

# **Лабораторная работа №4**

**Модель гармонического осциллятора**

Латыпова Диана. НФИбд-02-21

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>21</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>22</b>

## Список иллюстраций

4.1	julia. 1 случай . . . . .	10
4.2	julia. 1 случай. Фазовый портрет . . . . .	11
4.3	OpenModelica. 1 случай . . . . .	12
4.4	OpenModelica. 1 случай. Фазовый портрет . . . . .	12
4.5	julia. 2 случай . . . . .	14
4.6	julia. 2 случай. Фазовый портрет . . . . .	14
4.7	OpenModelica. 2 случай . . . . .	15
4.8	OpenModelica. 2 случай. Фазовый портрет . . . . .	16
4.9	julia. 3 случай . . . . .	18
4.10	julia. 3 случай. Фазовый портрет . . . . .	18
4.11	OpenModelica. 3 случай . . . . .	19
4.12	OpenModelica. 3 случай. Фазовый портрет . . . . .	20

## Список таблиц

# 1 Цель работы

- Изучить понятие гармонического осциллятора;
- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора;
- Решить уравнение гармонического осциллятора для трех случаев.

## 2 Задание

Вариант 46.

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы  $\ddot{x} + 8.8x = 0$ ;
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы  $\ddot{x} + 7.7\dot{x} + 3.3x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы  $\ddot{x} + 4.4\dot{x} + 5.5x = 2.2\sin(4t)$

На интервале  $t \in [0; 55]$  (шаг 0.05) с начальными условиями  $x_0 = 1.1, y_0 = 0$ .

### 3 Теоретическое введение

**Гармонический осциллятор** - это система, которая обладает возвращающей силой, пропорциональной смещению от положения равновесия, и инерционной массой [1].

Математически гармонический осциллятор описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$m$  - масса,  $c$  - коэффициент затухания(если присутствует),  $k$  - коэффициент упругости,  $F(t)$  - внешняя сила (если присутствует).

В случае отсутствия внешних сил и затухания уравнение принимает простой вид:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Это уравнение описывает свободные колебания гармонического осциллятора.

Гармонические осцилляторы широко встречаются в физике: начиная от малых механических систем, таких как маятники и пружинные массы, до электрических контуров в радиотехнике и атомных систем, таких как электроны, движущиеся вокруг ядра атома.

Решение уравнений гармонического осциллятора позволяет предсказать поведение системы во времени, а фазовые портреты дают графическое представление этого поведения в фазовом пространстве.

**Фазовый портрет** - это графическое представление решения дифференциального уравнения в плоскости  $(x, \dot{x})$ , где  $x$  - смещение, а  $\dot{x}$  - скорость измене-

ния смещения [habr:bash].



## 4 Выполнение лабораторной работы

Рассмотрим каждый случай:

1. *Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы:*

Уравнение данного случая:  $\ddot{x} + 8.8x = 0$ ;

В данном уравнении коэффициент перед  $x$  соответствует жесткости  $k$  гармонического осциллятора, а так как отсутствуют члены с  $\dot{x}$  и  $F(t)$ , это означает, что отсутствуют как затухающие силы, так и внешние воздействия.

Код на языке Julia (рис. 4.1) (рис. 4.2):

```
using DifferentialEquations
```

```
# Функция, описывающая правую часть уравнения гармонического осциллятора
```

```
function harmonic_oscillator!(du, u, p, t)
```

```
    k = p # Коэффициент жесткости гармонического осциллятора
```

```
    du[1] = u[2] # dx/dt = y
```

```
    du[2] = -k * u[1] # dy/dt = -kx
```

```
end
```

```
# Начальные условия: смещение и скорость
```

```
const initial_displacement = 1.1
```

```
const initial_velocity = 0.0
```

```
u0 = [initial_displacement, initial_velocity]
```

```

p = (8.8) # Коэффициент жесткости гармонического осциллятора
tspan = (0.0, 55.0) # Временной интервал
problem = ODEProblem(harmonic_oscillator!, u0, tspan, p) # Определение задачи для р
solution = solve(problem, dtmax=0.05) # Решение задачи с заданным максимальным шагом

using Plots
gr()

# Построение решения системы уравнений (графики смещения и скорости от времени)
plot(solution)
savefig("julia4_1.png") # Сохранение графика решения в файл

# Построение фазового портрета (график скорости от смещения)
plot(solution, vars=(2,1))
savefig("julia4_1phase.png") # Сохранение фазового портрета в файл

```

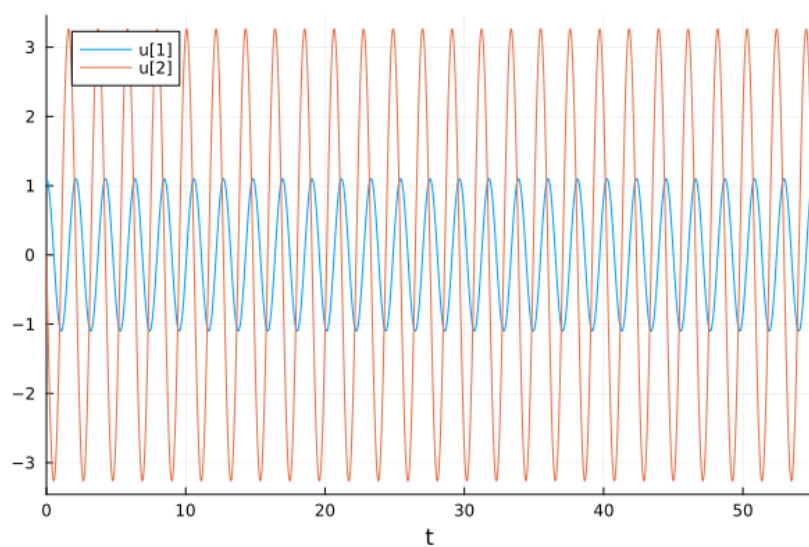


Рис. 4.1: julia. 1 случай

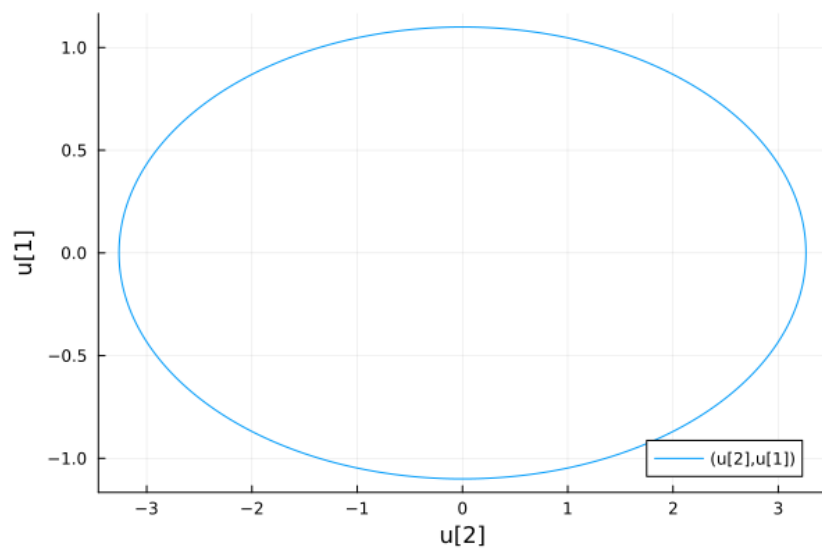


Рис. 4.2: julia. 1 случай. Фазовый портрет

Код для ПО OpenModelica (рис. 4.3) (рис. 4.4):

```
model lab4_1

parameter Real x0 = 1.1;
parameter Real y0 = 0.0;

// Объявление переменных модели
Real x(start=x0);
Real v(start=y0);

// Уравнение движения гармонического осциллятора
equation
  der(x) = v;
  der(v) = -8.8 * x;

end lab4_1;
```

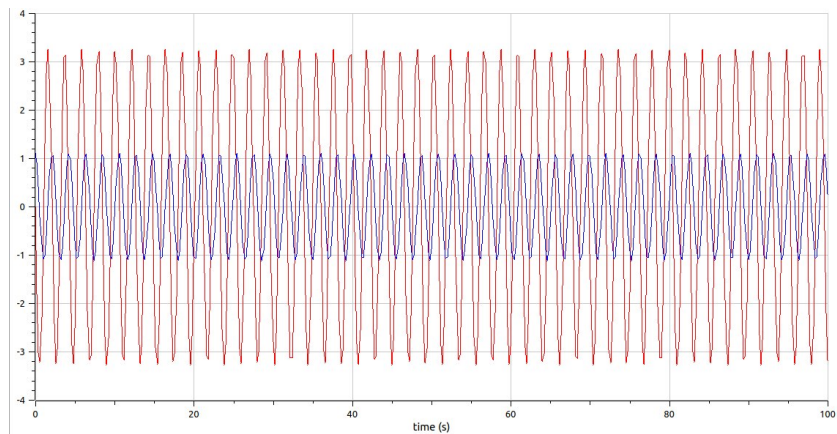


Рис. 4.3: OpenModelica. 1 случай

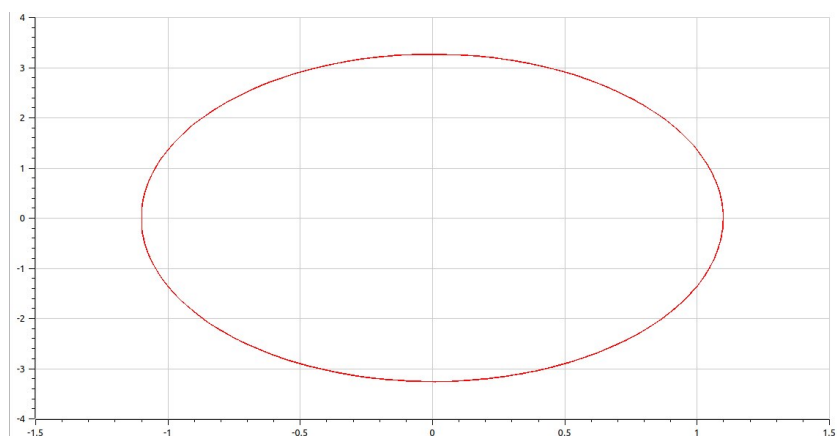


Рис. 4.4: OpenModelica. 1 случай. Фазовый портрет

## 2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы:

$$\ddot{x} + 7.7\dot{x} + 3.3x = 0$$

В этом уравнении, помимо члена с  $x$ , есть члены с  $\dot{x}$  и без него. Член с  $\dot{x}$  соответствует силе затухания, которая пропорциональна скорости изменения смещения. Внешняя сила отсутствует ( $F(t) = 0$ ).

Код на языке Julia (рис. 4.5) (рис. 4.6):

```
using DifferentialEquations
```

```

# Функция, описывающая правую часть уравнения гармонического осциллятора
function harmonic_oscillator!(du, u, p, t)
    c, k = p # Коэффициенты затухания и жесткости гармонического осциллятора
    du[1] = u[2] #  $dx/dt = y$ 
    du[2] = -c * du[1] - k * u[1] #  $dy/dt = -cx' - kx$ 
end

# Начальные условия: смещение и скорость
const initial_displacement = 1.1
const initial_velocity = 0.0
u0 = [initial_displacement, initial_velocity]

c = 7.7 # Коэффициент затухания гармонического осциллятора
k = 3.3 # Коэффициент жесткости гармонического осциллятора
p = (c, k) # Параметры системы (коэффициенты затухания и жесткости)
tspan = (0.0, 55.0) # Временной интервал
problem = ODEProblem(harmonic_oscillator!, u0, tspan, p) # Определение задачи для решения
solution = solve(problem, dtmax=0.05) # Решение задачи с заданным максимальным шагом

using Plots
gr()

# Построение решения системы уравнений (графики смещения и скорости от времени)
plot(solution)
savefig("julia4_2.png") # Сохранение графика решения в файл

# Построение фазового портрета (график скорости от смещения)
plot(solution, vars=(2,1))
savefig("julia4_2phase.png") # Сохранение фазового портрета в файл

```

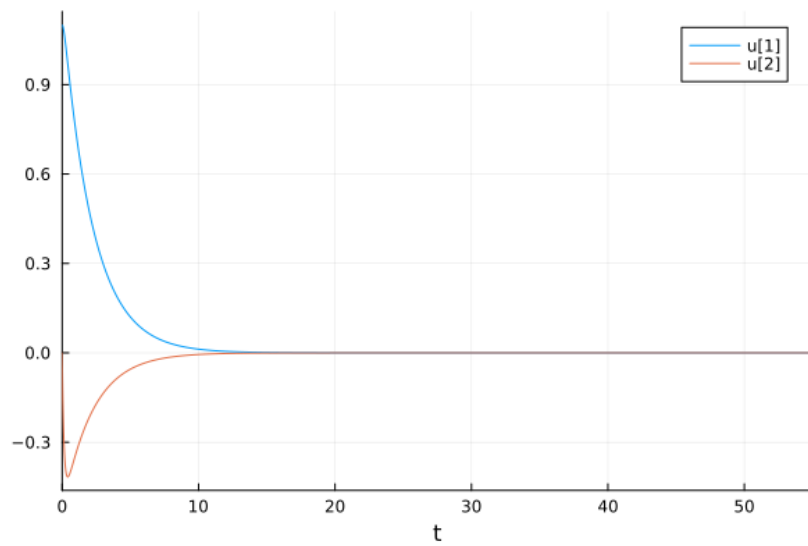


Рис. 4.5: julia. 2 случай

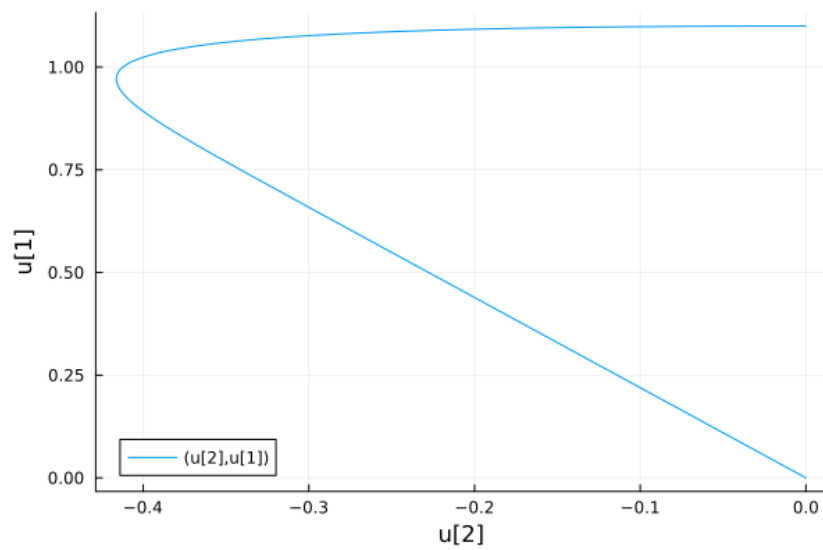


Рис. 4.6: julia. 2 случай. Фазовый портрет

Код для ПО OpenModelica (рис. 4.7) (рис. 4.8):

```
model lab4_2
```

```
parameter Real x0 = 1.1;
```

```
parameter Real y0 = 0.0;
```

```

// Объявление переменных модели
Real x(start=x0);
Real v(start=y0);

// Уравнение движения гармонического осциллятора с затуханием
equation
der(x) = y;
der(y) = -7.7 * y - 3.3 * x;

end lab4_2;

```

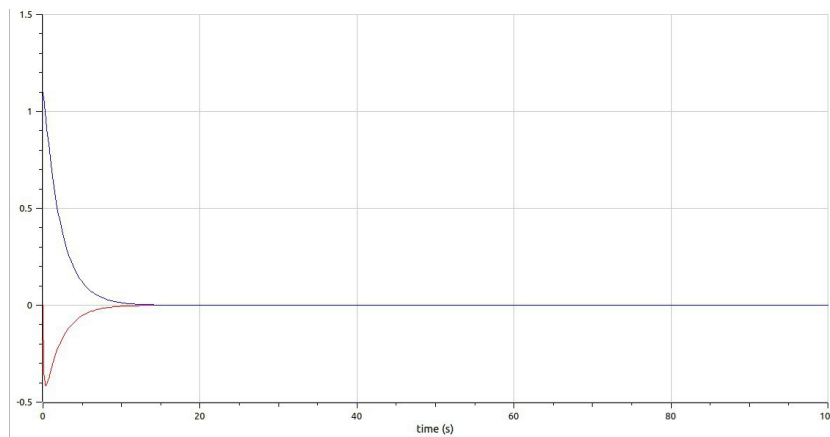


Рис. 4.7: OpenModelica. 2 случай

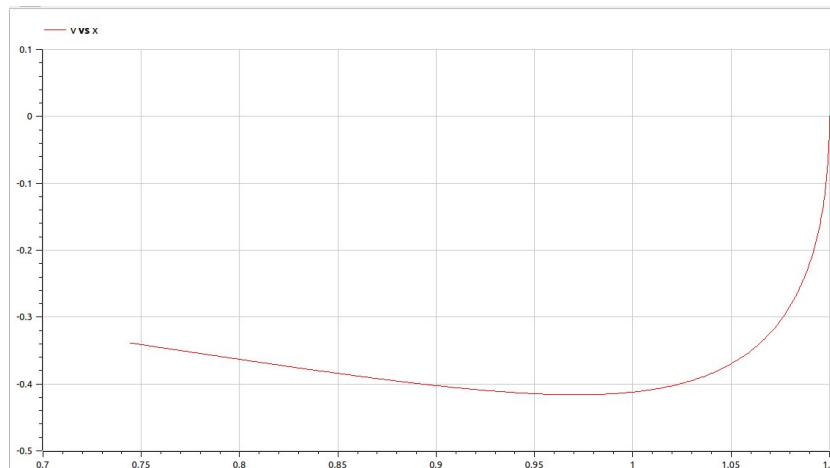


Рис. 4.8: OpenModelica. 2 случай. Фазовый портрет

### 3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы:

$$\ddot{x} + 4.4\dot{x} + 5.5x = 2.2\sin(4t)$$

В этом уравнении, помимо члена с  $x$  и члена с  $\dot{x}$ , есть член, соответствующий внешней силе  $F(t)$ , которая является синусоидальной функцией.

Код на языке Julia (рис. 4.9) (рис. 4.10):

```
# x'' + 4.4x' + 5.5x = 2.2sin(4t)
using DifferentialEquations

# Функция, описывающая правую часть уравнения гармонического осциллятора
function harmonic_oscillator!(du, u, p, t)
    c, k = p # Коэффициенты затухания и жесткости гармонического осциллятора
    du[1] = u[2] # dx/dt = y
    du[2] = -c * du[1] - k * u[1] + 2.2 * sin(4 * t) # dy/dt = -cx' - kx + 2.2 * sin(4t)
end

# Начальные условия: смещение и скорость
```



```

const initial_displacement = 1.1
const initial_velocity = 0.0
u0 = [initial_displacement, initial_velocity]

c = 4.4 # Коэффициент затухания гармонического осциллятора
k = 5.5 # Коэффициент жесткости гармонического осциллятора
p = (c, k) # Параметры системы (коэффициенты затухания и жесткости)
tspan = (0.0, 55.0) # Временной интервал
problem = ODEProblem(harmonic_oscillator!, u0, tspan, p) # Определение задачи для решателя
solution = solve(problem, dtmax=0.05) # Решение задачи с заданным максимальным шагом

using Plots
gr()

# Построение решения системы уравнений (графики смещения и скорости от времени)
plot(solution)
savefig("julia4_3.png") # Сохранение графика решения в файл

# Построение фазового портрета (график скорости от смещения)
plot(solution, vars=(2,1))
savefig("julia4_3phase.png") # Сохранение фазового портрета в файл

```

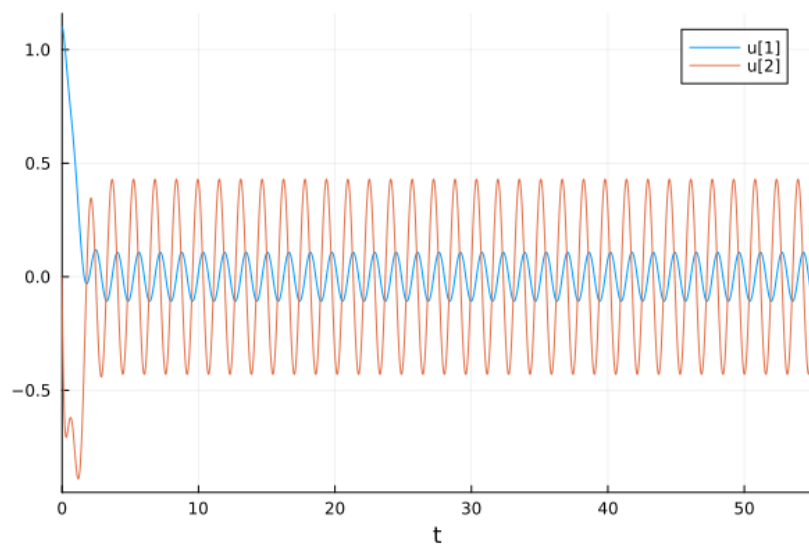


Рис. 4.9: julia. 3 случай

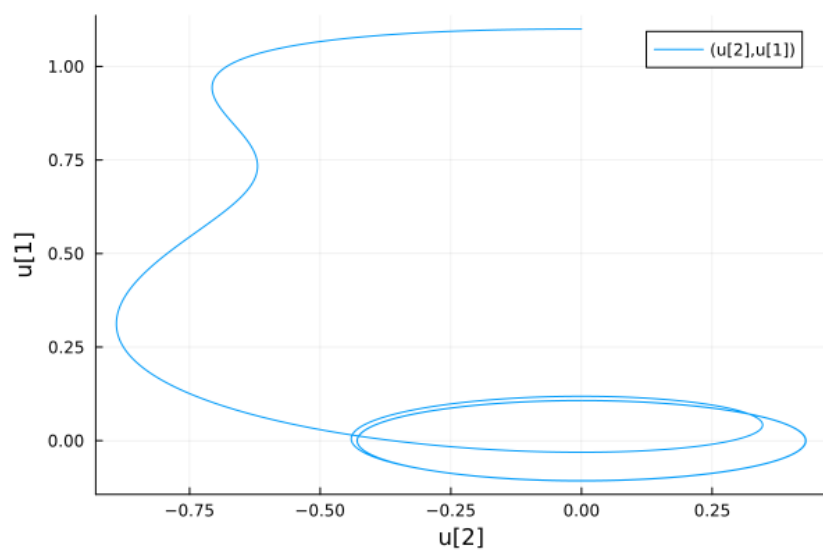


Рис. 4.10: julia. 3 случай. Фазовый портрет

Код для ПО OpenModelica (рис. 4.11) (рис. 4.12):

```
model lab4_3
```

```
parameter Real x0 = 1.1;
```

```
parameter Real y0 = 0.0;
```

```

// Объявление переменных модели
Real x(start=x0);
Real v(start=y0);

// Уравнение движения гармонического осциллятора с затуханием и внешней силой
Real externalForce = 2.2 * sin(4 * time);
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -4.4 * y - 5.5 * x + externalForce;

end lab4_3;

```

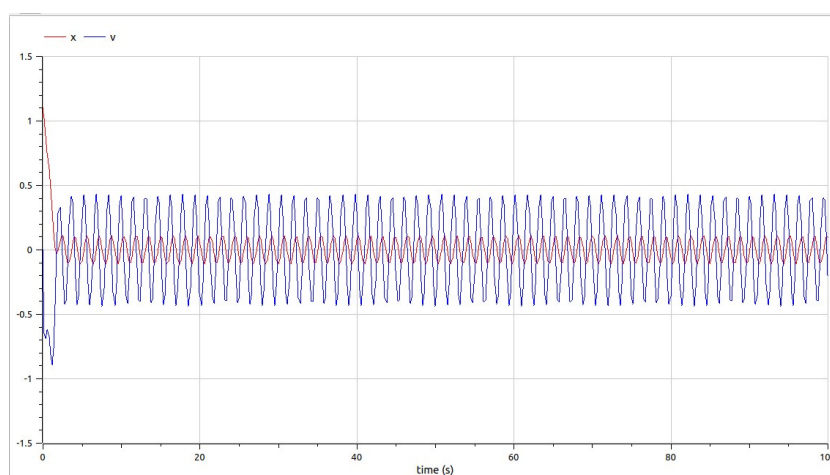


Рис. 4.11: OpenModelica. 3 случай

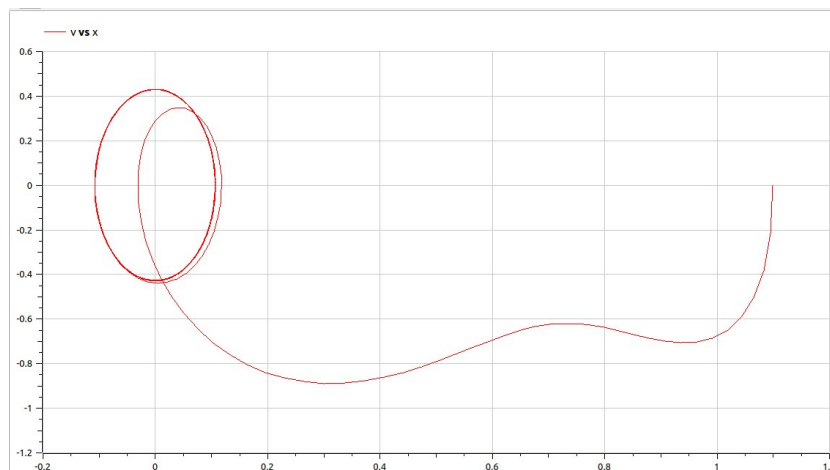


Рис. 4.12: OpenModelica. 3 случай. Фазовый портрет

**Общий анализ:** Построив графики и фазовые портреты 3 случаев, можем заметить, что код для ПО OpenModelica значительно меньше. И, кстати, говоря у меня фазовые портреты получились отзеркаленными.

## 5 Выводы

Я изучула понятие гармонического осциллятора и фазовых портретов. Реализовала графики и фазовые портреты гармонического осциллятора для 3 случаев на языке программирования Julia и на ПО OpenModelica. А также решила уравнение гармонического осциллятора для трех случаев.

## Список литературы

1. Понятие гармонического осциллятора [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%80%D0%BC%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9\\_%D0%BE%D1%81%D1%86%D0%B8%D0%BB%D1%8F%D1%82%D0%BE%D1%80](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%80%D0%BC%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%BE%D1%81%D1%86%D0%B8%D0%BB%D1%8F%D1%82%D0%BE%D1%80).