Présentations du groupe des Quaternions

Présentations usuelles :

① $Q_1 = \langle \overbrace{a, b}^{S_1} \mid \overbrace{a^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ aba = b}^{R_1} \rangle$

② $Q_2 = \langle \overbrace{e, i, j, k}^{S_2} \mid \overbrace{i^2 = e,\ j^2 = e,\ k^2 = e,\ ijk = e,}^{R_2} \rangle$

$e^2 = 1$

<u>Fait</u> : $Q_1 \cong Q_2$

<u>Preuve</u> : On identifie les générateurs par :

$$a \longleftrightarrow i$$
$$b \longleftrightarrow j$$
$$ab \longleftrightarrow k$$
$$abab \longleftrightarrow e$$

. Soit alors f_1 l'unique morphisme de groupes de $FG(S_1)$ vers Q_2 donné par :

$$\begin{cases} f_1(a) = i \\ f_1(b) = j. \end{cases}$$

On a alors : . $f_1(ab) = ij = k$ ($\underline{0}$.)

. $f_1(abab) = f_1(ab)^2 = k^2 = e$ (par R_2)

De plus : $\cdot\ f_1(a^4) = i^4 = i^2 i^2 = e^2 = 1 \quad (R_2)$

$\cdot\ f_1(a^2) = i^2 = e = j^2 = f_1(b^2)$

$\cdot\ f_1(aba) = iji \underset{O.}{=} ki \underset{I.}{=} j = f_1(b)$

Donc f_1 passe au quotient sur $\bar{R}_1$ pour donner :

$$f_1 : Q_1 \to Q_2$$

. De même, Soit f_2 l'unique morphisme de $FG(S_2)$ vers Q_1 donné par :

$$\begin{cases} \cdot\ f_2(i) = a \\ \cdot\ f_2(j) = b \\ \cdot\ f_2(k) = ab \\ \cdot\ f_2(e) = abab \end{cases}$$

$\cdot\ f_2(i^2) = a^2 = b^2 = f_2(j^2)$

$\cdot\ f_2(i^2) = a^2 \underset{G.}{=} abab = f_2(k^2)$

$= f_2(e)$

$\cdot\ f_2(e^2) = f_2(e)^2 = a^4 = 1. \quad (\underline{R_1})$

Donc f_2 passe au quotient pour donner :

$f_2 : Q_2 \to Q_1$, et l'on a facilement : $\begin{array}{l} f_1 \circ f_2 = Id \\ f_2 \circ f_1 = Id \end{array}$

Présentation hypercubique

2/

③ $Q_3 = \langle \overbrace{r, g, b}^{S_3} \mid \overbrace{b = rg,\ bgr = 1,\ gb = r}^{R_3} \rangle$

Fait : $Q_3 \cong Q_2$

Preuve : On définit $f \in \mathrm{Hom}(FG(S_3), Q_2)$ par :

$$\begin{cases} f(r) := k \\ f(g) := j \\ f(b) := ei \end{cases}$$

Et de même ; $g \in \mathrm{Hom}(FG(S_2, Q_3)$ par :

$$\begin{cases} g(i) := bbb \\ g(j) := g \\ g(k) := r \\ g(e) := bb \end{cases}$$

. On a d'une part :

× $f(rg) = kj \overset{P}{=} ei$ et $f(b) = ei$

× $f(gb) = jei \overset{M}{=} eji \overset{M}{=} k$ et $f(r) = k$

× $f(bgr) = eijk \overset{S_2}{=} 1$

Ainsi f passe au quotient pour donner $f \in Hom(Q_3, Q_2)$

D'autre part:

- $g(i^2) = bbbbbb \overset{H}{\equiv} gnbbb \overset{J}{\equiv} bb = g(e)$
- $g(j^2) = gg \overset{I}{\equiv} bb = g(e)$
- $g(k^2) = rr \overset{E}{\equiv} bb = g(e)$
- $g(e^2) = bbbb \overset{E}{\equiv} rrbb \overset{F}{\equiv} rbg \overset{M}{\equiv} 1$
- $g(ijk) = bbbgn \overset{R_3}{=} bb = g(e)$

donc g passe au quotient pour donner: $g \in Hom(Q_2, Q_3)$

Montrons donc que ce sont des isomorphismes :

· $g \circ f = id_{Q_3}$:

· $g(f(n)) = g(h) = n$

· $g(f(g)) = g(j) = g$

· $g(f(b)) = g(ei) = b^5$
$= b$

· $f \circ g = id_{Q_2}$:

· $f(g(i)) = f(b^3)$
$= (ei)^3$
$= e^3 i^3$
$= e^4 i$
$= i$

· $f(g(j)) = f(g)$
$= j$

· $f(g(h)) = f(n) = h$

· $f(g(e)) = f(bb) = eiei$
$= e^2 i^2 = e$