

# 第一章 绪论

## 1.1 定义

## 1.2 课程内容

## 1.3 教学安排



## 第二章 控制方程

### 2.1 纳维-斯托克斯方程

#### 2.1.1 模型

#### 2.1.2 连续性方程

#### 2.1.3 运动方程

### 2.2 雷诺应力平均方程

#### 2.2.1 紊流基础特征

#### 2.2.2 紊流连续性方程

#### 2.2.3 紊流运动方程

#### 2.2.4 紊流模型

### 2.3 平面二维浅水方程

天然河道水流运动一般都属于三维流动，运动要素即沿程变化，又沿水深和河宽方向变化。由于三维水流运动比较复杂，河流数值模拟常用的一种简化方法是将运动要素沿水深方向平均，把三维问题转化为平面二维问题。本节基于一定条件将三维流动的雷诺平均运动微分方程简化为平面二维浅水方程。

图 2.1: 水位基准示意图

### 2.3.1 浅水假设和水深平均积分法则

#### 浅水假设

三维流动的雷诺平均运动微分方程如式(2.1a)-(2.1d)所示。

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_x \bar{u}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}_x \bar{u}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}_x \bar{u}_z)}{\partial z} = \bar{f}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_y \bar{u}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}_y \bar{u}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}_y \bar{u}_z)}{\partial z} = \bar{f}_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial z^2} \right) \quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_z \bar{u}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}_z \bar{u}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}_z \bar{u}_z)}{\partial z} = \bar{f}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.1d)$$

在浅水湖泊或水库中，如果垂向加速度与重力加速度相比很小，则可以忽略垂向加速度，并假定沿水深方向的动水压强分布符合静水压强分布，则三维流动的运动微分方程可简化为：

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_x \bar{u}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}_x \bar{u}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}_x \bar{u}_z)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_y \bar{u}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}_y \bar{u}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}_y \bar{u}_z)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial z^2} \right) \quad (2.2c)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho g \quad (2.2d)$$

#### 水深积分平均法则

在河道水流中，水平尺度一般远大于垂向尺度，流速等水力参数沿垂向的变化常采用其垂向平均值，并假定沿水深方向的动水压强分布符合静水压强分布。将式2.2沿水深积分平均，即可得到沿水深平均的平面二维流动的基本方程。

在沿水深积分平均过程中，采用以下定义和公式：

(1) 定义水深为

$$H = \zeta - Z_0 \quad (2.3)$$

式中， $H$  为水深， $\zeta = \zeta(x, y, t)$ 、 $Z_0 = Z_0(x, y, t)$  分别为某一基准面下的水面高程和河床高程（见图）

(2) 定义沿水深平均流速  $U_i$  为

$$U_i = \frac{1}{H} \int_{Z_0}^{\zeta} \bar{u}_i dz \quad (2.4)$$

式中，下标  $i$  取 1, 2 和 3 分别对应  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的速度分量。

(3) 莱布尼兹公式

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b f dz = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i} dz + f|_b \frac{\partial b}{\partial x_i} - f|_a \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

式中,  $a$ 、 $b$  和  $f$  都是  $x_i$  的函数。

(4) 自由表面及河床底部运动学条件为:

$$\overline{u_z}|_{z=\zeta} = \frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \overline{u_x}|_{z=\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \overline{u_y}|_{z=\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial y} \quad (2.6)$$

$$\overline{u_z}|_{z=Z_0} = \frac{DZ_0}{Dt} = \frac{\partial Z_0}{\partial t} + \overline{u_x}|_{z=Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial x} + \overline{u_y}|_{z=Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial y} \quad (2.7)$$

### 2.3.2 沿水深平均的连续性方程

采用上述定义和公式对连续性方程(2.2a)沿水深积分平均得:

$$\begin{aligned} & \int_{Z_0}^{\zeta} \left( \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} \right) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_0}^{\zeta} \overline{u_x} dz - \overline{u_x}|_{z=\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \overline{u_x}|_{z=Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial x} + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_0}^{\zeta} \overline{u_y} dz - \overline{u_y}|_{z=\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial y} + \overline{u_y}|_{z=Z_0} \frac{\partial Z_0}{\partial y} + \\ & \overline{u_z}|_{z=\zeta} - \overline{u_z}|_{z=Z_0} \\ &= \frac{\partial H \overline{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial H \overline{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial Z_0}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

最后得

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H \overline{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial H \overline{u_y}}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

### 2.3.3 浅水运动方程

### 2.3.4 浅水方程形式

## 2.4 一维圣维南方程

### 2.4.1 一维连续性方程

### 2.4.2 一维运动方程

### 2.4.3 圣维南方程形式



## 第三章 有限差分法

### 3.1 泰勒展开

### 3.2 离散基础知识

### 3.3 差分方程

### 3.4 相容性、稳定性和收敛性





## 第四章 有限体积法

### 4.1 一维热传导方程的有限体积法

### 4.2 一维对热扩散方程的有限体积法



## 第五章 一维水动力学问题

### 5.1 一维恒定流求解

### 5.2 一维非恒定流求解



## 第六章 二维水动力学问题

### 6.1 网格基础

### 6.2 二维浅水方程求解