、稳定性和收敛性 | 39 |
| <b>第四章 代数方程组的求解方法</b> |             |    |
| 4.1                   | 三对角矩阵直接求解方法 | 43 |
| 4.2                   | 代数方程组迭代求解方法 | 44 |
| 4.2.1                 | 雅可比迭代法      | 45 |
| 4.2.2                 | 高斯赛德尔迭代     | 46 |
| 4.2.3                 | 松弛迭代        | 47 |

# 第一章 绪论

## 1.1 引言

计算水力学作为一门独立的学科，形成于 20 世纪 60 年代中期，它的出现标志着工程流体力学发展的一个新阶段，是世界经济迅猛发展和科学技术水平不断提高，特别是高速、大容量电子计算机的快速更新换代为计算技术的发展提供了雄厚技术基础的一个硕果。计算水力学已经深入到几乎所有的技术科学领域，甚至某些社会科学方面。

自 19 世纪 Froude 奠定了物理比尺模型的理论基础，并首次应用于船舶阻力的比尺模型实验以后，物理比尺模型曾经是验证流体力学理论和研究工程水力学问题的唯一手段。但是随着工程的不断大型化，以及其他生物、化学过程的引入，物理比尺模型难以应用。数学模型也就应运而生了。

数学模型是将已知的水动力学及以水为载体的物质的传输过程的基本定律用数学方程进行描述。在一定的定解条件（初始条件和边界条件）下求解这些数学方程，从而达到模拟某个水动力学及以水为载体的物质输运过程的理论问题或工程实际问题。传统的水力计算也是一种数学模拟，但由于只涉及初等数学理论，能解决的问题较简单，还不能算是真正的数学模型。在 20 世纪 50 年代以后，数学模拟的基本理论已经建立，运用这些理论也曾解决过一些工程问题。但是，这些基本理论的真正应用是在电子计算机发明以后。1952~1954 年 Isaacson 和 Troesch 首次建立了俄亥俄河和密西西比河的部分河段的数学模型，并进行了实际洪水过程的模拟。但这以后，这方面的研究并没有得到发展。直到 20 世纪 60 年代中期，为了解决各种各样的设计和规划问题，数学模型再次得到重视。人们针对个别的工程问题建立了大量用途单一的数学模型并编制了相应的计算程序，这些模型可以用于解决一系列的工程问题。在此工作的基础上，70 年代中期，一种功能更加完善的系统数学模型出现了。这种系统模型综合了过去的用途单一的模型的功能，可以对整个流域、河湖、近海、建成的或规划中的水利工程等进行系统的模拟。这种系统模型的功能已远远超过了物理比尺模型。

计算水力学可以说是研究如何用计算机进行实验的科学。正确处理的边界条件相当于物理比尺模型中的固体边界与自由边界；数学模型中用以表征流体性质的参数，如粘度，密度等，则相当于物理比尺模型中所用的试验流体；而通过数值运算求得的计算域

内每一个特定的空间点处的待求函数值,如速度、压强,浓度等,则与物理比尺模型中利用测量仪器测得的值相对应。相对于物理比尺模型,数学模拟的优点有:

- 可以完全自由地改变或控制流体的性质;
- 可以进行严格的一维、二维和三维流动的试验;
- 可以完全自由地选择流体参数,如初始速度剖面等;
- 可以进行全尺度试验,不存在比尺效应;
- 可以进行物理和生物化学现象的各种理论近似处理的有效性和敏感性实验;
- 可以验证流体的本构方程的可靠性,如非牛顿流体的本构方程的验证。

数值模型所依据的是数学方程的离散形式,计算区域和方程的离散不仅引起量上的误差,而且处理不当常常改变了方程的性质。尽管目前多种紊流模型已被引入使用的计算,但都是基于一系列的假定的技术上得出的,模型越复杂,引入的实验常数越多,给出的也只是紊动的平均效应。紊动的结构及其基本特性仍是数学模型难以模拟的,必须依赖于物理模型的试验。所以、数值模型不能完全替代物理实验,更不能替代理论分析。实际上,理论分析、数学模型和物理实验的紧密结合才是解决理论问题和实际工程问题的有效途径。

计算水力学是涉及经典水力学、计算方程、数值分析、程序编制和资料处理等学科的一门综合性的交叉学科。它既不是水力学、也不是数值分析,具有自身的概念与特点,有其确定的应用领域。计算水力学用的偏微分方程组,但更注重方程中每一项所代表的物理意义,在什么条件下可以略去方程中的某些项而仍能确切地模拟某些特定的水力现象。方程中涉及的物理、生化参数的正确确定,边界条件的合理给定,均需要对所模拟的水动力学现象及以水为载体的物质的传输过程的物理和生化本质有深刻的理解。为了证明一个数学模型是水动力学现象及以水为载体的物质的传输过程的可靠模型,则又需要利用数学分析中的线性理论,对所用数学模式的收敛性、相容性和稳定性进行证明。而计算结果的质量又与资料的收集、整理和正确利用紧密相关,这往往取决于从事数学模拟的人的经验与技巧。

## 1.2 课程内容

本课程的主要内容分为三个部分:第二章主要介绍各类数学模型,包括三维纳维-斯托克斯方程,雷诺平均方程,二维浅水方程和一维圣维南方程组的推导;第三章主要介绍有限差分法;第四章主要介绍线性方程组的求解方法。



## 第二章 控制方程

### 2.1 纳维-斯托克斯方程

#### 2.1.1 连续性微分方程

连续性微分方程是质量守恒定律在流场中固定的无穷小微元控制体所导出的，即单位时间内净流入控制体内的质量等于单位时间内控制体内质量的增加量。如图2.1所示，任取一固定在流场中的无穷小正交六面体控制体，各边分别与直角坐标系各轴平行，各边边长分别为  $dx$ 、 $dy$  和  $dz$ 。控制体中心坐标为  $(x, y, z)$ ，密度为  $\rho$ ，速度为  $(u, v, w)$ 。 $\rho$ 、 $u$ 、 $v$  和  $w$  均为  $x, y, z, t$  的函数。

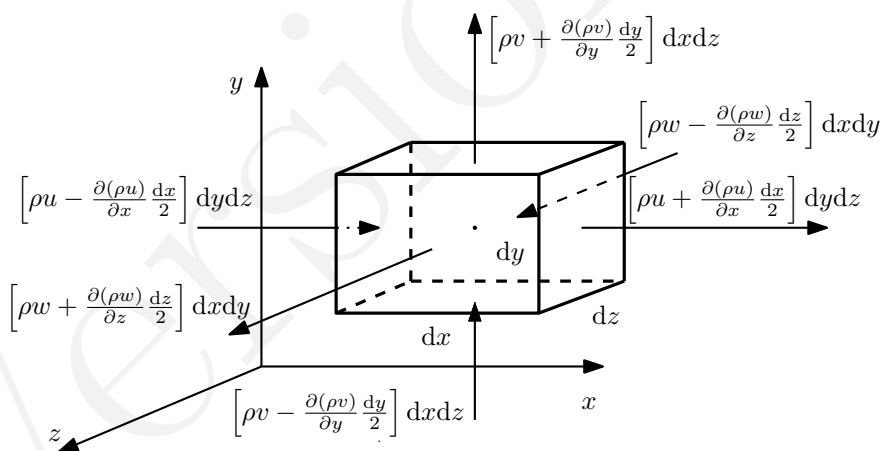


图 2.1: 固定在流场中的无穷小正交六面体控制体和质量流量示意图

流体可以穿过外表面流入或流出控制体。以  $x$  方向为例，流体从控制体的左侧和右侧两个面进出控制体。根据泰勒展开并略去高阶无穷小量，单位时间内从左侧面流入控制体的质量为

$$\left[ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

单位时间内从右侧面流出控制体的质量为

$$\left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

因此, 单位时间沿  $x$  方向净流入控制体的质量为

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz \quad (2.1)$$

同理, 单位时间内沿  $y$ 、 $z$  方向净流入控制体的质量分别为

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz \text{ 和 } -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

因此, 单位时间内净流入控制体内的质量为

$$-\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.2)$$

控制体的质量为  $\rho dx dy dz$ , 单位时间内控制体内质量的增加量为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dy dz) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (2.3)$$

根据质量守恒定律, 有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = -\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.4)$$

上式两边同除以  $dx dy dz$  后, 将等号右边所有项移到左边, 即得连续性微分方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

对均质不可压缩流体,  $\rho$  为常数, 连续性方程可写成

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

### 2.1.2 动量方程

动量方程是牛顿第二定律或动量守恒定律得数学表达式。如图2.2所示, 考虑一个随流运动的无穷小正交六面体流体微团。微团中心点所在坐标为  $(x, y, z)$ , 中心点密度为  $\rho$ , 速度为  $(u, v, w)$ , 压强为  $p$ 。则该微团的质量为

$$m = \rho dx dy dz \quad (2.7)$$

$x$  方向的牛顿第二定律为

$$F_x = m a_x \quad (2.8)$$

式中,  $F_x$  和  $a_x$  分别是微团所受外力和加速度在  $x$  方向的分量。

随流运动的流体微团的  $a_x$  等于  $u_x$  随时间的变化率, 即速度的随体导数

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.9)$$

流体微团在  $x$  方向所受外力有两类: 体积力  $F_x$  和表面力  $T_x$ 。假定作用在微团上的单位质量力为  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ 。  $x$  方向所受的体积力为:

$$F_x = \rho f_x dx dy dz \quad (2.10)$$

如图2.2所示, 表面力  $T_x$  是直接作用在六个外表面上的力, 包括: (1) 作用在外表面上的压力; (2) 作用在外表面上正压力和剪切力。在  $x$  方向上, 只有左侧面和右侧面的压力, 分别为  $(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}) dy dz$  和  $-(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}) dy dz$ 。作用在六个外表面上在  $x$  方向上的正应力和切应力共 6 个, 即左侧面上的  $-(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}) dy dz$ , 右侧面上的  $(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}) dy dz$ , 前侧面上的  $(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}) dx dy$ , 后侧面上的  $-(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}) dx dy$ , 底侧面上的  $-(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}) dx dz$ , 顶侧面上的  $(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}) dx dz$ , 上述应力表述中, 下标第一项表示该作用面的法向方向, 第二项表示应力的正向方向, 正负号表示力的方向。

$$\begin{aligned} T_x &= \left[ \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right] dy dz + \\ &\quad \left[ \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) - \left( \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right] dy dz + \\ &\quad \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \right] dx dz + \\ &\quad \left[ \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \right] dx dy \\ &= \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (2.11)$$

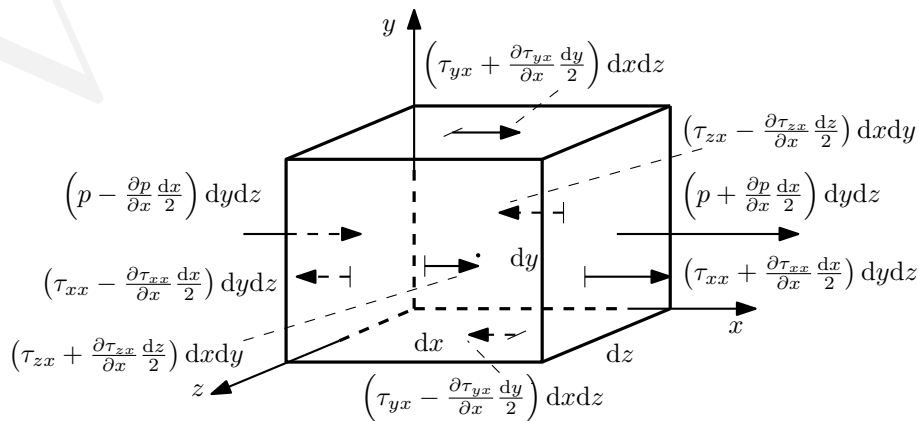


图 2.2: 随流运动的流体微团在  $x$  方向表面力受力分析

将式(2.9)、(2.10)和(2.11)代入式 (2.8), 可得到  $x$  方向的动量方程。同理可得,  $y$  和  $z$  方向的动量方程。最终得到的动量方程为

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.12)$$

根据数学知识,

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{u}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(uu)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(uv)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(uw)}{\partial z} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{u}) = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(vu)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(vv)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(vw)}{\partial z} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{u}) = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(wu)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(wv)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(ww)}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.13)$$

将式(2.13)代入式(2.12)中,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(uu)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(uv)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(uw)}{\partial z} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(vu)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(vv)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(vw)}{\partial z} &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(wu)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(wv)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(ww)}{\partial z} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.14)$$

在 17 世纪晚期, 牛顿给出了牛顿内摩擦定律, 即流体内部切应力正比于剪切变形速率。1845 年, 斯托克斯给出如下关系式

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (2.15)$$

式中,  $\mu$  为流体动力粘滞系数,  $\lambda$  是第二粘滞系数。斯托克斯假定

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.16)$$

将式(2.15)和(2.16)代入式 (2.14), 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial\rho(uu)}{\partial x} + \frac{\partial\rho(uv)}{\partial y} + \frac{\partial\rho(uw)}{\partial z} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial\rho(vu)}{\partial x} + \frac{\partial\rho(vv)}{\partial y} + \frac{\partial\rho(vw)}{\partial z} &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial\rho(wu)}{\partial x} + \frac{\partial\rho(wv)}{\partial y} + \frac{\partial\rho(ww)}{\partial z} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (2.17c)$$

式(2.17a)中第二行的各项可以进一步展开为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})] \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})] \end{aligned} \quad (2.18)$$

对均质不可压缩流体, 其连续性方程为  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , 上式最后得到

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.19)$$

对(2.17)的后两个公式采用同样的处理方式, 并代入均质不可压缩条件, 式(2.17)可以写

成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.20a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.20b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.20c)$$

或写成矢量形式为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.21)$$

## 2.2 雷诺时均方程

### 2.2.1 紊流物理量时均值定义及性质

根据大量相关实验观测，紊流具有有涡性、不规则性、耗能性、连续性、三维性以及非定常性等特征。因此，紊流运动要素都具有随机性。为了分析方便，紊流运动要素的瞬时值常被分解成时均值和脉动值。任一运动要素  $\phi$  的时均值定义为：

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt \quad (2.22)$$

其中，时间间隔  $\Delta t$  相对于紊流的随机脉动周期而言足够大，但相对于流场的各种时均量的缓慢变化周期来说，应足够小。如果时均值随时间变化，成为非稳态的时均紊流；如果时均值不随时间变化，成为准稳态紊流，简称稳态紊流。

运动要素的瞬时值  $\phi$ ，时均值  $\bar{\phi}$  及脉动值  $\phi'$  之间有如下关系：

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (2.23)$$

设  $\phi$  和  $f$  是两个瞬时值， $\bar{\phi}$  和  $\bar{f}$  为相应的时均值， $\phi'$  和  $f'$  为相应的脉动值。按照式(2.22)和 (2.23)，下列基本关系成立：

$$\begin{aligned} \overline{\phi'} &= 0 & \bar{\bar{\phi}} &= \bar{\phi} & \overline{\bar{\phi} + \phi'} &= \bar{\phi} \\ \overline{\phi f} &= \bar{\phi} \bar{f} & \overline{\phi f'} &= 0 & \overline{\phi' f'} &= \overline{\phi' f'} \\ \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} & \overline{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}} &= \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_i^2} & \overline{\frac{\partial \phi'}{\partial x_i}} &= 0 & \overline{\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x_i^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

### 2.2.2 雷诺时均连续性方程

将  $u$ 、 $v$  和  $w$  表示成时均值和脉动值之和, 并带入连续性方程(2.6), 并做时均运算,

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} = 0$$

运用式(2.24), 可得

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.25)$$

上式表明, 紊流速度的时均值仍满足连续性方程。

### 2.2.3 雷诺时均运动方程

以式(2.20a)给出的  $x$  方向的运动方程为例, 采取类似于连续性方程的处理, 有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} + u')^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u} + u')(\bar{w} + w')}{\partial z} \\ &= \bar{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

运用式(2.24), 可得

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} = \bar{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right)$$

将上式左侧脉动值乘积的时均值移到等号右侧, 得:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = \bar{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \left( \frac{\partial \bar{u}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \quad (2.26)$$

同理可得,  $y$  和  $z$  方向的雷诺平均方程为:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial z} = \bar{f}_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \left( \frac{\partial \bar{v}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{w}}{\partial z} = \bar{f}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \left( \frac{\partial \bar{w}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'w'}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \quad (2.28)$$

对式(2.26)至(2.28)分别乘上密度  $\rho$ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{w}}{\partial z} = \\ \rho \bar{f}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left[ \frac{\partial (-\rho \overline{u' u'})}{\partial x} + \frac{\partial (-\rho \overline{u' v'})}{\partial y} + \frac{\partial (-\rho \overline{u' w'})}{\partial z} \right] + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{w}}{\partial z} = \\ \rho \bar{f}_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \left[ \frac{\partial (-\rho \overline{v' u'})}{\partial x} + \frac{\partial (-\rho \overline{v' v'})}{\partial y} + \frac{\partial (-\rho \overline{v' w'})}{\partial z} \right] + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{w}}{\partial z} = \\ \rho \bar{f}_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \left[ \frac{\partial (-\rho \overline{w' u'})}{\partial x} + \frac{\partial (-\rho \overline{w' v'})}{\partial y} + \frac{\partial (-\rho \overline{w' w'})}{\partial z} \right] + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

式(2.29)至(2.31)即紊流时均流动的运动微分方程, 由雷诺导出, 通常称为雷诺时均方程。与纳维-斯托克斯方程相比, 雷诺时均方程多出了紊动附加应力(也称雷诺应力)项  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  分别对应  $x, y$  和  $z$  方向。当  $i = j$  时, 为紊动产生的时均附加正应力, 当  $i \neq j$  时, 为紊动产生的时均附加切应力。

在雷诺时均方程组中, 紊动附加应力共有 9 项, 其中只有 6 个独立变量, 另外还有 4 个变量 ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  和  $\bar{p}$ ), 而雷诺时均方程组只有 4 个方程。因此, 雷诺时均方程不封闭, 必须附加方程或条件才能求解出上述 10 个变量。根据附加方程或条件数目不同, 用来封闭的紊流模型可分为零方程模型、一方程模型、二方程模型和代数应力模型等。在水动力学数值模拟中, 应用较多的是零方程模型。下面主要介绍零方程模型。其他紊流模型可参考其他教材。

## 2.2.4 零方程紊流模型

布辛涅斯克类比层流粘性力等于动力粘滞系数  $\mu$  乘以旋转角速度的二倍, 提出雷诺应力等于紊动动力粘滞系数(或称涡粘性系数)  $\eta$  乘以时均角速度的二倍, 即

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \eta \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.32)$$



类似层流运动粘滞系数  $\nu$ ，定义  $\nu_t = \eta/\rho$  为紊动运动粘滞系数。布辛涅斯克将紊动附加应力与时均流速联系起来，使雷诺时均方程组封闭，为解决紊流问题开辟了一条很好的途径。但是，布辛涅斯克假定  $\eta$  为常量，与实际有一定出入。普朗特于 1952 年提出动量传递理论和掺长假设，给出了计算二维恒定均匀紊流附加应力的半经验公式

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.33)$$

式中， $l$  为掺长。普朗特认为，在近壁区，可以假定讨论点的掺长与该点至壁面的距离成正比，即

$$l = \kappa y \quad (2.34)$$

式中， $\kappa$  为卡门常数，由实验资料确定。普朗特掺长理论在近壁区给出的结果同实际资料吻合较好，因而得到广泛应用。

根据布辛涅斯克假定，雷诺时均方程可以变为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} &= \\ \bar{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z} &= \\ \bar{f}_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{w}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{w}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w}\bar{w})}{\partial z} &= \\ \bar{f}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

层流的动力粘滞系数  $\mu$  一般远小于紊动动力粘滞系数  $\eta$ ，因此上式中层流阻力项可以忽略，雷诺时均方程为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.36a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} = \bar{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \quad (2.36b)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z} = \bar{f}_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) \quad (2.36c)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{w}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{w}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w}\bar{w})}{\partial z} = \bar{f}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \quad (2.36d)$$

## 2.3 平面二维浅水方程

天然河道水流运动一般都属于三维流动, 运动要素即沿程变化, 又沿水深和河宽方向变化。由于三维水流运动比较复杂, 河流数值模拟常用的一种简化方法是将运动要素沿水深方向平均, 把三维问题转化为平面二维问题。本节基于一定条件将三维流动的雷诺时均运动微分方程简化为平面二维浅水方程。

### 2.3.1 浅水假设和水深平均积分法则

#### 浅水假设

在河道、湖泊或水库水流中, 水平尺度一般远大于垂向尺度。如果垂向加速度与重力加速度相比很小, 则可以忽略垂向加速度, 流速等水力参数沿垂向的变化常采用其垂向平均值, 并假定沿水深方向的动水压强分布符合静水压强分布。三维流动的雷诺时均微分方程式 (2.36a)-(2.36d) 可简化为:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.37a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \quad (2.37b)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) \quad (2.37c)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho g \quad (2.37d)$$

#### 水深积分平均法则

将式(2.37)沿水深积分平均, 即可得到沿水深平均的平面二维流动的基本方程。在沿水深积分平均过程中, 采用以下定义和公式:

(1) 定义水深为

$$H = z_s - z_b \quad (2.38)$$

式中,  $H = H(x, y, t)$  为水深,  $z_s = z_s(x, y, t)$ 、 $z_b = z_b(x, y, t)$  分别为某一基准面下的水面高程和河床高程 (见图2.3)

(2) 定义沿水深平均流速  $U$  和  $V$

$$U = \frac{1}{H} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz \quad V = \frac{1}{H} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz \quad (2.39)$$

式中, 下标  $i$  取 1, 2 和 3 分别对应  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的速度分量。

(3) 莱布尼兹公式

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b f dz = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i} dz + f|_b \frac{\partial b}{\partial x_i} - f|_a \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (2.40)$$

式中,  $x_i = x, y, t$ 。  $a$ 、 $b$  和  $f$  都是  $x_i$  的函数。

(4) 自由表面及河床底部运动学条件为:

$$\bar{w}|_{z_s} = \frac{Dz_s}{Dt} = \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{v}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (2.41)$$

$$\bar{w}|_{z_b} = \frac{Dz_b}{Dt} = \frac{\partial z_b}{\partial t} + \bar{u}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.42)$$

### 2.3.2 沿水深平均的连续性方程

采用上述定义和公式对连续性方程(2.37a)沿水深积分平均得:

$$\int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (2.43)$$

根据式(2.40), 式(2.43)中前两项分别可写成

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.44)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz - \bar{v}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{v}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.45)$$

式(2.43)中最后一项

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} dz = \bar{w}|_{z_s} - \bar{w}|_{z_b} \quad (2.46)$$

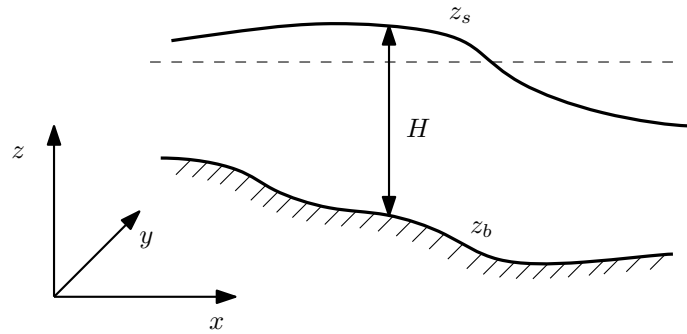


图 2.3: 水位基准示意图

将式(2.44), (2.45)和(2.46) 代入(2.43), 并利用自由表面及河床底部运动学条件式(2.41)和(2.42), 可得

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) dz \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \\
 & \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz - \bar{v}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{v}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \\
 & \bar{w}|_{z_s} - \bar{w}|_{z_b} \\
 &= \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} + \frac{\partial z_s}{\partial t} - \frac{\partial z_b}{\partial t} = 0
 \end{aligned}$$

最后得

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} = 0 \quad (2.47)$$

也可以写成

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H\mathbf{U}) = 0 \quad (2.48)$$

### 2.3.3 沿水深平均的运动方程

以  $x$  方向为例, 式(2.37b)沿水深积分为

$$\int_{z_b}^{z_s} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \right] dz = 0 \quad (2.49)$$

式(2.49)中包含了非恒定流项积分、对流项积分、压力项积分和阻力项积分。接下来分项讨论。

(1) 非恒定流项积分

$$\begin{aligned}
 \int_{z_0}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial HU}{\partial t} - \bar{u}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial t}
 \end{aligned} \quad (2.50)$$

(2) 对流项积分

首先将时均流速按照式(2.51)进行分解

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= u + \Delta \bar{u} \\
 \bar{v} &= v + \Delta \bar{v}
 \end{aligned} \quad (2.51)$$

式中,  $\Delta\bar{u}$  和  $\Delta\bar{v}$  分别为  $x$  和  $y$  的时均流速与垂线平均流速的差值。

对流项中第一项的积分

$$\int_{z_0}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_s} \bar{u}\bar{u} dz - \bar{u}\bar{u}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}\bar{u}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.52)$$

式中

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_s} \bar{u}\bar{u} dz &= \int_{z_0}^{z_s} (u + \Delta\bar{u})(u + \Delta\bar{u}) dz \\ &= \int_{z_0}^{z_s} (uu + 2u\Delta\bar{u} + \Delta\bar{u}\Delta\bar{u}) dz \\ &= HUU + \int_{z_0}^{z_s} \Delta\bar{u}\Delta\bar{u} dz \\ &= \beta_{xx} HUU \end{aligned}$$

其中

$$\beta_{xx} = 1 + \frac{\int_{z_0}^{z_s} \Delta\bar{u}\Delta\bar{u} dz}{Huu} \quad (2.53)$$

是由于流速沿垂线分布不均匀而引入的修正系数, 类似于水力学中的动量修正系数。  $\beta_{xx}$  的取值一般在 1.02 与 1.05 之间, 可近似取为 1.0。因此

$$\int_{z_0}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} dz = \frac{\partial HUU}{\partial x} - \bar{u}\bar{u}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}\bar{u}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.54)$$

同理, 对流项的第二项可写为

$$\int_{z_0}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} dz = \frac{\partial HUV}{\partial y} - \bar{u}\bar{v}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{u}\bar{v}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.55)$$

对流项的第三项

$$\int_{z_0}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} dz = \bar{u}\bar{w}|_{z_s} - \bar{u}\bar{w}|_{z_b} \quad (2.56)$$

将非恒定流项和对流项积分相加, 并利用自由表面和河床底部运动学条件可得:

$$\int_{z_b}^{z_s} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \right] dz = \frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial HUU}{\partial x} + \frac{\partial HUV}{\partial y} \quad (2.57)$$

(3) 压力项积分

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_s} \bar{p} dz - \bar{p}|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{p}|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_s} \rho g(z_s - z) dz - \rho g(z_s - z)|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \rho g(z_s - z)|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ &= \rho g H \frac{\partial H}{\partial x} + \rho g H \frac{\partial z_b}{\partial x} = \rho g H \frac{\partial z_s}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.58)$$

## (4) 阻力项积分

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} dz &= \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u} \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u} \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 HU}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\bar{u} \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u} \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

类似地

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} dz = \frac{\partial^2 HU}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\bar{u} \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{u} \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \tag{2.60}$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} dz = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z_s} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z_b} \tag{2.61}$$

将式(2.59)至(2.61)相加, 得

$$\begin{aligned}
&\int_{z_b}^{z_s} \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) dz = \\
&\nu_t \left( \frac{\partial^2 HU}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 HU}{\partial y^2} \right) \\
&- \nu_t \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} \bar{u} \Big|_{z_s} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} \bar{u} \Big|_{z_s} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z_s} \right] \\
&+ \nu_t \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} \bar{u} \Big|_{z_b} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} \bar{u} \Big|_{z_b} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z_b} \right]
\end{aligned} \tag{2.62}$$

式(2.62)中右边后两项分别为由底部床面阻力和自由表面风阻力引起的阻力项, 通常可以式(2.63)表示:

$$g \frac{n^2 U \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{1/3}} - C_w \frac{\rho_a}{\rho} \omega^2 \cos \beta \tag{2.63}$$

式中,  $C_w$  为无因此风应力系数,  $\rho_a$  为空气密度,  $\omega$  为风速,  $\beta$  为风向与  $x$  方向的夹角。最后,  $x$  方向的运动方程为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial HUU}{\partial x} + \frac{\partial HUV}{\partial y} = \\
- gH \frac{\partial z_s}{\partial x} - g \frac{n^2 U \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{1/3}} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 HU}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 HU}{\partial y^2} \right) + C_w \frac{\rho_a}{\rho} \omega^2 \cos \beta
\end{aligned} \tag{2.64}$$

同理可得,  $y$  方向运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial HV}{\partial t} + \frac{\partial HUV}{\partial x} + \frac{\partial HVV}{\partial y} = \\ -gH \frac{\partial z_s}{\partial y} - g \frac{n^2 V \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{1/3}} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 HV}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 HV}{\partial y^2} \right) + C_w \frac{\rho_a}{\rho} \omega^2 \sin \beta \end{aligned} \quad (2.65)$$

当自由表面风应力影响较小时, 风应力项可以忽略。此外, 当模拟区域尺度较大, 还要考虑地球自转的影响, 可在方程(2.64)和(2.65)右边分别加入科氏力。

$$\begin{aligned} f_x &= 2\omega \sin \varphi U \\ f_y &= 2\omega \sin \varphi V \end{aligned} \quad (2.66)$$

式中,  $\omega$  为地球自转角速度,  $\varphi$  为模拟区域所处纬度。

根据推导过程中所采用的假定条件, 在使用二维浅水方程时应注意以下问题:

1. 方程推导中引用了牛顿流体所满足的本构关系式, 因此上述方程只适用于牛顿流体, 对类似高含沙水流的非牛顿流体不适用。
2. 方程推导中对流体做了均质不可压的假设, 因此上述方程只能在含沙量较小的情况下近似使用, 当含沙量较大时, 应考虑密度变化的影响。
3. 在垂向积分过程中, 略去流速等水力参数沿垂直方向的变化, 并假定沿水深方向的动水压强分布符合静水压强分布。因此所研究问题的水平尺度应远大于垂向尺度, 流速等水力参数沿垂直方向的变化较之沿水平方向的变化要小得多。

### 2.3.4 二维平面浅水方程不同形式

忽略风应力和科氏力的二维平面浅水方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial HUU}{\partial x} + \frac{\partial HUV}{\partial y} &= -gH \frac{\partial z_s}{\partial x} - g \frac{n^2 U \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{1/3}} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 HU}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 HU}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial HV}{\partial t} + \frac{\partial HUV}{\partial x} + \frac{\partial HVV}{\partial y} &= -gH \frac{\partial z_s}{\partial y} - g \frac{n^2 V \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{1/3}} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 HV}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 HV}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

当床面阻力占主导作用时，还可进一步忽略紊动阻力项。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial(HUU + gH^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial HUV}{\partial y} &= -gH \frac{\partial z_b}{\partial x} - g \frac{n^2 U \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{1/3}} \\ \frac{\partial HV}{\partial t} + \frac{\partial HUV}{\partial x} + \frac{\partial(HVV + gH^2/2)}{\partial y} &= -gH \frac{\partial z_b}{\partial y} - g \frac{n^2 V \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{1/3}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

此外，为了书写的简化，用  $h$  替代  $H$ ， $u$  替代  $U$ ， $v$  替代  $V$ ，定义  $x$  和  $y$  方向的流量分别为  $q_x = hu$  和  $q_y = hv$ ，上式可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial(uq_x + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial vq_y}{\partial y} &= -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - g \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \\ \frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial uq_y}{\partial x} + \frac{\partial(vq_y + gh^2/2)}{\partial y} &= -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} - g \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \end{aligned} \quad (2.69)$$

上式的向量形式为：

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_f \quad (2.70)$$

其中， $\mathbf{q}$  为守恒变量向量， $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{g}$  分别为  $x$  和  $y$  方向的通量向量， $\mathbf{S}_b$  和  $\mathbf{S}_f$  分别为河床底坡和阻力源项向量。这些向量的具体元素为：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \\ -g \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

## 2.4 一维非恒定流基本控制方程

### 2.4.1 一维连续性方程

如图2.4所示，在明槽非恒定流中，沿水流流动方向取长为  $dx$  的微小流段。流段进口 1-1 断面流量为  $Q$ ，在  $\Delta t$  时段内，从 1-1 断面进入流段的液体质量为  $\rho Q \Delta t$ 。流段出口 2-2 断面流量为  $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$ ，在  $\Delta t$  时段内，从 2-2 断面流出的液体质量为  $\rho Q \Delta t + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx \Delta t$ 。该时段内进出此流段的液体质量差为  $-\rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx \Delta t$ 。



时段内的质量差表现为流段内的槽蓄量变化。在起始时刻,流段内的槽蓄量为  $\rho \bar{A} dx$ 。而经过  $\Delta t$  时段后,流段内的槽蓄量为  $\rho \left( \bar{A} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \Delta t \right) dx$ 。  $\Delta t$  时段内,流段内的槽蓄量变化量为  $\rho \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \Delta t dx$ 。其中  $\bar{A}$  为微小流段的平均过水面积。当流段内过水断面面积变化较小时,可直接用 1-1 断面段面积  $A$  来替代  $\bar{A}$ 。

因此,根据质量守恒原理,进出该流段的液体质量差等于流段内槽蓄量改变量,即

$$-\rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx \Delta t = \rho \frac{\partial A}{\partial t} dx \Delta t$$

化简后得到明槽一维非恒定流连续性方程

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.72)$$

如果在该流段内有旁侧入流或出流,且单位长度旁侧入流流量为  $q$  ( $q > 0$  为入流,  $q < 0$  为出流),考虑旁侧入流得明槽一维非恒定流连续性方程为

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (2.73)$$

### 2.4.2 一维运动方程

设坐标轴  $x$  方向与水流流动方向一致,根据牛顿第二定律建立运动方程。为分析简单起见,首先考虑棱柱体明槽(如图2.5)的情况。

作用在 1-1 断面的所有外力在  $x$  方向的分力有:

(1) 总动水压力。

设压强分布服从静水压强分布,则作用在 1-1 断面的水压力

$$P = \int_0^h \rho g (h - y) \xi(y) dy \quad (2.74)$$

式中,  $\xi(y)$  为过水断面上距渠底  $y$  处的宽度。作用于 2-2 断面的水压力为  $P + \frac{\partial P}{\partial x} dx$ 。

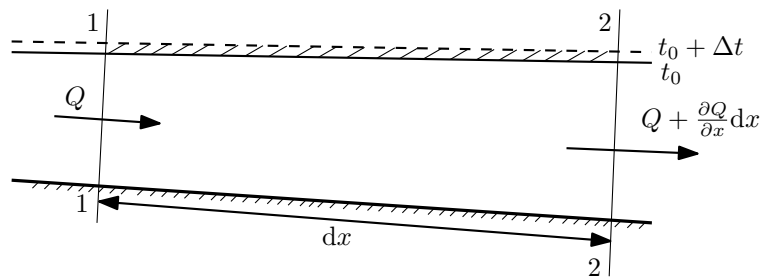


图 2.4: 一维水流运动示意图



图 2.5: 一维水流运动示意图

则沿  $x$  方向的总动水压力

$$\begin{aligned} \sum P &= P - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \\ &= -\gamma dx \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^h \xi(y) dy + \int_0^h (h-y) \frac{\partial \xi(y)}{\partial x} dy \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

因假定明槽为棱柱体明槽，有  $\frac{\partial \xi(y)}{\partial x} = 0$ 。则有

$$\sum P = -\gamma A \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (2.76)$$

(2) 重力

$$dG_x = dG \sin \alpha = -\gamma A dx \frac{\partial z}{\partial x} \quad (2.77)$$

式中， $\alpha$  为坐标轴  $x$  与水平方向的夹角， $A$  为过水断面面积。

(3) 侧壁面上的阻力

$$dT = \tau_0 \chi dx = \gamma R J \chi dx = \gamma A J dx \quad (2.78)$$

式中， $\chi$  为过水断面湿周， $R$  为过水断面水力半径， $J$  为水力坡度， $\tau_0 = \gamma R J$  为侧壁表面平均切应力。

其次，由于流速  $U$  是  $x$  和  $t$  的函数，则水流沿  $x$  方向的加速度  $a_x$  为

$$a_x = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.79)$$

微小流段内的水体质量为  $dm = \rho A dx$ 。

根据牛顿第二定律，有  $\sum F_x = dm a_x$ ，即

$$-\gamma A \frac{\partial h}{\partial x} dx - \gamma A \frac{\partial z}{\partial x} dx - \gamma A J dx = \rho A dx \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (2.80)$$

上式两边同除以  $\gamma A dx$  并整理得：

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + J = 0 \quad (2.81)$$

式(2.81)即为棱柱体明槽非恒定流运动方程得一般形式。对于非棱柱体明槽（比如河槽向下游缩窄或展宽），则两岸壁将对微小流段水体作用一附加压力，该附加压力可表示为

$$P' = \int_0^h \left[ \rho g(h-y) \frac{\partial \xi(y)}{\partial x} dx \right] dy \quad (2.82)$$

将附加压力代式(2.75)入中,恰好与该式最后一项抵消。因此对于非棱柱体明槽,式(2.81)仍适用。

### 2.4.3 圣维南方程不同形式

连续性方程(2.72)和运动方程(2.81)构成了描述明槽非恒定渐变流的圣维南方程组。在实际应用中,为了使用方便,常对式(2.72)和 (2.81)进行改写,得到不同因变量组合的圣维南方程组。

(1) 以水位  $z$  和流量  $Q$  为因变量的圣维南方程组

$$\begin{aligned} B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + \left[ gA - B \left( \frac{Q}{A} \right)^2 \right] \frac{\partial z}{\partial x} &= \left( \frac{Q}{A} \right)^2 \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_z - gA \frac{Q^2}{K^2} \end{aligned} \quad (2.83)$$

(2) 以水深  $h$  和流量  $Q$  为因变量的圣维南方程组

$$\begin{aligned} B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + \left[ gA - B \left( \frac{Q}{A} \right)^2 \right] \frac{\partial h}{\partial x} &= \left( \frac{Q}{A} \right)^2 \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_h - gA \frac{Q^2}{K^2} \end{aligned} \quad (2.84)$$

(3) 以水位  $z$  和流量  $U$  为因变量的圣维南方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + U \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{A}{B} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{B} \left( q - BiU - U \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_z \right) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} &= -g \frac{U^2}{C^2 R} \end{aligned} \quad (2.85)$$

(4) 以水深  $h$  和流量  $U$  为因变量的圣维南方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{A}{B} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{B} \left( q - U \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_h \right) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} &= g \left( i - \frac{U^2}{C^2 R} \right) \end{aligned} \quad (2.86)$$

(5) 以过水断面面积  $A$  和  $Q$  为因变量的圣维南方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) &= -gA \frac{\partial h}{\partial x} - gA \frac{\partial z_b}{\partial x} - g \frac{n^2 |U|}{R^{4/3}} Q\end{aligned}\quad (2.87)$$

或

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) &= -gA \frac{\partial Z}{\partial x} - g \frac{n^2 Q |Q|}{AR^{4/3}}\end{aligned}\quad (2.88)$$

## 2.5 偏微分方程类型和性质

### 2.5.1 偏微分方程形式

本章前几节所推导的方程都属于偏微分方程，形式各异。对同一模型建立的控制方程也有多种不同的形式。在数值计算中，若控制方程的对流项采用散度的形式来表示，这类方程被称为守恒型的控制方程，否则被称为非恒定形式。

理论上，从微元体角度来看，守恒型微分方程和非守恒型微分方程是等价的，都是同一物理定律的数学表示。但是，数值计算是对有限大小的计算单元进行的，对有限大小的计算体积，两种形式的控制方程有不同的特性。守恒型微分方程允许流动参数在计算单元或控制体内部存在间断；而非守恒型微分方程要求流动参数是可微的。因此，基于守恒型微分方程的数值方法，可以直接用来计算有间断（如激波）的流场，且不用对间断进行任何特殊处理。这类数值方法被称为激波捕捉方法。而基于非守恒型微分方程的数值方法，一般无法正确的计算有间断的流场。为了处理有间断的流动，这类方法必须与激波装配方法联合使用。简单来说，激波装配方法是把间断从流场中分离出来，当作流场的边界来处理。

### 2.5.2 控制方程的数学分类及其对数值解的影响

根据偏微分方程理论，偏微分方程可以被划分成不同的类型，方程的类型决定了定解条件的提法、解的性质以及数值求解过程。

对于二阶二元的拟线性偏微分方程，其数学上的一般形式为：

$$a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g(x, y) \quad (2.89)$$

式中, 下标  $x, y$  表示对该自变量的偏导数, 系数  $a, b, c, d, e, f$  是因变量  $\phi$  及自变量  $x, y$  的函数。偏微分方程的分类可用下式进行判别:

$$b^2 - 4ac \quad (2.90)$$

**双曲型微分方程:**  $b^2 - 4ac > 0$ , 过区域内任一点有两条特征线。两条特征线交叉通过该点, 在该点之前是该点的依赖域, 之后是该点的影响域。

**抛物型微分方程:**  $b^2 - 4ac = 0$ , 过区域内任一点有一条特征线。过该点的特征线将求解区域分成两部分, 计算从已知的初值处罚, 逐步向前推进, 依次获得式和与给定边界条件的解。

**椭圆型微分方程:**  $b^2 - 4ac < 0$ , 过区域内任一点没有特征线。区域内任一点的影响区域是整个求解区域。

### 2.5.3 初始条件与边界条件

初始条件是所研究现象在过程开始时刻的各个求解变量的空间分布, 必须予以给定。需要注意的是, 稳态问题不需要初始条件, 但是在求解之前需要对求解变量进行初始化。

边界条件是在求解区域的边界上所求解的变量或其一阶导数随空间及时间的变化规律。需要注意的是, 在固体边界上对速度取无滑移边界条件, 即在固体边界上流体的速度等于固体表面的速度, 当固体表面静止时, 有:

$$u = v = w = 0 \quad (2.91)$$

另外, 在数值计算中有些边界并不是实际的物理边界, 而是计算边界, 即根据计算需求而虚拟划定的边界。这类边界上边界条件如何给定与求解的控制方程和实际物理问题有关。

本页刻意留白

## 第三章 有限差分法

上一章推导的控制方程的解析解，如果可以得出，将可以给出所有因变量在求解域上连续函数。然而，除了个别极其简单的流动情况，这类方程的解析解往往很难获得。因此，我们只能退而求其次，通过将连续的空间和时间分割成不连续的散点（分别称为网格点和时间节点），并将控制方程在这些散点上离散，得出与原方程近似但可求解的代数方程组，最终得出原方程在这些散点上的近似解。

在实际的数值模拟过程中，网格点或时间节点的划分是不均匀的。为了后续推导方便，本章假定网格点和时间节点的间距都是均匀分布的。此外，本章只关注结构网格，对非结构网格可参见其他参考书。

### 3.1 泰勒展开

考虑一个  $x$  的连续函数  $f(x)$  在  $x$  处的所有阶导数都存在。那么， $f$  在点  $x + \Delta x$  处的值可以通过在点  $x$  处的泰勒级数展开来估算。

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \frac{\Delta x^n}{n!} + \cdots \quad (3.1)$$

假定  $f(x) = \sin 2\pi x$ ，且已知  $x = 0.2$  处，函数值  $f = 0.9511$ 。我们希望估算  $x + \Delta x = 0.22$  处的函数值。根据方程表达式，该点的精确值为 0.9823。首先，我们利用泰勒级数展开的第一项来估算，有

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &\approx f(x) \\ f(0.22) &\approx f(0.2) = 0.9511 \end{aligned} \quad (3.2)$$

估算值的相对误差为  $(0.9823 - 0.9511)/0.9823 = 3.176\%$ 。接着，我们利用展开式的前两项来估算，有

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &\approx f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \\ f(0.22) &\approx f(0.2) + 2\pi \cos [2\pi(0.2)](0.02) \\ &\approx 0.9511 + 0.388 = 0.9899 \end{aligned} \quad (3.3)$$

估算值的相对误差为  $(0.9899 - 0.9823)/0.9823 = 0.775\%$ ，相比于第一次的估算值更加接近精确值。最后，为了获得更加精确的估算值，我们可以利用展开式的前三项，有

$$\begin{aligned}
 f(x + \Delta x) &\approx f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} \\
 f(0.22) &\approx f(0.2) + 2\pi \cos[2\pi(0.2)](0.02) - 4\pi^2 \sin[2\pi(0.2)] \frac{0.02^2}{2} \\
 &\approx 0.9511 + 0.0388 - 0.0075 \\
 &\approx 0.9824
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

估算值的相对误差为  $(0.9824 - 0.9823)/0.9823 = 0.01\%$ ，即仅用泰勒展开式的前三项就可以得到一个非常接近精确值的估算值。

## 3.2 离散基础知识

图3.1中给出了一个结构网格的例子。图中，网格点，即两条网格线的交点，可以用  $(i, j)$  进行标示，其中， $i$  是沿  $x$  方向的索引， $j$  是沿  $y$  方向的索引。假定图中  $P$  的索引为  $(i, j)$ ，那么，紧邻  $P$  右边的点的索引为  $(i + 1, j)$ ，紧邻  $P$  左边的点的索引为  $(i - 1, j)$ ，紧邻  $P$  上边的点的索引为  $(i, j + 1)$ ，紧邻  $P$  下边的点的索引为  $(i, j - 1)$ 。对非恒定流中，离散的当前时间层用上标  $n$  来标记，下一个时间层用上标  $n + 1$  来标记，前一个时间层用上标  $n - 1$  来标记。

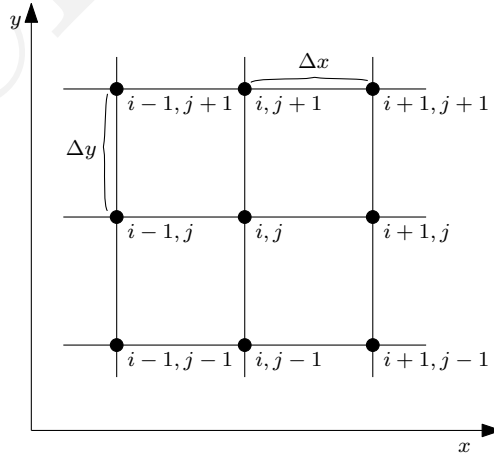


图 3.1: 结构网格离散网格节点示意



### 3.2.1 一阶偏导数的差分表达式

点  $(i, j)$  上  $x$  方向速度用  $u_{i,j}$  表示, 点  $(i+1, j)$  上  $x$  方向速度  $u_{i+1,j}$  可以在点  $(i, j)$  上通过泰勒级数展开为:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.5)$$

用上式求解  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$ , 可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \underbrace{\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}}_{\text{差分表达式}} - \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots}_{\text{截断误差}} \quad (3.6)$$

上式中, 如果我们用等号右边的差商  $(u_{i+1,j} - u_{i,j}) / \Delta x$  来近似  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$ , 则该项为偏导数的差分表达式, 等号右边的其他项为截断误差, 可以省略。即,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (3.7)$$

式(3.6)也可写成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.8)$$

从上式可看出, 被省略的截断误差中  $\Delta x$  的幂次最小的那一项决定了上式的精度。截断误差中  $\Delta x$  的幂次即为式(3.8)的精度。上式中截断误差中  $\Delta x$  的最小幂次为 1。因而, 式(3.8)为一阶精度, 此外, 式(3.8)中差分表达式使用了网格点  $(i, j)$  及其右侧相邻网格点  $(i+1, j)$  的信息, 没有使用  $(i, j)$  左侧网格点信息。因此, 式(3.8)也叫做向前差分。综上, 式(3.8)为一阶偏导数  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$  的一阶向前差分。

同理,  $u_{i-1,j}$  在  $(i, j)$  上进行泰勒级数展开为

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.9)$$

利用上式求解  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$ , 得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.10)$$

上式中没有使用网格点  $(i, j)$  右侧网格点信息。因而, 式(3.10)为向后差分。此外, 上式中, 截断误差中  $\Delta x$  的最低幂次为 1。因此, 式(3.10)为一阶偏导数  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$  的一阶向后差分。

在计算水动力学、计算流体力学的实际应用中，一阶精度往往是不够的。为了构造一个二阶精度的差分，将式(3.9)从式(3.5)中减去：

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + 2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.11)$$

上式可写成

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.12)$$

式(3.12)中使用了点  $(i, j)$  两侧节点  $(i+1, j)$  和  $(i-1, j)$  的信息。另外，式(3.12)中截断误差的最低幂次为 2。因此，式(3.12)是一阶偏导数  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$  的二阶中心差分。

同理，可以得到一阶偏导数  $(\partial u / \partial y)_{i,j}$  和  $(\partial u / \partial t)_{i,j}$  的差分格式。总结如下：

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \begin{cases} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) & \text{一阶向前差分} \\ \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) & \text{一阶向后差分} \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 & \text{二阶中心差分} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} = \begin{cases} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) & \text{一阶向前差分} \\ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) & \text{一阶向后差分} \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 & \text{二阶中心差分} \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^n = \begin{cases} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) & \text{一阶向前差分} \\ \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) & \text{一阶向后差分} \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 & \text{二阶中心差分} \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.2.2 二阶偏导数的差分表达式

将式(3.5)和式(3.9)相加，可得

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} (\Delta x)^2 + \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^4}{12} + \dots \quad (3.16)$$

利用上式求解出  $(\partial^2 u / \partial x^2)_{i,j}$ ,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3.17)$$

式(3.17)中, 等号右边第一项是二阶偏导数  $(\partial^2 u / \partial x^2)_{i,j}$  的中心差分截断误差中  $\Delta x$  的最小幂次为 2, 因此该式为二阶精度。同理, 我们可以得到  $(\partial^2 u / \partial y^2)_{i,j}$  的二阶精度中心差分,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2 \quad (3.18)$$

对于二阶混合偏导, 如  $\partial^2 u / \partial x \partial y$ , 可以采用与上面类似的处理方式得到。首先, 将式(3.5)对  $y$  求偏导, 得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (3.19)$$

然后, 将式(3.9)对  $y$  求偏导, 得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i-1,j} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (3.20)$$

将式(3.19)中减去式(3.20), 得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i-1,j} = 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3} + \dots \quad (3.21)$$

从上式中求解  $(\partial^2 u / \partial x \partial y)_{i,j}$ , 得

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{(\partial u / \partial y)_{i+1,j} - (\partial u / \partial y)_{i-1,j}}{2\Delta x} - \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (3.22)$$

上式中等式右侧第一项中需要求解  $(\partial u / \partial y)_{i+1,j}$  和  $(\partial u / \partial y)_{i-1,j}$ 。利用上一小节所得到一阶偏导数的中心差分, 得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (3.23)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i-1,j} = \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (3.24)$$

将上两式代入式(3.22), 可得

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (3.25)$$

本节所列出的差分格式只是所有差分格式的一小部分。同一个导数可以有许多不同的差分格式，特别是更高精度的差分格式。高精度的差分格式通常需要引入更多网格点的信息。例如，下式给出的  $\partial^2 u / \partial x^2$  的四阶精度中心差分格式：

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{12(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^4 \quad (3.26)$$

### 3.2.3 待定系数法

高阶格式的推导可用待定系数法得出。以上述的四阶精度中心差分格式推导为例。我们需要利用  $(i-2, j), (i-1, j), (i, j), (i+1, j), (i+2, j)$  这几个节点来构造出四阶精度的差分格式，即

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = Au_{i+2,j} + Bu_{i+1,j} + Cu_{i,j} + Du_{i-1,j} + Eu_{i-2,j} + O(\Delta x)^4 \quad (3.27)$$

其中，系数  $A, B, C, D, E$  分别为待定系数。

首先，利用泰勒级数展开将这  $u_{i-2,j}, u_{i-1,j}, u_{i+1,j}, u_{i+2,j}$  在  $(i, j)$  上展开，得：

$$\begin{aligned} u_{i-2,j} &= u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} (-2\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(-2\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(-2\Delta x)^3}{3!} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j} \frac{(-2\Delta x)^4}{4!} + \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_{i,j} \frac{(-2\Delta x)^5}{5!} + \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_{i,j} \frac{(-2\Delta x)^6}{6!} + \dots \\ u_{i-1,j} &= u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} (-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^3}{3!} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^4}{4!} + \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^5}{5!} + \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^6}{6!} + \dots \\ u_{i,j} &= u_{i,j} \\ u_{i+1,j} &= u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} (\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^4}{4!} + \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^5}{5!} + \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^6}{6!} + \dots \\ u_{i+2,j} &= u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} (2\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(2\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j} \frac{(2\Delta x)^4}{4!} + \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_{i,j} \frac{(2\Delta x)^5}{5!} + \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_{i,j} \frac{(2\Delta x)^6}{6!} + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

对上式各式分别乘以系数  $A, B, C, D, E$  得:

$$\begin{aligned}
 & Au_{i-2,j} + Bu_{i-1,j} + Cu_{i,j} + Du_{i+1,j} + Eu_{i+2,j} \\
 &= (A + B + C + D + E)u_{i,j} + \\
 & \quad (-2A - B + D + 2E) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \\
 & \quad \left( 2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2} + 2E \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} (\Delta x)^2 + \\
 & \quad \left( -\frac{4}{3}A - \frac{B}{6} + \frac{D}{6} + \frac{4}{3}E \right) \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} (\Delta x)^3 + \\
 & \quad \left( \frac{2}{3}A + \frac{B}{24} + \frac{D}{24} + \frac{2}{3}E \right) \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j} (\Delta x)^4 + \\
 & \quad \left( -\frac{4}{15}A - \frac{B}{60} + \frac{D}{60} + \frac{4}{15}E \right) \left( \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)_{i,j} (\Delta x)^5 + \\
 & \quad \left( \frac{4}{45}A + \frac{B}{120} + \frac{D}{120} + \frac{4}{45}E \right) \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right)_{i,j} (\Delta x)^6 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

根据四阶精度要求, 可得

$$\begin{aligned}
 & A + B + C + D + E = 0 \\
 & -2A - B + D + 2E = 0 \\
 & \left( 2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2} + 2E \right) (\Delta x)^2 = 1 \\
 & -\frac{4}{3}A - \frac{B}{6} + \frac{D}{6} + \frac{4}{3}E = 0 \\
 & \frac{2}{3}A + \frac{B}{24} + \frac{D}{24} + \frac{2}{3}E = 0 \\
 & -\frac{4}{15}A - \frac{B}{60} + \frac{D}{60} + \frac{4}{15}E = 0
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

且

$$\frac{4}{45}A + \frac{B}{120} + \frac{D}{120} + \frac{4}{45}E \neq 0 \tag{3.31}$$

从上两式可以解出:

$$A = \frac{-1}{12(\Delta x)^2}, B = \frac{16}{12(\Delta x)^2}, C = \frac{-30}{12(\Delta x)^2}, D = \frac{16}{12(\Delta x)^2}, E = \frac{-1}{12(\Delta x)^2} \tag{3.32}$$

### 3.2.4 多项式拟合法

除了待定系数法外, 另一个推导差分格式的方法是多项式拟合法, 特别是在推导边界节点处高精度差分格式。

例如, 网格节点 1 位于边界上,  $y$  方向垂直与边界, 节点 2 和 3 分别距边界  $\Delta y$  和  $2\Delta y$ 。我们希望构建  $\partial u / \partial y$  的差分格式。最简单的格式为

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 = \frac{u_2 - u_1}{\Delta y} + O(y) \quad (3.33)$$

然而, 该格式仅有一阶精度。若采用中心差分格式, 边界节点 1 下面没有节点可用了。早期, 为了处理这一问题, 假定在边界节点 1 外面存在一个虚拟的节点  $2'$ , 且  $u_{2'} = u_2$ , 即假定边界为反射性边界条件。采用多项式拟合法可以直接得到二阶精度, 甚至是更高阶精度格式, 而不需要引入上述假定。

首先, 假定在边界附近, 函数  $u$  可以用二次多项式表示, 即

$$u = a + by + cy^2 \quad (3.34)$$

在节点 1 处,  $y = 0$ ,  $u_1 = a$ 。在节点 2 处,  $y = \Delta y$ ,  $u_2 = a + b\Delta y + c(\Delta y)^2$ 。在节点 3 处,  $y = 2\Delta y$ ,  $u_3 = a + b(2\Delta y) + c(2\Delta y)^2$ 。联立求解三个节点的方程, 可得

$$b = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} \quad (3.35)$$

接着, 对式(3.34)对  $y$  求导,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b + 2cy \quad (3.36)$$

在节点 1 处,  $y = 0$ , 即

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 = b \quad (3.37)$$

对比式(3.35)和(3.37), 可得

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} \quad (3.38)$$

该式即为边界处的单侧差分格式。该格式的精度可利用泰勒级数展开来判断。 $u(y)$  在节点 1 处的泰勒级数展开式为:

$$u(y) = u_1 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 y + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_1 \frac{y^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_1 \frac{y^3}{3!} + \cdots \quad (3.39)$$

对比式(3.39)和(3.34), 我们可以认为式 (3.34)对应泰勒级数的前三项。因此, 式 (3.34)的截断误差为  $O(\Delta y)^3$ 。因而,  $u_1, u_2, u_3$  的精度均为  $O(\Delta y)^3$ 。在式 (3.38)中, 分子精度也为  $O(\Delta y)^3$ , 分母中存在  $\Delta y$ , 整个差分表达式的精度为  $O(\Delta y)^2$ ,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (3.40)$$

### 3.3 差分方程

上节中我们讨论了如何用各类代数差分来替代一个偏导数。上一章所推导各类偏微分方程组中通常涉及到大量的偏导数项。当给定的偏微分方程中所有的偏导数项都被差分替代后, 最终得到的代数方程为差分方程, 是原偏微分方程的线性替代。本节, 我们将讨论有关差分方程的基础概念。

为了简化, 我们选用热传导系数为常数的一维热传导方程,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.41)$$

选用该方程主要是出于方便的考虑。目前, 我们主要是希望讲解差分方程的基础概念, 若直接处理复杂的流动控制方程是没有好处的。

式(3.41)中包含了两个自变量,  $x$  和  $t$ 。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^n \frac{\Delta t}{2} + \dots \quad (3.42)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^n \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 &= \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \\ &+ \left[ -\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_i^n \frac{\Delta t}{2} + \alpha \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_i^n \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3.45)$$

式(3.45)即为式(3.41)中偏微分方程的差分方程。需要注意的是, 式 (3.45)只是式(3.41)的近似, 式(3.45)中每一个差商都有一个截断误差, 因此式(3.45)所表达的差分方程综合了每一个差商的截断误差。从式(3.44)可以看出, 式(3.45)的截断误差为  $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$ 。

更重要的是, 差分方程和原始对偏微分方程是完全不同的。差分方程是一个代数方程。网格中, 每一个网格节点都上可以列出一个差分方程, 最后组成一个线性方程组。然后, 通过求解该线性方程组得出每个网格节点上下一个时刻的温度。这里我们需要注意一个问题, 求解该线性方程组所得的解是否就是偏微分方程的解? 仔细观察式(3.44), 当  $\Delta x \rightarrow 0$  和  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 截断误差趋近于 0, 差分方程就会退化成原先的偏微分方程。这种情况下, 偏微分方程的差分方程被认为是**相容的**。若差分方程式是相容的, 且差分方程求解算法是稳定的, 且边界条件被合理地处理, 那么差分方程的数值解就会是原偏微分方程解析解的合理的替代。然而, 这些如果, 与截断误差在求解过程中的不如意的步进, 导致差分方程的成功求解变成一个挑战, 有时甚至是成为一门艺术。

此外, 本节所推导的差分方程仅仅是用来介绍差分方程的思想, 即: 通过采用各类差分来替代偏微分, 然后求解每个离散的网格节点上差分方程所组成的代数方程组。我们在后续章节将进一步讨论如何选择合适的差分格式, 以及如何选择合适的求解算法。

### 3.4 显式方法和隐式方法

本节我们将继续利用一维非稳态热传导方程来进一步讨论差分方程的求解技术。差分方程的求解技术通常可以分成两种不同的技术, 显式方法和隐式方法。

#### 3.4.1 显式方法

根据显式方法的定义, 每个网格节点所列出的差分方程中仅包含一个未知量, 因而可直接求解得出未知量。

上一节中的式(3.45)给出的差分方程即为显式方法的一种。对式(3.45)进行移项, 将未知量放在等号左侧, 已知量放在等号右侧, 可得

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (3.46)$$

接下来, 我们利用上式来求解一个简化的一维非稳态热传导问题。假定一根水平放置的圆柱形金属棒, 左端坐标为  $x = 0$ , 长度  $l = 5\text{m}$ , 导热系数  $\alpha = 0.5\text{m}^2/\text{s}$ 。在初始时刻, 整根棒的温度  $T(x, 0) = 0^\circ\text{C}$ 。棒左端温度  $T(0, t) = 50^\circ\text{C}$ , 右端温度  $T(5, t) = 0^\circ\text{C}$ 。棒上网格节点间距  $\Delta x = 1\text{m}$ , 共有 6 个网格节点, 时间节点间距或时间步长  $\Delta t = 1\text{s}$ , 总计算时间  $t = 10\text{s}$ 。系数  $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2 = 0.5$ 。计算网格系统如图3.2 所示。由于网格节点 1 和 6 都是位于边界上的节点, 所以这两个节点在各时间层上的温度值均为已知值。

初始时刻对应第一个时间层, 在该层中所有网格节点上的温度值  $T_i^1$  均为已知量,





图 3.2: 求解网格系统

第二个时间层各网格节点上的差分方程如下:

$$\begin{aligned}
 T_2^2 &= T_2^1 + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_3^1 - 2T_2^1 + T_1^1) \\
 T_3^2 &= T_3^1 + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_4^1 - 2T_3^1 + T_2^1) \\
 T_4^2 &= T_4^1 + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_5^1 - 2T_4^1 + T_3^1) \\
 T_5^2 &= T_5^1 + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_6^1 - 2T_5^1 + T_4^1)
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

当第  $n$  层时间所有网格节点上的温度值  $T_i^n$  均为已知量时, 下一个时间层, 即  $n+1$  层, 各网格节点上的差分方程如下:

$$\begin{aligned}
 T_2^{n+1} &= T_2^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_3^n - 2T_2^n + T_1^n) \\
 T_3^{n+1} &= T_3^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_4^n - 2T_3^n + T_2^n) \\
 T_4^{n+1} &= T_4^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_5^n - 2T_4^n + T_3^n) \\
 T_5^{n+1} &= T_5^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_6^n - 2T_5^n + T_4^n)
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

依此类推, 即可求出各时间层上各网格节点上的温度值。表3.1列出了详细的计算结果。

改变时间步长  $\Delta t = 0.1\text{s}$ , 系数  $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2 = 0.05$ 。重复上述过程, 重新求解结果如表3.2所示。

改变时间步长  $\Delta t = 2.5\text{s}$ , 系数  $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2 = 1.25$ 。重复上述过程, 重新求解结果如表3.3所示。

对比前两次的计算结果, 表3.3中数据表明, 当系数  $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2$  选取不当时, 计算

表 3.1: 一维非稳态热传导方程计算结果 (显式方法  $\Delta t = 1\text{s}$ )

|      | t=0 | t=1s  | t=2s  | t=3s  | t=4s  | t=5s  | t=6s  | t=7s  | t=8s  | t=9s  | t=10s |
|------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x=0  | 0   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| x=1m | 0   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 3.13  | 3.13  | 5.47  | 5.47  | 7.03  | 7.03  | 8.06  |
| x=2m | 0   | 0.00  | 0.00  | 6.25  | 6.25  | 10.94 | 10.94 | 14.06 | 14.06 | 16.11 | 16.11 |
| x=3m | 0   | 0.00  | 12.50 | 12.50 | 18.75 | 18.75 | 22.66 | 22.66 | 25.20 | 25.20 | 26.86 |
| x=4m | 0   | 25.00 | 25.00 | 31.25 | 31.25 | 34.38 | 34.38 | 36.33 | 36.33 | 37.60 | 37.60 |
| x=5m | 50  | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    |

表 3.2: 一维非稳态热传导方程计算结果 (显式方法  $\Delta t = 0.1\text{s}$ )

|      | t=0 | t=1s  | t=2s  | t=3s  | t=4s  | t=5s  | t=6s  | t=7s  | t=8s  | t=9s  | t=10s |
|------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x=0  | 0   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| x=1m | 0   | 0.04  | 0.44  | 1.29  | 2.36  | 3.46  | 4.49  | 5.40  | 6.17  | 6.83  | 7.38  |
| x=2m | 0   | 0.45  | 2.23  | 4.59  | 6.94  | 9.07  | 10.91 | 12.46 | 13.77 | 14.85 | 15.75 |
| x=3m | 0   | 3.38  | 8.48  | 12.71 | 16.02 | 18.62 | 20.69 | 22.36 | 23.72 | 24.83 | 25.74 |
| x=4m | 0   | 16.73 | 24.12 | 28.22 | 30.86 | 32.73 | 34.13 | 35.22 | 36.09 | 36.79 | 37.36 |
| x=5m | 50  | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    |

表 3.3: 一维非稳态热传导方程计算结果 (显式方法  $\Delta t = 2.5\text{s}$ )

|      | t=0 | t=2.5s | t=5s   | t=7.5s  | t=10s   |
|------|-----|--------|--------|---------|---------|
| x=0  | 0   | 0      | 0      | 0       | 0       |
| x=1m | 0   | 0.00   | 0.00   | 0.00    | 122.07  |
| x=2m | 0   | 0.00   | 0.00   | 97.66   | -341.80 |
| x=3m | 0   | 0.00   | 78.13  | -156.25 | 615.23  |
| x=4m | 0   | 62.50  | -31.25 | 207.03  | -443.36 |
| x=5m | 50  | 50     | 50     | 50      | 50      |

结果中会出现不符合物理定律的数值, 比如  $-241.80^{\circ}\text{C}$ 。系数  $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2$  如何选取将在下一节中详细展开。

### 3.4.2 隐式方法

根据上一节差分格式的知识，式(3.45)显然并不是唯一的差分方程。为了解释隐式方法，我们将  $\partial^2 T / \partial x^2$  的中心差分格式中分子每一项用第  $n$  和  $n+1$  个时间层的平均值来代替，即

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\frac{1}{2}(T_{i+1}^{n+1} + T_{i+1}^n) + \frac{1}{2}(-T_{i+1}^{n+1} - T_i^n) + \frac{1}{2}(T_{i-1}^{n+1} + T_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} \quad (3.49)$$

这个差分格式被称为 Crank-Nicolson 格式。当然，这个格式并不是唯一的隐式格式，例如，将中心差分中分子每一项直接用  $n+1$  层的代入计算。对上式进行整理，将下一个层的未知量放在等式左边，已知量放在等式右边，可得

$$\frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} T_{i-1}^{n+1} - \left[ 1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] T_i^{n+1} + \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} T_{i+1}^{n+1} = -T_i^n - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (3.50)$$

为了后续推导的便利，令

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} \\ B &= 1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \\ K_i &= -T_i^n - A(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (3.51)$$

式(3.50)可写成

$$AT_{i-1}^{n+1} - BT_i^{n+1} + AT_{i+1}^{n+1} = K_i \quad (3.52)$$

沿用显式格式使用的网格系统，在第 2 个时间层节点 2, 3, 4 和 5 上的差分方程将形成如下的线性方程组：

$$\begin{aligned} AT_1^2 - BT_2^2 + AT_3^2 &= K_2 \\ AT_2^2 - BT_3^2 + AT_4^2 &= K_3 \\ AT_3^2 - BT_4^2 + AT_5^2 &= K_4 \\ AT_4^2 - BT_5^2 + AT_6^2 &= K_5 \end{aligned} \quad (3.53)$$

注意节点 2 差分方程中  $T_1^2$  和节点 5 差分方程中  $T_6^2$  位于边界节点上，因此这两个值为已知量，可以移到等式的右边。并令  $K'_2 = K_2 - AT_1^2$ ,  $K'_5 = K_5 - AT_6^2$  则，上式可写成

$$\begin{aligned} -BT_2^2 + AT_3^2 &= K'_2 \\ AT_2^2 - BT_3^2 + AT_4^2 &= K_3 \\ AT_3^2 - BT_4^2 + AT_5^2 &= K_4 \\ AT_4^2 - BT_5^2 &= K'_5 \end{aligned} \quad (3.54)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} -B & A & 0 & 0 \\ A & -B & A & 0 \\ 0 & A & -B & A \\ 0 & 0 & A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \\ T_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2' \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5' \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

当  $\Delta t = 1\text{s}$  时,  $A = \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} = \frac{0.5 \times 1}{2 \times 1^2} = 0.25$ ,  $B = 1.5$ , 第一个时间层各节点上温度值分别为:  $T_i^1 = 0, i = 1, 2, \dots, 5$ ,  $T_6^1 = 50.0^\circ\text{C}$ , 第二个时间层边界节点温度值分别为:  $T_1^2 = 0$ ,  $T_6^2 = 50.0^\circ\text{C}$  各节点差分方程右侧  $K_i$  为

$$\begin{aligned} K_2' &= K_2 - AT_1^2 = -T_2^1 - A(T_3^1 - 2T_2^1 + T_1^1) - AT_1^2 = 0 \\ K_3 &= -T_3^1 - A(T_4^1 - 2T_3^1 + T_2^1) = 0 \\ K_4 &= -T_4^1 - A(T_5^1 - 2T_4^1 + T_3^1) = 0 \\ K_5' &= K_5 - AT_6^2 = -T_5^1 - A(T_6^1 - 2T_5^1 + T_4^1) - AT_6^2 = -25.0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

代入

$$\begin{bmatrix} -1.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & -1.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -1.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \\ T_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -25.0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

从上式可以解出

$$T_2 = 0.08, \quad T_3 = 0.50, \quad T_4 = 2.94, \quad T_5 = 17.16 \quad (3.58)$$

重复这一过程, 即可求出各时间层上各网格节点上的温度值。表3.4列出了详细的计算结果。

表 3.4: 一维非稳态热传导方程计算结果 (隐式方法  $\Delta t = 1\text{s}$ )

|        | t=0 | t=1s  | t=2s  | t=3s  | t=4s  | t=5s  | t=6s  | t=7s  | t=8s  | t=9s  | t=10s |
|--------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x = 0m | 0   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| x=1m   | 0   | 0.08  | 0.47  | 1.26  | 2.31  | 3.41  | 4.44  | 5.35  | 6.13  | 6.79  | 7.35  |
| x = 2m | 0   | 0.50  | 2.14  | 4.49  | 6.86  | 8.99  | 10.83 | 12.40 | 13.70 | 14.79 | 15.70 |
| x= 3m  | 0   | 2.94  | 8.33  | 12.63 | 15.95 | 18.55 | 20.62 | 22.29 | 23.65 | 24.77 | 25.68 |
| x = 4m | 0   | 17.16 | 24.26 | 28.25 | 30.85 | 32.70 | 34.09 | 35.18 | 36.05 | 36.75 | 37.33 |
| x=5m   | 50  | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    | 50    |

改变时间步长  $\Delta t = 2.5\text{s}$ , 重复上述过程, 重新求解结果如表3.5所示。对比表3.5和

表 3.5: 一维非稳态热传导方程计算结果 (隐式方法  $\Delta t = 2.5\text{s}$ )

|      | t=0 | t=2.5s | t=5s  | t=7.5s | t=10s |
|------|-----|--------|-------|--------|-------|
| x=0  | 0   | 0      | 0     | 0      | 0     |
| x=1m | 0   | 0.77   | 3.12  | 5.79   | 7.44  |
| x=2m | 0   | 2.77   | 8.77  | 13.33  | 15.77 |
| x=3m | 0   | 9.19   | 19.6  | 22.96  | 25.91 |
| x=4m | 0   | 30.33  | 32.41 | 36.00  | 37.35 |
| x=5m | 50  | 50     | 50    | 50     | 50    |

表3.3可知, 隐式方法在时间步长  $\Delta t = 2.5\text{s}$  时仍然可以获得合理的解, 而显式方法获得的解出现了违反物理定律的解。这表明隐式方法比显式方法更为稳定。然而, 对比两种方法的计算量, 显式方法直接求解所需的计算步骤很少, 而隐式方法需要求解线性方程组, 特别是当节点数量变大, 比如  $\Delta x = 0.001\text{m}$ , 甚至更大时, 线性方程组的求解步骤很多。关于线性方程组的求解将在第??节中详细讨论。

### 3.5 相容性、稳定性和收敛性

对给定的差分方程, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  和  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 截断误差趋近于 0, 差分方程将收敛于原偏微分方程, 即

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} [\text{PDE} - \text{FDE}] = 0 \quad (3.59)$$

式中, PDE 为偏微分方程, FDE 为差分方程。这种情况下, 偏微分方程的差分方程被认为是**相容的**。需要注意的是, 差分方程收敛于原偏微分方程, 并不等价于差分方程的精确解收敛于偏微分方程的精确解。

还是以一维非稳态热传导方程为例, 设  $T(x, t)$  为偏微分方程的精确解,  $T_i^n$  为差分方程的精确解。当  $\Delta x \rightarrow 0$  和  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 若

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} [T(x, t) - T_i^n] = 0 \quad (3.60)$$

则差分方程的精确解收敛于原偏微分方程的精确解, 或者说差分方程的精确解是收敛的。

当差分方程与原微分方程是相容的, 且差分方程的精确解是收敛的, 是否就能保证最后能得到合理的解了? 答案是否定的。差分方程的相容性、收敛性是在  $\Delta t$  和  $\Delta x$  趋近于 0 时来讨论的。在实际应用中,  $\Delta t$  和  $\Delta x$  一定是一个有限大的数, 截断误差不会趋近于 0。截断误差的存在将会影响差分方程精确解的精度。此外, 无论采用何种计算

手段, 受计算精度的影响, 差分方程的求解都会引入计算误差。计算误差在计算过程中会不断步进。如果随着计算过程, 计算误差逐渐累积, 导致误差过大, 使计算结果偏离差分方程的精确解, 这种差分方程就是不稳定的。反之, 若计算误差在计算过程中能被控制在一个可接受的程度, 计算结果与精确解的差值符合精度要求, 这种差分方程就是稳定的。本节将重点介绍判定差分方程稳定性的黎曼稳定性分析方法。

离散误差和舍入误差是影响偏微分方程数值解的主要两个误差来源。离散误差是指原偏微分方程精确解与相应的差分方程的精确解之间存在的误差, 也就是差分方程的截断误差, 外加边界条件数值化处理引入的误差。舍入误差是指, 在求解差分方程时大量浮点运算过程中, 计算机总是将浮点数按照一定有效位数进行舍入而引入的误差。

令  $A$  为偏微分方程的精确解,  $D$  为差分方程的精确解,  $N$  为真实的计算机求解差分方程得到的数值解。那么,

$$\begin{aligned} \text{离散误差} &= A - D \\ \text{舍入误差} &= \epsilon = N - D \quad \text{或} \quad N = D + \epsilon \end{aligned} \quad (3.61)$$

为了简化讨论, 我们延用一维非稳态热传导方程, 以及上节中显示方法使用的差分方程,

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} \quad (3.45)$$

显然, 式(3.45)的数值解  $N$  必定满足该式, 即

$$\frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha(N_{i+1}^n - 2N_i^n + N_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} \quad (3.62)$$

将式(3.61)带入上式, 有

$$\frac{D_i^{n+1} + \epsilon_i^n - D_i^n - \epsilon_i^n}{\alpha \Delta t} = \frac{D_{i+1}^n + \epsilon_{i+1}^n - 2D_i^n - 2\epsilon_i^n + D_{i-1}^n + \epsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3.63)$$

根据定义,  $D$  为差分方程的精确解, 因此它一定是满足差分方程的, 即

$$\frac{D_i^{n+1} - D_i^n}{\alpha \Delta t} = \frac{D_{i+1}^n - 2D_i^n + D_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3.64)$$

从式(3.63)中减去式(3.64)得:

$$\frac{\epsilon_i^{n+1} - \epsilon_i^n}{\alpha \Delta t} = \frac{\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3.65)$$

可见, 舍入误差  $\epsilon$  同样也满足差分方程。假定  $\epsilon_i$  是计算过程中某一阶段的误差。那么, 随着求解过程从第  $n$  层步进到第  $n+1$  层, 误差  $\epsilon_i$  收缩或尽可能保持一致时, 解就是稳定的。反之, 如果  $\epsilon_i$  随着求解过程变大, 解就是不稳定的。因此, 对于一个稳定解, 有

$$\left| \frac{\epsilon_i^{n+1}}{\epsilon_i^n} \right| \leq 1 \quad (3.66)$$

根据傅里叶级数理论, 舍入误差  $\epsilon(x, t)$  可以表示为:

$$\epsilon(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(t) e^{ik_m x} \quad (3.67)$$

然而, 由于实际问题中空间离散后网格尺寸不能为零。例如, 上节使用的网格划分, 假定网格节点数为  $N$ , 那么上式中  $m$  的取值只能是 1 到  $N/2$ , 即

$$\epsilon(x, t) = \sum_{m=1}^{N/2} A_m(t) e^{ik_m x} \quad (3.68)$$

另外, 假定  $A_m(t) = e^{at}$ , 其中  $a$  是一个常数。上式可写成

$$\epsilon(x, t) = \sum_{m=1}^{N/2} e^{at} e^{ik_m x} \quad (3.69)$$

值得注意的是, 差分方程本身是一个线性方程, 而且误差  $\epsilon$  满足差分方程。因此, 将误差表达式带入差分方程后, 式(3.69)中每一项都应该满足差分方程。因此, 我们仅需讨论任一项就可以了。下面以舍入误差的第  $m$  项展开讨论。

$$\epsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m x} \quad (3.70)$$

将式(3.70)带入式(3.65), 得

$$\frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x}}{\alpha \Delta t} = \frac{e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ik_m x} + e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}}{(\Delta x)^2} \quad (3.71)$$

等式两边同除  $e^{at} e^{ik_m x}$ , 可得

$$\frac{e^{a\Delta t} - 1}{\alpha \Delta t} = \frac{e^{ik_m \Delta x} - 2 + e^{-ik_m \Delta x}}{(\Delta x)^2} \quad (3.72)$$

移项整理可得

$$e^{a\Delta t} = 1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} (e^{ik_m \Delta x} + e^{-ik_m \Delta x} - 2) \quad (3.73)$$

根据欧拉公式, 有

$$\cos(k_m \Delta x) = \frac{e^{ik_m \Delta x} + e^{-ik_m \Delta x}}{2} \quad (3.74)$$

式(3.73)可写成

$$e^{a\Delta t} = 1 + \frac{2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} (\cos(k_m \Delta x) - 1) \quad (3.75)$$

根据三角函数关系, 有

$$\sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2} = \frac{1 - \cos(k_m \Delta x)}{2} \quad (3.76)$$

式(3.75)可写成

$$e^{a\Delta t} = 1 - \frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2} \quad (3.77)$$

根据式(3.66)

$$\left| \frac{\epsilon_i^{n+1}}{\epsilon_i^n} \right| = \left| \frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x}}{e^{at} e^{ik_m x}} \right| = |e^{a\Delta t}| = \left| 1 - \frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2} \right| \leq 1 \quad (3.78)$$

根据上式, 可以定义放大因子  $G$ 。求解  $G \leq 1$  不等式, 可以得到满足稳定性的条件。

$$\left| 1 - \frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2} \right| = G \quad (3.79)$$

第一个条件,

$$1 - \frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2} \leq 1 \quad (3.80)$$

化简得,

$$\frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2} \geq 0 \quad (3.81)$$

由于,  $4\alpha\Delta t/(\Delta x)^2$  中各项始终为正, 因此该不等式是无条件满足的。

第二个条件,

$$1 - \frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2} \geq -1 \quad (3.82)$$

从上式可以得到, 要满足稳定性条件, 系数  $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2$  必须满足的条件为:

$$\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.83)$$

差分方程的相容性、收敛性和稳定性对数值解影响显著。根据数学理论, 当差分方程的相容性满足后, 当差分方程是稳定性的, 那么收敛性自动满足。因此, 在推导差分方程过程中, 我们的重点放在相容性和稳定性上。



## 第四章 代数方程组的求解方法

### 4.1 三对角矩阵直接求解方法

为方便讨论, 将方程组(3.52)改写为

$$A_i T_i = B_i T_{i-1} + C_i T_{i+1} + D_i \quad (4.1)$$

假设共有  $N$  个方程, 即  $i = 1, 2, \dots, N$ 。当  $i = 1$  时,  $B_i = 0$ ; 当  $i = N$  时,  $C_i = 0$ 。

这个方程组的求解过程分为消元和回代两个步骤。消元过程从系数矩阵的第二行开始。设消元过程完成后的方程表示为:

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad (4.2)$$

或

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1} \quad (4.3)$$

将式(4.3)乘以  $B_i$  后, 与式(4.1)相加, 可得

$$A_i T_i + B_i T_{i-1} = B_i T_{i-1} + C_i T_{i+1} + D_i + B_i P_{i-1} T_i + B_i Q_{i-1} \quad (4.4)$$

整理的

$$T_i = \frac{C_i}{A_i - B_i P_{i-1}} T_{i+1} + \frac{D_i + B_i Q_{i-1}}{A_i - B_i P_{i-1}} \quad (4.5)$$

将上式与式(4.2)对比, 可得

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{C_i}{A_i - B_i P_{i-1}} \\ Q_i &= \frac{D_i + B_i Q_{i-1}}{A_i - B_i P_{i-1}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

这是一个递推关系式, 需要确定  $P_1$  和  $Q_1$ 。

当  $i = 1$  时, 式(4.1)为

$$A_1 T_1 = B_1 T_0 + C_1 T_2 + D_1 \quad (4.7)$$

其中,  $B_1 = 0$ 。对比式(4.2), 可得

$$P_1 = \frac{C_1}{A_1}, \quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1} \quad (4.8)$$

在  $P_i$  和  $Q_i$  序列的另一端, 消元进入最后一行时, 由式(4.2) 得

$$T_N = P_N T_{N+1} + Q_N \quad (4.9)$$

且  $P_N = 0$ , 得

$$T_N = Q_N \quad (4.10)$$

到此消元过程结束, 然后按照式(4.3)进行回代。

下面给出 TDMA 方法的计算步骤:

1. 计算系数  $P_i$  和  $Q_i$

$$P_1 = \frac{C_1}{A_1}, \quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1}$$

2. 对  $i = 1, 2, \dots, N$  用递推关系式求系数  $P_i$  和  $Q_i$

$$P_i = \frac{C_i}{A_i - B_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{D_i + B_i Q_{i-1}}{A_i - B_i P_{i-1}}$$

3. 令  $T_N = Q_N$

4. 对  $i = N - 1, N - 2, \dots, 2, 1$  应用回代得  $T_{N-1}, T_{N-2}, \dots, T_2, T_1$

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1}$$

## 4.2 代数方程组迭代求解方法

下面用一个简单的例子来介绍代数方程组迭代求解方法中点迭代方法。考虑一个简单的三元方程组为例,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned} \quad (4.11)$$

首先, 对第一个方程进行移项, 使等号左边仅保留  $x_1$ , 第二个方程的等号左边仅保留  $x_2$ , 依次类推。可得

$$\begin{aligned} x_1 &= (7 - x_2 - x_3)/2 \\ x_2 &= (2 + x_1 + x_3)/3 \\ x_3 &= (5 - x_1 + x_2)/2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

上式可以通过将  $x_1$ ,  $x_2$  和  $x_3$  的假定初始值带入后迭代求解得到。假定初始值带入上式右侧后计算出新的  $x_1$ ,  $x_2$  和  $x_3$ 。然后再将新值带入, 直到整个过程收敛到整个代数方程组的真解。

需要注意的是, 不是所有的代数方程组都可以采用这种迭代方法得到收敛解的。这种迭代方法收敛的一个条件是线性方程组的系数矩阵必须是对角占优的, 即每一行的对角线元素  $|a_{ii}| > \sum |a_{ij}| (i \neq j)$ 。因此, 在采用迭代方法来求解线性方程组的时候可以对方程组进行重排来确保对角占优。

雅可比迭代、高斯赛德尔迭代和松弛迭代的主要差别在带入右侧的值存在细微的差别。

### 4.2.1 雅可比迭代法

在雅可比迭代中, 第  $i$  次迭代等式左侧的值  $x_1^k, x_2^k, x_3^k$  通过将  $k-1$  次迭代获得的  $x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, x_3^{k-1}$  带入等式右侧来获得。以上面给出的线性方程组, 第一步先假定  $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$ 。将假定值带入方程右侧, 可得

$$x_1^1 = 3.500, \quad x_2^1 = 0.667, \quad x_3^1 = 2.500$$

重复该过程, 最后得到值见表4.1。经过 17 次迭代后,  $x_1 = 1.000, x_2 = 2.000, x_3 = 3.000$ , 并且结果在增加迭代次数后不会有新的变化。与该方程组的解析解对比可知, 迭代得出的保留四位有效数值的迭代解就是精确解。

表 4.1: 雅可比迭代结果

| 迭代次数  | 0 | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | ... | 17    |
|-------|---|--------|--------|--------|--------|--------|-----|-------|
| $x_1$ | 0 | 3.5000 | 1.9167 | 1.6250 | 1.2292 | 1.1563 | ... | 1.000 |
| $x_2$ | 0 | 0.6667 | 2.6667 | 1.6667 | 2.1667 | 1.9167 | ... | 2.000 |
| $x_3$ | 0 | 2.5000 | 1.0833 | 2.8750 | 2.5208 | 2.9688 | ... | 3.000 |

对一个包含  $n$  个方程和  $n$  各未知量的线性方程组,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , 或写成如下形式

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (4.13)$$

按雅可比迭代对上式进行移项, 等式左侧仅保留与  $x_i$  相关的项, 其他项都移到等式右侧, 得

$$a_{ii} x_i = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.14)$$

等式两侧同除以  $a_{ii}$ , 并用上标  $k$  来标识等式左侧为第  $k$  次迭代的值, 上标  $k-1$  来表示等式右侧为第  $k-1$  次迭代的值。

$$x_i^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^{k-1} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.15)$$

该式也可写成矩阵形式:

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{c} \quad (4.16)$$

其中,  $\mathbf{T}$  是迭代矩阵, 其定义为

$$T_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \quad (4.17)$$

$\mathbf{c}$  为常数向量,

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (4.18)$$

### 4.2.2 高斯赛德尔迭代

在雅可比迭代中, 等式右侧采上一个迭代的结果或初始值来进行计算。迭代方程求解过程中基本都是按照方程顺序来进行的。还是以上面的方程组为例。第一个迭代过程中,  $x_1^0 = 0, x_2^0, x_3^0$ 。带入第一个方程, 得

$$x_1^1 = (7 - x_2^0 - x_3^0)/2 = (7 - 0 - 0)/2 = 3.5 \quad (4.19)$$

接下来, 求解第二个方程,  $x_2 = (2 + x_1 + x_3)/3$ 。注意, 等号左侧的  $x_1$ 。在雅可比迭代中,  $x_1$  还是用  $x_1^0$  来代入。然而, 我们在求解第一个方程后,  $x_1$  的值已经更新为  $x_1^1$  了。高斯赛德尔迭代就是直接使用已经更新的值代入计算, 即

$$x_2^1 = (2 + x_1^1 + x_3^0)/3 = (2 + 3.5 + 0)/3 = 1.8333 \quad (4.20)$$

在求解第三个方程  $x_3 = (5 - x_1 + x_2)/2$  时, 用  $x_1^1$  和  $x_2^1$  代入计算

$$x_3^1 = (5 - x_1^1 + x_2^1)/2 = (5 - 3.5 + 1.8333)/2 = 1.6667 \quad (4.21)$$

重复这一过程, 直至得到收敛解。计算过程如表4.2所示。采用高斯赛德尔迭代只需要13次迭代就可以收敛。通常来说, 高斯赛德尔迭代方法比雅可比迭代方法更快收敛。

从上面的例子容易得出通用的高斯赛德尔迭代, 即:

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^k + \sum_{j=i+1}^n \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^{k-1} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.22)$$

表 4.2: 雅可比迭代结果

| 迭代次数  | 0 | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | ... | 13    |
|-------|---|--------|--------|--------|--------|--------|-----|-------|
| $x_1$ | 0 | 3.5000 | 1.7500 | 1.3333 | 1.1181 | 1.0475 | ... | 1.000 |
| $x_2$ | 0 | 1.8333 | 1.8056 | 1.9537 | 1.9761 | 1.9922 | ... | 2.000 |
| $x_3$ | 0 | 1.6667 | 2.5278 | 2.8102 | 2.9290 | 2.9724 | ... | 3.000 |

写成矩阵形式, 有

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{T}_1 \mathbf{x}^k + \mathbf{T}_2 \mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{c} \quad (4.23)$$

其中, 系数矩阵  $T_1$  和  $T_2$  的定义如下:

$$T_{1ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases} \quad (4.24)$$

$$T_{2ij} = \begin{cases} 0 & i \geq j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & i < j \end{cases} \quad (4.25)$$

### 4.2.3 松弛迭代

仔细观察高斯赛德尔迭代的通用计算公式, 可以看出

$$x_i^k = x_i^{k-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^k + \sum_{j=i}^n \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^{k-1} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.26)$$

当我们引入一个松弛系数  $\alpha$ , 可得

$$x_i^k = x_i^{k-1} + \alpha \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^k + \sum_{j=i}^n \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^{k-1} + \frac{b_i}{a_{ii}} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.27)$$

通过合理选择  $\alpha$  的取值, 可以起到加速收敛的效果。

本页刻意留白

## 参考文献

- [1] 汪德燿. 计算水力学理论与应用. 北京: 科学出版社, 2011
- [2] H K Versteeg, W Malalasekera. An Introduction to Computational Fluid Dynamics  
The Finite Volume Method. 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2010
- [3] 陶文铨. 数值传热学. 西安: 西安交通大学出版社, 2001
- [4] 郑邦民, 赵昕. 计算水动力学. 武汉: 武汉大学出版社, 2001

本页刻意留白