

關於磁鐵單擺陣列(Magnetic Pendulum Array)運動模式的探討

關鍵字：單擺、磁鐵

作者：王宏銘、王泓予、葉曜銘

指導教授：洪在明教授

指導助教：鄧家偉學長

壹、摘要

本研究的對象是牛頓擺的升級版，加入了鋼珠（我們用下頭嵌入磁鐵的單擺取代）和鋼珠之間的作用力，希望探討整體擺動的波長和波速等相關性質。我們從記錄 Magnetic Pendulum Array 的運動軌跡出發，改變初始陣列的擺數、間距、初擺角，並利用錄影機紀錄軌跡。經過修正後，我們標記出擺幅高峰時間，得出和實驗結果吻合的趨勢。同時也使用電腦程式，模擬得無摩擦力的理想狀態下，兩個單擺將具備典型的耦合震盪。之後我們試著使用理論分析，再次得到大致相符的週期。

貳、研究動機

由於在網路上看到一部 Magnetic Pendulum Array 的影片，在一整排的磁擺交互作用下，形成特別的波形變化。它傳遞能量的特性類似牛頓擺，但相鄰質點會排成一個波形的特性，又有點像不會傳遞能量的 Pendulum Array，這引發了我們討論此現象的好奇心。

參、研究目的

為了深入了解 Magnetic Pendulum Array 運動的規則，我們設計了幾項變因，包括初始擺角、磁擺間距。其中有幾個特殊之處：不斷交換的能量傳遞、兩個擺明顯的力學耦合震盪、微調變因後波形的差異等，都是我們欲釐清之處。

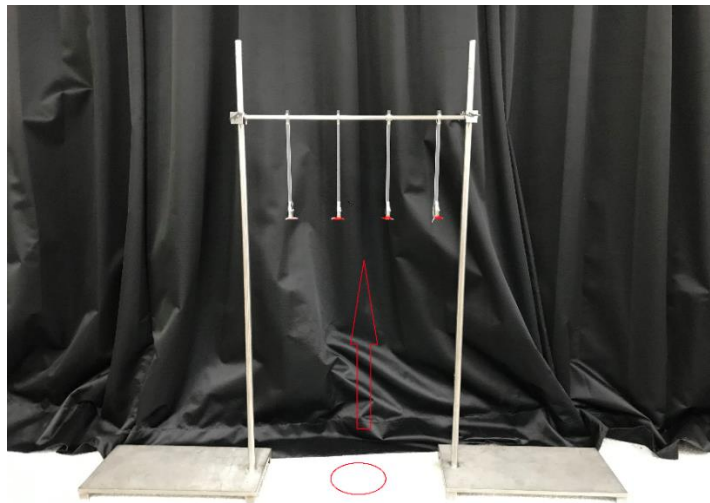
肆、實驗器材

鐵架	軸承	標記貼紙
擺錘（壓克力製）	相機	游標尺
磁鐵	鐵棒	Tracker

伍、研究過程與方法

一、實驗架設及記錄方法

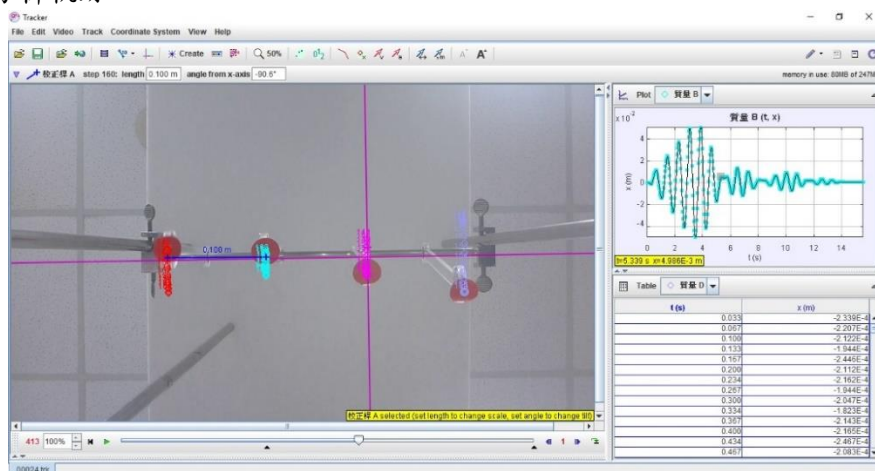
（一）拍攝



（圖一）

我們利用相機由下往上拍，如圖一所標示，在拍攝時在上方放一片白色板子做為背景，將紅圈黃點貼紙貼於各個擺錘的正下方，在設定好控制變因和操縱變因後，將擺拉起並放開，錄到每個擺錘都完全停止為止；擺的編號由左方算起，以數字當編號。

(二) 分析軌跡

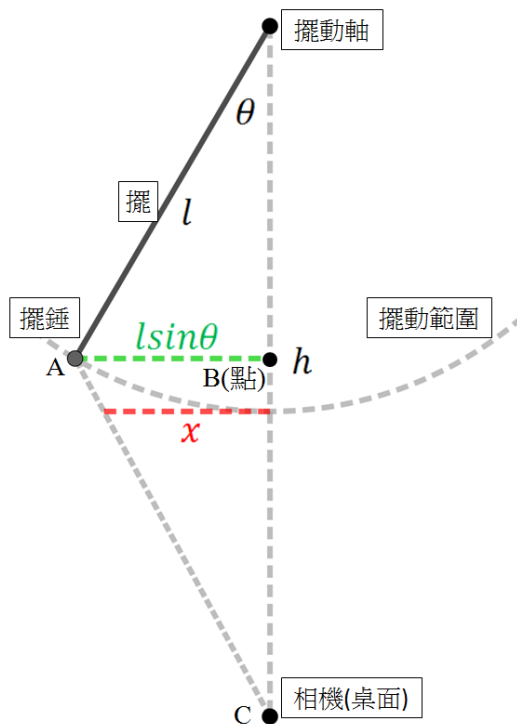


(圖二)

我們利用 Tracker 軟體，設定好 x 軸方向和比例尺後，對準影片中紅圈黃點貼紙中的黃點，標出各個影格擺錘的位置，就能得出如圖二右方的軌跡圖和座標數據，經過影像修正後，再標記出擺幅高峰處做數據分析。

(三) 影像修正

為了將影片之中所得到的擺錘在影像上的位置轉換成實際上的角度，我們需要一個公式，說明如下：



(圖三)

如圖三，此為順著擺動軸的方向觀察某一個擺的示意圖，其中 x 、 l 、 h 、 θ 分別代表了影像上擺錘末端的位置(以平衡位置為 0)、擺長(至擺錘末端)及相機與擺動軸的垂直距離。我們的使用 Tracker 分析影片時所放置的校準桿在圖上紅線之水平面上，實際上擺錘則是在圖上綠線之水平面上，其長度為擺錘與畫面中央的實際距離。

則我們可以三角函數得到幾條線段的長度

$$\text{綠線的長度} = l \sin \theta$$

$$\overline{BC} = h - l \cos \theta$$

然後在三角形 ABC 之中，紅、綠兩條線互相平行，因此：

$$l \sin \theta (h - l) = x(h - l \cos \theta)$$

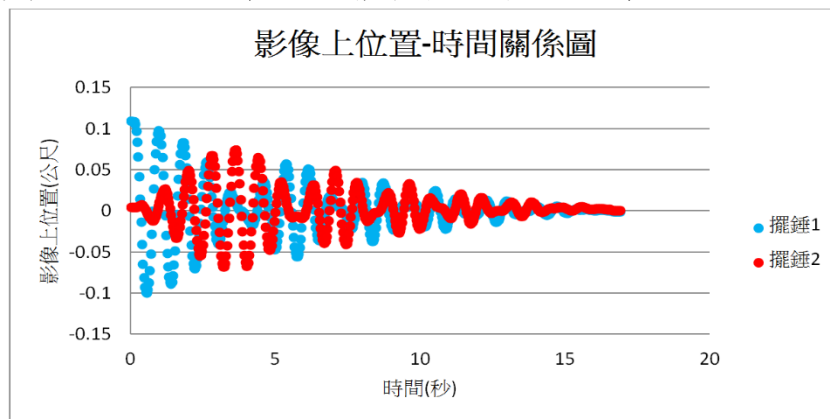
另行化簡之後得到：

$$[x^2 l^2 + l^2 (h - l)^2] \cos^2 \theta - 2x^2 h l \cos \theta + x^2 h^2 - l^2 (h - l)^2 = 0$$

此為一元二次方程式(x 、 l 、 h 皆為已知)，可以藉由公式解直接求得 θ 的值

(四) 擺幅高峰的時間標記

我們使用 Tracker 分析之後，會得到如圖十六的數據



(圖四) 影像上位置-時間關係圖(擺角 30 度，擺距 10cm，擺數 2 個)

但是我們希望能夠知道某一個擺的擺幅達到最大的時間，因此我們先使用 Excel 標記出單擺擺到邊緣的點。標記方法如圖四所示，標記結果則如圖六所示。

在圖十七之中，黃色格子為試著標示該點是否為單擺擺到邊緣的點。該格為：

$$=IF(AND(V9*V9>V8*V8,V9*V9>V7*V7,V9*V9>V10*V10,V9*V9>V11*V11),SQRT(V9*V9),0)$$

依照此式，當此點之角位置絕對值(V9)大於其前後各兩個時間點時，黃色個子會顯示該點之角位置，反之則會顯示 0。

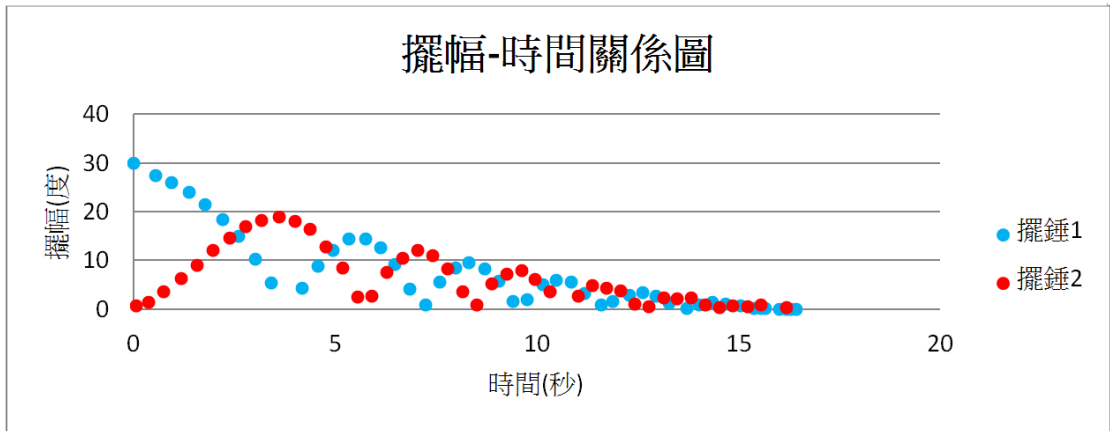
=IF(AND(V9*V9>V8*V8,V9*V9>V7*V7,V9*V9>V10*V10,V9*V9>V11*V11),SQRT(V9*V9),0)						
	Q	T	U	V	W	X
4	時間	影像上距離		實際角度		
5	t	1	2	1	2	
6						
7	0.00E+00	1.08E-01	2.78E-03	30	0.698488	
8	3.34E-02	1.08E-01	2.82E-03	29.99036	0.706886	
9	6.67E-02	1.08E-01	2.83E-03	29.99522	0.710315	=IF(AND(V9*V9>V8*V8,V9*V9>V7*V7,V9*V9>V10*V10,V9*V9>V11*V11),SQRT(V9*V9),0)
10	1.00E-01	1.08E-01	2.79E-03	29.97781	0.699909	
11	1.33E-01	1.05E-01	2.78E-03	28.81205	0.697977	

(圖五)

在圖五之中，黃色格子為試著標示該點是否為單擺擺到邊緣的點。該點的內容為：

$$=IF(AND(V9*V9>V8*V8,V9*V9>V7*V7,V9*V9>V10*V10,V9*V9>V11*V11),SQRT(V9*V9),0)$$

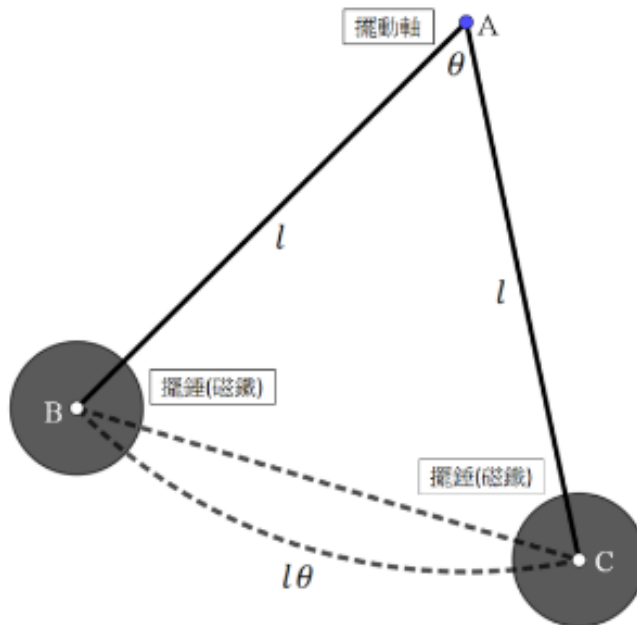
依照此式，當此點之角位置絕對值(V9)大於其前後各兩個時間點時，黃色個子會顯示該點之角位置，反之則會顯示 0。



(圖六)擺幅-時間關係圖(擺角 30 度，擺距 10cm，擺數 2 個)

選取圖六上的高峰點即可得到該單擺擺幅最大的時刻。

二、理論分析



(圖七)

經由理論計算，我們得知兩磁鐵的磁力位能與距離三次方成反比。而力為位能對路徑的微分，因此磁力約與距離四次方成反比。為簡化模型我們將弦長 \overline{BC} 近似為弧 \widehat{BC} 。令磁力 $F_B = \frac{k}{D^4}$ (D 為兩擺實際距離 $D^2 = d^2 + (l\theta)^2$)，則平行磁擺運動方向之有效磁力 $F = \frac{k}{D^4} \cdot \frac{l\theta}{D}$ 。由此可得磁力位能 $V_m = \int F l d\theta = -\frac{k}{3} (l^2 \theta^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}}$ 。定擺軸為零位面，則重力位能 $V_w = (-mgl \cos \theta_1) + (-mgl \cos \theta_2)$ 。

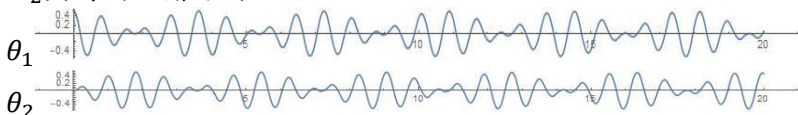
使用拉格朗日方程式(Lagrange equation) $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ (其中 $L = E_k - V_m - V_w$ ， E_k 為動能)，依公式微分可得：

$$kl^2[l^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + d^2]^{-\frac{5}{2}}(\theta_2 - \theta_1) - mgl \sin \theta_1 = ml^2 \ddot{\theta}_1 \cdots (1)$$

$$-kl^2[l^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + d^2]^{-\frac{5}{2}}(\theta_2 - \theta_1) - mgl \sin \theta_2 = ml^2 \ddot{\theta}_2 \cdots (2)$$

經過觀察可得 θ_1 、 θ_2 必定有兩組解，使 $\theta_1 : \theta_2 = 1 : 1$ 或 $1 : (-1)$ 。

但這兩組解的狀況是兩個擺以同角度或是相反角度開始擺動，都不是所求狀況。所以我們將方程式以及初始條件輸入 Mathematica 求數值解。圖三及圖四分別為 30 度、10cm 中的 θ_1 和 θ_2 與時間之關係圖。



圖三



圖四

三、程式模擬

在現實世界中，每一個擺錘的位置、速度、加速度皆是隨時間連續改變的。而在程式模擬過程，若能將時距調到極小，則能夠趨近現實世界的情況。

$$\begin{cases} \tau = I\alpha (\text{式中 } I \text{ 為轉動慣量}) \\ \omega = \omega_0 + \alpha dt \\ \theta = \theta_0 + \omega dt \end{cases}$$

經反覆計算即可模擬出連續的情況。程式內須輸入和實驗相關的變數有：

- (一)軸心至擺錘磁鐵中心的距離 l_1
- (二)軸心至擺錘質心的距離 l_2
- (三)擺錘質量 m 及其數量 n
- (五)最先開始擺動的擺的編號 p
- (六)初角度 θ
- (七)兩擺錘之水平距離 d
- (八)磁力常數 k
- (九)時間精確度 dt (此和程式有關)

所有擺的角位置(除了最先開始擺動的擺以外)、角速度皆為 0(角位置為平衡位置)。

首先，先藉由兩擺錘之水平距離和角度差計算每兩個擺錘之間的直線距離。我們假設磁鐵之間的磁力大小和距離四次方成反比、方向即為連心方向。因此計算出距離後，磁力常數除以距離的四次方即為兩者之間磁力大小。之後，再將其投影至擺錘所畫出的圓弧上。以下以編號 1 及 2 的擺錘為例， θ_x 、 ω_x 分別表示第 x 個擺錘的角位置及角速度， θ_{newx} 、 ω_{newx} 分別表示第 x 個擺錘經過時間 dt 後的角位置及角速度。

$$\text{實際距離平方 } D^2 = d^2 + 2l_1^2 - 2l_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{圓弧方向磁力 } F = \frac{k}{D^4} \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2l_1^2 - 2l_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}}{d}\right)\right]$$

以上藉由 $\sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2l_1^2 - 2l_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}}{d}\right)\right]$ 將其投影至與擺錘擺動相同平面，再以

$\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$ 將其投影至圓弧上。

計算完磁力之後，計算在 dt 之後的角速度、角位置

$$\omega_{new1} = \omega_1 + \frac{Fl_2}{ml_2^2} dt - \frac{mgsin\theta_1 l_2}{ml_2^2} dt$$

$$\theta_{new1} = \theta_1 + \omega_{new1} dt$$

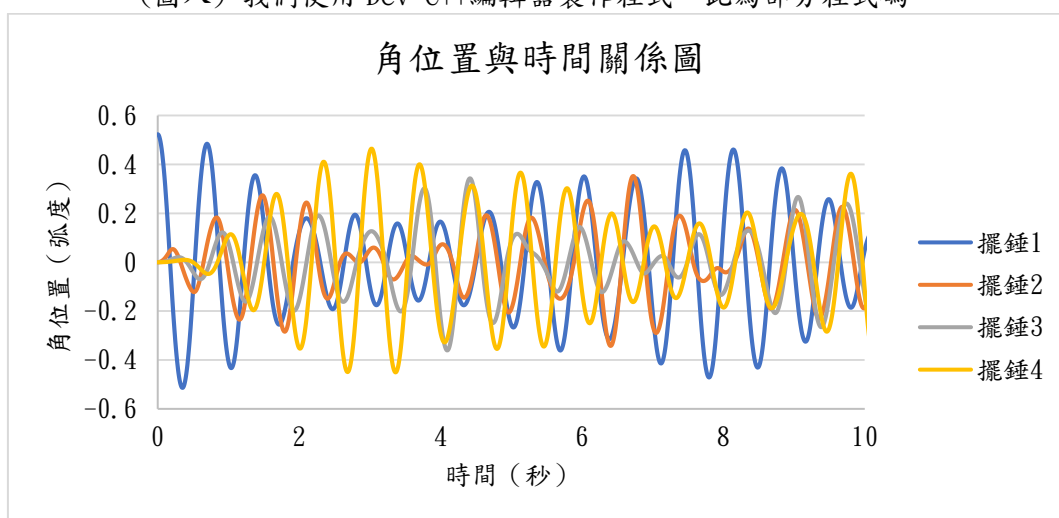
之後再次以新的角位置、角速度推得又再 dt 的時間過後其角位置、角速度，不斷反覆。


```

85 for(int i=1; i<=n; i++)
86 {
87     for(int q=i+1; q<=n; q++)
88     {
89         double de1=max(e[q]-e[i],e[i]-e[q]); //角位置差
90         double d21=2*l1*l1-2*l1*l1*cos(de1); //兩擺錘在其擺動的平面上的投影距離的平方
91         double D1=d21+d*(q-i)*(q-i); //兩擺錘實際距離
92         double insert1=sqrt(d21)/d;
93         double f1=k/D1/D1*cos(de1/2)*sin(atan(insert1)); //磁力(僅順著圓周的方向)
94         if(e[q]>=e[i])w[i]=w[i]+f1*l1/(m*l2*l2)*dt;else w[i]=w[i]-f1*l1/(m*l2*l2)*dt;
95     }
96     for(int q=i-1; q>=1; q--)
97     {
98         double de2=max(e[q]-e[i],e[i]-e[q]); //角位置差
99         double d22=2*l1*l1-2*l1*l1*cos(de2); //兩擺錘在其擺動的平面上的投影距離的平方
100        double D2=d22+d*(i-q)*(i-q); //兩擺錘實際距離
101        double insert2=sqrt(d22)/d;
102        double f2=k/D2/D2*cos(de2/2)*sin(atan(insert2)); //磁力(僅順著圓周的方向)

```

(圖八) 我們使用 Dev-C++編輯器製作程式，此為部分程式碼。



(圖九)程式模擬的數據

這些模擬出的數據可用來模擬沒有摩擦力的情況，可作各種分析，能比實際的數據更容易看出耦合效應的結果

陸、研究結果

一、實驗數據

(一)兩個擺錘

1. 改變初擺角

初擺角在 15、20、25、30、35、40 度下第一個擺幅第二次最高峰時間：

$$T = 2.0735e^{2.2932\theta}$$

2. 改變擺錘間距

擺錘間距在 5、6、7、8、9、10 公分下第一個擺幅第二次最高峰時間：

$$T = 0.035x^{2.3427}$$

(二)四個擺錘

1. 改變初擺角

初擺角在 15、20、25、30、35、40 度下第四個擺幅第一次最高峰時間：

$$T = 2.1416e^{1.9088\theta}$$

2. 改變擺錘間距

擺錘間距在 5、6、7、8、9、10 公分下第四個擺擺幅第一次最高峰時間：

$$T = 0.0303x^{2.2391}$$

二、理論（兩個擺錘）

1. 與初擺角的關係： $T = 6.66256e^{0.0474\theta}$
2. 與單擺間距的關係： $T = 1.3284e^{30.421d}$
3. 與磁力常數的關係： $T = 0.00031k^{-0.8978}$
4. 與擺長的關係： $T = 8.7916e^{5.8533\theta}$
5. 與擺錘質量的關係： $T = 464.43m + 2.6679$

三、程式模擬數據

（一）兩個擺錘，第一個擺擺幅第二次最高峰時間 T

1. 與初擺角的關係： $T = 5.9876e^{0.0458\theta}$
2. 與單擺間距的關係： $T = 1.1252e^{31.169d}$
3. 與磁力常數的關係： $T = 0.000251k^{-0.9165}$
4. 與擺長的關係： $T = 8.3537e^{5.5161\theta}$
5. 與擺錘質量的關係： $T = 399.3m + 2.3401$

（二）四個擺錘，第四個擺擺幅第一次最高峰時間 T

1. 與初擺角的關係： $T = 4.4335e^{0.0314\theta}$
2. 與單擺間距的關係： $T = 0.5415e^{30.563\theta}$
3. 與磁力常數的關係： $T = 0.000245k^{-0.8563}$
4. 與擺長的關係： $T = 8.6902e^{2.4634\theta}$
5. 與擺錘質量的關係： $T = 194.62m + 0.6808$

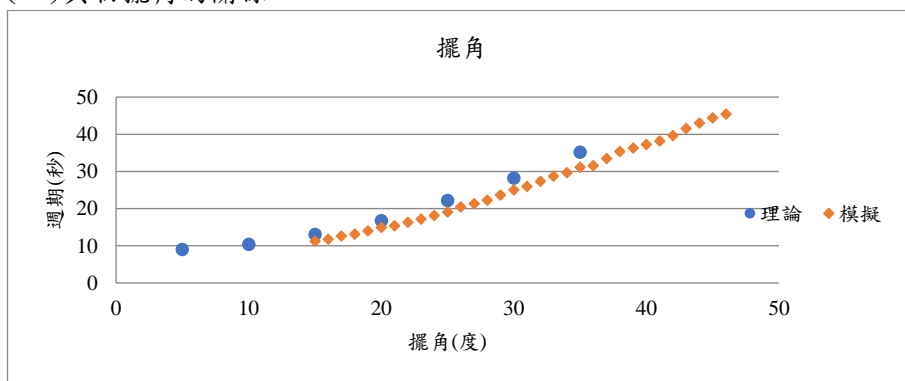
柒、討論

一、實驗與模擬比較

程式模擬與實驗的趨勢大致吻合，現象也相同，這證明模擬是正確的。但因磁力常數 k 無法被精準測量，以及多種干擾實驗的變因(如摩擦力、複擺)，無法與模擬做定量的比較，只能確定週期和初擺角、擺距皆呈正相關。

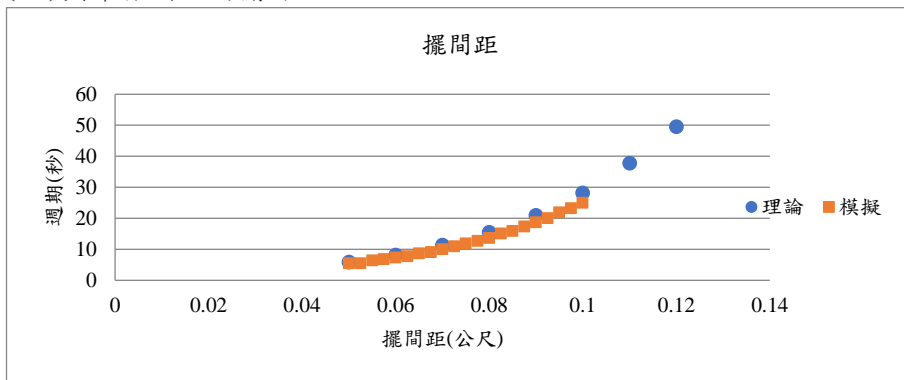
二、模擬與理論比較

（一）與初擺角的關係



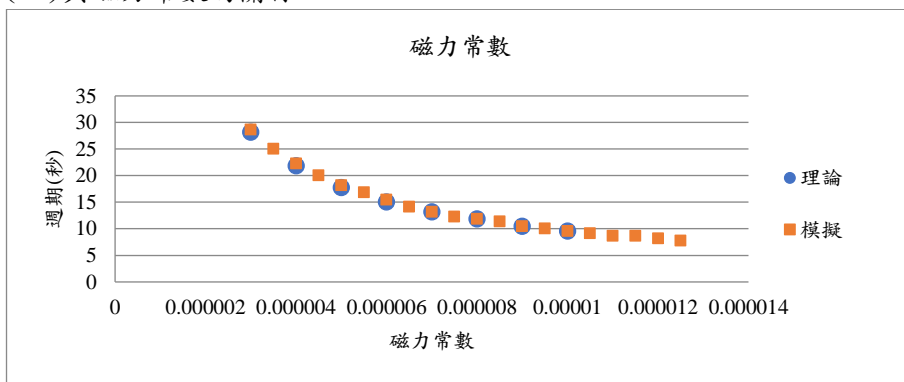
趨勢相似，且趨勢為指數函數曲線。

(二)與單擺間距的關係



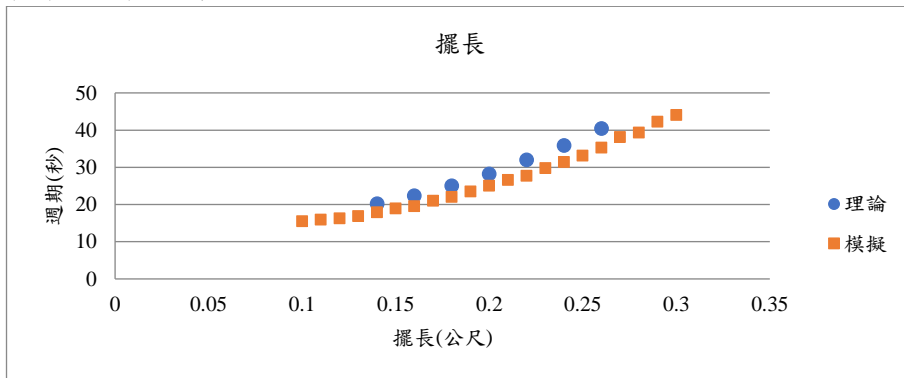
趨勢相似，且趨勢為指數函數曲線。

(三)與磁力常數的關係



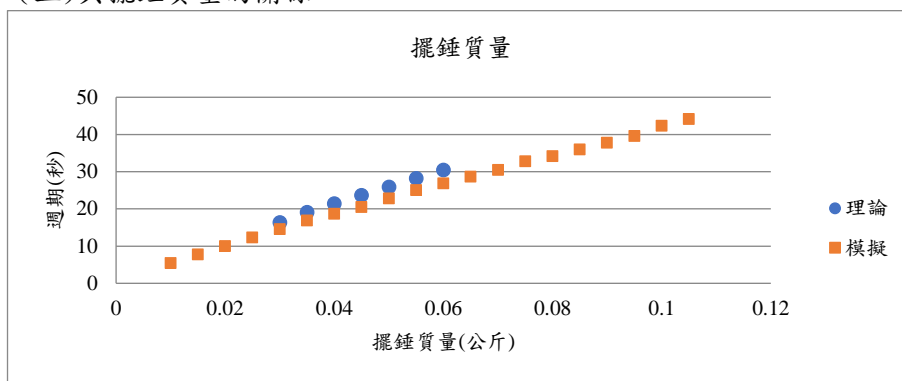
趨勢相似，且趨勢為 $y = ax^b (a > 0, b < 0)$ 。

(四)與擺長的關係



趨勢相似，且趨勢為指數函數曲線。

(五)與擺錘質量的關係



趨勢相似，且趨勢接近直線。

捌、結論

從實驗、模擬到理論三部分，皆出現耦合現象，也都具備大致相同的趨勢；並找出關係式，初步了解 Magnetic Pendulum Array 的運動模式。

玖、未來展望

本實驗困於能量損耗速率過快而無法增加擺數。未來將試著解決軸承和金屬桿的動摩擦，並改變擺長和擺的質量，對更多變因進行探討。並希望在理論部分做進一步的分析，藉以探討模擬與理論的定量差別來源。

心得

在這兩學期的專題研究，教授和我們做許多物理問題的討論。從討論中，教授教導我們很多數學方面的技巧，讓很多物理問題能透過一些處理手法，算出想得到的結論。除此之外，也學到了如何建立模型，並判斷猜想是否正確。這些訣竅讓我在學習物理方面擁有更好的想像力以及理解力。感謝教授和助教，推了我們一把，讓我們自己也能在這個領域中摸索，漸漸成長茁壯。

—王宏銘

這一年在教授和助教的指導下，我們學會了許多新知識，從觀察到建立模型，從列式到解題，在一次次的討論中我們漸漸成長，在物理這門學科中有了更深入的了解。在清大進行專題研究的期間，不僅讓我們學會了理論，也習得了解決問題的能力，這兩個學期使我們獲益良多，不但得到了各種實用的技巧，也激起了我們對物理的興趣和熱情。

—王泓予

在這一年的專題研究，我們和教授討論了許多物理問題。雖然我必須承認有時候確實跟不太上教授和其他兩位組員的思考速度而放空，但我也試著跟著他們的思路去理解。久而久之，雖然仍然沒辦法達到他們的實力，但我認為我進步很多。在清大做專題，能接觸到許多高中程度不會使用的技巧，自其中受益良多。我很高興能有機會高中時期就在大學作研究。

—葉曜銘

教授與助教的勉勵

曜銘請我寫些話來勉勵他和泓予及宏銘三位跟我做專題的同學。公開談論別人，有點像在結婚典禮上致辭，通常只能說好聽的話。我希望打破陋習，在先稱讚他們的努力之餘，指出：在發表意見和上台（我們固定在我的辦公室外頭聊天，牆上掛有一片大白板）練習計算時，經常是固定的人在嘗試，希望將來另外兩位同學能加油主動一些。

—洪在明教授

