

# **Mécanique des milieux continus**

## **Transparents du cours**

Ces transparents correspondent au cours de Mécanique des Milieux Continus enseigné jusqu'en 2000 à l'Ecole Centrale de Lyon(module de base de 1ère année, D.Jeandel et F.Sidoroff).

Chaque chapitre correspondait à un "bloc" d'enseignement (1h30 de cours, 2h d'exercices)

1. [Cinématique](#)
2. [Contraintes](#)
3. [Aspects énergétiques](#)
4. [Déformations](#)
5. [Lois de comportement](#)
6. [Régimes d'écoulement](#)
7. [Problèmes aux limites](#)
8. [Méthodes variationnelles](#)
9. [Problèmes dynamiques](#)

[Mini-formulaire](#)

# **Mécanique des milieux continus**

## **Bloc 1 : Cinématique**

1. [Discret / Continu](#)
2. [Description lagrangienne](#)
3. [Description eulérienne](#)
4. [Dérivées particulières](#)
5. [Théorème de Reynolds](#)
6. [Variation du volume](#)
7. [Conservation de la masse](#)

SYSTÈME DE PARTICULES

\* \*  
\*

$$x^\alpha = x^\alpha(t) \quad \alpha = 1, \dots, N$$

$$m^\alpha \frac{d^2 \vec{x}^\alpha}{dt^2} = \vec{F}^\alpha = \underbrace{\vec{F}'^\alpha}_{\substack{\text{extérieur} \\ \text{du système}}} + \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta\alpha}$$

interaction

$$\left[ \sum_\alpha m^\alpha \frac{d^2 \vec{x}^\alpha}{dt^2} = \sum_\alpha \vec{F}'^\alpha \right]$$

$$\left[ \sum_\alpha m^\alpha \vec{x}^\alpha \wedge \frac{d^2 \vec{x}^\alpha}{dt^2} = \sum_\alpha \vec{x}^\alpha \wedge \vec{F}'^\alpha \right]$$

$$\left[ \sum_\alpha m^\alpha \frac{d^2 \vec{x}^\alpha}{dt^2} \cdot \vec{V}^\alpha = \sum_\alpha \vec{F}'^\alpha \cdot \vec{V}^\alpha + \sum_{\alpha \beta} \vec{F}^{\beta\alpha} \cdot \vec{V}^\alpha \right]$$

- Pb
- $N$  très grand !
  - Potentiel d'interaction

Mécanique Statistique

| Théorie Cinétique des gaz  
| Cristal discret

MILIEU CONTINU

$$\vec{x} = \vec{x}^\alpha(t) \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

→ Conservation de la masse

}

→ Loi fondamentale

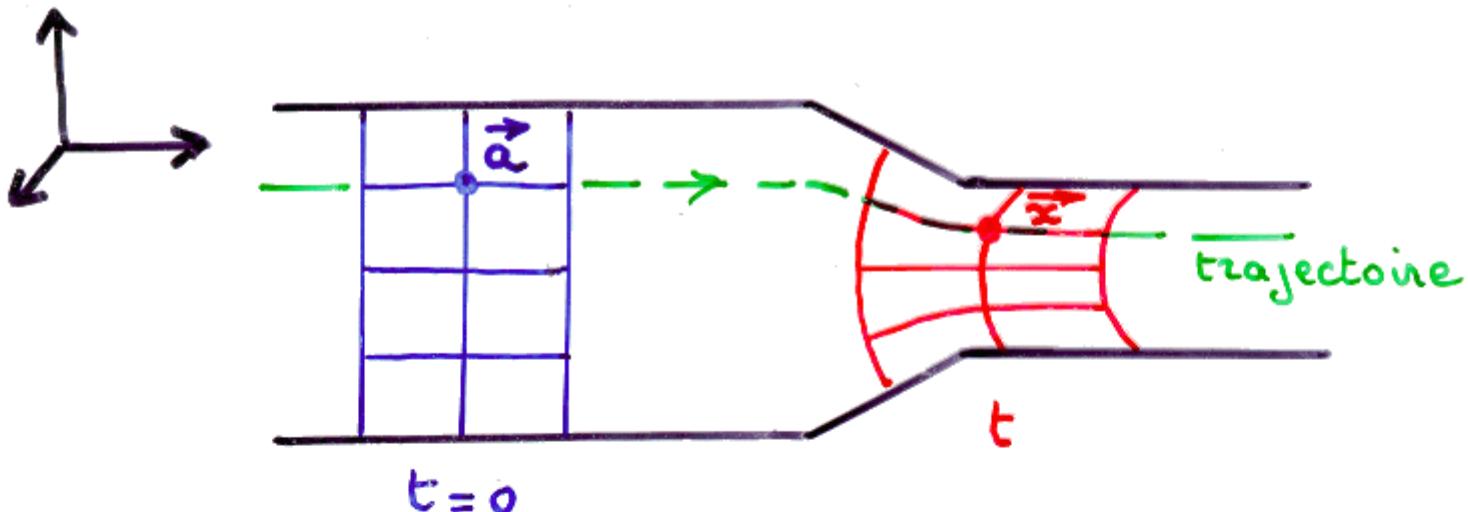
→ Puissances virtuelles

→ Thermodynamique

→ Loi de Comportement

Mécanique des Fluides  
des Solides déformables  
.....

# DESCRIPTION LAGRANGIENNE



Description du mouvement

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{a}, t)$$

- | 4 variables  $a_1, a_2, a_3, t$
- | 3 fonctions  $x_1, x_2, x_3$

D. Matéuelle

- $\vec{f}$  est
  - continue
  - bijective

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \det$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} > 0$$

$$\vec{a} = \vec{g}(\vec{x}, t)$$

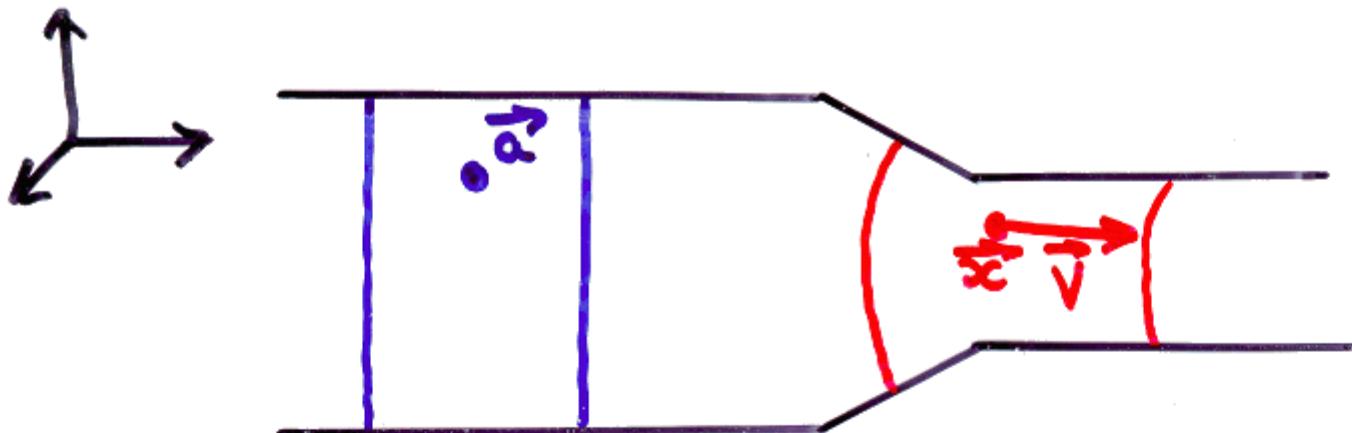
- différentiable (? plus ou moins)

Trajectoire : Lieu des positions d'une particule     $\vec{x} = \vec{f}(\vec{a}, t)$     |  $\vec{a}$  fixé    |  $t$  variable

Ligne d'émission : Positions à l'instant  $t$  des particules qui sont passées (passeront) par  $\vec{x}$      $\vec{y} = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}, \tau), t)$     |  $\vec{x}, t$  fixés    |  $\tau$  variable

Cas Particulier : Statique     $\vec{x} = \vec{f}(\vec{a})$

## DESCRIPTION EULERIENNE



vitesse

$$\vec{V}(\vec{a}, t) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(\vec{a}, t) \Rightarrow \vec{V}(x, t) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(\vec{q}(\vec{x}, t), t)$$

**D. Spatiale**

4 variables  $x_1, x_2, x_3, t$   
3 fonctions  $V_1, V_2, V_3$

Lignes de Courant Enveloppe des vecteurs  
vitesses

$$\frac{dx_1}{V_1} = \frac{dx_2}{V_2} = \frac{dx_3}{V_3}$$

Cas particulier : Ecoulement stationnaire  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$

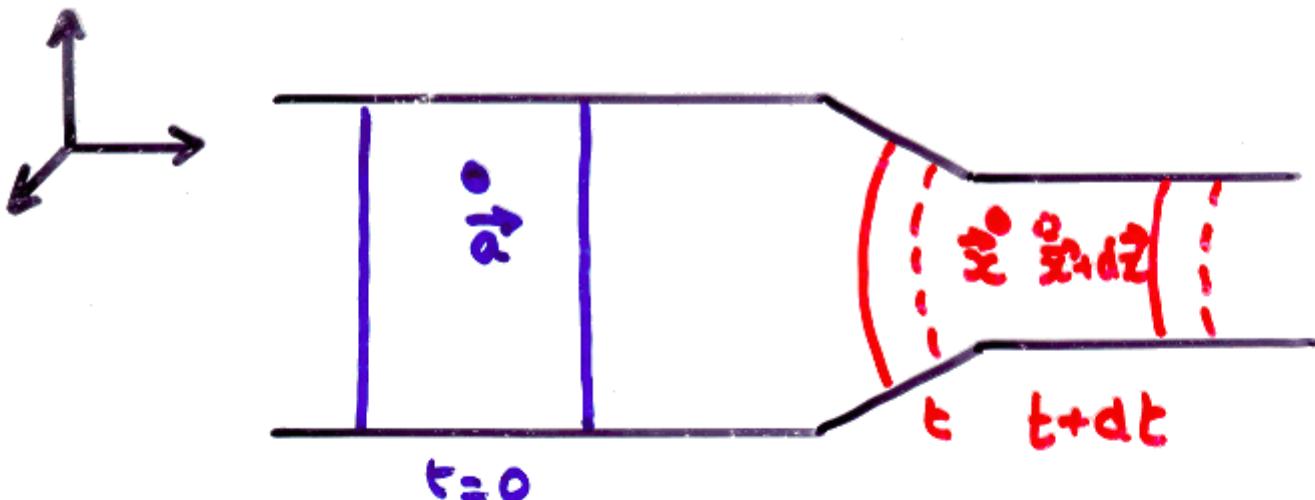
$\Rightarrow$  Lignes de courant = trajectoires  
= lignes d'émission

Reiproquement

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{V}(\vec{x}, t) \\ \vec{x}(0) &= \vec{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{x} = \vec{f}(\vec{a}, t)$$

Deux descriptions équivalentes

# DERIVEE PARTICULAIRE



$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{\alpha}, t)$$

$$\vec{v} = \vec{V}(\vec{x}, t)$$

## Fonction scalaire

$$\varphi(\vec{\alpha}, t)$$

$$\varphi(\vec{x}, t)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\vec{\alpha}, t)$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} V_j \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \varphi\end{aligned}$$

## Fonction vectorielle

$$\vec{p} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}(\vec{\alpha}, t)$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial x_j} V_j$$

## exemple : accélération

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{\alpha}, t) \\ &= \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2}(\vec{\alpha}, t)\end{aligned}$$

$$g_i = \frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} V_j$$

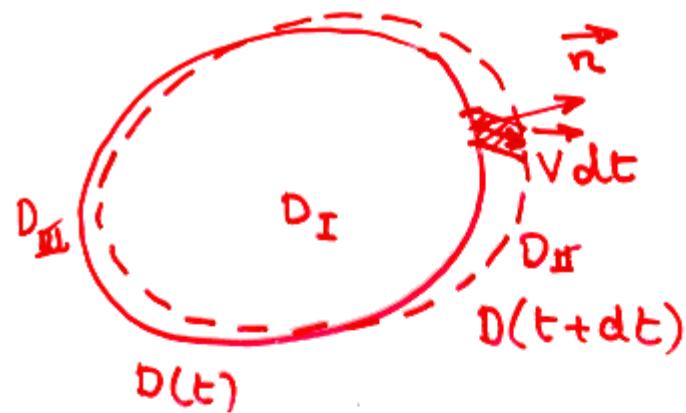
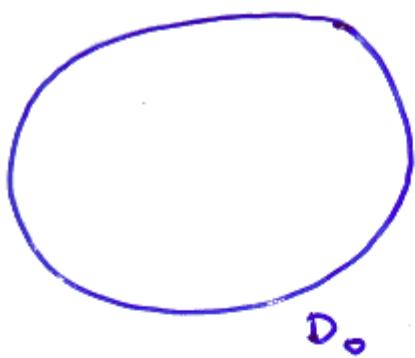
Convention de sommation

$$\sum_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} V_j$$

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{V^2}{2} + (\vec{\omega} \times \vec{V}) \times \vec{V}\end{aligned}$$

# THEOREME DE REYNOLDS

A05



$$\iiint_{D_0} \varphi_0 \, dv_0 = \Phi = \iiint_D \varphi \, dv$$

$$\dot{\Phi} = \iiint_{D_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \, dv_0$$

mais  $dv = J \, dv_0$

$$\varphi_0 = J \varphi$$

$$\dot{\Phi} = \iiint_D \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (J \varphi) \, dv$$

*Calculs, ... - - ->*

$$\dot{\Phi} dt = \Phi(t+dt) - \Phi(t)$$

$$= \iiint_{D_I} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \iiint_{D_{II}-D_{III}} \varphi \, dv$$

$$\downarrow \\ dv = \vec{v} dt \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\dot{\Phi} = \iiint_D \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dv + \oint_{\partial D} \varphi \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$= \iiint_D \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \varphi \vec{v} \right] \, dv$$

$$\Rightarrow = \iiint_D \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \operatorname{div} \vec{v} \right] \, dv$$

Theoreme de la divergence

$$\oint_{\partial D} \varphi n_i \, ds = \iiint_D \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dv$$

# VARIATION DE VOLUME

A06

$$V = \iiint_{D_0} J d\mathbf{v}_0 = \iiint_D d\mathbf{v}$$

application du  
Théorème de Reynolds  
avec  $\psi = 1$

$$\dot{V} = \iiint_{D_0} \dot{J} d\mathbf{v}_0 = \iiint_D \operatorname{div} \vec{V} d\mathbf{v} \quad (\dot{J} = J \operatorname{div} \vec{V})$$

## Mouvement isochore

$$\frac{dV}{dt} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

## Milieu incompressible

→ ne peut avoir que des mouvements isochores

liaison

$$J = 1$$

ou

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

## Lemme fondamental

$$\iiint_D f d\mathbf{v} = 0$$

pour tout  $D$

$$\Leftrightarrow f = 0$$

# CONSERVATION DE LA MASSE

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

$\rho = \frac{dM}{dt}$  : masse volumique

$$\iiint_{D_0} \rho_0 d\tau_0 = M = \iiint_D \rho d\tau$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

$$0 = \iiint_D \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right\} d\tau = 0$$

$$\rho_0 = \rho_0(\vec{r})$$

## Équation de continuité

$$\text{ou} \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \end{cases}$$

(NB: incompressibilité :  
 $\dot{\rho} = 0$  ,  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$  )

## Corollaire : Théorème de Reynolds

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \psi d\tau = \iiint \rho \frac{d\psi}{dt} d\tau$$

Remarque - Milieu monophasique  
 un seul constituant  
 → attention aux mélanges.

## Équation de saut

$$[\rho v] = 0$$

## **Mécanique des milieux continus**

### **Bloc 2 : Contraintes**

1. [Loi fondamentale](#)
2. [Postulat de Cauchy](#)
3. [Repartition des contraintes](#)
4. [Le tenseur des contraintes](#)
5. [Cercle de Mohr](#)
6. [Equations du mouvement](#)
7. [Conclusion provisoire](#)

## LOI FONDAMENTALE

quantités de

mouvement

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{A} = \vec{f}^{\text{ext}}$$

efforts extérieurs

quantités d'accélération

## Quantités de Mouvement

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho \vec{V} dv$$

$$= \iiint_D \rho \vec{g} dv = \iiint_D \rho \vec{f} dv + \oint_{\partial D} \vec{T} ds$$

## Moment cinétique

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \vec{x} \wedge \rho \vec{V} dv$$

$$= \iiint_D \vec{x} \wedge \rho \vec{g} dv = \iiint_D \vec{x} \wedge \rho \vec{f} dv + \oint \vec{x} \wedge \vec{T} ds$$

## Bilans barycentriques

= forme différentielle locale

- $\rho g_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + p f_i$

- $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

## Équation de raut

$$[\rho \vec{V}_v - \vec{\sigma} \vec{N}] = 0$$

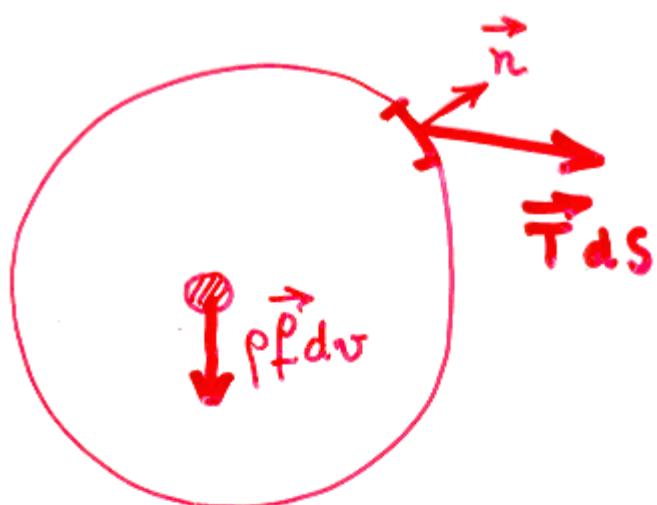
# DESCRIPTION DES EFFORTS

Efforts exercés sur D :

- efforts volumiques à distance

$$d\vec{F} = \rho f dv$$

- pesanteur, gravitation ....  
(souvent négligeables)



- efforts de cohésion : Postulat de Cauchy

④  $d\vec{F} = \vec{T} ds$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{F}}{ds}$$

vecteur contrainte



$= T_n \vec{n} + \vec{T}_t$   
 ↑                      ↑  
 contrainte normale    contrainte tangentielle  
 de cisaillement

⑤  $\vec{T}(\vec{x}, t; \vec{n})$       direction  
de la "facette"

$$\vec{T}(\vec{n}) = -\vec{T}(-\vec{n}) \quad \text{action - réaction}$$

Remarques

i) C'est la MMC classique

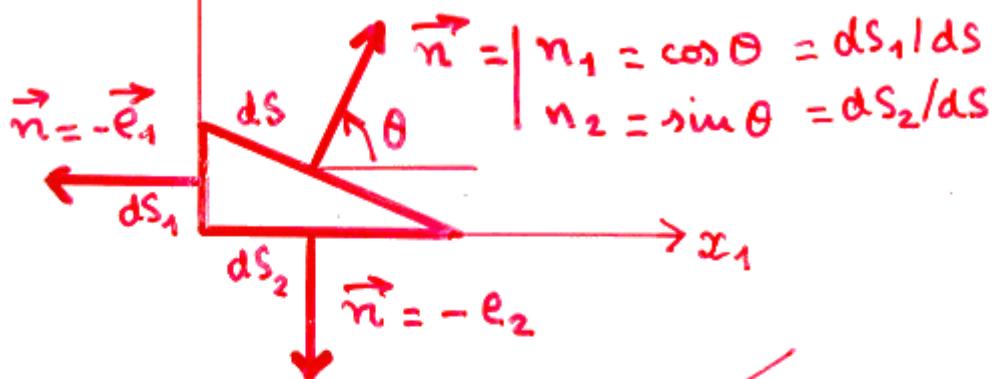
ii) Contraintes = Efforts extérieurs ou intérieurs

# REPARTITION DES CONTRAINTES

A10

## Tetraedre de Cauchy

$\vec{n}$  fixé,  $d \rightarrow 0$



$$\cancel{\iiint \rho \vec{\sigma} dv} = \cancel{\iiint \rho f dv} + \underbrace{\oint \vec{T} ds}_{O(d^2)}$$

$$\vec{T}(-\vec{e}_1) ds_1 + \vec{T}(-\vec{e}_2) ds_2 + \vec{T}(\vec{n}) ds = 0$$

$$T(\vec{n}) = \vec{T}(\vec{e}_1) n_1 + \vec{T}(\vec{e}_2) n_2$$

$$= \vec{T}(\vec{e}_i) n_i$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{T}(\vec{e}_1) & \vec{T}(\vec{e}_2) & \vec{T}(\vec{e}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

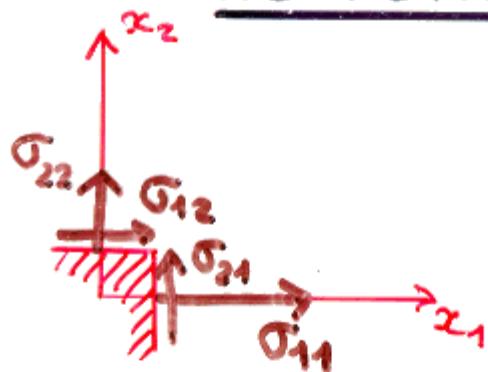
$$\sigma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{T}(\vec{e}_j)$$

$$\vec{T} = \sigma \vec{n}$$

tenseur

(application linéaire)  
des contraintes

# LE TENSEUR DES CONTRAINTES

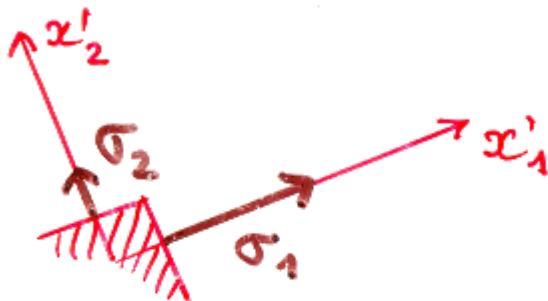


$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

contraintes tangentielle

contraintes normales

## diagonalisation



$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

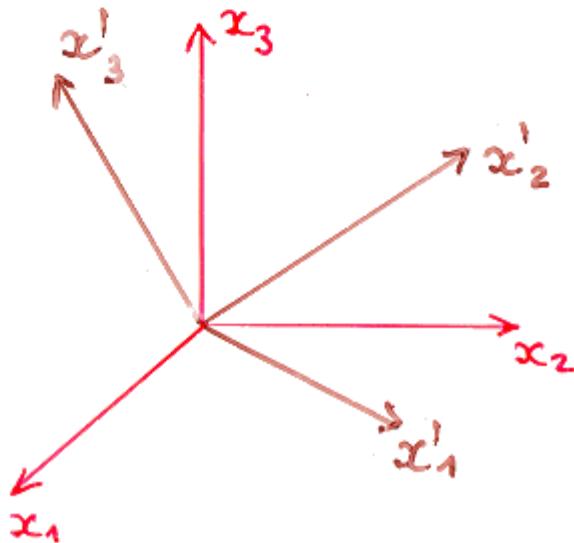
contraintes normales principales

Decomposition partie sphérique - déviateur

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (\delta_{kk}=0)$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

## Changement de repère



$$\vec{e}'_i = Q_{ij} \vec{e}_j$$

matrice de passage  
(orthogonale)

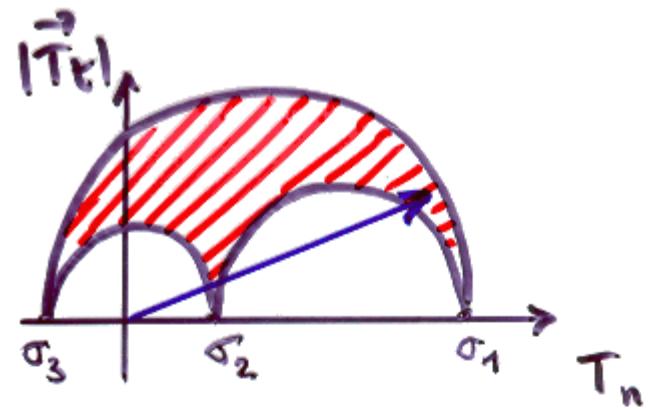
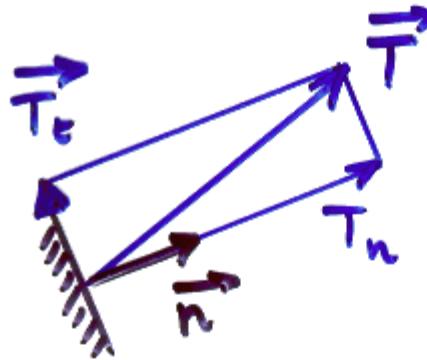
$\vec{T}, \vec{n}$  vecteurs

$$T'_i = Q_{ij} T_j$$

$\mathcal{Q}$  application linéaire

$$\sigma'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} \sigma_{kl}$$

# TRICERCLE DE MOHR

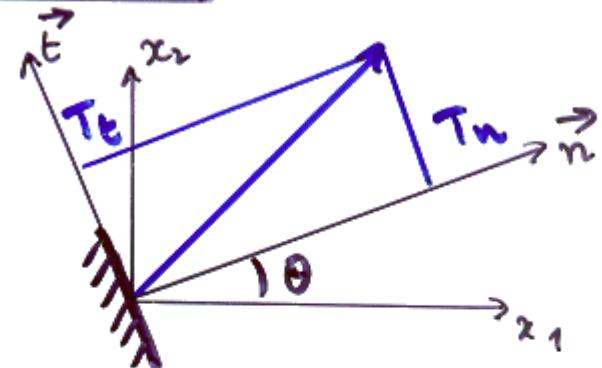


# CERCLE DE MOHR

Dans le cas plan

$\Theta$

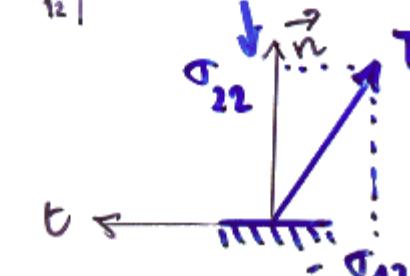
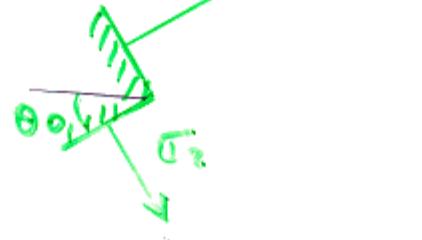
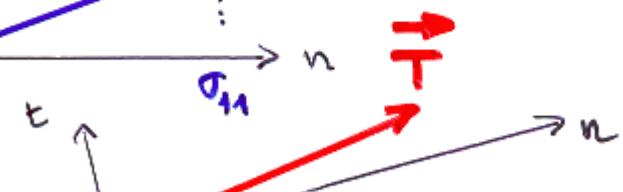
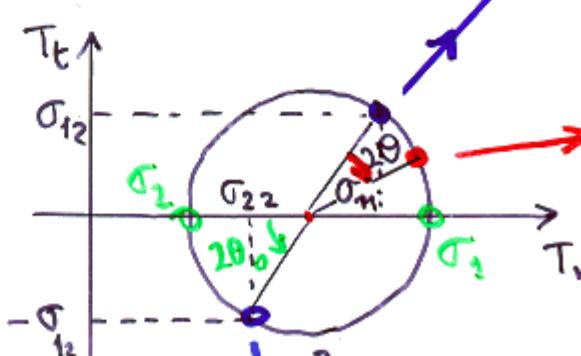
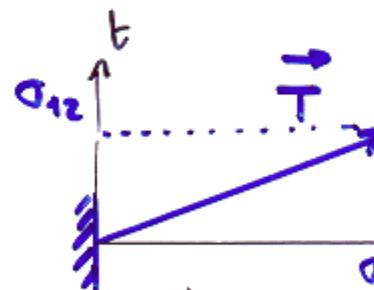
$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & 0 \\ \bar{\sigma}_{21} & \bar{\sigma}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_{33} \end{bmatrix}$$



$$T = T_n \vec{n} + T_t \vec{t} \quad \left| \begin{array}{l} T_n = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + R \cos 2(\theta_0 - \theta) \\ T_t = R \sin 2(\theta_0 - \theta) \end{array} \right.$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$



# LOI FONDAMENTALE . FORME LOCALE

Rés

$$\iiint_D \rho \gamma_i dv = \iiint_D \rho f_i dv + \oint_{\partial D} T_i ds \\ + \oint \sigma_{ij} n_j ds$$

$$\Rightarrow \iiint_D \left( \rho \gamma_i - \rho f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dv = 0$$

## Équation du Mouvement

$$\rho \gamma_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i$$

Mt

$$\iiint_D \vec{x} \wedge \rho \vec{\gamma} dv = \iiint_D \vec{x} \wedge \rho \vec{f} dv + \oint_{\partial D} \vec{x} \wedge \vec{T} ds$$

Symétrie (Reciprocité des écoulements) calculs

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

ou bien équilibre d'un parallélépipède rectangle

Dans le cas statique : Équation d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0$$

# CONCLUSION PROVISOIRE

A24

## Mécanique

masse volumique

$$\rho(x,t)$$

1

c. masse

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

cinétique

$$\vec{V}(x,t)$$

3

c. quantités de mouvement

$$\rho \vec{V}_c = \sigma_{ij} \vec{v}_j + \rho \vec{f}_i$$

contraintes

$$\sigma(x,t)$$

6

**Loi de comportement**

$\sigma_{ij} \leftrightarrow \begin{cases} \text{déformations} \\ \text{vitesses de def.} \end{cases}$

## + Thermodynamique

température

$$\theta(x,t)$$

$$p_e = \sigma_{ij} D_{ij} - q_{i,i} + \rho r$$

énergie interne

$$e(x,t)$$

**Lois d'état thermod.**

$e \leftrightarrow \begin{cases} \text{température} \\ \text{déformations} \end{cases}$

Flux de chaleur

$$\vec{q}(x,t)$$

**Lois de conduction**

$$\vec{q} \leftrightarrow \operatorname{grad} \theta$$

## + Conditions aux limites

$\Rightarrow$  Pb d'Équations aux dérivées partielles

## **Mécanique des milieux continus**

### **Bloc 3 : Aspects énergétiques**

1. [Puissances Virtuelles](#)
2. [Théorème de l'Energie cinétique](#)
3. [Premier Principe](#)
4. [Second Principe](#)
5. [Bilan d'énergie mécanique](#)
6. [Fluide parfait](#)
7. [Ecoulement de fluide](#)

## PUISANCES VIRTUELLES

$$\iiint_0 (\rho \dot{x}_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i) \overset{*}{V}_i = 0$$

$$\iiint_0 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \overset{*}{V}_i dv = \iiint_0 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \overset{*}{V}_i) dv - \iiint_0 \sigma_{ij} \frac{\partial \overset{*}{V}_i}{\partial x_j} dv$$

↓

$$\oint \sigma_{ij} \overset{*}{V}_i n_j ds$$

## Théorème des puissances virtuelles

$$\iiint_0 \rho \dot{x}_i \overset{*}{V}_i dv = \iiint_0 \rho f_i \overset{*}{V}_i dv + \underbrace{\oint_{\partial D} T_i \overset{*}{V}_i ds}_{\text{ext}} - \iiint_0 \sigma_{ij} \frac{\partial \overset{*}{V}_i}{\partial x_j} dv$$

$\overset{*}{P}^{\text{acc}}$       =       $\overset{*}{P}^{\text{ext}}$       +       $\overset{*}{P}^{\text{int}}$

$$\overset{*}{P}^{\text{int}} = - \iiint_0 \sigma_{ij} \frac{\partial \overset{*}{V}_i}{\partial x_j} dv = - \iiint_0 \sigma_{ij} D_{ij} dv$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overset{*}{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{*}{V}_j}{\partial x_i} \right)$$

## Théorème : Mouvement de solide rigide

$$\overset{*}{V} = \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{x} \quad \iff \quad \overset{*}{D}_{ij} = 0 \quad \overset{*}{P}^{\text{int}} = 0$$

## Équation de Saint

$$\overset{*}{P}^{\text{int}} = - \iiint_0 \sigma_{ij} D_{ij} dv - \iint_{\Sigma} [\sigma_{ij} n_j \overset{*}{V}_i] d\Sigma$$

# THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

A14

$$\underbrace{\iiint_0 \rho \gamma_i V_i d\tau}_{\text{Puissance des efforts extérieurs}} = \underbrace{\iiint_0 \rho f_i V_i d\tau + \oint_D T_i V_i dS}_{\text{Puissance des efforts intérieurs}} - \iiint_0 \sigma_{ij} D_{ij} d\tau$$

"

$$\frac{d}{dt} \iiint_0 \frac{1}{2} \rho V_i V_i d\tau$$

$$\frac{dK}{dt} = \dot{P}^{\text{ext}} + \dot{P}^{\text{int}}$$

$$K = \iiint_0 \frac{1}{2} \rho V^2 d\tau \quad \text{Energie cinétique}$$

$\dot{P}^{\text{ext}} =$  Puissance des efforts extérieurs  
(volumiques + surfaciques)

$\dot{P}^{\text{int}} = - \iiint_0 \sigma_{ij} D_{ij} d\tau \quad$  Puissance des efforts intérieurs

## Bilan énergétique

$$\dot{P}^{\text{ext}} = \frac{dK}{dt} - \dot{P}^{\text{int}}$$

↑

pouissance mécanique fournie  $\Rightarrow$  { augmentation de l'énergie cinétique + puissance fournie au matériau  
 $\rightarrow \dot{P}^{\text{int}} = \iiint_0 \sigma_{ij} D_{ij} d\tau$

# A15

## THERMODYNAMIQUE . PREMIER PRINCIPE

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} = \bar{g}^{\text{ext}} + \dot{Q}$$

$$E = \iiint_D \rho e dv$$

energie interne

energie interne spécifique (/u.masse)

$$\dot{Q} = \iiint_D \rho r dv + \oint Q dS$$

↓                      ↓

volumique            surface

(rayonnement)      (conduction)

apport de chaleur par unité de temps

Tetraèdre  $\Rightarrow Q = -\vec{q} \cdot \vec{n}$

vecteur flux de chaleur

$$\frac{dE}{dt} = -\bar{g}^{\text{int}} + \dot{Q}$$

Forme locale

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho r$$

Équation de saut

$$[\rho e u + (\vec{q} - \sigma \vec{V}) \vec{N}] = 0$$

# THERMODYNAMIQUE - SECOND PRINCIPE

$$\gamma^{\text{int}} = \frac{dS}{dt} - \gamma^{\text{ext}} \geq 0 \quad \left( dS > \frac{\partial \Theta}{T} \right)$$

$$S = \iiint \rho \eta \, dv \quad \begin{matrix} \text{entropie} \\ \uparrow \text{entropie spécifique} \end{matrix}$$

$$\gamma^{\text{ext}} = \iiint \frac{p \, r}{\theta} \, dv - \iint \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\theta} \, ds \quad \begin{matrix} \text{apport externe} \\ \text{d'entropie} \\ \uparrow \text{température absolue} \end{matrix}$$

## Forme locale

$$\gamma^{\text{int}} = \iiint \frac{\rho \phi}{\theta} \, dv \geq 0 \quad \begin{matrix} \text{Production interne} \\ \text{d'entropie} \end{matrix}$$

$$\rho \phi = -\rho(\dot{e} - \theta \dot{\eta}) + \sum_i D_{ij} - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0$$

$\underbrace{\phantom{-\rho(\dot{e} - \theta \dot{\eta}) + \sum_i D_{ij}}}_{\begin{matrix} \text{dissipation} \\ \text{intrinsèque} \\ \phi^{\text{int}} \end{matrix}}$ 
 $\underbrace{- \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i}}_{\begin{matrix} \text{dissipation} \\ \text{thermique} \\ + \phi^{\text{th}} \end{matrix}}$

## BILAN D'ENERGIE MÉCANIQUE

poussance énergie fournie  
mécanique = cinétique au matériau  
dépensée ↓ ↓

$$\dot{J}^{\text{ext}} = \frac{dK}{dt} + \frac{dE}{dt} - \dot{Q}$$

## Forme mécanique locale

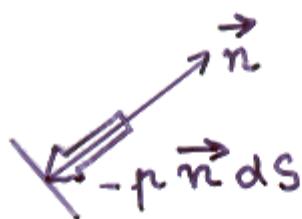
$$\sigma_{ij} D_{ij} = \rho \dot{e} + \Phi$$

poussance  
fournie → stockée + dégradée  
(récupérable) (perdue)  
par unité de volume

## Second principle

$$\Phi = \sigma_y D_{ij} - \rho \dot{e} \geq 0$$

# FLUIDES PARFAITS



$$\vec{T} = -p \vec{n}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbb{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \vec{f} \quad : \text{Equation d'Euler}$$

Ecoulement stationnaire

fluide incompressible

potentiel

$$\vec{f} = -\operatorname{grad} u \quad [\text{ pesanteur } u = g z]$$

$$\hookrightarrow \rho \left\{ \cancel{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}} + \operatorname{grad} \frac{V^2}{2} + \operatorname{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} \right\} = -\operatorname{grad}(p + \rho u)$$

$$\operatorname{grad} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u \right) + \operatorname{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} = 0$$

$$\hookrightarrow H = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u = \text{Cte} \quad \left| \begin{array}{l} \text{sur une ligne} \\ \text{de courant} \\ \text{partout si } \operatorname{rot} \vec{V} = 0 \\ \text{si } H = H_0 \text{ à l'infini} \end{array} \right.$$

## Théorème de Bernoulli

$$\hookrightarrow \rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot} [\vec{\omega} \wedge \vec{V}] = 0 \quad \vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{V}$$

## Équation du tourbillon

## ÉCOULEMENT DE FLUIDES

## Bilan d'Energie cinétique

$$Q = -\nabla \Phi + \vec{C}$$

$\uparrow$   
versor

## Ecoulement stationnaire Fluide incompressible Potentiel

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dv + \oint_{\partial D} \frac{1}{2} \rho v^2 (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\frac{dK}{dt}$$

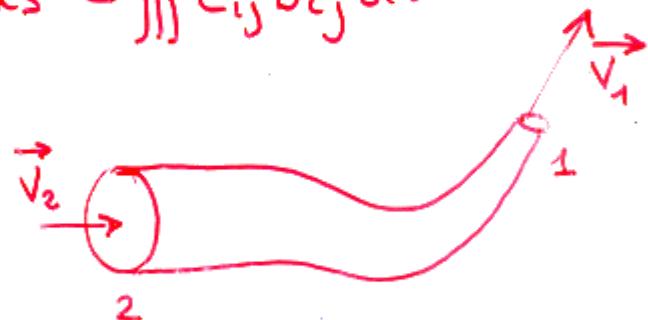
qext

+  
3 int

$$\oint_{\partial D} \rho \mathcal{H}(\vec{v}, \vec{n}) ds = \oint (\tau \cdot \vec{n}) \vec{v} ds - \iiint \tau_{ij} D_{ij} dv$$

## Tube de courant

## Ecoulement en conduite (ou surface libre)



$$Q[\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2] = \oint \mathbf{c} \cdot \vec{n} ds - \iint z_y D_y dv$$

$$C. \text{ de la masse}$$

$$\rho V_1 S_1 = \rho V_2 S_2 = Q$$

débit masse

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 + \frac{1}{Q} \left[ \oint_{\Gamma_B} \vec{\phi}(\tau) \vec{v} \cdot \nabla ds - \iiint_B \tau_{ij} D_{ij} dv \right]$$

échange  
d'énergie

$\uparrow$   
perle de charge  
par viscosité.

## Fluide parfait

$$y_1 = y_2 \quad \text{Bernoulli}$$

effets de la viscosité : Il décroît

# **Mécanique des milieux continus**

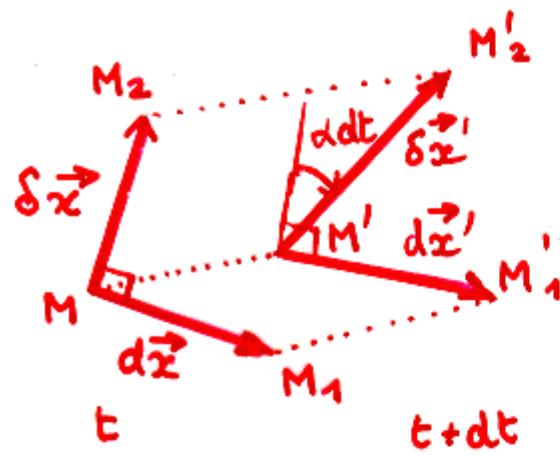
## **Bloc 4 : Déformations**

1. [Vitesses de Déformations](#)
2. [Mouvement local](#)
3. [Déformations infinitésimales](#)
4. [Tenseurs de Déformations](#)
5. [Equations de compatibilité](#)
6. [Exemples](#)

# VITESSES DE DEFORMATIONS

## Mécanique des Fluides : Euler

Déformation  
: variation  
{ de longueur  
{ d'angle  
→ produit scalaire



$$\vec{M'M'_1} = \vec{M'M} + \vec{MM_1} + \vec{M_1M'_1}$$

$$d\vec{x}' = -\vec{V}(\vec{x}) dt + d\vec{x} + \vec{V}(\vec{x} + d\vec{x}) dt$$

$$\hookrightarrow d\dot{x}_i = V_i(\vec{x} + d\vec{x}) - V_i(\vec{x}) = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{x} \cdot \delta \vec{x}) = (dx_i \delta x_i)^\circ = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_j \delta x_i + dx_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta x_j$$

$$= 2 D_{ij} dx_i \delta x_j \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

$D_{ij} = D_{ji}$  : { tenseur forme bilinéaire } des déformations

• Vitesse d'allongement dans la direction  $\vec{n}$

$$e(\vec{n}) = \frac{ds}{ds} = D_{ij} n_i n_j \quad \left\{ \begin{array}{l} ds = |d\vec{x}| = \sqrt{d\vec{x} \cdot d\vec{x}} \\ \vec{n} = d\vec{x}/ds \end{array} \right.$$

• Vitesse de glissement dans les directions  $\vec{m} \perp \vec{n}$

$$\alpha(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{d}{dt}(d\vec{x} \cdot \delta \vec{x}) = 2 D_{ij} m_i n_j$$

$$(d\vec{x} = ds \vec{n} \quad \delta \vec{x} = \delta s \vec{m})$$

# MOUVEMENT DU VOISINAGE D'UN POINT

Au voisinage de  $x_0$

$$V_i(\vec{x}) = V_i(\vec{x}_0) + \underbrace{\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)(x_j - x_j^0)}_{W_{ij}^0 + D_{ij}^0}$$

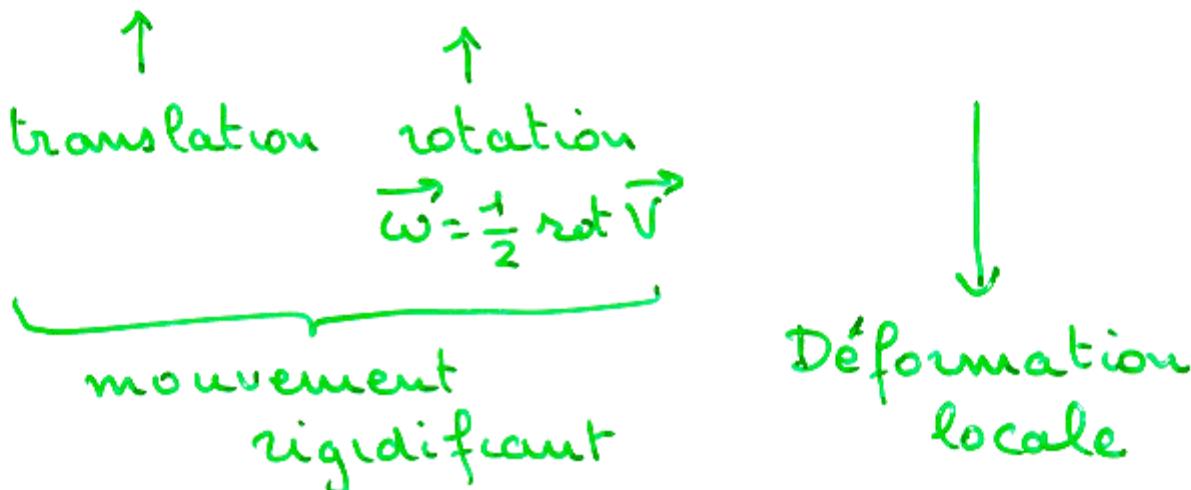
[  $W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$  taux de rotation ]

$$W_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2} (\text{rot } \vec{V})_3$$

[  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$  taux de déformation ]

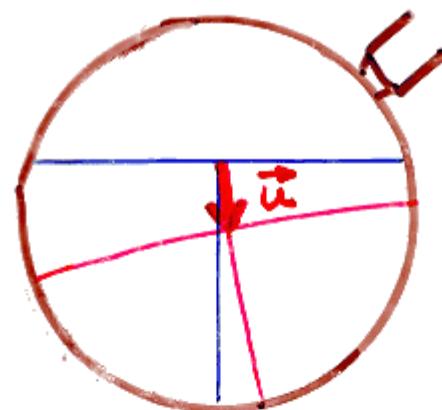
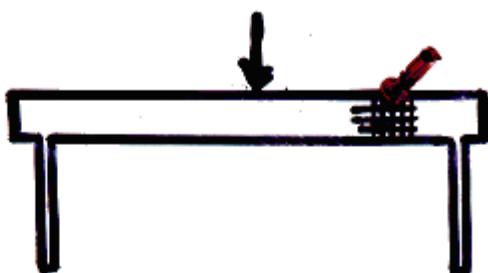
$$V_i(x) = V_i^0 + W_{ij}^0(x_j - x_j^0) + D_{ij}^0(x_j - x_j^0)$$

$$\vec{V}(x) = \vec{V}^0 + \vec{\omega}^0 \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{D}^0(\vec{x} - \vec{x}_0)$$



# DEFORMATIONS INFINITESIMALES

## Mécanique des Solides: HPP



### Petites perturbations

{ Euler  $\cong$  Lagrange  
{ Linéarisation

$$\vec{x} - \vec{a} = \vec{u}(\vec{x}, t)$$

vecteur déplacement (petit !)

$$d\vec{x} \cdot \delta \vec{x} - d\vec{a} \cdot \delta \vec{a} = 2 \varepsilon_{ij} dx_i dx_j$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ji}$$

tensor

forme bilinéaire { des déformations  
forme bilinéaire (infinitésimales)

### • Allongement dans la direction $\vec{n}$

$$\varepsilon(\vec{n}) = \frac{|d\vec{x}| - |d\vec{a}|}{|d\vec{a}|} = \varepsilon_{ij} n_i n_j$$

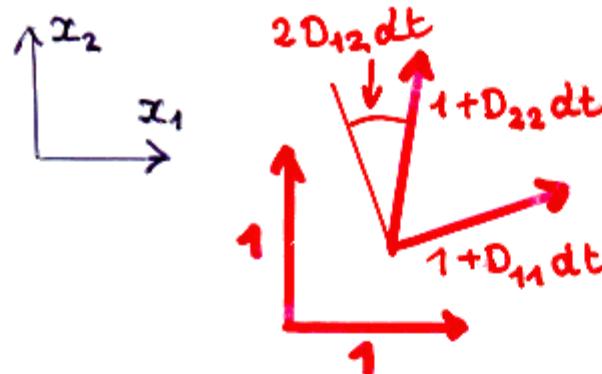
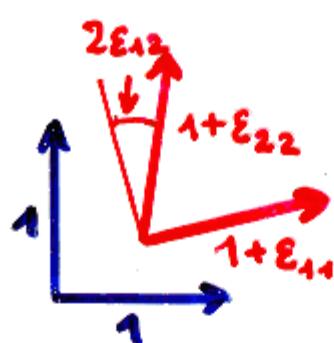
### • Glissement dans les directions $\vec{m}, \vec{n}$

$$\gamma(\vec{m}, \vec{n}) = (d\vec{x}, \delta \vec{x}) = 2 \varepsilon_{ij} n_i m_j$$

### Travaux virtuels

$$\iiint \rho g_i \ddot{u}_i dv = \iiint f_i \ddot{u}_i dv + \oint T_i \ddot{u}_i ds - \iiint \sigma_{ij} \ddot{\varepsilon}_{ij} dv$$

# LE TENSEUR DES (VITESSES DE) DÉFORMATIONS



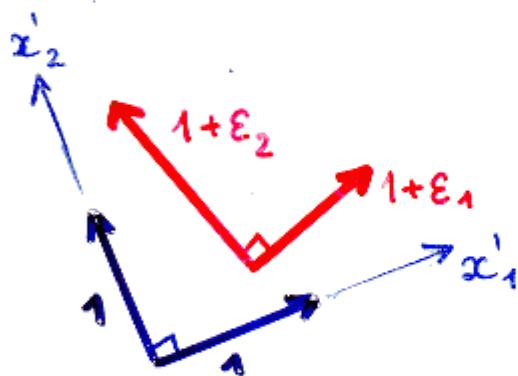
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

glissements  
allongements

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

vitesse de glissement  
vitesses d'allongement

diagonalisation.



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

allongements principaux

Décomposition partie sphérique - déviateur

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + e_{ij}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} + D^D_{ij}$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\partial V}{\nabla}$$

$$D_{kk} = \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\dot{V}}{\nabla}$$

Changement de repère

$$\varepsilon'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} \varepsilon_{kl}$$

$$D'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} D_{kl}$$

# EQUATIONS DE COMPATIBILITE

→ Intégration des déformations

$$u_i(x,t) \quad \xleftarrow{?} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Théorème 1 Si  $\epsilon_{ij} = 0$  alors

$$\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{x} + \vec{b}$$

rotation ↑ + translation ↓

$$u_i = \epsilon_{ijk} a_j x_k + b_i$$

Mvt de Solide Rigide

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si p.p.} \\ -1 & \text{si p.i.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 2 A partir de  $\epsilon_{ij}$

- Si les 6 équations de compatibilité

$$\begin{cases} \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2\epsilon_{12,12} = 0 \\ \epsilon_{11,23} + (\epsilon_{23,1} - \epsilon_{31,2} - \epsilon_{12,3}),1 = 0 \end{cases} + \dots$$

sont vérifiées alors on peut calculer

$$\vec{u} \text{ à un MSR près} \quad \vec{u} = \vec{u}^{\circ} + \vec{a} \wedge \vec{x} + \vec{b}$$

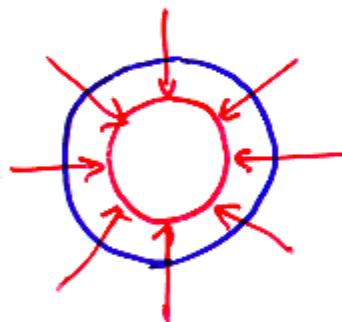
- Sinon on ne peut pas

Exemple 1  $\epsilon_y = \epsilon_y^{\circ}$

$$\Rightarrow u_i = \epsilon_y^{\circ} x_j + \epsilon_{ijk} a_j x_k + b_i$$

Exemple 2  $\epsilon_{ij} = A_{ijk} x_k$

$$\Rightarrow u_i = \frac{1}{2} (A_{ijk} + A_{ikj} - A_{gki}) x_g x_k + \epsilon_{ijk} a_j x_k + b_i$$

EXEMPLESPression isotope

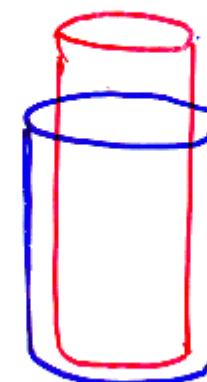
$$u_i = -\alpha x_i$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Traction simple

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

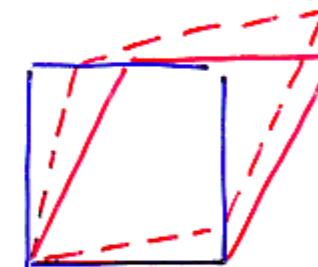


$$\varepsilon_l = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$$\varepsilon_T = \frac{d_0 \cdot d}{d_0}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_T \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cisaillement simple

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = \gamma x_1$$

$$\vec{\omega} = \frac{\gamma}{2} \vec{e}_3$$

$$u_3 = 0$$

$$\vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{x} + \varepsilon \vec{x}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarques 1] Pour un comportement simple  
2] Déformations infinitésimales

## **Mécanique des milieux continus**

### **Bloc 5 : Modèles de comportement**

1. [Fluides parfaits](#)
2. [Fluides visqueux](#)
3. [Fluides incompressibles](#)
4. [Thermodynamique des fluides](#)
5. [Solides Elastiques](#)
6. [Loi de Hooke](#)
7. [Relations d'Onsager](#)

# FLUIDES PARFAITS

A 26

Hypothèse 1  $e = e(\rho)$

ou plutôt  $\{ e(\rho, \gamma) \text{ ead } U(V, S) \}$   
(+ évolution isentropique)

Hypothèse 2 système réversible  $\Phi = 0$

$$\Phi = \sigma_{ij} D_{ij} - \rho \dot{e}$$

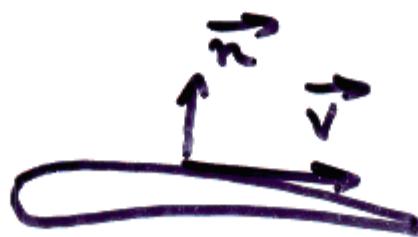
$$\dot{e} = \frac{de}{d\rho} \dot{\rho} = - \frac{de}{d\rho} \rho \operatorname{div} \vec{v} = - \rho \frac{de}{d\rho} D_{ii}$$

$$\Phi = (\sigma_{ij} + \rho^2 \frac{de}{d\rho} \delta_{ij}) D_{ij} = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = -\rho^2 \frac{de}{d\rho} \delta_{ij} = -p(\rho) \delta_{ij} \\ p(\rho) = \rho^2 \frac{de}{d\rho} = -\frac{de}{dJ} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} p = p_0/J \\ (p = -\frac{\partial U}{\partial V}) \end{array}$$

Fluide parfait barotrope

+ Conditions aux limites



$$\vec{V} = \vec{V}_\infty$$
  
 $p = p_\infty$

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$$
  
Condition de glissement

# FLUIDES VISQUEUX

## Hypothèse 1

$$\epsilon = \epsilon(\rho)$$

$$\Phi = (\underbrace{\sigma_{ij} + \tau(\rho) \delta_{ij}}_{\substack{\text{forces} \\ \text{thermodynamiques}}} \underbrace{D_{ij}}_{\substack{\rightarrow \sigma_{ij}^v \\ \text{flux thermodynamiques}}})$$

forces  
thermodynamiques

↑  
flux thermodynamiques

## Hypothèse 2 Relations d'Onsager (TP1)

$$\sigma_{ij}^v = L_{ijkl} D_{kl}$$

$$\left| \begin{array}{l} L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} \\ L_{ijkl} = L_{klij} \end{array} \right.$$

## Hypothèse 3 Isotropie

$$\sigma_{ij}^v = \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

↑  
2 coefficients de viscosité

## Fluide visqueux compressible (?)

$$\sigma_{ij} = -\tau(\rho) \delta_{ij} + \sigma_{ij}^v$$

$$\sigma_{ij} D_{ij} = \underbrace{-\tau(\rho) D_{ii}}_{\text{pe}} + \underbrace{\lambda D_{kk} D_{ii} + 2\mu D_{ij} D_{ij}}_{\Phi} \geq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda + 2\mu \geq 0 \\ \mu \geq 0 \end{array} \right.$$

## + Conditions aux limites

$$\begin{aligned} &\rightarrow \\ &\rightarrow \\ &\rightarrow \\ \vec{V} &= \vec{V}_\infty \\ \rho &= \rho_\infty \end{aligned}$$



$$\vec{V} = 0$$

condition d'adhérence

# FLUIDES INCOMPRESSIBLES

428

## Incompressibilité

$$\rho = \rho_0 \quad \text{tr } D = 0$$

$$\Phi = \sigma_{ij} D_{ij}$$

## Fluide parfait incompressible

$$\Phi = 0 \text{ pour tout } D_{ij} \text{ tq } D_{ii} = D_y \delta_{iy} = 0$$

$$\sigma_{ij} = -\rho \delta_{ij}$$

multiplicateur de Lagrange

## Fluide visqueux newtonien

$$\sigma_{ij} = -\rho \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

## → Équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{grad } p + \mu \vec{\Delta V}$$

## Résumé : Bilan énergétique

	réversible $\Phi = 0$	avec dissipation $\Phi > 0$
pas d'énergie stockée	fl. parfait incompressible	fl. visqueux incompressible
énergie stockée	fl. parfait compressible	fl. visqueux compressible

# FLUIDES - THERMODYNAMIQUE

$$e = e(\rho, \eta)$$

$$\dot{e} = -\rho \frac{\partial e}{\partial \rho} D_{ii} + \frac{\partial e}{\partial \eta} \dot{\eta}$$

$$\Phi = (\underbrace{\sigma_y + \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} \delta_{ij}}_{\phi^{visq}}) D_{ij} - \underbrace{\rho \left( \frac{\partial e}{\partial \eta} - \Theta \right) \dot{\eta}}_{\phi^{entr}} - \underbrace{\frac{1}{\Theta} q_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}}_{\phi^{th}} > 0$$

$$X = \begin{bmatrix} \sigma_y + \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} \delta_{ij} \\ -\rho \left( \frac{\partial e}{\partial \eta} - \Theta \right) \\ -\frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} D_{ij} \\ \dot{\eta} \\ q_i \end{bmatrix}$$

Usuellement  $\phi^{entr} = 0$        $\Theta = \frac{\partial e}{\partial \eta}$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \\ q_i = -k \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \end{array} \right.$$

Fluide visqueux compressible conducteur

SOLIDESELASTIQUESHypothèse 1. Solide en HPPHypothèse 2. Système réversible  $\Phi = 0$ 

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{w}$$

↑                   ↑  
 $D_{ij}$             $p_{oe}$

$$w(\varepsilon_{ij})$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Hypothèse 3. Linéarité

$$w = \frac{1}{2} A_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\left| \begin{array}{l} A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} \\ A_{ijkl} = A_{klji} \end{array} \right.$$

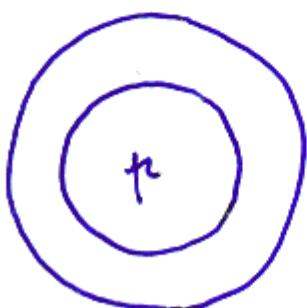
Hypothèse 4. Isotropie

$$\sigma_{ij} = \lambda \underbrace{\varepsilon_{kk} \delta_{ij}}_{\text{coefficients de Lamé}} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

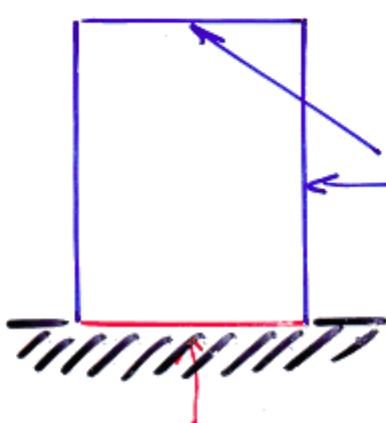
coefficients de Lamé

Loi de HookeConditions aux limites

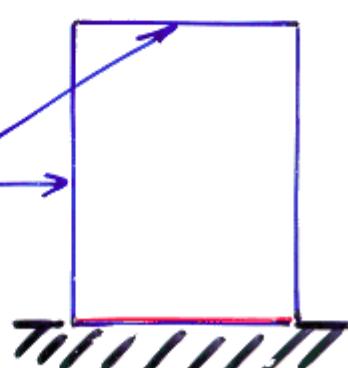
sans glissement      sans frottement



intérieur     $\vec{T} = -\vec{r} \vec{n}$   
 extérieur     $\vec{T} = 0$



$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$



$$\mu_3 = 0$$

$$T_1 = T_2 = 0$$

# LOI DE HOOKE

A31

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}}$$

$\lambda$  / coefficients  
de Lamé  
 $\mu$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{11} + \lambda \epsilon_{22} + \lambda \epsilon_{33} \\ \sigma_{12} = 2\mu \epsilon_{12} \quad \dots \end{array} \right.$$

## Traction simple

$$\sigma = E \epsilon$$

modèle d'Young

$$E = \mu(3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu)$$

$$\epsilon_T = \nu \epsilon$$

coefficient de Poisson

$$\nu = \lambda / 2(\lambda + \mu)$$

$$0 \leq \nu \leq 1/2$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad \dots \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad \dots \end{array} \right.$$

## Pression isotrope

$$\nu = 3K \alpha \quad \text{rigidité en compression} \quad 3K = 3\lambda + 2\mu = E / (1-2\nu)$$

## Craquement

$$\tau = G \gamma \quad \text{module de Coulomb} \quad G = \mu = E / 2(1+\nu)$$

$$\sigma_{kk} = 3K \epsilon_{kk}$$

$$\gamma_y = 2G \epsilon_{ij}$$

## LIMITE D'ELASTICITE

### Critère de von Mises

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \leq \frac{\sigma_e^2}{3}$$

$\sigma_e$ : limite élastique en traction

Méthode

### Tresca

$$|\vec{T}_t|_{\max} \leq \frac{\sigma_e}{2}$$

### Contrainte normale

$$T_n \leq \sigma_e$$

.....

Matériaux  
fragiles

## RELATIONS D'ONSAGER

Thermodynamique des Phénomènes irréversibles linéaire

$$\Phi = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{J}} \quad \leftarrow \text{flux thermodynamique}$$

force thermodynamique

$$\rightarrow \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{J}} \quad \text{avec } \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}^T$$

### Viscosité

$$\sigma^v: D$$

$$\sigma^v = \lambda(b_2 D)I + 2\mu D$$

Fluide visqueux

$$\sigma^v: E$$

$$\sigma = A[\epsilon] + B[\dot{\epsilon}]$$

Solide viscoélastique de Kelvin

### Conduction thermique

$$-\overrightarrow{\text{grad} \theta} \cdot \vec{q}$$

$$\vec{q} = -k \text{ grad} \theta$$

Loi de Fourier

### Milieux poreux

$$-\overrightarrow{\text{grad} p} \cdot \vec{V}$$

$$\vec{V} = -k \text{ grad} p$$

Loi de Darcy

### Diffusion

$$-\overrightarrow{\text{grad} c} \cdot \vec{J}$$

$$\vec{J} = -D \text{ grad} c$$

Loi de Fick

### Conduction électrique

Loi d'Ohm

### Cinétique chimique

Et la TPI non linéaire ? Plasticité etc....

## **Mécanique des milieux continus**

### **Bloc 6 : Régimes d'écoulements**

1. [Ecoulement de fluide visqueux](#)
2. [Faibles Reynolds](#)
3. [Grands Reynolds](#)
4. [La Couche limite](#)
5. [Mise en mouvement d'une plaque](#)
6. [Solution de Blasius](#)
7. [Illustration 1](#)
8. [Illustration 2](#)
9. [Illustration 3](#)

# ÉCOULEMENTS : FLUIDES VISQUEUX

Fluide visqueux newtonien incompressible  
 $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$        $\downarrow + \text{pesant}$   
 eq. de Navier-Stokes

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$$

stationnaire convection pression viscosité pesanteur  
 $O(\frac{U^2}{L})$        $O(\frac{vU}{L^2}) \leftarrow v = \frac{u}{\rho}$

nombre de Reynolds  $R = \frac{UL}{v} = \frac{\text{convection}}{\text{viscosité}}$  viscosité cinématique  
 $\rightarrow$  régimes d'écoulement.

Plus généralement (adimensionnalisation)

$$T = \frac{t}{t_c} \quad X_i = \frac{x_i}{L} \quad \bar{V}_i = \frac{v_i}{U} \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U^2}$$

temps      longueur caractéristiques du Pb.

$$\frac{L}{U t_c} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial T} + \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial X_j} \bar{V}_j = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial X_j \partial X_j} + \frac{g L}{U^2} z_i$$

Strouhal

si  $t_c \gg \frac{L}{U}$   
 stationnaire  
 sinon instationnaire

Reynolds

Froude

si  $\frac{gL}{U^2} \ll 1$  pesanteur négligeable  
 sinon pesanteur!

ESSENTIEL

$$\begin{array}{l|l} R << 1 & \text{Petit Reynolds} \\ R \gg 1 & \text{Grand Reynolds} \end{array}$$

# FAIBLES REYNOLDS

$R \ll 1$

$R \ll 1$

- faible vitesse : écoulement lent
- forte viscosité : miel, verre, huile
- faible longueur : objets microscopiques
- lubrification

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{P}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{Froude})$$

Stokes

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \left( \begin{array}{l} + \text{Conditions aux limites} \rightarrow (\vec{V} = 0) \\ + \text{Conditions initiales} \rightarrow \vec{V}(\vec{x}, 0) \end{array} \right) \end{array}$$

## PROBLEME DE STOKES

• linéaire

→ unicité  $\begin{cases} \text{Pb transitoire} \\ \text{Pb stationnaire} \end{cases}$

→ oubli des conditions initiales

(stationnaire asymptotique)

→ Superposition - Technique de solution

•  $\pi = \frac{P}{\rho} + u$  est harmonique  $\Delta \pi = 0$

Quand  $R$  augmente

## PROBLEME DE NAVIER STOKES

• non linéaire

→ non unicité

↳ Bifurcation pour  $R_c$

↳ Turbulence

$R \gg 1$  les écoulements courants

| aérodynamique  
| hydrodynamique

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = - \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \quad (\pi = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \rho v^2)$$

+ conditions aux limites      ( $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ )  
(+ conditions initiales)

### EQUATIONS D'EULER

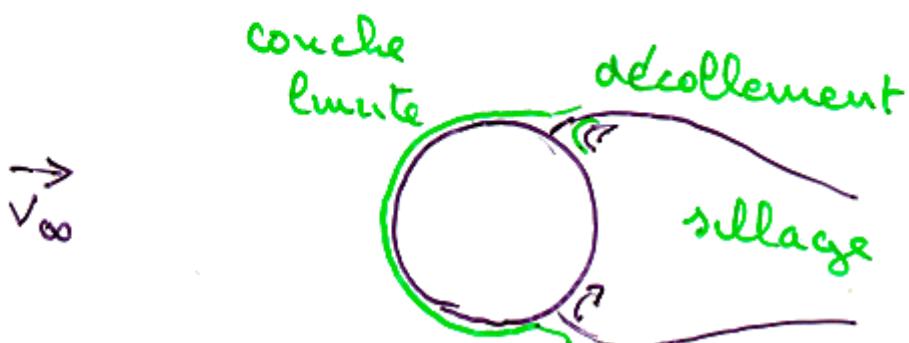
Mais Attention ! Pas si simple

- Valable dans certaines zones seulement  
Reynolds local ?

La viscosité intervient toujours localement

- la non linéarité domine

mathématiques { difficile  
numérique }



## LA COUCHE LIMITE

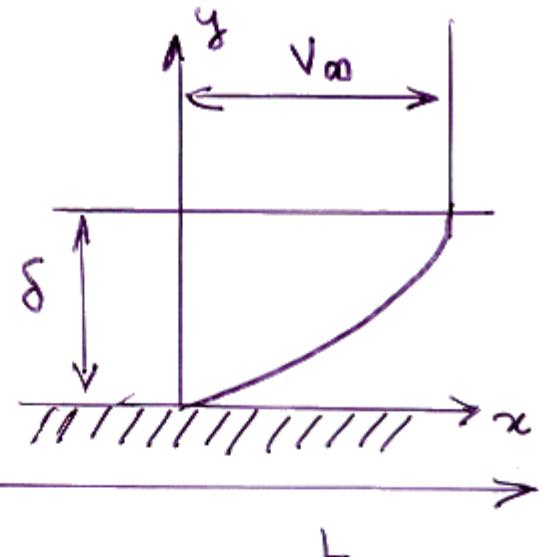
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

$$O\left(\frac{V_\infty}{L}\right)$$

$$O\left(\frac{W}{\delta}\right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\delta}{L} = \frac{W}{V_\infty}}$$

$$\begin{cases} V_x = O(V_\infty) \\ V_y = O(W?) \\ y = O(\delta) \\ x = O(L) \\ \tau = O(\rho V_\infty^2) \end{cases}$$



$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right)$$

$$O\left(\frac{V_\infty^2}{L}\right)$$

$$O\left(\frac{V_\infty W}{\delta}\right)$$

$$O\left(\frac{V_\infty^2}{L}\right)$$

$$O\left(\frac{V_\infty^2}{L^2}\right)$$

$$O\left(\frac{V_\infty^2}{\delta^2}\right)$$

$$\hookrightarrow \frac{V_\infty}{\delta^2} = \frac{V_\infty^2}{L^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 = \frac{\nu}{V_\infty L} = \frac{1}{\lambda}}$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right)$$

$$O\left(\frac{V_\infty W}{L}\right)$$

$$O\left(\frac{W^2}{\delta}\right)$$

$$\cancel{\frac{\delta}{L} \left( \frac{V_\infty^2}{L} \right)}$$

$$O\left(\frac{V_\infty^2}{\delta^2}\right)$$

$$O\left(\frac{V_\infty W}{L^2}\right)$$

$$O\left(\frac{V_\infty W}{\delta^2}\right)$$

$$\cancel{\frac{\delta}{L} \left( \frac{V_\infty^2}{L} \right)}$$

## EQUATIONS DE PRANDTL

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} p = p_\infty(x) \\ \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} = \text{Cte} \end{array}}$$

## UN EXEMPLE

Mise en mouvement d'une plaque plane

$$\begin{cases} t=0 \text{ repos} & \vec{V}=0 \\ t>0 & V=V_0 \vec{e}_x \text{ en } y=0 \end{cases}$$

on cherche

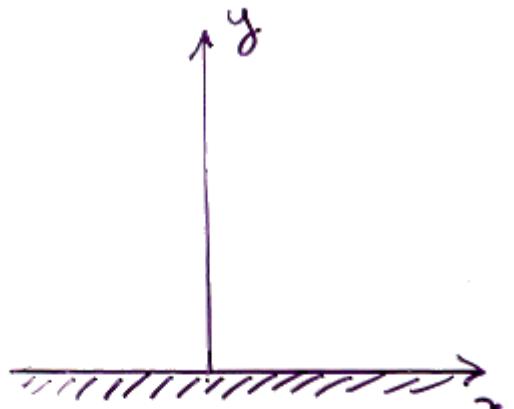
$$V_x = V(y, t) \quad V_y = V_z = 0$$

$$p = p(y, t)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{vérifié}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{ave} \quad \begin{cases} V(y, 0) = 0 \\ V(0, t) = V_0 \end{cases} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{array} \right.$$

Problème classique



$$V = V_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right]$$

• Stokes

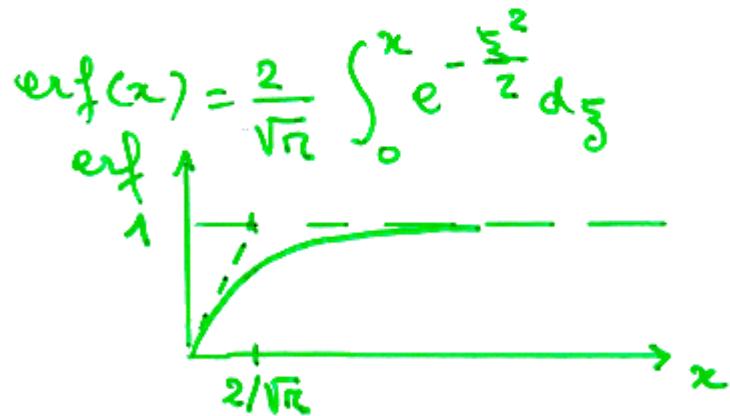
C'est la solution

• Navier-Stokes

C'est une solution

unicité ?

Stabilité ?



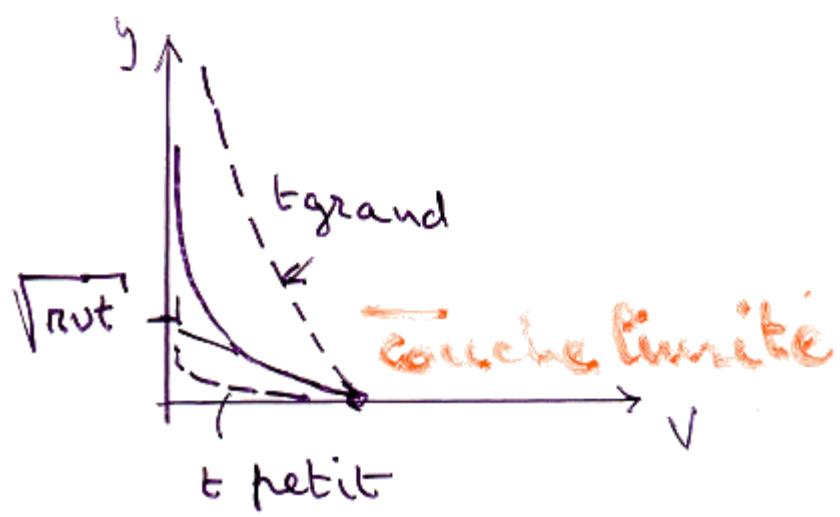
Solution fluide parfait

$$\vec{V} = 0$$

pour  $y \rightarrow \infty$

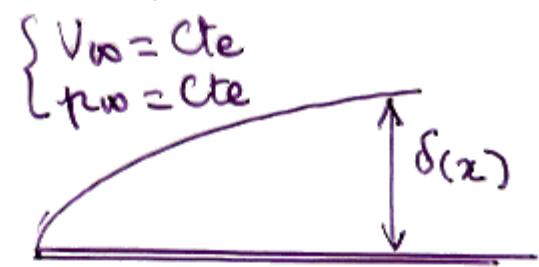
couche limite

d'épaisseur  $\sqrt{\nu t}$



# SOLUTION DE BLASIUS

Plaque dans un écoulement uniforme



H1  $V_x = V_\infty g(\eta)$      $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$

H2  $\frac{\delta}{L} = \left( \frac{V}{V_\infty L} \right)^{1/2} \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{VL}{V_\infty}} = \sqrt{\frac{Vx}{V_\infty}}$

$$\hookrightarrow \eta = \sqrt{\frac{V_\infty}{V}} \frac{y}{\sqrt{x}}$$

solution autosimilaire

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad \Psi \text{ fonction de courant}$$

$$\Psi = \int_0^y V_x dy = V_\infty f(\eta) \delta(x) \quad f = \int g d\eta$$

$$\rightarrow V_x = V_\infty f'(\eta) \quad V_y = -V_\infty [f(\eta) - \eta f'(\eta)] \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} V_y = V \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

$$\hookrightarrow f(\eta) f''(\eta) + 2f'''(\eta) = 0$$

$$x=0 \Rightarrow f=f'=0 ; x \rightarrow \infty \Rightarrow f' \rightarrow 1$$

Solution de Blasius (numérique)

$$V_x = 0.99 V_\infty \text{ pour } \eta = 4.99$$

$$y = 4.99 \sqrt{\frac{Vx}{V_\infty}}$$

VI 8

fluide parfait

$$\nabla \tilde{u} = 0$$

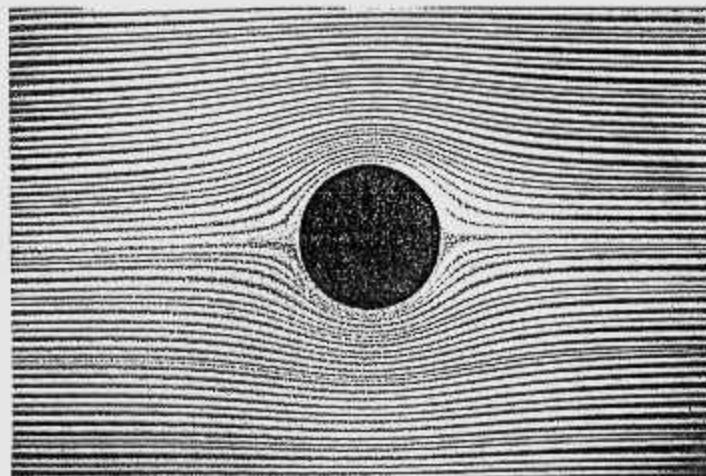
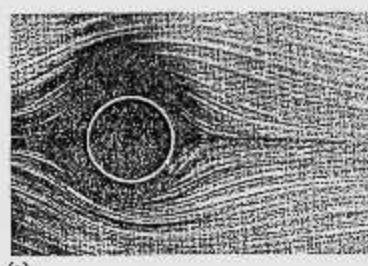


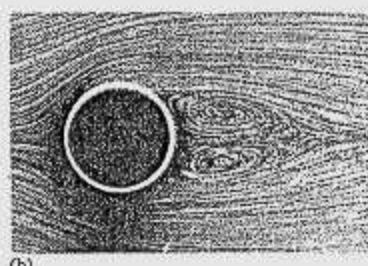
Fig. 6.8 Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini, dans le cas où la circulation de la vitesse autour du cylindre est nulle.

fluides visqueux

a)  $Re = 0,16$

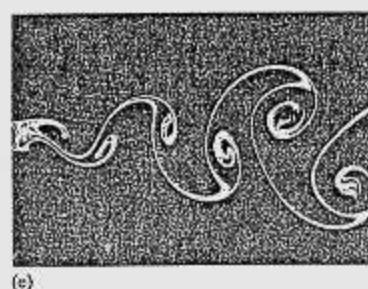


b)  $Re = 26$



aval  $Re = 46$

c)  $Re = 200$



d)  $Re = 10^4$

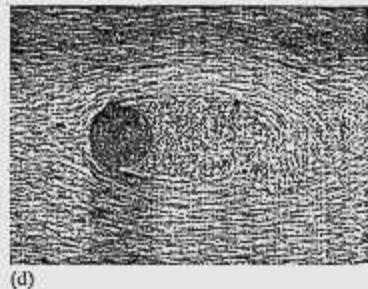


Fig. 2.9 Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds : (a) écoulement symétrique entre amont et aval à très faible nombre de Reynolds ( $Re = 0,16$ ) ; (b) apparition de deux zones de recirculation fixes en arrière du cylindre ( $Re = 26$ ) ; (c) émission périodique de tourbillons formant une allée de Karman ( $Re = 200$ ) ; (d) sillage turbulent ( $Re = 10^4$ ) (Photos (a, b, c) S. Taneda, *An Album of Fluid Motion* ; photo (d) H. Werlé, ONERA).

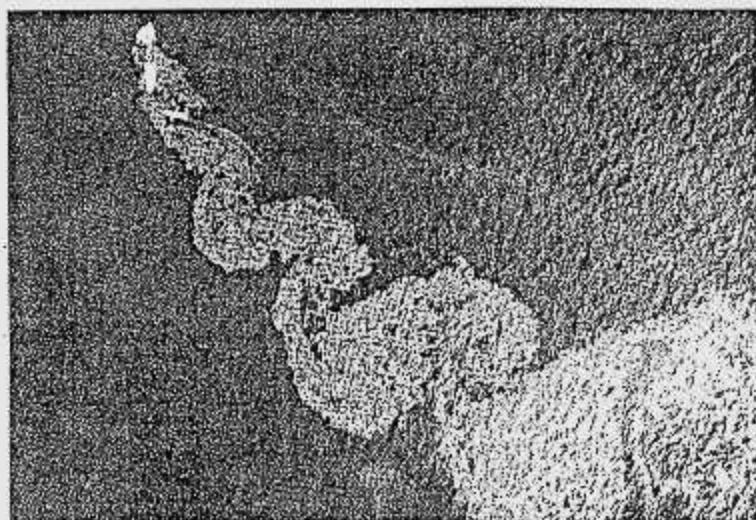


Fig. 2.14 Trainée formée derrière un cargo échoué. Bien que le nombre de Reynolds soit de l'ordre de  $10^7$ , l'allée double de tourbillons reste bien visible ; l'écoulement principal est à  $45^\circ$  de l'axe du bateau (document *An Album of Fluid Motion*).

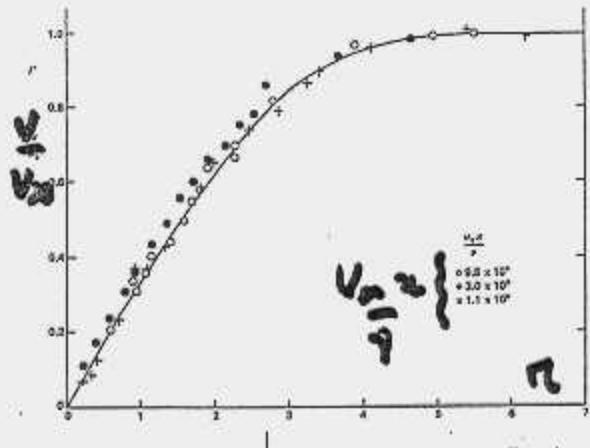


Figure 11.2 Theoretical Blasius profile

Profil de Blasius

$$V_x \approx \left\{ \begin{array}{l} \eta \\ \pi \end{array} \right.$$

VI 19

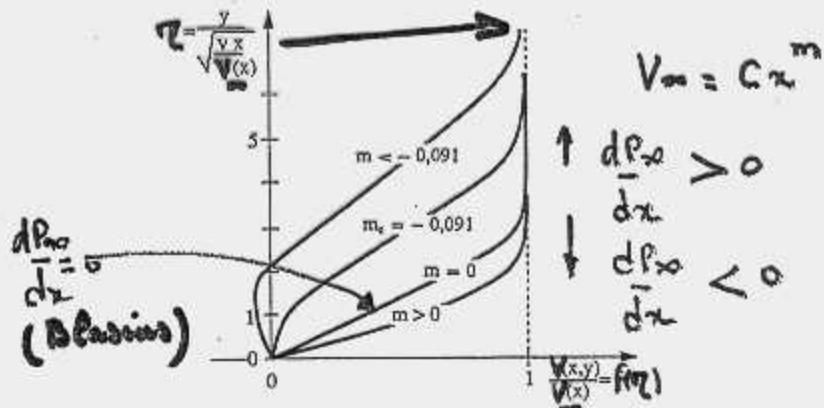
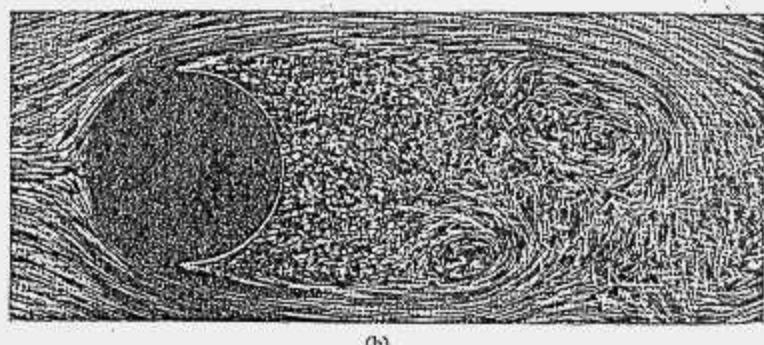


Fig. 9.7 Forme des profils de vitesse à l'intérieur de la couche limite dans le cas d'écoulements extérieurs de la forme  $U(x) = Cx^m$ , pour différentes valeurs de l'exposant  $m$ ;  $u(x, y)$  est la composante de vitesse parallèle à la paroi.



(b)

Fig. 9.1 (a) Couche limite et sillage laminaires le long d'un profil d'aile placé sous incidence nulle dans un écoulement uniforme; (b) couches limites décollées de la surface d'un corps mal profilé, avec présence d'un sillage important; dans ce dernier cas, la taille du sillage est du même ordre de grandeur que celle de l'objet (clichés H. Werlé, ONERA).

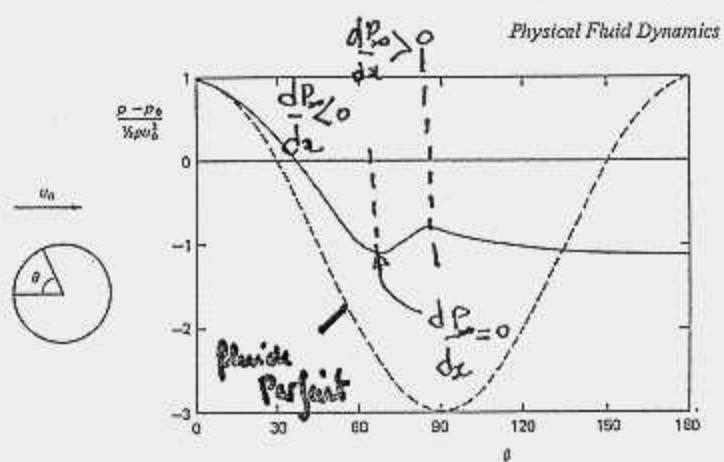


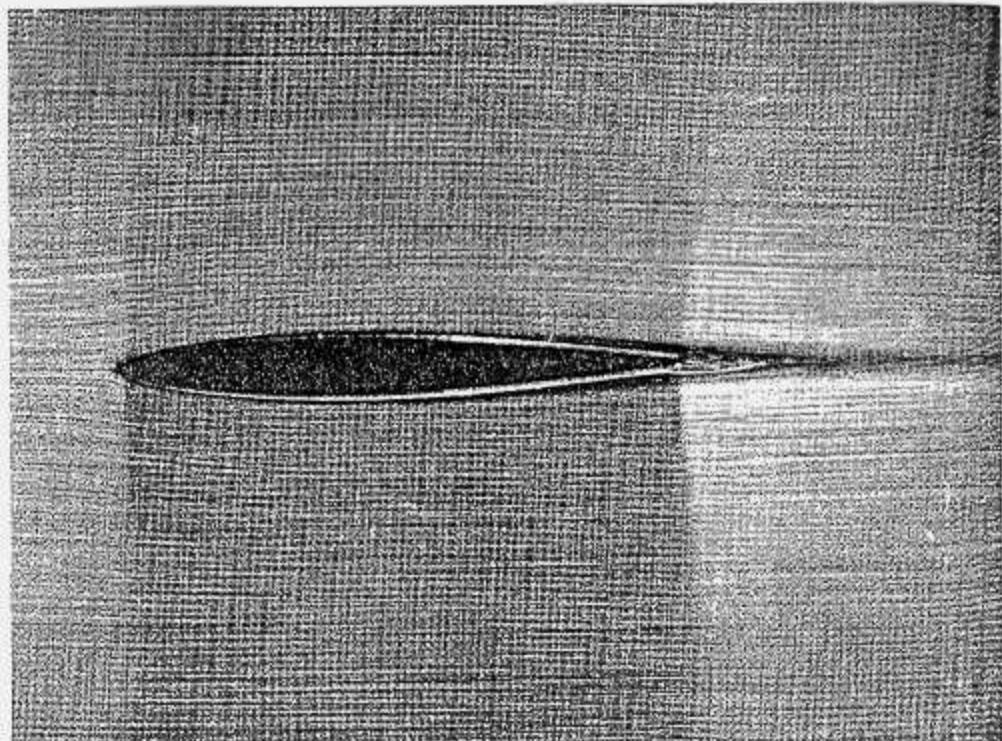
Figure 11.7 Pressure distribution on a circular cylinder. Broken line: inviscid flow solution. Solid line: distribution measured at  $Re = 1.9 \times 10^5$  (data obtained by Flachbart, given in Ref. [8]).

TU 9

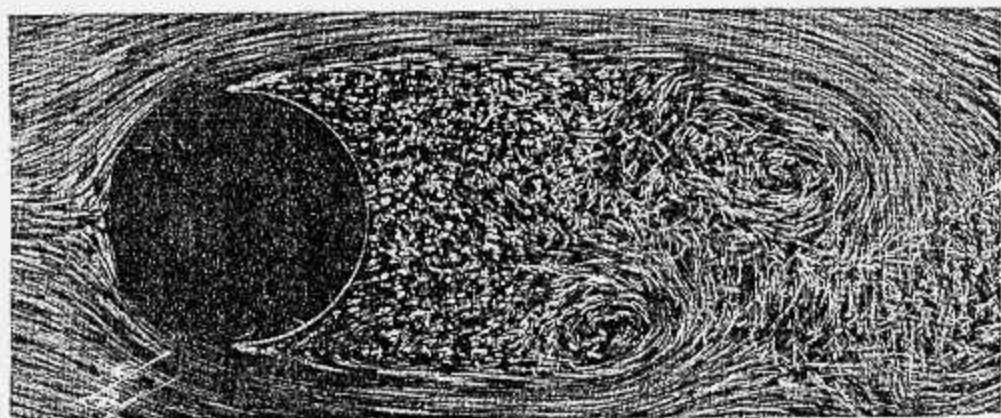
386

Couches limites laminaires

et sillage



(a)



(b)

Fig. 9.1 (a) Couche limite et sillage laminaires le long d'un profil d'aile placé sous incidence nulle dans un écoulement uniforme ; (b) couche limite décollée de la surface d'un corps mal profilé, avec présence d'un sillage important ; dans ce dernier cas, la taille du sillage est du même ordre de grandeur que celle de l'objet (clichés H. Werlé, ONERA).

## **Mécanique des milieux continus**

### **Bloc 7 : Problèmes aux limites**

1. [Problemes réguliers en élasticité](#)
2. [Ecoulement de Stokes](#)
3. [Première méthode](#)
4. [Ecoulement de Couette](#)
5. [Deuxième Méthode](#)
6. [Bloc pesant](#)

# ELASTICITE CLASSIQUE - PROBLEME REGULIER

$$\sigma_{ij,j} + p\delta_{ij} = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \text{ ou } \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \\ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{array} \right]$$

+ Conditions aux limites

$\Rightarrow$  3 conditions scalaires en tout point

- 3 déplacements

$$u_i = u_i^d \text{ sur } S_u$$

- 3 efforts

$$\sigma_{ij} n_j = T_i^d \text{ sur } S_f$$

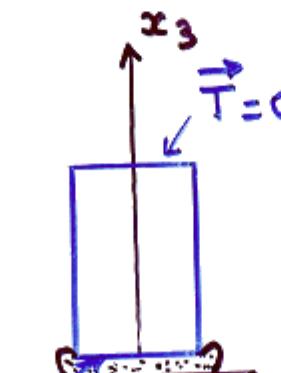
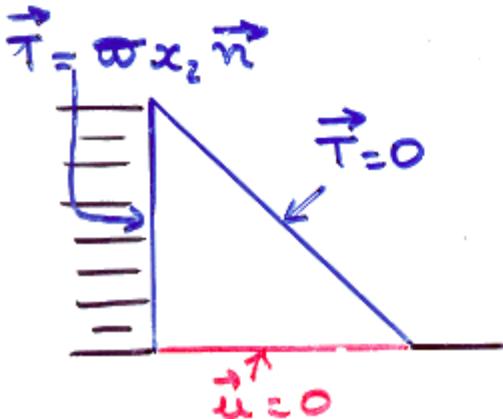
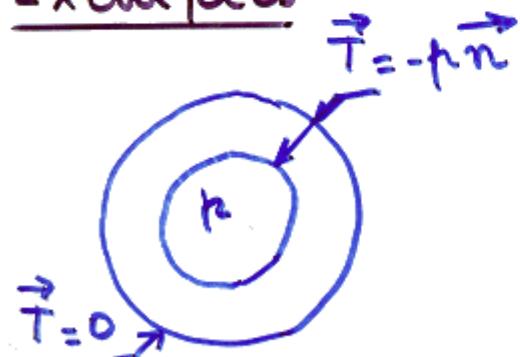
- ou 3 composantes complémentaires de  $\vec{u}$  et  $\vec{T}$

$$u_1 = u_1^d \quad T_2 = T_2^d \quad T_3 = T_3^d$$

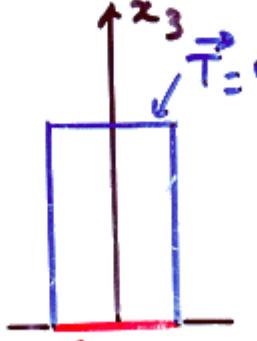
$\rightarrow$  Travail des efforts superficiels

$$\iint_S \sigma_{ij} n_i u_j dS = \iint_{S_u} \sigma_{ij} n_i u_i^d dS + \iint_{S_f} T_i^d u_i dS$$

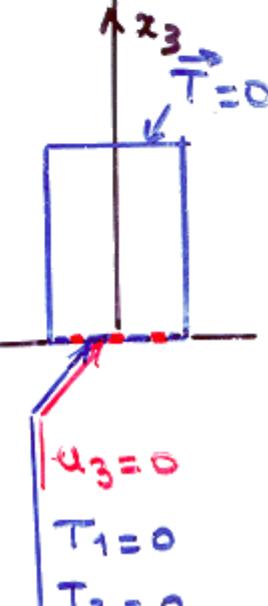
Exemples



Adhérence



S + frot.



**Pb BIEN POSE**  
**EXISTENCE**  
**UNICITE**

# FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE

Approximation de Stokes  $\rho \ddot{\gamma}_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

En général difficile !  
(Stabilité ?)

+ Conditions aux limites

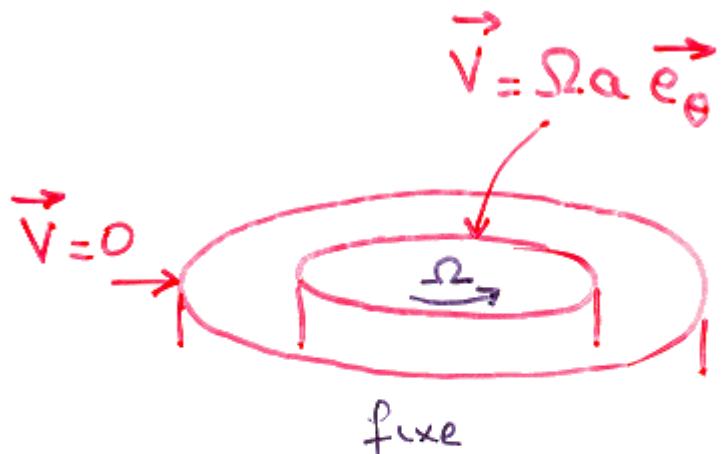
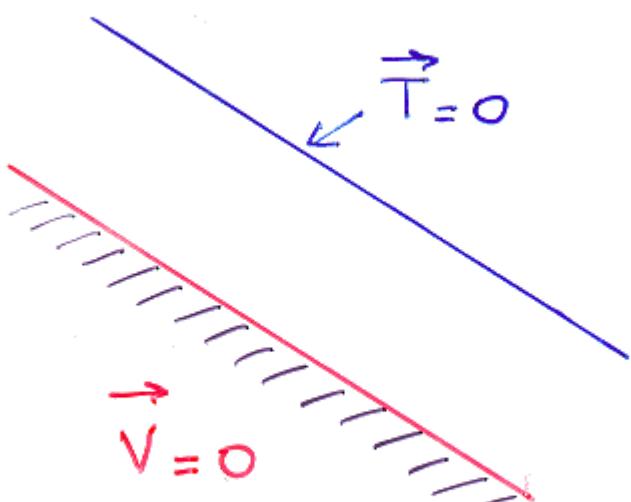
PB BIEN POSE

paroi

$$\vec{v} = \vec{v}^d$$

surface libre

$$\sigma_{ij} n_j = -p^d n_i$$



Couette

## Première méthode

On postule un déplacement  $u_i(x)$

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{CL } u_i = u_i^d} \rightarrow u_i(x) \\
 | \\
 \text{LC } \sigma_{ij} \leftrightarrow \varepsilon_{ij} \\
 | \\
 \text{eq. } \sigma_{ij,j} + p\delta_{ij} = 0 \\
 | \\
 \boxed{\text{CL } \sigma_{ij} n_j = T_i^d} \xrightarrow{\quad} \sigma_{ij}(x)
 \end{array}$$

$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}]$   
 $\downarrow$   
 $\downarrow$   
 $\downarrow$

En fluide visqueux  
+  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

1. Postuler  $u_i$

2. Vérifier les CL  $u_i = u_i^d$

3 Calculer  $\varepsilon_{ij}$

4 Calculer  $\sigma_{ij}$

5 Ecrire  $\sigma_{ij,j} + p\delta_{ij} = 0$

6 Vérifier les CL  $\sigma_{ij} n_j = T_i^d$

Eq. de Navier  
(ou Navier-Stokes)

Eq. de Navier : eq. d'équilibre exprimée en fonction du déplacement

$$(\lambda + \mu) u_{i,k} + \mu u_{kk,ii} + p\delta_{kk} = 0$$

ou

$$(\lambda + 2\mu) \vec{\text{grad}} \cdot \vec{\text{div}} \vec{u} - \mu \vec{\text{rot}} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{u} + p\vec{\nabla} = 0$$

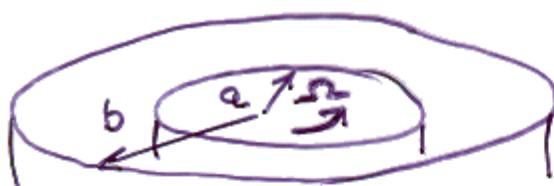
Navier-Stokes

$$p \frac{d\vec{V}}{dt} = - \vec{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{div} \vec{V} = 0)$$

# Exemple Ecoulement de Couette

$$\vec{V} = 0 \text{ en } r=b$$

$$\vec{V} = \Omega a \hat{e}_\theta \text{ en } r=a$$



$$1 \rightarrow \vec{V} = V(r) \hat{e}_\theta$$

$$2 \rightarrow V(a) = \Omega a \quad V(b) = 0$$

$$3 \rightarrow \text{ID} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} & 0 \\ \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4 \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -\tau & \mu(V' - \frac{V}{r}) & 0 \\ \mu(V' - \frac{V}{r}) & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix}$$

$$5 \rightarrow -\rho \frac{V^2}{2} = -\frac{\partial p}{\partial r} \Rightarrow \tau(r) = \dots$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{C}{r^2} = \mu(V' - \frac{V}{r}) \Rightarrow V = -\frac{C}{2\mu} \frac{1}{r^2} + Br$$

$$\vec{V} = \frac{\Omega a^2}{r} \frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2}$$

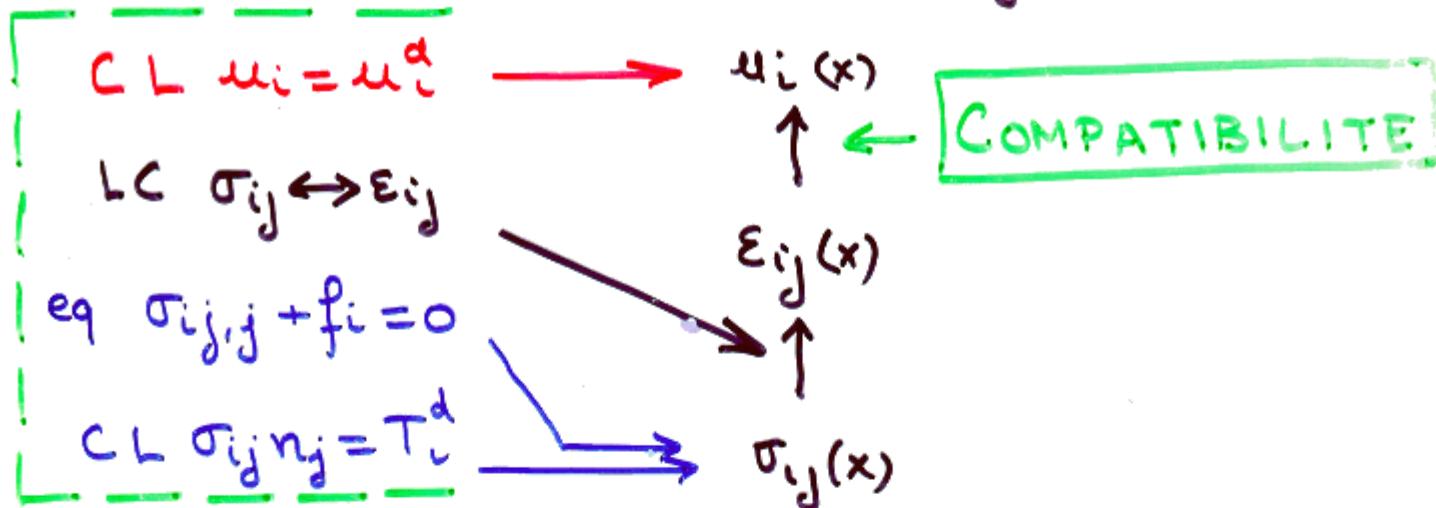
$$\tau = -\frac{2\mu \Omega a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

$$\text{couple } 4\pi \mu \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} Sl$$

↳ Une solution (unicité?)

## Deuxième méthode

On postule des contraintes  $\sigma_{ij}(x)$



1. Postuler  $\sigma_{ij}$

2. Écrire  $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$

3. Vérifier les CL  $\sigma_{ij} n_j = T_i^d$

4. Calculer  $\epsilon_{ij}$

5. Vérifier les eq. Compatibilité

→ Eq. de  
Beltrami

6. Intégrer le déplacement  $u_i$

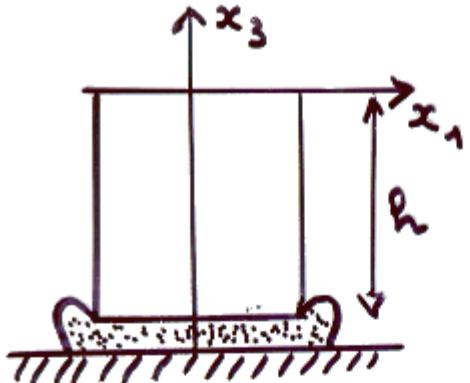
7. Vérifier les CL  $u_i = u_i^d$

Eq. de Beltrami : eq. de compatibilité exprimée en fonction des contraintes

$$\sigma_{ij,kl} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = -[f_{ij} + f_{j,i} + \frac{\nu}{1-\nu} f_{ii}]$$

$$= 0 \text{ si } f_i = 0 \text{ ou } f_i^*$$

→ automatiquement vérifiées pour  $\sigma_{ij}$  constant ou linéaire.

ExempleBloc pesant

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{x}_3 = 0} \\ \underline{\underline{x}_3 = -h}$$

Splat

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = 0 \\ \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 = 0 \\ \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = -\rho g h, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{array} \right]$$

1. → On cherche

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(x_3) \end{bmatrix}$$

2. →

$$\text{équilibre} \quad \sigma = \rho g x_3 + \text{Cte}$$

$$3. \rightarrow \text{CL} \quad \sigma = 0 \text{ pour } x_3 = 0$$

$$\sigma = -\rho g h \text{ pour } x_3 = -h$$

$$\sigma = \rho g x_3$$

4.5. → Beltrami vérifiée ( $\sigma_{ij}$  linéaire)

$$6. \rightarrow \varepsilon_{11} = -\frac{\nu \rho g}{E} x_3 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \rightarrow Eu_1 = -\nu \rho g x_3 x_1 + \varphi_1(x_2, x_3)$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu \rho g}{E} x_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \rightarrow Eu_2 = -\nu \rho g x_3 x_2 + \varphi_2(x_1, x_3)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\nu \rho g}{E} x_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \rightarrow Eu_3 = \frac{1}{2} \nu \rho g x_3^2 + \varphi_3(x_1, x_2)$$

$$2\varepsilon_{12} = 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \rightarrow \varphi_{1,2} + \varphi_{2,1} = 0$$

$$2\varepsilon_{23} = 0 = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \rightarrow \varphi_{2,3} + \varphi_{3,2} = \nu \rho g x_2$$

$$2\varepsilon_{31} = 0 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \rightarrow \varphi_{3,1} + \varphi_{1,3} = \nu \rho g x_1$$

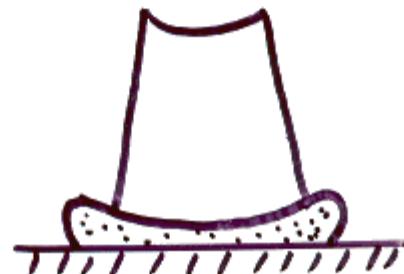
$$\Rightarrow \text{P. ex.} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} \nu \rho g (x_1^2 + x_2^2)$$

$$Eu_1 = -\nu \rho g x_1 x_3$$

$$Eu_2 = -\nu \rho g x_2 x_3$$

$$Eu_3 = \frac{1}{2} \nu \rho g [x_3^2 + \nu (x_1^2 + x_2^2)]$$

} + déplacement  
de solide rigide



7. → Pas de CL en ui;

# **Mécanique des milieux continus**

## **Bloc 8 : Méthodes variationnelles**

1. [Champs admissibles](#)
2. [Théorème de l'énergie potentielle](#)
3. [Théorème de Comparaison](#)
4. [La structure de la MMC](#)
5. [Un exemple](#)
6. [Une approximation](#)
7. [Méthodes d'Eléments finis](#)

# METHODES VARIATIONNELLES EN ELASTICITE

Problème régulier : trouver  $u_i$  et  $\sigma_{ij}$

$$CL \quad u_i = u_i^d \quad \} \text{ cinétique}$$

$$\begin{array}{ll} LC & \sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \text{équilibre} & \sigma_{ij,j} + p f_i^d = 0 \\ CL & \sigma_{ij} n_j = T_i^d : S_f \end{array} \quad \} \text{ statique}$$

Champ statiquement admissible CSA

$\hat{\sigma}_y$  + Cdt. statiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{ij,j} + p f_i^d = 0 \\ \hat{\sigma}_{ij} n_j = T_i^d : S_f \end{array} \right.$$

Champ cinétiquement admissible CCA

$\tilde{u}_i$  + Cdt. cinématiques

$$\tilde{u}_i = u_i^d \text{ sur } S_u$$

Trouver un CSA et un CCA reliés par la loi de comportement

Lemme fondamental

$$\iiint_D \hat{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dv = \iiint_D p f_i^d \tilde{u}_i dv + \iint_{\partial D} \hat{\sigma}_{ij} n_j \tilde{u}_i ds$$

$$\underbrace{\iiint_D p f_i^d \tilde{u}_i dv}_{T_p^d(\tilde{u}_i)} + \underbrace{\iint_{S_p} T_i^d \tilde{u}_i ds}_{+ \iint_{S_u} \hat{\sigma}_{ij} n_j u_i^d ds}$$

$$T_p^d(\tilde{u}_i)$$

$$+ \iint_{S_u} \hat{\sigma}_{ij} n_j u_i^d ds$$

# THEOREME DE L'ENERGIE POTENTIELLE

## Energie de déformation

$$W(\tilde{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} \iiint \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dv = \iiint w(\tilde{\varepsilon}_{ij}) dv$$

## Travail des efforts donnés

$$\tilde{T}_f^d(\tilde{u}_i) = \iiint f_i \tilde{u}_i dv + \iint_{S_f} T_i \tilde{u}_i ds$$

## → Energie potentielle du CCA $\tilde{u}_i$

$$K(\tilde{u}_i) = W(\tilde{\varepsilon}_{ij}) - \tilde{T}_f^d(\tilde{u}_i)$$

## Théorème de l'énergie potentielle

$$K(u_i) = \inf_{\tilde{u}_i \in \text{CCA}} K(\tilde{u}_i)$$

→ Si  $u_i$  solution alors  $u_i$  minimise  $K$  pour les CCA

→ Si  $u_i$  minimise  $K$  alors  $u_i$  est solution

Dém  $\tilde{u}_i = u_i + \tilde{u}_i^0$      $\tilde{u}_i^0 \in \text{CCA}_0$  (cad  $\tilde{u}_i^0 = 0$  sur  $S_u$ )

$$K(\tilde{u}_i) = \underbrace{W(u_i)}_{K(u_i)} + \underbrace{\iiint \sigma_y \tilde{\varepsilon}_y^0 dv}_{-\tilde{T}_f^d(\tilde{u}_i^0)} + \underbrace{W(\tilde{u}_i^0)}_{\geq 0}$$

### Direct

- si  $u_i$  solution  $\sigma_{ij}$  CSA

$$\iint (\sigma_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij}^0 - T_f^d(\tilde{u}_i^0)) dv = 0$$

car  $\tilde{u}_i^0 = 0$

$$\hookrightarrow K(\tilde{u}_i) = K(u_i) + \underbrace{W(\tilde{u}_i^0)}_0$$

d'où la conclusion

### Reciproque

- si  $u_i$  minimise  $K$

$$\iint \sigma_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij}^0 = \tilde{T}_f^d(\tilde{u}_i^0)$$

$$\iint (\sigma_{ij} n_j + f_i) \tilde{u}_i^0 dv + \iint_{S_f} (\sigma_{ij} n_j - T_i) \tilde{u}_i^0 ds = 0$$

car vrai  $\forall \tilde{u}_i^0$ .

# THEOREME DE L'ENERGIE COMPLEMENTAIRE

## Energie de déformation

$$W(\hat{\sigma}_{ij}) = \frac{1}{2} \iiint \hat{\sigma}_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} d\tau = \iiint \hat{w}(\hat{\sigma}_{ij}) d\sigma$$

## Travail dans les déplacements donnés

$$T_u^d(\hat{\sigma}_{ij}) = \iint \hat{\sigma}_{ij} n_j u_i^d ds$$

## ⇒ Energie complémentaire du CSA $\hat{\sigma}_{ij}$

$$H(\hat{\sigma}_{ij}) = T_u^d(\hat{\sigma}_{ij}) - W(\hat{\sigma}_{ij})$$

## Théorème de l'énergie complémentaire

$$H(\sigma_{ij}) = \sup_{\substack{\hat{\sigma}_{ij} \\ \text{CSA}}} H(\hat{\sigma}_{ij})$$

→ Si  $\sigma_{ij}$  solution, alors  $\hat{\sigma}_{ij}$  maximise  $H$  parmi tous les CSA

→ Si  $\sigma_{ij}$  maximise  $H$  alors  $\sigma_{ij}$  solution

## THEOREME DE COMPARAISON

$$H(\hat{\sigma}_{ij}) \leq H(\sigma_{ij}) = K(u_i) \leq K(\tilde{u}_i)$$

↑                      ↑                      ↑  
 TEC                    Théorème            TEP  
 du travail

$$K(u_i) - H(\sigma_{ij}) = \underbrace{T_f^d(u_i)}_{=0} - \underbrace{T_u^d(\sigma_{ij})}_{=} + 2W$$

→ ENCADREMENT DE LA SOLUTION

→ METHODES D'APPROXIMATION

# Statique

# Cinématique

C.Limites :  $\rho f_i, T_i < \text{Eff. Exterieurs} > u_i$

Structure

$$\sigma_{y,j} = -\rho f_i$$

$$\sigma_{y,n_j} = T_i$$



$$\varepsilon_y = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}]$$

Comportement :  $\sigma_{ij} < \text{Eff. intérieurs} > \varepsilon_{ij}$

Matériau

# UNE APPROXIMATION

## Element ① : OBC

$$u_1^{(1)} = \alpha_{11}^{(1)} x_1 + \alpha_{12}^{(1)} x_2 + \beta_1^{(1)} = \frac{u_c x_1}{e}$$

$$u_2^{(1)} = \alpha_{21}^{(1)} x_1 + \alpha_{22}^{(1)} x_2 + \beta_2^{(1)} = -\frac{v_c x_1}{e}$$

$$\varepsilon^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{u_c}{e} & \frac{1}{2} \frac{v_c}{e} \\ \frac{1}{2} \frac{v_c}{e} & 0 \end{bmatrix}$$

$$W^{(1)} = \iiint_{(1)} w(\varepsilon_{ij}) ds$$

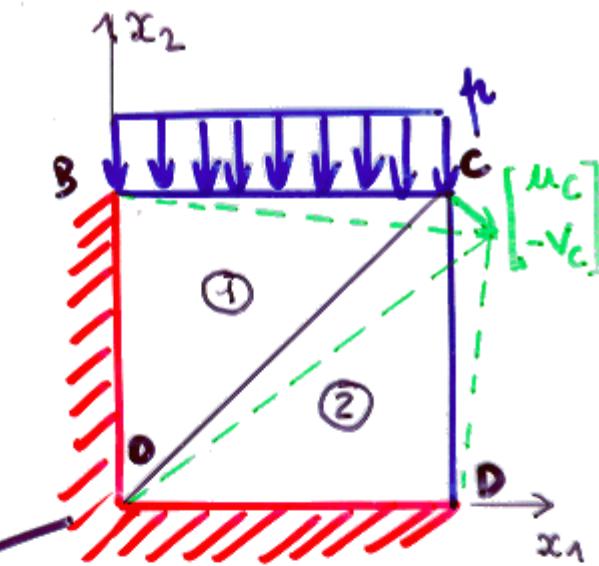
$$w = \frac{1}{2} [\lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}]$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \lambda \frac{u_c^2}{e^2} + 2\mu \left[ \frac{u_c^2}{e^2} + \frac{2v_c^2}{4e^2} \right] \right\}$$

$$W^{(1)} = \frac{1}{4} [(\lambda + 2\mu) u_c^2 + \mu v_c^2]$$

$$T_f^{(1)} = \int_0^l t \mu u_2 dx_1 = \frac{\mu l v_c}{2}$$

$$B \downarrow \frac{l}{2} \qquad C \downarrow \frac{l}{2}$$



## Element ② ODC

$$u_1^{(2)} = \alpha_{11}^{(2)} x_1 + \alpha_{12}^{(2)} x_2 + \beta_1^{(2)} = \frac{u_c x_2}{e}$$

$$u_2^{(2)} = \alpha_{21}^{(2)} x_1 + \alpha_{22}^{(2)} x_2 + \beta_2^{(2)} = -\frac{v_c x_2}{e}$$

$$\varepsilon^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{u_c}{e} \\ \frac{1}{2} \frac{u_c}{e} & \frac{v_c}{e} \end{bmatrix}$$

$$W^{(2)} = \frac{1}{4} [(\lambda + 2\mu) v_c^2 + \mu u_c^2]$$

$$T_f^{(2)} = 0$$

Le CCA dépend de 8 paramètres  $\tilde{u}_c, \tilde{v}_c$

$$K(\tilde{u}_i) = \frac{1}{4} (\lambda + 3\mu) (u_c^2 + v_c^2) - \frac{\mu l v_c}{2}$$

+ Minimisation

$$u_c = 0, \quad v_c = \frac{\mu l}{2+3\mu}$$

# UNE APPROXIMATION

## Element ① : OBC

$$u_1^{(1)} = \alpha_{11}^{(1)} x_1 + \alpha_{12}^{(1)} x_2 + \beta_1^{(1)} = \frac{u_c x_1}{e}$$

$$u_2^{(1)} = \alpha_{21}^{(1)} x_1 + \alpha_{22}^{(1)} x_2 + \beta_2^{(1)} = -\frac{v_c x_1}{e}$$

$$\varepsilon^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{u_c}{e} & \frac{1}{2} \frac{v_c}{e} \\ \frac{1}{2} \frac{v_c}{e} & 0 \end{bmatrix}$$

$$W^{(1)} = \iiint_{(1)} w(\varepsilon_{ij}) ds$$

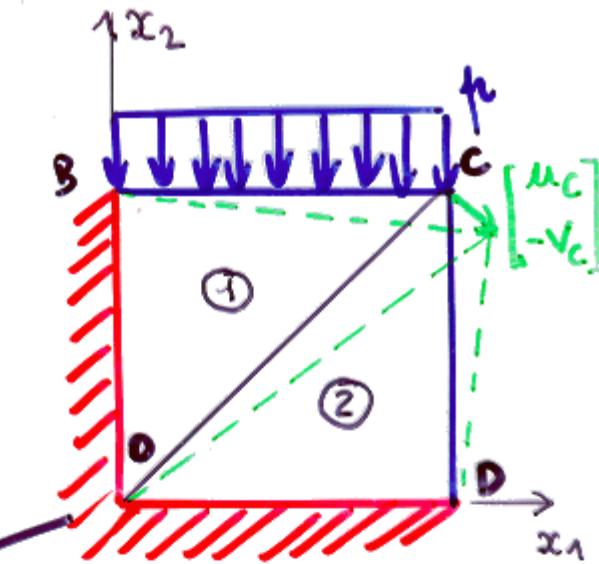
$$w = \frac{1}{2} [\lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}]$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \lambda \frac{u_c^2}{e^2} + 2\mu \left[ \frac{u_c^2}{e^2} + \frac{2v_c^2}{4e^2} \right] \right\}$$

$$W^{(1)} = \frac{1}{4} [(\lambda + 2\mu) u_c^2 + \mu v_c^2]$$

$$T_f^{(1)} = \int_0^l t \mu u_2 dx_1 = \frac{\mu l v_c}{2}$$

$$B \downarrow \frac{l}{2} \qquad C \downarrow \frac{l}{2}$$



## Element ② ODC

$$u_1^{(2)} = \alpha_{11}^{(2)} x_1 + \alpha_{12}^{(2)} x_2 + \beta_1^{(2)} = \frac{u_c x_2}{e}$$

$$u_2^{(2)} = \alpha_{21}^{(2)} x_1 + \alpha_{22}^{(2)} x_2 + \beta_2^{(2)} = -\frac{v_c x_2}{e}$$

$$\varepsilon^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{u_c}{e} \\ \frac{1}{2} \frac{u_c}{e} & \frac{v_c}{e} \end{bmatrix}$$

$$W^{(2)} = \frac{1}{4} [(\lambda + 2\mu) v_c^2 + \mu u_c^2]$$

$$T_f^{(2)} = 0$$

Le CCA dépend de 8 paramètres  $\tilde{u}_c, \tilde{v}_c$

$$K(\tilde{u}_i) = \frac{1}{4} (\lambda + 3\mu) (u_c^2 + v_c^2) - \frac{\mu l v_c}{2}$$

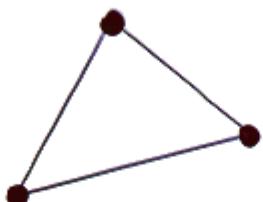
+ Minimisation

$$u_c = 0, \quad v_c = \frac{\mu l}{2+3\mu}$$

Plus généralement

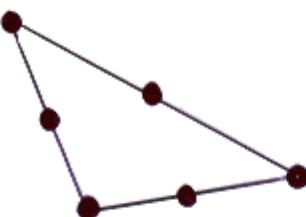
Discretisation EF = Maillage  
+ Approximation

P1



$$u_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \beta_1$$

P2



$$u_1 = \alpha_{111} x_1^2 + \alpha_{112} x_1 x_2 + \alpha_{122} x_2^2 + \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \gamma_1$$

Q1



$$u_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_2 + \delta_1$$

→ N degrés de liberté

etc...

$$\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} = \underline{x}$$

$$W = \frac{1}{2} [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{K} \underline{x}$$

$$\underline{T}_f^d = [F_1 \dots F_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{F}^T \underline{x}$$

$$K(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{K} \underline{x} - \underline{F}^T \underline{x}$$

$$\underline{x} = \underline{K}^{-1} \underline{F}$$

## **Mécanique des milieux continus**

### **Bloc 9 : Problèmes dynamiques**

1. [Problèmes dynamiques](#)
2. [Ondes planes](#)
3. [Ondes sphériques](#)
4. [Réflexion d'une onde plane](#)
5. [Modes propres](#)
6. [Description modale](#)
7. [Méthodes variationnelles](#)

# PROBLEMES DYNAMIQUES

HPP

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}$$

## Elasticité linéaire (homogène)

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \epsilon_{kl} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij}$$

## Elastodynamique

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \vec{\text{grad}} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{\mu}{\rho_0} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u}$$

## Fluide parfait

$$\sigma_{ij} = -\tau(\rho) \delta_{ij}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dp}}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= -\frac{dp}{dp} \rho_{,i} \\ &= c^2 \rho_0 u_{j,ij} \end{aligned}$$

$$\rho(1 + \epsilon_{ii}) = \rho_0$$

$$\rho = \rho_0(1 - \epsilon_{jj})$$

$$\rho_{,j} = -\rho_0 u_{i,i,j}$$

## Acoustique

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\text{grad}} \operatorname{div} \vec{u}$$

en particulier

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_{,i} \\ \rho \\ p \end{pmatrix}$$

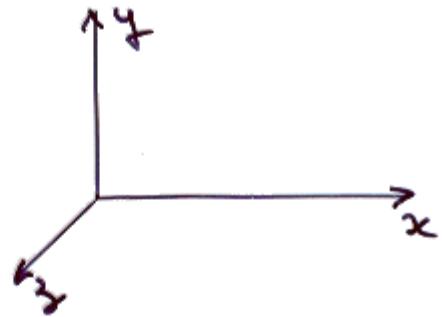
Théorème  $\vec{u} = \vec{\text{grad}} \phi + \vec{\text{rot}} \vec{B}$

lamellaire

isobaroïdal  
rotationnel

# ONDES PLANES

$$\vec{u} = \vec{u}(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t) = u_L \\ u_2(x, t) \\ u_3(x, t) \end{cases} = \vec{u}_T$$



## Elastodynamique

$$\frac{\partial^2 u_L}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 u_L}{\partial x^2}$$

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}$$

|| onde longitudinale

$$u_L = f_L(x - c_L t) + g_L(x + c_L t)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_T}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 \vec{u}_T}{\partial x^2}$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$$

|| onde transversale.

$$\vec{u}_T = \vec{f}_T(x - c_T t) + \vec{g}_T(x + c_T t)$$

Aacier     $c_L = 5300 \text{ m/s}$   
 $c_T = 3200 \text{ m/s}$

## Acoustique

$$\frac{\partial^2 u_L}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_L}{\partial x^2}$$

|| onde acoustique

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_T}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho_0}}$$

Eau     $c = 1470 \text{ m/s}$   
 Air     $c = 340 \text{ m/s}$

Ex: Onde harmonique longitudinale

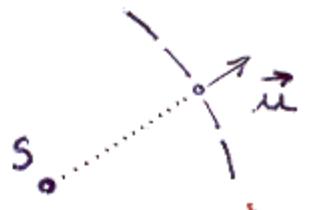
$$\vec{u} = A \sin \left[ \frac{2\pi}{d} (\vec{x} \cdot \vec{i} - c_L t) \right] \vec{i}$$

amplitude      ↑  
 longueur d'onde      ↑  
 dir. de propagation      ↑

↑  
 pulsation      ↓  
 dir. de "polarisation"

## ONDES SPHERIQUES

$$\vec{u} = u_r(r, t) \hat{e}_r = \text{grad } \phi$$



$\phi(r, t)$ : potentiel des vitesses

(mouvement irrotationnel)  $\rightarrow$  longitudinal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi)$$

$c_L$  dans les solides

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \phi) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) = 0$$

$$\phi = \frac{1}{r} \left[ f(r-ct) + g(r+ct) \right]$$

↑ divergente      ↑ convergente

Ex : onde harmonique divergente

$$\phi = \frac{A}{r} \cos \left[ \frac{2\pi}{d} (r-ct) \right]$$

Amplitude décroissante

$$u = \left[ \frac{A}{r} \left\{ \frac{2\pi}{d} \sin \left[ \frac{2\pi}{d} (r-ct) \right] - \frac{1}{r} \omega \left[ \frac{2\pi}{d} (r-ct) \right] \right\} \right]$$

$$p = \left| \frac{\rho_0 c}{r} \frac{A}{r} \frac{2\pi}{d} \sin \left[ \frac{2\pi}{d} (r-ct) \right] \right|$$

|                          |

↓  
Onde plane pour  $r \rightarrow \infty$

# REFLEXION D'UNE ONDE PLANE

## Onde incidente L

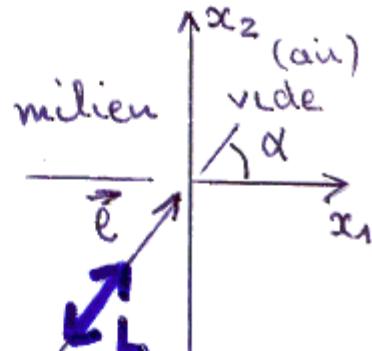
$$\vec{u}^{(1)} = A \sin \left[ \frac{2\pi}{d} (\vec{x} \cdot \vec{e} - c_L t) \right] \vec{e}$$

$$= A \sin \left[ \frac{2\pi}{d} (x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha - c_L t) \right] \vec{e}$$

Superposer une "onde réfléchie" pour vérifier les conditions aux limites en  $x_1=0$

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)} = 0 \\ \sigma_{12} = \sigma_{12}^{(1)} + \sigma_{12}^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$



$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

## Ondes réfléchies

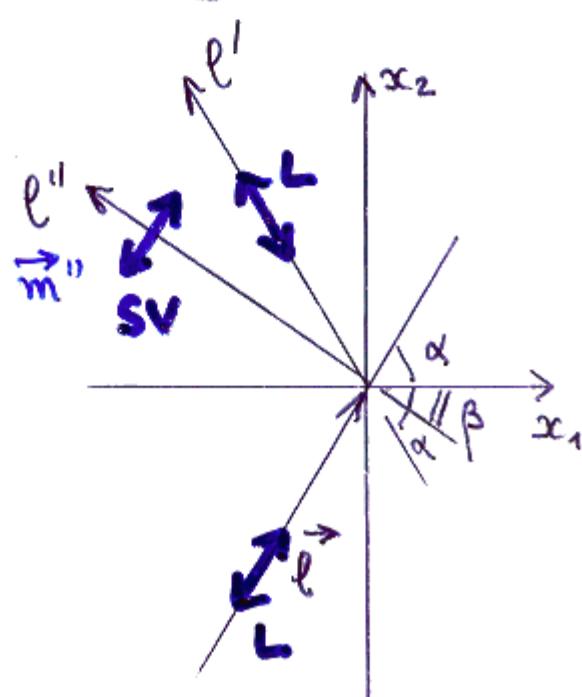
$$\vec{u}' = A' \sin \left[ \frac{2\pi}{d} (\vec{x} \cdot \vec{e}' - c_L t) \right] \vec{e}' \quad L$$

$$\vec{u}'' = A'' \sin \left[ \frac{2\pi}{d_T} (\vec{x} \cdot \vec{e}'' - c_T t) \right] \vec{m}'' \quad SV$$

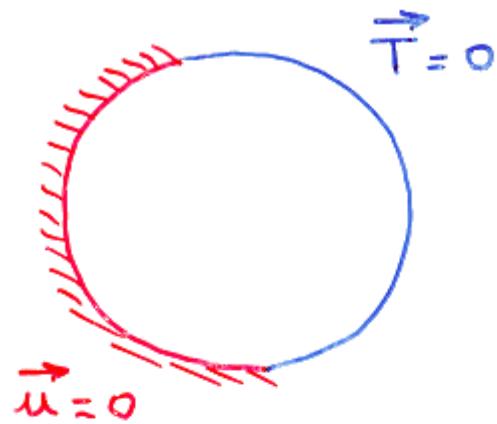
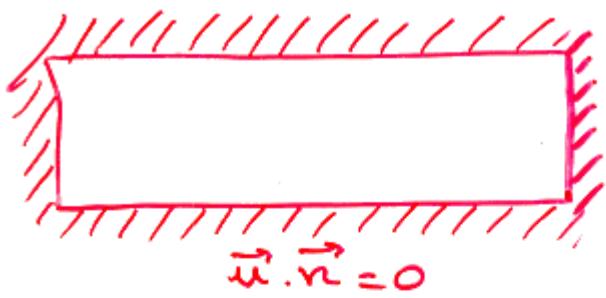
$$= A'' \sin \left[ \frac{2\pi}{d_T} (x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta - c_T t) \right] \vec{m}''$$

$$\frac{c_L}{d} = \frac{c_T}{d_T}$$

$$\frac{\sin \beta}{d_T} = \frac{\sin \alpha}{d}$$



## MODES PROPRES



$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c^2 u_{j,j}$$

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur } S_u$$

$$p = p_0 \quad \text{sur } S_p$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = A_{ijkl} u_{k,l}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } S_u$$

$$T = 0 \quad \text{sur } S_f$$

On cherche une solution

$$\vec{u}(x,t) = \vec{U}(x) e^{i\omega t}$$

$$(c^2 U_{j,j} - \omega^2 U_i) = 0$$

+ CL

$$(A_{ijkl} U_{k,l} - \rho_0 \omega^2 U_i) = 0$$

+ CL

## Problème spectral

Théorème: il existe une infinité discrète de solutions : les modes propres  $U_i^{(n)}$  associées aux pulsations propres  $\omega^n$

$$A_{ijkl} U_{k,l}^{(n)} - \rho_0 \omega^{(n)2} U_i^{(n)} = 0$$

+ CL

## DESCRIPTION MODALE

Lemme

$$\rho_0 (\omega^{(n)2} - \omega^{(m)2}) \iiint U_i^{(n)} U_j^{(m)} dv = \iiint A_{ijkl} U_{i,j}^{(n)} U_{k,l}^{(m)} dv$$

→ Orthogonalité des modes propres

$$\left. \begin{aligned} \iiint \rho_0 U_L^{(n)} U_i^{(m)} dv &= 0 \\ \iiint A_{ijkl} U_{i,j}^{(n)} U_{k,l}^{(m)} dv &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{si } \omega^{(n)} \neq \omega^{(m)} \\ \rightarrow \underline{\text{Base}} \\ \underline{\text{modale}} \end{array}$$

les matrices de masse et de rigidité  
sont diagonales

$$m^{(n)} \ddot{X}^{(n)} + k^{(n)} X^{(n)} = F^{(n)}(t)$$

↑                      ↑                      ↑  
 masse                  raideur                  force modale  
modale

$$\omega^{(n)2} = k^{(n)}/m^{(n)}$$

Ex: Vibrations forcées  $F = F_0 e^{i\omega t}$

$$m^{(n)} \ddot{X}^{(n)} + k^{(n)} X^{(n)} = F^{(n)}(t)$$

$$X^{(n)} = (A^{(n)} + iB^{(n)}) e^{i\omega^{(n)t}} + \frac{F^{(n)}}{m^{(n)}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^{(n)2} - \omega^2}$$

# METHODES VARIATIONNELLES

$$\delta \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt \right\} = 0 \quad \mathcal{L} = K - (W + U)$$

Lagrangien  
intégrale d'action

Les équations de la MMC + les Cond. Limites. ←

$$K = \frac{1}{2} \iint \rho u_i \dot{u}_i dv$$

$$W = \frac{1}{2} \iint A_{ijkl} u_{ij} u_{kl} dv$$

$$U = \iint_{sf} T_i^a u_i dx$$

## Discretisation

$$u_i(x,t) = \sum_{\alpha} X_{\alpha}(t) V_i^{\alpha}(x)$$

↑ coordonnées généralisées      ↑ discrétilisation (base tronquée)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{X}_{\alpha} M_{\alpha\beta} \dot{X}_{\beta} - \frac{1}{2} X_{\alpha} K_{\alpha\beta} X_{\beta} + F_{\alpha} X_{\alpha}$$

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{X}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}}$$

$$M_{\alpha\beta} = \iint \rho V_i^{\alpha} V_j^{\beta} dv \quad \text{mat. de masse}$$

$$K_{\alpha\beta} = \iint A_{ijkl} V_{i,j}^{\alpha} V_{k,l}^{\beta} dv \quad \text{mat de rigidité}$$

$$F_{\alpha}(t) = \iint_{sf} T_i^{\alpha}(t) V_i^{\alpha} ds \quad \text{force généralisée}$$

# Mini Formulaire de MMC

Mouvement  $\vec{x} = f(\vec{a}, t) \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t)$

Dérivées particulières  $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} V_i , \quad \frac{d}{dt} \iiint \phi dv = \iiint \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \oint \phi \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iiint \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\phi}{\rho} \right) dv$

**Conservation de la masse**  $\frac{d}{dt} \iiint \rho dv = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{et} \quad \|\rho v\| = 0$

**Quantité de Mouvement**  $\frac{d}{dt} \iiint \rho V_i dv = \iiint \rho f_i dv + \oint T_i dS$

$$\Leftrightarrow T_i = \sigma_{ij} n_j , \quad \rho \gamma_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad \text{et} \quad \|\rho \vec{V} v - \vec{T}(\vec{N})\| = 0$$

**Moment cinétique**  $\frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{x} \wedge \vec{V} dv = \iiint \rho \vec{x} \wedge \vec{f} dv + \oint \rho \vec{x} \wedge \vec{T} dS \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

→ Puissances virtuelles  $\overset{*}{P}_{acc} = \overset{*}{P}_{ext} + \overset{*}{P}_{int} \quad \overset{*}{P}_{int} = - \iiint \sigma_{ij} D_{ij}^* dv \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$

→ Théorème de l'énergie cinétique  $\frac{dK}{dt} = P_{ext} + P_{int}$

**Premier principe**  $\frac{d}{dt} \iiint \rho \left( u + \frac{V^2}{2} \right) dv = \iiint \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dv + \oint \vec{T} \cdot \vec{V} dS + \dot{Q}$

$$\text{pu} = \sigma_{ij} D_{ij} - q_{i,i} + r \quad \text{et} \quad \text{équation de saut}$$


---

**FLUIDE**:  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$

**Fluide parfait**:  $\tau_{ij} = 0$

- compressible barotrope:  $p = p(\rho)$
- incompressible:  $p$  quelconque,  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$

→ Condition de glissement:  $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  à la paroi

**Fluide visqueux incompressible**:  $\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}$

→ Condition d'adhérence:  $\vec{V} = \vec{V}_{\text{paroi}}$ ,  $\vec{T} = -p_{\text{atm}} \vec{n}$  en surface libre

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{f} \quad (\text{Navier - Stokes})$$

**SOLIDE élastique isotrope**:  $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$  ou  $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

→ Conditions aux limites:  $u_i = u_i^d$  ou  $T_i = T_i^d$  ou combinaison (Problème régulier)

$$H(\hat{\sigma}_{ij}) = T_u^d - W \leq H(\sigma_{ij}) = K(u_i) \leq K(\tilde{u}_i) = W - T_f^d$$

$$W = \iiint w dv \quad w = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$