Chapitre XI

THERMOELASTICITE LINEAIRE

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte de la variable température. Dans de nombreux problèmes, cependant, il est nécessaire de la prendre en compte (problèmes de contraintes thermiques, par exemple).

1. LOIS DE COMPORTEMENT

1.1 LA THEORIE THERMOELASTIQUE

Un matériau thermoélastique est un matériau dans lequel la seule source de dissipation est la conduction thermique. Nous considérons une théorie de petites perturbations autour d'un état de référence à contraintes et déformations nulles et à la température de référence θ_0 . Nous poserons

(1) $$\theta = \theta_0 + \bar{\theta}$$

avec $\bar{\theta}$ petit. D'autre part, l'entropie n'étant définie qu'à une constante près, nous la prendrons nulle dans cet état de référence. Finalement, ε_{ij}, σ_{ij} , $\bar{\theta}$ et η seront des variables de perturbation, et nous pourrons négliger les termes d'ordre supérieur par rapport à ces variables.

Dans ces conditions, l'équation de conservation de l'énergie (I.47) et l'inégalité de Clausius-Duhem (I.57) s'écrivent

(2) $$\rho_0 \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + r - q_{j,j}$$

(3) $$-\rho_0\left(\frac{de}{dt} - \theta \frac{d\eta}{dt}\right) + \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{1}{\theta_0} q_i \theta_{,i} \geqslant 0$$

En élasticité, e dépendait de ε_{ij} . En thermoélasticité, e dépendra de ε_{ij} et de η

(4) $$e = e(\varepsilon_{ij}, \eta)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem (3) donne alors

(5) $$-\rho_0\left(\frac{\partial e}{\partial \eta} - \theta\right) \frac{d\eta}{dt} + \left(\sigma_{ij} - \rho_0 \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{1}{\theta_0} q_i \theta_{,i} \geqslant 0$$

et, pour que la seule source de dissipation soit la conduction thermique, on doit avoir

(6) $$\theta = \frac{\partial e}{\partial \eta} \quad , \quad \sigma_{ij} = \rho_o \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

(7) $$q_i \, \theta_{,i} \leq 0$$

Comme dans le cas élastique, nous pouvons faire un développement en série de e

(8) $$\begin{cases} \rho_o \, e(\varepsilon_{ij},\eta) = \rho_o e_o + a_{ij}\,\varepsilon_{ij} + \rho_o a_o \eta \\ \qquad + \frac{1}{2} A_{ijkh}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kh} + h_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,\eta + \frac{1}{2} m\,\eta^2 \end{cases}$$

(9) $$\begin{cases} \rho_o \,\theta = \rho_o a_o + h_{ij}\,\varepsilon_{ij} + m\,\eta \\ \sigma_{ij} = a_{ij} + A_{ijkh}\,\varepsilon_{kh} + h_{ij}\,\eta \end{cases}$$

Or, dans la configuration de référence, on a $\varepsilon_{ij} = \eta = 0$, $\sigma_{ij} = 0$ et $\theta = \theta_o$
On doit donc avoir $a_o = \theta_o$, $a_{ij} = 0$ et on peut aussi prendre $e_o = 0$. On obtient alors

(10) $$\begin{aligned} \rho_o e &= \rho_o \theta_o \eta + \rho_o \bar{e}(\varepsilon_{ij},\eta) \\ \rho_o \bar{e} &= \frac{1}{2} A_{ijkh}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kh} + h_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,\eta + \frac{1}{2} m\,\eta^2 \end{aligned}$$

(11) $$\sigma_{ij} = \rho_o \frac{\partial \bar{e}}{\partial \varepsilon_{ij}} = A_{ijkh}\varepsilon_{kh} + h_{ij}\eta \quad , \quad \rho_o \bar{\theta} = \rho_o \frac{\partial \bar{e}}{\partial \eta} = h_{ij}\varepsilon_{ij} + m\,\eta$$

Compte-tenu de (6), l'équation (2) devient, après linéarisation

(12) $$\rho_o \,\theta_o \frac{d\eta}{dt} = r - q_{j,j}$$

Pour compléter la théorie, il faut écrire une loi de conduction thermique, donnant le flux de chaleur en fonction du gradient de température. En théorie linéaire, on prend la loi de Fourier

(13) $$q_i = - K_{ij} \; \theta_{,j}$$

avec un tenseur de conduction K_{ij} symétrique - cette symétrie est expérimentalement bien vérifiée, et théoriquement bien fondée par les relations d'Onsager; elle n'est toutefois pas indispensable, on peut imaginer un tenseur de conduction non symétrique - et défini positif - d'après le second principe (7) -.

Le formalisme (10),(11) définit les contraintes et la température en fonction des déformations et de l'entropie, ceci étant lié au choix de l'énergie interne comme potentiel thermodynamique. Une transformation de Legendre sur $e(\varepsilon_{ij},\eta)$ permettra d'écrire d'autres relations. Par exemple, on peut introduire une "enthalpie libre"

$$(14) \quad \begin{cases} \rho_0\, g(\sigma_{ij}, \theta) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho_0 \theta \eta - \rho_0 e \\ \eta = \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \rho_0 \dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \end{cases}$$

$$(15) \quad \rho_0\, g = \frac{1}{2} \Gamma_{ijkh} \sigma_{ij} \sigma_{kh} + \ell_{ij} \sigma_{ij} \bar{\theta} + \frac{1}{2} n\, \bar{\theta}^{2}$$

$$(16) \quad \begin{cases} \varepsilon_{ij} = \Gamma_{ijkh} \sigma_{kh} + \ell_{ij} \bar{\theta} \\ \rho_0 \eta = \ell_{ij} \sigma_{ij} + n\, \bar{\theta} \end{cases}$$

où les coefficients de la forme quadratique $\rho_0 g$ peuvent s'exprimer à partir de ceux de la forme $\rho_0 \bar{e}$ par les relations

$$(17) \quad \begin{cases} n = \left(m - h_{ij} \Lambda_{ijkl} h_{kl} \right)^{-1} \\ \ell_{ij} = -n \Lambda_{ijkl} h_{kl} \\ \Gamma_{ijkl} = \Lambda_{ijkl} + n \Lambda_{ijpq} \Lambda_{klmn} h_{pq} h_{mn} \end{cases}$$

De même, on pourra exprimer ε_{ij} et $\bar{\theta}$ en fonction de l'enthalpie $h(\sigma_{ij}, \eta)$, et σ_{ij} et η en fonction de l'énergie libre $\psi(\varepsilon_{ij}, \bar{\theta})$.

1.2 THERMOELASTICITE CLASSIQUE

Dans le cas isotrope, les différents tenseurs prennent des formes simples. Un tenseur du 4ème ordre prend la forme (V.22) et dépend donc de 2 coefficients. Un tenseur du second ordre est sphérique et fait donc intervenir un coefficient. La théorie fera donc intervenir 5 coefficients scalaires: 4 coefficients pour le potentiel thermodynamique (10) ou (15), et 1 pour le tenseur de conduction K_{ij}. En effet, (13) devient

$$(18) \quad q_i = - k\, \theta_{,i} \quad , \quad k \geq 0$$

où k est la conductivité thermique.

Nous convenons désormais d'omettre les barres sur e et θ. En particulier, θ désignera désormais non pas la température absolue, mais sa variation par rapport à la température de référence.

Si α est la coefficient de dilatation linéaire du matériau, alors en l'absence de contraintes, une variation de température θ entraîne une dilatation thermique

$$(19) \quad \varepsilon_{ij} = \alpha\, \theta\, \delta_{ij}$$

D'autre part, à la température de référence θ_0, le matériau se comporte comme un matériau élastique isotrope, avec un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν, mesurés en conditions isothermes. Nous pouvons donc écrire

(20) $$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha\theta\delta_{ij}$$

relation que l'on peut inverser en

(21) $$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 3K\alpha\theta\delta_{ij}$$

où $3K = 3\lambda + 2\mu$ est le module de rigidité à la compression isotherme, et λ et μ sont les coefficients de Lamé isothermes donnés par (V.33) à partir de E et ν.

Quant au coefficient de θ^2 dans le potentiel thermodynamique, on peut le relier à la chaleur spécifique à contraintes ou déformations constantes

(22) $$c = c_\varepsilon = \theta_0\left(\frac{\partial^2 e}{\partial\theta^2}\right)_{\varepsilon_{ij}=\text{Cte}}, \qquad c_\sigma = \theta_0\left(\frac{\partial^2 e}{\partial\theta^2}\right)_{\sigma_{ij}=\text{Cte}}$$

ce qui nous permet d'écrire, à partir de (16),

(23) $$\rho_0\eta = \alpha\sigma_{ii} + \frac{\rho_0 c_\sigma}{\theta_0}\theta$$

ou bien, en fonction de déformations,

(24) $$\rho_0\eta = 3K\alpha\varepsilon_{ii} + \frac{\rho_0 c}{\theta_0}\theta$$

et l'on obtient la relation

(25) $$c_\sigma = c + \frac{9K\alpha^2\theta_0}{\rho_0}$$

relation entre les chaleurs spécifiques à déformations constantes et contraintes constantes.

Ainsi, la théorie classique de la thermoélasticité fait intervenir 5 coefficients: deux coefficients élastiques isothermes, le coefficient de dilatation α, la chaleur spécifique à déformations constantes c et la conductibilité thermique k

2. PROBLEMES DE THERMOELASTICITE

2.1 PROBLEMES AUX LIMITES

Les équations de la thermoélasticité sont les équations du mouvement et l'équation de l'énergie (12)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{26}$$

$$\rho_0 \theta_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = r - q_{j,j} \tag{27}$$

complétées par les lois de comportement, (18),(21) et (24) par exemple, des CI

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(x,0) = u_i^0(x) \qquad , \qquad \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = V_i^0(x) \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) \end{array} \right. \tag{28}$$

et des CL, qui sont les mêmes qu'en élasticité pour les variables mécaniques et qui, pour les variables thermiques, donnent, soit la température, soit le flux de chaleur. Nous prendrons par exemple des CL mixtes

$$\begin{array}{ll} u_i\big|_{S_u} = u_i^d & \sigma_{ij} n_j\big|_{S_f} = T_i^d \\ \theta\big|_{S_\theta} = \theta^d & q_i n_i\big|_{S_q} = q^d \end{array} \tag{29}$$

avec $S = S_u + S_f = S_\theta + S_q$. problème est bien posé, et on peut démontrer un théorème d'unicité analogue à celui du § VI.1.2 .

Compte-tenu des lois de comportement (21),(24) et (18), les équations (26) et (27) donnent

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\, u_{k,ik} + \mu\, u_{i,kk} - 3K\alpha\, \theta_{,i} + f_i \tag{30}$$

$$\rho_0 c \frac{\partial \theta}{\partial t} = r + k\, \theta_{,ii} - 3K\alpha\, \theta_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} \tag{31}$$

Dans de nombreux cas, on peut raisonnablement négliger le dernier terme de (31). On arrive ainsi à la "thermoélasticité découplée". En effet, le déplacement disparaît de l'équation (31), on peut donc déjà résoudre le problème thermique

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 c \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = r + k\, \Delta\theta \\ \theta\big|_{S_\theta} = \theta^d \qquad\qquad q_i n_i\big|_{S_q} = q^d \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) \end{array} \right. \tag{32}$$

problème classique pour l'équation de la chaleur et qui permet de calculer la répartition de température indépendamment des déformations. Une fois connu le champ de température, on peut revenir au problème mécanique

$$(33)\quad \begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\, \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{f} - 3K\alpha\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \theta \\ u_i\big|_{S_u} = u_i^d \quad , \quad \sigma_{ij} n_j\big|_{S_f} = T_i^d \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad , \quad \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = V_i^0(x) \end{cases}$$

qui est un problème d'élasticité classique, le couplage thermoélastique se manifestant seulement par une modification des données f_i et T_i^d.

Nous avons formulé ici le problème dynamique, mais l'on peut aussi envisager le problème statique: les dérivées par rapport au temps et les conditions initiales disparaissent. On peut alors démontrer des principes variationnels analogues à ceux du cas élastique. On peut également envisager un problème mécanique quasi-statique avec un problème thermique dynamique.

2.2 UN EXEMPLE

A titre d'exemple, nous allons calculer les contraintes thermiques engendrées par l'échauffement d'une cavité sphérique de rayon a dans un massif infini. Nous considérons donc le problème défini par

$$(34)\quad f_i = 0 \quad , \quad r = 0$$

$$(35)\quad r \to \infty : \quad \theta \to 0 \quad , \quad \sigma_{ij} \to 0$$

$$(36)\quad r = a : \quad \theta = \theta_1 \quad , \quad \sigma_{ij} n_j = 0$$

Il s'agit d'un problème statique et l'équation thermique (31) donne

$$(37)\quad \Delta\theta = 0$$

D'après la symétrie du problème, θ dépend uniquement de r, $\theta = \theta(r)$. On a

$$(38)\quad \Delta\theta = \theta''(r) + \frac{2}{r}\theta'(r)$$

et l'équation (37) s'intègre en

$$(39)\quad \theta = \frac{A}{r} + B$$

où A et B sont deux constantes d'intégration que nous déterminons à partir des CL pour $r = a$ et $r \to \infty$. On obtient

$$(40)\quad \theta = \theta_1 \frac{a}{r}$$

et nous avons résolu le problème thermique qui, en statique, est toujours découplé du problème mécanique.

Pour résoudre le problème mécanique, nous partons de l'équation du mouvement (30) qui, en statique, donne , en supposant $\vec{f} = 0$,

$$(\lambda+\mu)\ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\vec{u} + \mu\,\Delta\vec{u} - 3K\alpha\ \mathrm{grad}\,\theta = 0$$

ou bien, voir (V.25),

(41) $$(\lambda+2\mu)\ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\vec{u} - \mu\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} - 3K\alpha\ \mathrm{grad}\,\theta = 0$$

D'après la symétrie du problème, le déplacement est radial

(42) $$u_i = g(r)\,x_i$$

et, comme on l'a vu au § V.2.2, $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$. L'équation s'intègre alors pour donner

$$\mathrm{grad}\left[(\lambda+2\mu)\ \mathrm{div}\,\vec{u} - 3K\alpha\,\theta\right] = 0$$

(43) $$\mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{3K\alpha}{\lambda+2\mu}\,\theta + 3A$$

où A est une constante d'intégration. Compte-tenu de (V.47) et de (40), on obtient alors pour $g(r)$ l'équation différentielle suivante

(44) $$3\,g(r) + \frac{g'(r)}{r} = 3A + \frac{3K\alpha\,\theta_1\,a}{\lambda+2\mu}\,\frac{1}{r}$$

qui s'intègre pour donner

(45) $$g(r) = A + \frac{B}{r^3} + \frac{3K\alpha\,\theta_1\,a}{2(\lambda+2\mu)}\,\frac{1}{r}$$

Il reste à déterminer les deux constantes d'intégration A et B en écrivant les conditions aux limites sur les contraintes. Pour cela, nous posons

(46) $$C_0 = \frac{3K\alpha\,\theta_1\,a}{2(\lambda+2\mu)}$$

et nous calculons

(47) $$\varepsilon_{ij} = \left(A + \frac{B}{r^3} + \frac{C_0}{r}\right)\delta_{ij} - \left(\frac{3B}{r^3} + \frac{C_0}{r}\right)\frac{x_i\,x_j}{r^2}$$

et les déformations principales sont

(48) $$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = A + \frac{B}{r^3} + \frac{C_0}{r}\ ,\qquad \varepsilon_3 = A - \frac{2B}{r^3}$$

la valeur propre ε_3 étant associée à la direction radiale. On peut ensuite calculer les contraintes par (21), et la condition à l'infini donne directement $A = 0$. On calcule ensuite σ_3.

(49)
$$\sigma_3 = \frac{2C_0\lambda}{r} - \frac{4\mu B}{r^3} - 2(\lambda+2\mu)\frac{C_0}{r} = -\frac{4\mu}{r}\left(\frac{B}{r^2} + C_0\right)$$

et en écrivant que σ_3 est nul pour $r = a$, on obtient la valeur de B

(50)
$$B = -C_0 a^2$$

Soit finalement

(51)
$$\left\{\begin{aligned} g(r) &= \frac{3K\alpha\,\theta_1}{2(\lambda+2\mu)}\,\frac{a}{r}\,\frac{r^2-a^2}{r^2} \\ \sigma_3 &= -\frac{6\mu K\alpha\theta_1}{(\lambda+2\mu)}\,\frac{a}{r}\,\frac{r^2-a^2}{r^2} \\ \sigma_1 = \sigma_2 &= -\frac{3\mu K\alpha\theta_1}{(\lambda+2\mu)}\,\frac{a}{r}\,\frac{r^2-a^2}{r^2} \end{aligned}\right.$$