第五章 有限体积法

李 丹

武汉大学水利水电学院

2021 年 4 月 24 日

目录

一维稳态传导问题

武汉大学 水利水电学院 School of Water Resources and Hydropower Engineering

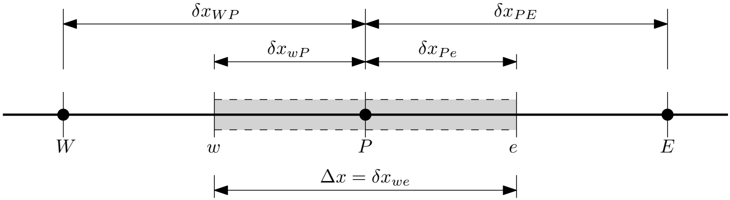
某一运动要素 ϕ 的一维稳态传导问题：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Gamma\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}) + S = 0$$

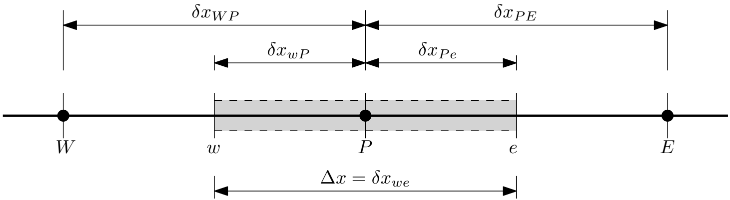
其中，Γ 为传导系数，S 为源项。在边界点上 ϕ 的值给定。

网格生成

- 将计算区域划分为互不重叠的离散控制体
- 在 A 和 B 之间均匀的布置一系列的节点
- 每个控制体的边界位于相邻节点的中线处
- 在计算域边界处设置控制体是比较常见的做法



网格符号系统

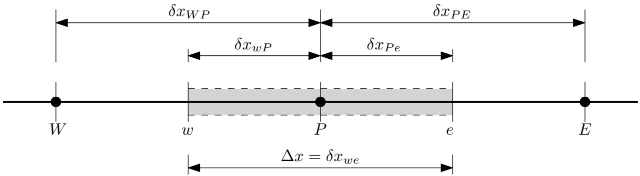


- P 为网格系统中的任意节点，其西侧和东侧节点分别为 W 和 E
- 节点 P 所在控制体西边的边界面为 w，东边的边界面为 e
- W 与 P 的距离为 δx_{WP}，P 与 E 的距离为 δx_{PE}
- w 到 P 的距离为 δx_{wP}，P 到 e 的距离为 δx_{Pe}
- w 到 e 的距离为 δx_{we}

离散过程

基本思想 在控制体上对控制方程积分来得到控制体节点 P 上的离散方程

物理意义 流出东边交界面的 ϕ 的扩散通量减去流入西边交界面的 ϕ 的扩散通量等于 ϕ 的减少量



$$\int_{\Delta V} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}V + \int_{\Delta V} S \mathrm{d}V = \left(\Gamma A \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0$$

A 为控制体边界面面积，ΔV 为控制体体积，$\overline{S}$ 为控制体上 S 的平均值

交界面梯度计算

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2}$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}$$

$$\left(\Gamma A \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right)$$

$$\left(\Gamma A \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right)$$

为了推导出可用的离散方程，式(6)中控制体交界面上的 Γ 和梯度 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x$ 必须要先求得。

$$\overline{S}\Delta V = S_u + S_P\phi_P \tag{1}$$

$$\Gamma_e A_e\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w A_w\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_{WP}}\right) + (S_u + S_P\phi_P) = 0 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\Gamma}{\delta x_{PE}}A_e + \frac{\Gamma}{\delta x_{WP}}A_w - S_p\right)\phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)\phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)\phi_E + S_u \tag{3}$$

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u \tag{4}$$

其中

a_W	a_E	a_P
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e$	$a_W + a_E - S_P$

式(4)必须在所有控制体的节点上都列出才能求解。对于毗邻计算域边界的控制体，式(4)必须经过适当修正以包含边界条件。最后形成的线性代数方程组可以通过上一章的求解方法来进行求解得到 ϕ 的分布。