Calcul de Fibre

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $r \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. On a une suite exacte courte de groupes :

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow[1 \mapsto \bar{r}]{\delta_r} \mathbb{Z}_m$$

Dont on déduit :

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\left\{\begin{smallmatrix} base \mapsto base \\ loop \mapsto loop^m \end{smallmatrix}\right."] \arrow[d, equal] & S^1 \arrow[r, "\left\{\begin{smallmatrix} base \mapsto S_m \\ loop \mapsto ua(S_m^r) \end{smallmatrix}\right."] \arrow[d, equal] & B\mathbb{Z}_m \\
B\mathbb{Z} & B\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

où $S_m : Fin\, m \to Fin\, m$, $x \mapsto \overline{x+1}_m$

Correspondant à une fibration de base $B\mathbb{Z}_m$, d'espace total S^1 et de fibre S^1.

Suivant cela, le pullback de :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d, "f"] \\
S^1 \arrow[r, "g"'] & B\mathbb{Z}_m
\end{tikzcd}$$

$g := \left\{\begin{array}{l} base \mapsto S_m \\ loop \mapsto ua(S_m^r) \end{array}\right.$

doit être S^1.

On a un pullback donné par :

$$\sum_{x:S^1}\sum_{u:1} g(x) = f(u)$$

$$\simeq \sum_{x:S^1} g(x) = s_m \equiv \mathrm{fib}_g(s_m)$$

Que l'on peut voir comme l'espace total de la fibration :

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "p \circ g"'] & B\mathbb{Z}_m \arrow[d, "p = x \mapsto \mathrm{fib}_f(x) \\ = x \mapsto x = s_m"] \\
& \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

Voyant S^1 comme colimite on a en fait :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 1 \arrow[r, "\mathrm{base}"] \arrow[drr, "s_m = s_m"'] & S^1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "p \circ g"] & B\mathbb{Z}_m \arrow[d, "p"] \\
& & & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

De sorte que :

$$\sum_{x:S^1} P\circ g(x)$$

$$\equiv \sum_{x:S^1} g(x) = S_m$$

$$\equiv fib_g(S_m)$$

On peut alors calculer l'espace total $\sum_{x:S^1} P\circ g(x)$ par le <u>flattening lemma</u>.

Celui-ci nous indique que $\sum_{x:S^1} P\circ g(x) \simeq W$ où W est un HIT généré par les constructeurs :

- $\tilde{c} : \prod_{u:1} P\circ g \circ base(u) \to W$ i.e. $\tilde{c} : S_m = S_m \to W$
- $\tilde{p} : \prod_{l : S_m = S_m} \tilde{c}(l) = \tilde{c}(l^n)$

Ce qui revient à dire que W est le push-out homotopique de :

$$S_m = S_m \underset{p \mapsto p^n}{\overset{id}{\rightrightarrows}} S_m = S_m$$

Fait : $W \simeq S^1$

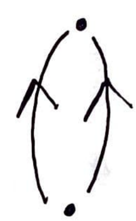
Preuve : On a $s_m = s_m \simeq \mathrm{Fin}\, m$ donc $W \simeq W'$ où W' est donné par :

$c : \mathrm{Fin}\, m \longrightarrow W'$

$p : \prod_{x : \mathrm{Fin}\, m} c(x) = c(s_m^n(x))$,

Prouvons donc que $W' \simeq S^1$.

$\Sigma 2$ est la suspension :



$(\simeq \uparrow\!\cdot\!\uparrow \simeq \bigcirc = S^1$ en contractant$)$

Lemme 1 : $\Sigma 2 \simeq S^1$

Preuve : Comme.

On définit pour tout $i \geq 1$ le HIT S^1_i donné par les constructeurs :

- $c : \mathrm{Fin}\, i \longrightarrow S^1_i$
- $p : \prod_{x : \mathrm{Fin}\, i} c(x) = c(s_i(x))$ où $s_i := \begin{array}{l} \mathrm{Fin}\, i \to \mathrm{Fin}\, i \\ x \mapsto \overline{x+1}_i \end{array}$

On a que :
- $S^1_1 \simeq S^1$ (clair)
- $S^1_2 \simeq \Sigma 2$ (à prouver).

But : $\forall i \geq 2$, $S^1_i \simeq \Sigma 2$.

On procède en deux temps.

Lemme 2: $S^1_2 \simeq \Sigma 2$

Preuve: $S^1_2 \xrightarrow{f} \Sigma 2$ $\qquad$ $\Sigma 2 \xrightarrow{g} S^1_2$

$$c(0) \longmapsto N \qquad N \longmapsto c(0)$$
$$c(1) \longmapsto S \qquad S \longmapsto c(1)$$
$$p_0 \longmapsto \mathrm{merid}(0) \qquad \mathrm{merid}(0) \longmapsto p_0$$
$$p_1 \longmapsto \mathrm{merid}(1)^{-1} \qquad \mathrm{merid}(1) \longmapsto p_1^{-1}$$

- $g \circ f(x) = x$

Par S^1_2 induction:

- $g \circ f(c(0)) \equiv c(0)$ donc $\mathrm{refl}_{c(0)} : g \circ f(c(0)) = c(0)$
- $g \circ f(c(1)) \equiv c(1)$ donc $\mathrm{refl}_{c(1)} : g \circ f(c(1)) = c(1)$
- $\mathrm{Transport}^{x \mapsto g \circ f(x) = x}(p_0, \mathrm{refl}_{c(0)}) = \mathrm{refl}_{c(1)}$?

$$\mathrm{Transport}^{x \mapsto g \circ f(x) = x}(p_0, \mathrm{refl}_{c(0)})$$
$$= (g \circ f(p_0))^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(0)} \cdot p_0$$
$$= p_0^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(0)} \cdot p_0$$
$$= p_0^{-1} \cdot p_0$$
$$= \mathrm{refl}_{c(1)}$$

- $\mathrm{Transport}^{x \mapsto g \circ f(x) = x}(p_1, \mathrm{refl}_{c(1)}) = \mathrm{refl}_{c(0)}$?

$$\mathrm{Transport}^{x \mapsto g\circ f(x) = x}(p_1, \mathrm{refl}_{c(1)})$$

$$= \left(g\circ f(p_1)\right)^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(1)} \cdot p_1$$

$$= p_1^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(1)} \cdot p_1$$

$$= \mathrm{refl}_{c(0)}$$

· $f\circ g(x) = x$:

Par $\Sigma 2$ induction

· $f\circ g(N) \equiv N$ donc $\mathrm{refl}_N : f\circ g(N) \equiv N$

· $f\circ g(S) \equiv S$ donc $\mathrm{refl}_S : f\circ g(S) \equiv S$

· $\mathrm{Transport}^{x \mapsto f\circ g(x) = x}(\mathrm{merid}(0), \mathrm{refl}_N) = \mathrm{refl}_S$?

$$\mathrm{Transport}^{x \mapsto f\circ g(x) = x}(\mathrm{merid}(0), \mathrm{refl}_N)$$

$$= \left(f\circ g(\mathrm{merid}(0))\right)^{-1} \cdot \mathrm{refl}_N \cdot \mathrm{merid}(0)$$

$$= \mathrm{merid}(0)^{-1} \cdot \mathrm{refl}_N \cdot \mathrm{merid}(0)$$

$$= \mathrm{refl}_S$$

· $\mathrm{Transport}^{x \mapsto f\circ g(x) = x}(\mathrm{merid}(1), \mathrm{refl}_N)$

$$= \left(f\circ g(\mathrm{merid}(1))\right)^{-1} \cdot \mathrm{refl}_N \cdot \mathrm{merid}(1)$$

$$= \mathrm{merid}(1)^{-1} \cdot \mathrm{refl}_N \cdot \mathrm{merid}\, 1$$

$$= \mathrm{refl}_S$$

$\square$

<u>h</u> : $\mathrm{Transport}^{x \mapsto g\circ f(x) = x}\left(p_k, \mathrm{refl}_{c(k)}\right)$

$$= \left((g\circ f)(p_k)\right)^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(k)} \cdot p_k$$

$$= p_k^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(k)} \cdot p_k$$

$$= \mathrm{refl}_{c(k+1)}$$

. $\mathrm{Transport}^{x \mapsto g\circ f(x) = x}\left(p_{i-1}, \mathrm{refl}_{c(i-1)}\right)$

$$= p_i^{-1} \cdot p_{i-1}^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(i-1)} \cdot p_{i-1}$$

$$= p_i^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(i)}$$

$$= p_i^{-1}$$

. $\mathrm{Transport}^{x \mapsto g\circ f(x) = x}\left(p_i, p_i^{-1}\right)$

$$= \mathrm{refl}_{c(0)}^{-1} \cdot p_i^{-1} \cdot p_i$$

$$= \mathrm{refl}_{c(0)}$$

<u>D'où</u> : <u>$g\circ f(x) = x$</u>

Pour conclure que $S'_i \simeq S'$ pour tout $i \geq 1$ il suffit alors de prouver que : $\forall i, S'_i \simeq S'_{i+1}$.

Lemme 3 : $S'_i \simeq S'_{i+1}$

Preuve :

$$\begin{aligned} f : S'_{i+1} &\longrightarrow S'_i \\ C(0) &\longmapsto C(0) \\ C(1) &\longmapsto C(1) \\ &\vdots \\ C(i-1) &\longmapsto C(i-1) \\ C(i) &\longmapsto C(0) \\ p_0 &\longmapsto p_0 \\ p_1 &\longmapsto p_1 \\ &\vdots \\ p_{i-1} &\longmapsto p_{i-1} \\ p_i &\longmapsto \mathrm{refl}_{C(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : S'_i &\longrightarrow S'_{i+1} \\ C(0) &\longmapsto C(0) \\ &\vdots \\ C(i-1) &\longmapsto C(i-1) \\ p_0 &\longmapsto p_0 \\ &\vdots \\ p_{i-1} &\longmapsto p_{i-1} \cdot p_i \end{aligned}$$

. $g \circ f(x) = x$.

Par S'_{i+1} induction :

· si $k \in [\![0, i-1]\!]$, $g \circ f(C(k)) \equiv C(k)$ donc $\mathrm{refl}_{C(k)} : g \circ f(C(k)) = C(k)$

· $g \circ f(C(i)) \equiv g(C(0)) \equiv C(0)$ et $p_i : C(i) = C_0$ donc $p_i^{-1} : g \circ f(C(i)) = C(i)$

. Pour $k \in [\![0, i-2]\!]$ on veut :

$$\mathrm{Transport}^{x \mapsto g \circ f(x) = x}(p_k, \mathrm{refl}_{C(k)}) = \mathrm{refl}_{C(k+1)}$$

· $f\circ g(x) = x$:

Par S^1_i : induction :

· $f\circ g(c(h)) \equiv c(h)$ donc $\mathrm{refl}_{c(h)} : f\circ g(c(h)) = c(h)$

· $\mathrm{Transport}^{x \mapsto f\circ g(x)}(p_h, \mathrm{refl}_{c(h)})$

$= \left(f\circ g(p_h)\right)^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(h)} \cdot p_h$

$\equiv p_h^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(h)} \cdot p_h$

$= \mathrm{refl}_{c(S_i(h))}$

D'où : $f\circ g(x) = x$

Ainsi : $\forall i,\ S^1_{i+1} \simeq S^1_i$

Corollaire : $\forall i,\quad S^1 \simeq \Sigma 2 \simeq S^1_2 \simeq S^1_i$

i.e : $S^1 \simeq S^1_i$

· Pour conclure il nous manque un dernier lemme :

Lemme : Pour $m \in \mathbb{N}$, r premier à m on note $W_{m,r}$ le HIT donné par :

$c : \mathrm{Fin}\ m \to W_{m,r}$

$p : \prod_{x : \mathrm{Fin}\ m} c(x) = c(S_m^r(x))$

Alors on a : $W_{m,r} \simeq S^1_m$

Preuve :

$$W_{m,r} \xrightarrow{f} S^1_m$$
$$c(i) \longmapsto c(\overline{r^{-1}i}_m)$$
$$p_i \longmapsto p_{r^{-1}i}$$

$$S^1_m \xrightarrow{g} W_{m,r}$$
$$c(i) \longmapsto c(\overline{r \cdot i}_m)$$
$$p_i \longmapsto p_{r \cdot i}$$

Cette définition est "OK" car $r \wedge m = 1$.

· $g \circ f(x) = x$

Par $W_{m,r}$ induction :

· $g \circ f(c(i)) \equiv c(i)$ donc $\mathrm{refl}_{c(i)} : g \circ f(c(i)) = c(i)$

· $\mathrm{Transport}^{x \mapsto g \circ f(x) = x}(p_i, \mathrm{refl}_{c(i)})$

$= p_i^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(i)} \cdot p_i$
$= \mathrm{refl}_{c(\overline{i+1}_m)}$

· $f\circ g(x) = x$

Par Γ_m induction :

· $f\circ g(c(i)) \equiv c(i)$ donc $\mathrm{refl}_{c(i)} : f\circ g(c(i)) = c(i)$

· $\mathrm{Transport}^{x \mapsto f\circ g(x) = x}(p_i, \mathrm{refl}_{c(i)})$

$= p_i^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c(i)} \cdot p_i$

$= \mathrm{refl}_{c(i+1_m)}$

d'où $f\circ g(x) = x$.

<u>Ainsi</u> : $W_{m,r} \simeq S_m$.

<u>Bilan</u> : $W \simeq W' \equiv W_{m,r} \simeq S^1$

En toute généralité, on peut définir $W_{m,k}$ pour k quelconque dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

En fait on a le :

Thm : $W_{m,k} \simeq \bigsqcup_{1\leq j\leq \delta} S^1$, où $\delta = m \wedge k$

Pour un type A on définit :

$$\bigsqcup_{1\leq j\leq h} A \text{ par : } \cdot \forall 1\leq j\leq h,\ c^j : A \to \bigsqcup_{1\leq j\leq h} A$$

$\cdot \ldots\ldots$

On a clairement :

$$A \simeq B \Rightarrow \bigsqcup_{1\leq j\leq h} A \simeq \bigsqcup_{1\leq j\leq h} B$$

Il suffit donc de montrer que :

$$W_{m,k} \simeq \bigsqcup_{1\leq j\leq \delta} S^1_{m/\delta}$$

Preuve : $W_{m,k}$ est donné par :

$$c : \mathrm{Fin}\, m \to W_{m,k}$$

$$p : \prod_{x:\mathrm{Fin}\, m} c(x) = c(S_m^k(x))$$

et $\bigsqcup_{1\leq j\leq \delta} S^1_{m/\delta}$ par : $\cdot \forall 1\leq j\leq \delta,\ c^j : S^1_{m/\delta} \to \bigsqcup_{1\leq j\leq \delta} S^1_{m/\delta}$

$$\cdot \forall 1\leq j\leq \delta,\ p^j : \prod_{x:\mathrm{Fin}\, m} c^j(x) = c^j(S_m(x))$$

On définit :

$$W_{m,k} \xrightarrow{f} \bigsqcup_{1\leq j\leq \delta} S'_{m/\delta}$$

- $c(lk) \longmapsto c^1(l)$
- $c(lk+1) \longmapsto c^2(l)$

$\vdots$

- $c(lk+(\delta-1)) \longmapsto c^\delta(l)$
- $p\,lk \longmapsto p^1_l$

$\vdots$

- $p\,lk+(\delta-1) \longmapsto p^\delta_l$

$$\bigsqcup_{1\leq j\leq \delta} S'_{m/\delta} \xrightarrow{g} W_{m,k}$$

- $c^i(l) \longmapsto c(lk+(i-1))$
- $p^i_l \longmapsto p\,lk+(i-1)$

$g\circ f(x) = x$:

Par $W_{m,k}$ induction :

- $g\circ f\, c(lk+p) \equiv g(c^{p+1}(l))$

$$\equiv c(lk+p)$$

donc $\mathrm{refl}_{c(lk+p)} : g\circ f(c(lk+p)) = c(lk+p)$

. Transport $\text{refl}_{c(\ell k+u)}$ $(P_{\ell k+u}, \ldots)$ ntr $g\circ f(x) = x$

$$= (g\circ f(P_{\ell k+u}))^{-1} \cdot \text{refl}_{c(\ell k+u)} \cdot P_{\ell k+u}$$

$$= (g(p_\ell^{u+1}))^{-1} \cdot \text{refl}_{c(\ell k+u)} \cdot P_{\ell k+u}$$

$$= P_{\ell k+u}^{-1} \cdot \text{refl}_{c(\ell k+u)} \cdot P_{\ell k+u}$$

$$= \text{refl}_{c((\ell+1)k+u)}$$

D'où: $g\circ f(x) = x$

. $f\circ g(x) = x$!

Par $\bigsqcup_{1\leq j\leq k} S^1_{m/S}$ induction

. $f\circ g(c^i(\ell)) = f(c(\ell k + (i-1)))$
$= c^i(\ell)$

donc: $\text{refl}_{c^i(\ell)} : f\circ g(c^i(\ell)) = c^i(\ell)$

. Transport $x \mapsto f\circ g(x) = x$

$$(p^i(\ell), \mathrm{refl}_{c^i(\ell)})$$

$$= \left(f\circ g(p^i(\ell))\right)^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c^i(\ell)} \cdot p^i(\ell)$$

$$= f(p_{\ell k + i - 1})^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c^i(\ell)} \cdot p^i(\ell)$$

$$= p^i(\ell)^{-1} \cdot \mathrm{refl}_{c^i(\ell)} \cdot p^i(\ell)$$

$$= \mathrm{refl}_{c^i(\ell+1)}$$

Voici $f\circ g(x) = x$

Au total : $W_{m,k} \simeq \bigsqcup_{1 \leq j \leq \delta} S^1_{m/\delta}$

Puis : $W_{m,k} \simeq \bigsqcup_{1 \leq j \leq \delta} S^1$