

Chapitre VIII

PROBLEMES PLANS EN ELASTICITE

I. ELASTICITE PLANE

1.1 DEFORMATIONS PLANES

Dans de nombreux problèmes, on peut supposer les déformations planes

$$(1) \quad u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad , \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad , \quad u_3 = 0$$

On en tire le tenseur des déformations

$$(2) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} \\ \varepsilon_{22} &= u_{2,2} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) \end{aligned}$$

et, par la loi de comportement, le tenseur des contraintes

$$(3) \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

avec les relations suivantes

$$(4) \quad \begin{cases} E \varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ E \varepsilon_{22} = \sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ E \varepsilon_{12} = (1 + \nu) \sigma_{12} \end{cases}$$

$$(5) \quad E \varepsilon_{33} = 0 = \sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

L'équation (5) donne alors

$$(6) \quad \sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

et en reportant dans (4) il vient

$$(7) \quad \begin{cases} E \varepsilon_{11} = (1 - \nu^2) \sigma_{11} - \nu(1 + \nu) \sigma_{22} \\ E \varepsilon_{22} = (1 - \nu^2) \sigma_{22} - \nu(1 + \nu) \sigma_{11} \\ E \varepsilon_{12} = (1 + \nu) \sigma_{12} \end{cases}$$

Pour résoudre un problème en déformations planes, il faut trouver les déplacements u_1, u_2 et les contraintes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ en fonction des coordonnées (x_1, x_2) dans le plan.

Si nous travaillons sur les contraintes, c'est-à-dire en utilisant l'approche du § VI.1.4, il faudra vérifier les équations d'équilibre et les équations de Beltrami.

Les équations d'équilibre s'écrivent

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \end{cases}$$

en supposant nulles les forces de volume (sinon, l'analyse qui suit peut s'étendre, avec des résultats plus compliqués). Ces équations expriment que les formes

$$\sigma_{11} dx_2 - \sigma_{12} dx_1, \quad \sigma_{22} dx_1 - \sigma_{12} dx_2$$

sont des différentielles totales. Il existe donc deux fonctions $\varphi(x_1, x_2)$ et $\psi(x_1, x_2)$ telles que

$$\sigma_{11} = \varphi_{,2} \quad \sigma_{12} = -\psi_{,2} = -\varphi_{,1} \quad \sigma_{22} = \psi_{,1}$$

En comparant les deux expressions de σ_{12} , on voit que la forme

$$\psi dx_1 + \varphi dx_2$$

est une différentielle totale, il existe donc une fonction $\chi(x_1, x_2)$ telle que

$$\varphi = \chi_{,2} \quad \psi = \chi_{,1}$$

La fonction $\chi(x_1, x_2)$ est appelée "fonction d'Airy" ou "fonction de contraintes" du problème. Elle permet de calculer les contraintes par

$$(9) \quad \sigma_{11} = \chi_{,22} \quad \sigma_{12} = -\chi_{,12} \quad \sigma_{22} = \chi_{,11}$$

les équations de l'équilibre étant alors automatiquement vérifiées.

En remarquant que, d'après (6) et (9),

$$(10) \quad \sigma_{kk} = (1+\nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = (1+\nu) \Delta \chi$$

les équations de Beltrami (VI.31) donnent

$$(11) \quad \begin{aligned} i, j = 1, 1 : & \quad (1+\nu) \Delta \chi_{,22} + (1+\nu) \Delta \chi_{,11} = 0 \\ & \quad 2, 2 : \quad (1+\nu) \Delta \chi_{,11} + (1+\nu) \Delta \chi_{,22} = 0 \\ & \quad 1, 2 : \quad -\cancel{(1+\nu) \Delta \chi_{,12}} + \cancel{(1+\nu) \Delta \chi_{,12}} = 0 \\ & \quad 3, 3 : \quad \nu(1+\nu) \Delta \Delta \chi = 0 \end{aligned}$$

Toutes ces équations seront vérifiées SSI la fonction χ est biharmonique

$$(12) \quad \Delta \Delta \chi = \chi_{,1111} + 2 \chi_{,1122} + \chi_{,2222} = 0$$

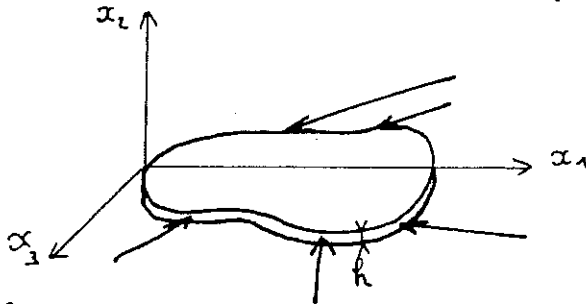
Ainsi, pour résoudre un problème en déformations planes, il faut trouver une fonction de contraintes χ biharmonique vérifiant les conditions aux limites. On en tire alors les contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} par (9), σ_{33} par (6), les déformations par (7) et les déplacements par intégration du système

$$(13) \quad \begin{cases} \epsilon_{11} = u_{1,1} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu) \chi_{,22} - \nu \chi_{,11}] \\ \epsilon_{22} = u_{2,2} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu) \chi_{,11} - \nu \chi_{,22}] \\ 2\epsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = - \frac{2(1+\nu)}{E} \chi_{,12} \end{cases}$$

système qui est intégrable puisque les équations de Beltrami sont vérifiées.

1.2 CONTRAINTES PLANES

L'hypothèse des déformations planes convient pour une pièce suffisamment longue pour que l'on puisse négliger la déformation longitudinale. Pour une plaque mince, chargée dans son plan, la condition aux limites pour



$x_3 = \pm h/2$ donne

$$(14) \quad x_3 = \pm \frac{h}{2} : \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

et on recherche donc un état de contraintes planes

$$(15) \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des déformations est donné par

$$(16) \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$(17) \quad \begin{cases} E \epsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu \sigma_{22} \\ E \epsilon_{22} = \sigma_{22} - \nu \sigma_{11} \\ E \epsilon_{33} = -\nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ E \epsilon_{12} = (1+\nu) \sigma_{12} \end{cases}$$

Les équations d'équilibre se traitent comme en déformations planes et conduisent à (9). On a alors

$$(18) \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta \chi$$

et les équations de Beltrami donnent

$$(19) \quad \begin{cases} i, j = 1, 1 & (1+\nu) \Delta \chi_{,22} + \Delta \chi_{,11} = 0 \\ i, j = 2, 2 & (1+\nu) \Delta \chi_{,11} + \Delta \chi_{,22} = 0 \\ i, j = 1, 2 & -(1+\nu) \Delta \chi_{,12} + \Delta \chi_{,12} = 0 \end{cases}$$

équations qui ne pourront être vérifiées que si $\Delta \chi$ est fonction linéaire des coordonnées, ce qui est bien trop restrictif pour permettre de résoudre des problèmes réels. Nous oublions donc provisoirement les équations de Beltrami, et nous allons chercher à calculer les déplacements à partir de (17)

$$E \varepsilon_{11} = \chi_{,22} - \nu \chi_{,11} = (1+\nu) \chi_{,22} - \nu \Delta \chi$$

et finalement on obtient

$$(20) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{1,1} = \frac{1+\nu}{E} \left[\chi_{,22} - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta \chi \right] \\ \varepsilon_{22} = u_{2,2} = \frac{1+\nu}{E} \left[\chi_{,11} - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta \chi \right] \\ 2 \varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = - \frac{2(1+\nu)}{E} \chi_{,12} \end{cases}$$

$$(21) \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3} = - \frac{\nu}{E} \Delta \chi, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

Le système (20) est formellement identique au système (13) en remplaçant ν par $\nu/(1+\nu)$. Il permettra donc de calculer $u_1(x_1, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2)$ SSI la fonction χ est biharmonique. Il reste à intégrer les équations (21) pour calculer u_3

$$(22) \quad \varepsilon_{33} = - \frac{\nu}{E} \Delta \chi \Rightarrow u_3 = - \frac{\nu}{E} \Delta \chi(x_1, x_2) x_3 + a(x_1, x_2)$$

$$(23) \quad \begin{cases} 2 \varepsilon_{13} = u_{3,1} + u_{1,3} = - \frac{\nu}{E} \Delta \chi_{,1} x_3 + a_{,1} = 0 \\ 2 \varepsilon_{23} = u_{3,2} + u_{2,3} = - \frac{\nu}{E} \Delta \chi_{,2} x_3 + a_{,2} = 0 \end{cases}$$

équations qui ne pourront jamais être vérifiées puisque a et χ ne dépendent que de x_1 et x_2 . Ainsi, si χ est biharmonique, on ne peut pas calculer les déplacements; c'est tout à fait normal, puisque les équations de Beltrami (19) donnent

$$(24) \quad \Delta \chi_{,11} = \Delta \chi_{,22} = \Delta \chi_{,12} = 0$$

conditions que nous avons volontairement laissées de côté. Cependant, pour une plaque mince, x_3 est petit, et en première approximation, (23) donne $a_{,1} = a_{,2} = 0$, $a = C_0$ et la solution ainsi construite est une approximation satisfaisante de la réalité: c'est l'approximation "contraintes planes".

Ainsi, en déformations planes comme en contraintes planes, la solution est donnée par une fonction de contraintes $\chi(x_1, x_2)$ biharmonique, donnant les contraintes par (19) et les déplacements $u_1(x_1, x_2)$ et $u_2(x_1, x_2)$ par intégration du système

$$(25) \quad \begin{cases} u_{1,1} = \frac{1+\nu}{E} \{ \chi_{,22} - \kappa \Delta \chi \} \\ u_{2,2} = \frac{1+\nu}{E} \{ \chi_{,11} - \kappa \Delta \chi \} \\ u_{1,2} + u_{2,1} = - \frac{2(1+\nu)}{E} \chi_{,12} \end{cases}$$

avec $\begin{cases} \kappa = \nu & \text{en déformations planes} \\ \kappa = \nu / (1+\nu) & \text{en contraintes planes} \end{cases}$

De plus, en déformations planes, la contrainte axiale σ_{33} est donnée par (6), tandis que, en contraintes planes, la variation d'épaisseur de la plaque mince est donnée par (22)

$$(26) \quad u_3 = - \frac{\nu}{E} \Delta \chi$$

1.3 UTILISATION DE LA VARIABLE COMPLEXE

Introduisons la variable complexe

$$(27) \quad z = x_1 + i x_2, \quad \bar{z} = x_1 - i x_2$$

Théorème de la représentation. Toute fonction réelle harmonique peut s'écrire sous la forme

$$(28) \quad \varphi(x_1, x_2) = \operatorname{Re} [F(z)]$$

Toute fonction réelle biharmonique peut s'écrire sous la forme

$$(29) \quad \chi(x_1, x_2) = \operatorname{Re} [\bar{z} G(z) + K(z)]$$

avec F , G et K fonctions holomorphes.

Dem. La première représentation est classique: on sait que les parties réelle

et imaginaire d'une fonction holomorphe sont deux fonctions harmoniques conjuguées, c'est-à-dire reliées par les conditions de Cauchy

$$(30) \quad \begin{cases} \varphi(z) = P(x_1, x_2) + i Q(x_1, x_2) \\ P_{,1} = Q_{,2} \quad , \quad P_{,2} = - Q_{,1} \end{cases}$$

La seconde représentation peut s'obtenir à partir de la précédente par deux méthodes.

1ère méthode. A partir de (27), on voit que toute fonction de (x_1, x_2) peut être considérée comme fonction de (z, \bar{z}) . On obtient alors facilement

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}}$$

de sorte que si φ est biharmonique

$$\Delta \Delta \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial^2 z \partial^2 \bar{z}} = 0$$

on obtient

$$\varphi = \bar{z} F_1(z) + G_1(z) + z F_2(\bar{z}) + G_2(\bar{z})$$

et en écrivant que φ est réelle, on obtient (29).

2ème méthode. Si χ est biharmonique, la fonction $\mu = \Delta \chi$ est harmonique, et on peut écrire

$$\mu = \operatorname{Re} [g(z)]$$

Nous introduisons la fonction

$$G(z) = \frac{1}{4} \int g(z) dz = P + i Q$$

avec $\mu = 4 P_{,1} = 4 Q_{,2}$. On obtient alors

$$\Delta (\chi - P x_1 - Q x_2) = \Delta \chi - 2 P_{,1} - 2 Q_{,2} = \Delta \chi - \mu = 0$$

et la fonction $\chi - P x_1 - Q x_2$ est harmonique, d'où

$$\chi = P x_1 + Q x_2 + \operatorname{Re} [K(z)]$$

$$= \operatorname{Re} [\bar{z} G(z) + K(z)]$$

cqfd

L'application de ce théorème montre que la fonction de contrainte d'un problème d'élasticité plane est déterminée par deux fonctions holomorphes G et K . On posera

$$(31) \quad \begin{cases} G = P + i Q & K = R + i S \\ \chi = P x_1 + Q x_2 + R \end{cases}$$

et les relations (9) donneront

$$(32) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = P_{,22} x_1 + Q_{,22} x_2 + 2 Q_{,12} + R_{,22} \\ \sigma_{22} = P_{,11} x_1 + Q_{,11} x_2 + 2 P_{,1} + R_{,11} \\ \sigma_{12} = Q_{,11} x_1 - P_{,11} x_2 + S_{,11} \end{cases}$$

En regroupant et en utilisant les relations de Cauchy (30), on obtient

$$(33) \quad \begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{22} = 4 \operatorname{Re} [G'(z)] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i \sigma_{12} = 2 [\bar{z} G''(z) + K''(z)] \end{cases}$$

L'intégration de (25) donne également

$$(34) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1+\nu}{E} \{ (3-4\kappa) P - P_{,1} x_1 - Q_{,1} x_2 - R_{,1} + C x_2 + \alpha \} \\ u_2 = \frac{1+\nu}{E} \{ (3-4\kappa) Q + Q_{,1} x_1 - P_{,1} x_2 + S_{,1} - C x_1 + \beta \} \end{cases}$$

ou sous forme complexe

$$(35) \quad \frac{E}{1+\nu} (u_1 + i u_2) = (3-4\kappa) G(z) - z \overline{G'(z)} - \overline{K'(z)} - i C z + \alpha + i \beta$$

les trois derniers termes représentant le mouvement de solide. Ces représentations sont à la base de la théorie de l'élasticité plane qui permet de pousser très loin les calculs (voir [19]). Nous présenterons simplement quelques exemples.

2. EXEMPLES D'APPLICATIONS

2.1 PROBLEME DE SAINT VENANT

Une classe de solutions s'obtient en prenant pour χ un polynôme homogène de degré n , ou, ce qui revient au même,

$$(36) \quad G(z) = A z^{n-1} \quad K(z) = B z^n$$

On obtient ainsi pour tout entier n une solution dépendant de 4 constantes.

$n=2$: Un polynôme du second degré est automatiquement biharmonique, et conduit à un état de contraintes constant

$$(37) \quad \begin{cases} \chi = \frac{1}{2} \{ \alpha x_1^2 + 2 \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 \} \\ \sigma_{11} = \gamma, \quad \sigma_{22} = \alpha, \quad \sigma_{12} = -\beta \end{cases}$$

$n=3$: Un polynôme du 3ème degré est aussi automatiquement biharmonique, et conduit à un état de contraintes linéaire

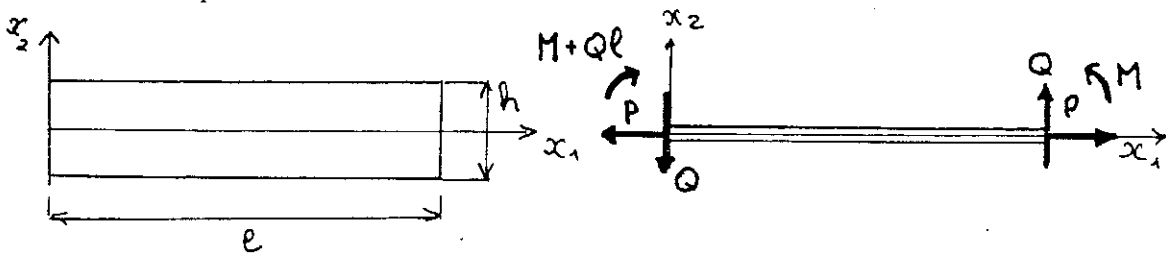
$$(38) \quad \begin{cases} \chi = \frac{1}{6} \{ a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_2 + 3 c x_1 x_2^2 + d x_2^3 \} \\ \sigma_{11} = c x_1 + d x_2, \quad \sigma_{22} = a x_1 + b x_2, \quad \sigma_{12} = -(b x_1 + c x_2) \end{cases}$$

n=4 : Pour un polynôme du 4ème degré, on a

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{1}{6} \{ A x_1^4 + 2 B x_1^3 x_2 - 3(A+D) x_1^2 x_2^2 + 2 C x_1 x_2^3 + D x_2^4 \} \\ \sigma_{11} = - (A+D) x_1^2 + 2 C x_1 x_2 + 2 D x_2^2 \\ \sigma_{22} = 2 A x_1^2 + 2 B x_1 x_2 - (A+D) x_2^2 \\ \sigma_{12} = - B x_1^2 + 2(A+D) x_1 x_2 - C x_2^2 \end{array} \right.$$

et ainsi de suite.

A titre d'application, montrons qu'une superposition de solutions de ce type permet de résoudre le problème de Saint-Venant en contraintes ou déformations planes



Le matériau occupe le rectangle $[0, l] \times [-h/2, h/2]$; la surface latérale $x_2 = \pm h/2$ est libre de contrainte, et les extrémités $x_1=0$ et $x_1=l$ sont soumises à deux torseurs plans en équilibre (voir § VII.1.1). Les conditions aux limites sont donc, sur la surface latérale

$$(40) \quad x_2 = \pm h/2 : \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$$

et sur l'extrémité $x_1=l$

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11} dx_2 = P \\ \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{12} dx_2 = Q \\ - \int_{-h/2}^{+h/2} x_2 \sigma_{11} dx_2 = M \end{array} \right.$$

Bien entendu, comme nous l'avons discuté au § VII.1.1, ce problème admet plusieurs solutions, et nous allons chercher s'il en existe une correspondant à une fonction de contrainte $\chi(x_1, x_2)$ polynôme non homogène du 4ème degré, càd superposition de (37), (38) et (39). La condition aux limites (40) donne

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + a x_1 \pm b \frac{h}{2} + 2 A x_1^2 \pm 2 B \frac{h}{2} x_1 - (A+D) \frac{h^2}{4} = 0 \\ \beta + b x_1 \pm c \frac{h}{2} + B x_1^2 \mp 2(A+D) \frac{h}{2} x_1 + C \frac{h^2}{4} = 0 \end{array} \right.$$

relations qui doivent être vérifiées pour tout x_1 . Il vient

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = B = 0, \quad a = b = 0, \quad B = A+D = 0, \quad b = c = 0 \\ \alpha - (A+D) \frac{h^2}{4} = 0, \quad \beta + C \frac{h^2}{4} = 0 \end{array} \right.$$

et il reste finalement

$$(44) \quad \chi = \frac{C}{3} x_1 x_2^3 + \frac{d}{6} x_2^3 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 - \frac{C h^2}{4} x_1 x_2$$

$$(45) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = 2C x_1 x_2 + d x_2 + \gamma \\ \sigma_{12} = C \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \\ \sigma_{22} = 0 \end{cases}$$

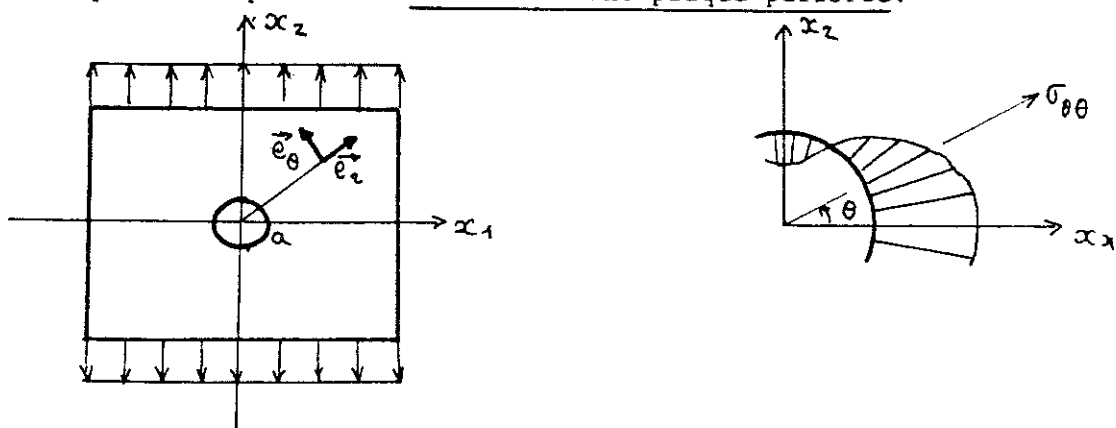
Les trois conditions (41) permettent alors de déterminer les constantes C , d et γ en fonction de P , Q et M , c-à-d des efforts appliqués

$$(46) \quad \gamma = \frac{P}{h} \quad C = \frac{6Q}{h^3} \quad d = \frac{12(M - Qh)}{h^3}$$

La répartition des contraintes normales est linéaire, comme dans le cas général (§ VI.1.2) et la répartition des contraintes tangentielles σ_{12} est parabolique. C'est ce que l'on obtiendrait à partir de l'analyse du § VI.3 pour une section rectangulaire très large (déformations planes) ou très étroite (contraintes planes).

2.2 TRACTION D'UNE PLAQUE PERFOREE

Pour certaines géométries simples, l'utilisation de la variable complexe permet de construire explicitement la solution d'une vaste classe de problèmes. C'est en particulier le cas pour les domaines intérieurs ou extérieurs limités par un cercle. A titre d'exemple, nous allons donner la solution qui correspond à la traction d'une plaque perforée.



Si le rayon a du trou est petit par rapport aux dimensions de la plaque, on peut supposer en première approximation la plaque infinie. Dans le repère (x_1, x_2) , l'état de contraintes à l'infini est donc

$$(47) \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^\infty \end{bmatrix}$$

ce qui, d'après (33), correspond à

$$(48) \quad G(\gamma) = \frac{\sigma^\infty}{4} \gamma \quad K(\gamma) = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{\gamma^2}{2}$$

C'est la solution qui se réalise en l'absence de trou, mais en présence d'un trou cette solution ne vérifie pas les CL sur le trou, qui s'écrivent

$$(49) \quad r = a : \quad \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0$$

en notant σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ les composantes du tenseur des contraintes sur le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associé aux coordonnées cylindriques. Le trou induit donc dans (48) une perturbation, et on montre qu'alors

$$(50) \quad G(\gamma) = \frac{\sigma^\infty}{4} \left[\gamma - \frac{a^2}{\gamma} \right] , \quad K'(\gamma) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left[\gamma - \frac{a^2}{\gamma} - \frac{a^4}{\gamma^3} \right]$$

Les contraintes sont alors données par

$$(51) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left\{ \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{r\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left\{ \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\} \end{cases}$$

En particulier, sur le trou on a bien (49) et

$$(52) \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma^\infty (1 + 2 \cos 2\theta)$$

L'état de contraintes sur le bord du trou est un état de traction simple avec une contrainte variant de $+3\sigma^\infty$ (traction, sur l'axe des x_1) à $-\sigma^\infty$ (compression, sur l'axe des x_2). La contrainte maximale est trois fois plus grande que la contrainte à l'infini. C'est un exemple de concentration de contrainte: la présence d'un trou, ou plus généralement d'un défaut, aussi petit soit-il, cause une augmentation importante des contraintes locales au voisinage du trou.