

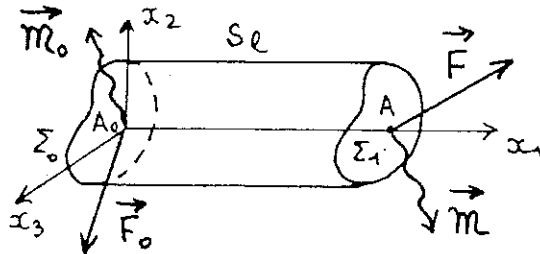
Chapitre VII

LE PROBLEME DE SAINT VENANT

1. TRACTION ET FLEXION PURE

1.1 LE PRINCIPE DE SAINT VENANT

Le problème de Saint Venant est le problème de base de la Résistance des Matériaux. Une poutre cylindrique est sollicitée à ses deux extrémités, les efforts exercés étant caractérisés par leur torseur résultant.



On considère une poutre cylindrique de section Σ et de longueur l

$$\Omega = [0, l] \times \Sigma$$

Les efforts de volume sont supposés nuls, $f_i = 0$, la surface latérale $S_l = [0, l] \times \partial \Sigma$ est libre de contrainte

$$(1) \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad (x_2, x_3) \in \partial \Sigma$$

et les efforts exercés sur les extrémités Σ_0 ($x_1=0$) et Σ_1 ($x_1=l$) sont caractérisés par leurs torseurs résultants $[\mathcal{T}_0]$ et $[\mathcal{T}_1]$. Nous représenterons $[\mathcal{T}_1]$ par sa résultante \vec{R} et par son moment résultant \vec{m} au point A ($l, 0, 0$), centre de Σ_1 , et de même $[\mathcal{T}_0]$ par sa résultante \vec{R}_0 et son moment \vec{m}_0 au point A_0 ($0, 0, 0$), centre de Σ_0 . La poutre étant en équilibre, les efforts exercés sur Σ_0 et Σ_1 doivent s'équilibrer, ce qui donne les relations vectorielles

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{R}_0 + \vec{R} = 0 \\ \vec{m}_0 + \vec{m} + \vec{A_0 A} \wedge \vec{R} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on peut calculer \vec{R}_0 et \vec{m}_0 en fonction de \vec{R} et \vec{m} , et les efforts exercés sur la poutre seront caractérisés par les deux vecteurs \vec{R} et \vec{m} .

Pour relier ces efforts aux contraintes, il faut considérer les efforts exercés sur Ω à travers Σ_1 :

$$(3) \quad \vec{n} = (1, 0, 0) \quad \vec{T} = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$$

et intégrer sur toute la section. Il vient

$$(4) \quad \vec{R} = \iint_{\Sigma_1} \vec{T} dS, \quad \vec{M} = \iint_{\Sigma_1} \vec{AM} \wedge \vec{T} dS$$

soit, en composantes

$$(5) \quad R_1 = \iint_{\Sigma_1} \sigma_{11} dx_2 dx_3$$

$$(6) \quad \begin{cases} R_2 = \iint_{\Sigma_1} \sigma_{12} dx_2 dx_3 \\ R_3 = \iint_{\Sigma_1} \sigma_{13} dx_2 dx_3 \end{cases}$$

$$(7) \quad M_1 = \iint_{\Sigma_1} (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dx_2 dx_3$$

$$(8) \quad \begin{cases} M_2 = \iint_{\Sigma_1} x_3 \sigma_{11} dx_2 dx_3 \\ M_3 = -\iint_{\Sigma_1} x_2 \sigma_{11} dx_2 dx_3 \end{cases}$$

On aurait des formules analogues sur Σ_0 .

Il est clair que le problème de Saint Venant ainsi posé n'est pas régulier, par manque de données. En effet, les conditions (5), (6), (7), (8), sont insuffisantes pour déterminer la répartition des efforts \vec{T} sur Σ_1 . Pour obtenir un problème régulier, il faudrait préciser la manière dont les torseurs $[\mathcal{T}_0]$ et $[\mathcal{T}_1]$ sont appliqués. Plus précisément, on peut imaginer plusieurs - en fait une infinité - répartitions d'efforts surfaciques vérifiant (5), (6), (7), (8), sur Σ_1 , et de même sur Σ_0 . A chacune de ces répartitions sera associé un problème régulier (de type II), donc avec solution unique. Ainsi le problème de Saint Venant, tel que nous l'avons formulé, admet une infinité de solutions.

Principe de Saint Venant. L'état de contrainte et de déformation loin des extrémités dépend uniquement du torseur des efforts appliqués, et non de la manière précise dont ces efforts sont appliqués.

En d'autres termes, deux répartitions d'efforts surfaciques conduisant au même torseur, conduiront à deux solutions très voisines, sauf au voisinage immédiat des extrémités. Ainsi le problème de Saint Venant admet une infinité de solutions, mais ces solutions sont très voisines les unes des autres, et il n'y a pas lieu de les distinguer - à moins de vouloir des informations précises sur ce qui se passe au voisinage des extrémités -.

Initialement, ce principe était d'origine intuitive; c'est lui qui

se trouve à la base du célèbre mémoire de Saint Venant qui, déjà en 1856, contenait l'essentiel de ce chapitre. Depuis, il a reçu de nombreuses vérifications expérimentales directes ou indirectes, car c'est le postulat de base de la Résistance des Matériaux. Récemment, on a pu le démontrer dans certains cas particuliers par une étude mathématique des équations de l'élasticité.

Ce principe joue un rôle tout à fait essentiel pour deux raisons. Tout d'abord, dans la pratique, on verra que l'on connaît assez rarement la répartition des efforts, alors que l'on a facilement leur torseur résultant. Ensuite, c'est grâce à lui que nous pourrions résoudre le problème de Saint Venant, en jouant sur la latitude qui nous est laissée sur la répartition précise des efforts. Notre démarche va être la suivante. Nous allons tout d'abord décomposer le problème en 6 problèmes élémentaires correspondant à chacune des composantes de \vec{R} et \vec{M} . Ensuite, pour chacun de ces problèmes élémentaires, nous trouverons une solution, et par superposition, nous aurons une solution du problème complet.

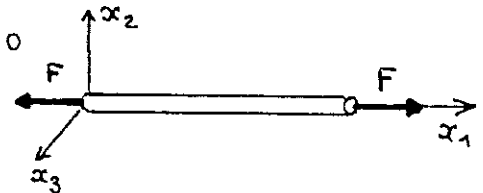
Nous décomposons donc le problème de Saint Venant en 6 problèmes.

Problème 1 : Traction

$$(9) \quad R_1 = F, \quad R_2 = R_3 = 0, \quad \vec{M} = 0$$

soit, d'après (2)

$$\vec{R} = -\vec{R}_0 = F\vec{e}_1, \quad \vec{M} = \vec{M}_0 = 0$$



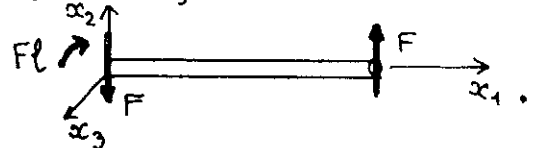
C'est la situation de l'essai de traction.

Problèmes 2 et 3 : Flexion composée

$$(10) \quad R_1 = 0 = R_3, \quad R_2 = F, \quad \vec{M} = 0$$

pour le problème 2 (le problème 3 s'obtient en échangeant les indices 2 et 3), d'où

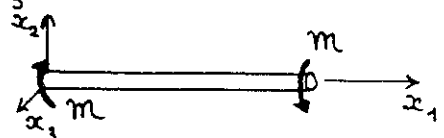
$$\vec{R} = -\vec{R}_0 = F\vec{e}_2, \quad \vec{M} = \vec{0}, \quad \vec{M}_0 = -Fl\vec{e}_3$$



Problème 4 : Torsion

$$(11) \quad \vec{R} = 0, \quad M_1 = M, \quad M_2 = M_3 = 0$$

$$\vec{R} = \vec{R}_0 = 0, \quad \vec{M} = -\vec{M}_0 = M\vec{e}_1$$

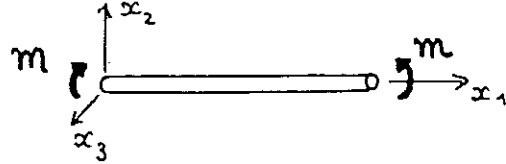


Problèmes 5 et 6 : Flexion pure

$$(12) \quad \vec{R} = 0, \quad m_1 = m_2 = 0, \quad m_3 = m$$

$$\vec{R} = \vec{R}_0 = 0, \quad \vec{M} = -\vec{M}_0 = m \vec{e}_3$$

pour le problème 6 (le problème 5 s'obtient en échangeant les indices 2 et 3).



Pour chacun de ces problèmes, les conditions portent sur les contraintes. Nous adopterons donc l'approche du § VI.1.4 en cherchant un champ de contraintes vérifiant

- les équations d'équilibre avec $f_i = 0$
- les équations de Beltrami
- les CL (1) sur la surface latérale
- les conditions (5), (6), (7), (8), pour le problème étudié.

1.2 REPARTITION DES CONTRAINTES NORMALES

On constate tout d'abord sur (5), (6), (7), (8), que R_1 , m_2 et m_3 ne font intervenir que la contrainte normale (pour une facette de la section droite) σ_{11} . Nous cherchons donc le champ des contraintes sous la forme

$$(13) \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les CL (1) sur la surface latérale sont alors automatiquement vérifiées, puisque $\vec{n} = (0, n_2, n_3)$. Les équations d'équilibre se réduisent à

$$(14) \quad \partial \sigma_{11} / \partial x_1 = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}(x_2, x_3)$$

Les équations de Beltrami (VI.30) se réduisent alors à

$$(15) \quad \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

qui donne σ_{11} fonction linéaire de x_2 , x_3 .

$$(16) \quad \sigma_{11} = a + b x_2 + c x_3$$

Il ne reste plus à écrire que les conditions sur les extrémités, en reportant le tenseur des contraintes défini par (13) et (16) dans (5), (6), (7) et (8), on obtient

$$(17) \quad \begin{cases} R_1 = a \iint_{\Sigma} dS + b \iint_{\Sigma} x_2 dS + c \iint_{\Sigma} x_3 dS \\ -M_3 = a \iint_{\Sigma} x_2 dS + b \iint_{\Sigma} x_2^2 dS + c \iint_{\Sigma} x_2 x_3 dS \\ M_2 = a \iint_{\Sigma} x_3 dS + b \iint_{\Sigma} x_2 x_3 dS + c \iint_{\Sigma} x_3^2 dS \\ R_2 = R_3 = 0, \quad M_1 = 0 \end{cases}$$

Les intégrales qui interviennent dans (17) dépendent uniquement de la forme de la section. Ainsi, le système (17) donnera a , b , c , en fonction de R_1 , M_2 et M_3 . Nous pourrions donc résoudre par un champ de contraintes de la forme (13), (16), les problèmes 1, 5 et 6 - traction et flexion pure -.

Pour déterminer complètement les contraintes, il reste à calculer a , b et c , c'est-à-dire résoudre le système (17). Un choix judicieux du système d'axes x_2, x_3 dans le plan de la section droite Σ va faciliter cette résolution. Tout d'abord, on choisit l'origine au centre de gravité de Σ , ce qui assure

$$(18) \quad \iint_{\Sigma} x_2 dS = \iint_{\Sigma} x_3 dS = 0$$

Ensuite, on remarque que (17) fait intervenir les composantes du tenseur d'inertie de la section Σ

$$(19) \quad J_{ij} = \iint_{\Sigma} x_i x_j dS \quad i, j = 2, 3$$

C'est un tenseur plan symétrique, donc diagonalisable. On peut trouver dans le plan x_2, x_3 deux directions principales d'inertie perpendiculaires telles que le moment produit J_{23} soit nul

$$(20) \quad J_{23} = \iint_{\Sigma} x_2 x_3 dS = 0$$

Nous choisirons ces directions principales comme axes x_2, x_3 . Pratiquement, si la section a un axe de symétrie, alors cet axe est principal d'inertie, car la symétrie entraîne (20). Sinon la diagonalisation est facile, et on peut en particulier utiliser la méthode géométrique exposée au § II.3.2 pour le tenseur des contraintes.

Avec ce choix d'axes, (17) devient simplement

$$(21) \quad \begin{cases} R_1 = a S, & -M_3 = b J_2, & M_2 = c J_3 \\ J_2 = \iint_{\Sigma} x_2^2 dS, & J_3 = \iint_{\Sigma} x_3^2 dS \end{cases}$$

où S est la surface de Σ , et J_2 , J_3 , les moments d'inertie principaux. On obtient donc pour σ_{11}

$$(22) \quad \sigma_{11} = \frac{R_1}{S} - \frac{m_3}{J_2} x_2 + \frac{m_2}{J_3} x_3$$

et on a trouvé un champ de contraintes convenables pour les problèmes 1, 5 et 6.

En particulier, pour la traction - Problème 1 - on retrouve la solution présentée au §IV.1.4

$$(23) \quad \sigma = \begin{bmatrix} F/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} u_1 = F/ES \ x_1 \\ u_2 = -\nu F/ES \ x_2 \\ u_3 = -\nu F/ES \ x_3 \end{cases}$$

C'est la solution du problème régulier associé aux CL

$$(24) \quad x_1 = 0 \text{ et } x_1 = l : \quad \sigma_{11} = F/S, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$$

En général, les CL réelles - par exemple dans un essai de traction - sont différentes, mais le principe de Saint Venant nous assure que cela n'a guère d'importance, à condition de se placer loin des têtes d'amarrage, et c'est bien ce que l'on fait dans un essai de traction.

1.3 FLEXION PURE

Considérons maintenant le problème 6 - le problème 5 se traiterait de manière identique -. Le tenseur des contraintes a la forme suivante

$$(25) \quad \sigma = \begin{bmatrix} -\frac{m}{J} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où l'on a supprimé l'indice 2 sur J

$$(26) \quad J = J_2 = \iint_{\Sigma} x_2^2 dS$$

Il reste à calculer les déplacements. Comme au § VI.2.1, nous procéderons directement en écrivant le tenseur des déformations

$$(27) \quad \epsilon = \begin{bmatrix} -\frac{m}{EJ} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu m}{EJ} x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu m}{EJ} x_2 \end{bmatrix}$$

$$(28) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{m_0}{EJ} x_2 & \Rightarrow u_1 = -\frac{m_0}{EJ} x_1 x_2 + \varphi_1(x_2, x_3) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\nu m_0}{EJ} x_2 & \Rightarrow u_2 = \frac{\nu m_0}{EJ} x_2^2 + \varphi_2(x_1, x_3) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\nu m_0}{EJ} x_2 & \Rightarrow u_3 = \frac{\nu m_0}{EJ} x_2 x_3 + \varphi_3(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$(29) \quad \begin{cases} 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{m_0}{EJ} x_1 + \varphi_{1,2} + \varphi_{2,1} = 0 \\ 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\nu m_0}{EJ} x_3 + \varphi_{2,3} + \varphi_{3,2} = 0 \\ 2\varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \varphi_{1,3} + \varphi_{3,1} = 0 \end{cases}$$

et on obtient la solution particulière

$$(30) \quad \varphi_1 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{m_0}{2EJ} (x_1^2 - \nu x_3^2)$$

Le déplacement est donc donné par

$$(31) \quad \begin{cases} u_1 = -\frac{m_0}{EJ} x_1 x_2 - \omega_3^0 x_2 \\ u_2 = \frac{m_0}{2EJ} [x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_3^2)] + \omega_3^0 x_1 + u_2^0 \\ u_3 = \frac{\nu m_0}{EJ} x_2 x_3 \end{cases}$$

où, en vue des applications futures, nous n'avons conservé qu'une partie du déplacement de solide.

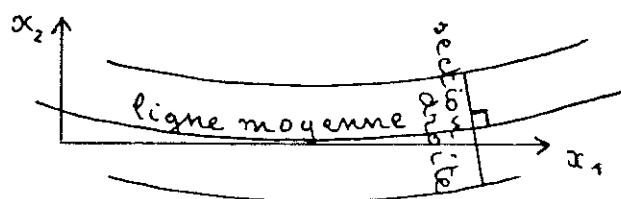
La déformation de la ligne moyenne est donnée par

$$(32) \quad u_1 = u_3 = 0, \quad u_2 = \frac{m_0}{2EJ} x_1^2 + \omega_3^0 x_1 = v(x_1)$$

tandis que la déformée d'une section droite $x_1 = x_1^0$ est caractérisée par

$$(33) \quad u_1 = -\left(\frac{m_0}{EJ} x_1^0 + \omega_3^0\right) x_2 = -\frac{dv}{dx_1} \Big|_{x_1^0} x_2$$

Les relations (32) et (33) montrent qu'après la déformation la ligne moyenne devient une parabole et que les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne



On construit souvent la théorie élémentaire de la flexion à partir de

[Hypothèse de Navier-Bernoulli. Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne.]

Cette hypothèse se trouve donc vérifiée ici. On constate également que le moment \mathcal{M} appliqué produit une courbure de la ligne moyenne

$$(34) \quad \kappa = \frac{d^2 v}{dx_1^2} = \frac{\mathcal{M}}{EJ}$$

Ainsi, on pourrait envisager de mesurer le module d'Young E d'un matériau élastique par un essai de flexion: on impose un moment de flexion \mathcal{M} et on observe la courbure κ , ce qui détermine la "rigidité" de la poutre EJ , produit d'une rigidité matérielle E , liée au matériau, et d'une rigidité géométrique J , donnée par (26) et liée à la géométrie de la section droite Σ .

En chaque point, on a un état de contraintes de traction simple, et le critère de limite d'élasticité donnera

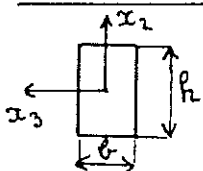
$$(35) \quad |\sigma_{11}| = \frac{\mathcal{M}}{J} |x_2| < \sigma_e$$

soit, en introduisant η , valeur maximale de $|x_2|$

$$(36) \quad \frac{\mathcal{M}}{J/\eta} < \sigma_e, \quad \eta = |x_2|_{\max}$$

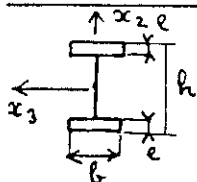
Ainsi, d'un point de vue géométrique, la rigidité d'une poutre est caractérisée par le moment d'inertie J , tandis que sa résistance est caractérisée par le rapport J/η .

Section rectangulaire



$$J = \frac{b h^3}{12}, \quad \frac{J}{\eta} = \frac{b h^2}{6}, \quad \frac{J}{S} = \frac{h^2}{12}, \quad \frac{J}{\eta S} = \frac{h}{6}$$

Section en I



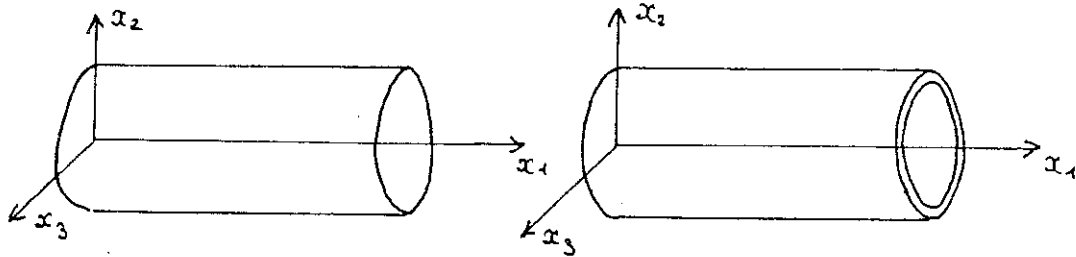
$$J \approx \frac{b h^2 e}{2}, \quad \frac{J}{\eta} \approx b h e, \quad \frac{J}{S} = \frac{h^2}{4}, \quad \frac{J}{\eta S} = \frac{h}{2}$$

Ceci montre la supériorité, à poids égal, de la section en I sur la section rectangulaire et, plus généralement, des sections en profil mince sur les sections massives.

2. TORSION

2.1 SECTION CIRCULAIRE OU ANNULAIRE

Avant d'aborder le cas général, nous allons envisager le cas simple d'une section circulaire ou annulaire. On observe alors qu'en torsion, chaque section droite tourne, par rapport à la section $x_1=0$, d'un angle proportionnel à la distance



Nous postulons donc un champ de déplacements

$$(37) \quad u_1 = 0, \quad u_2 = -\alpha x_1 x_3, \quad u_3 = \alpha x_1 x_2$$

On obtient alors pour le gradient du déplacement et pour le tenseur des déformations

$$(38) \quad u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha x_3 & 0 & -\alpha x_1 \\ \alpha x_2 & \alpha x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2} x_3 & \frac{\alpha}{2} x_2 \\ -\frac{\alpha}{2} x_3 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{2} x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La loi de comportement donne alors le tenseur des contraintes

$$(39) \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -G\alpha x_3 & G\alpha x_2 \\ -G\alpha x_3 & 0 & 0 \\ G\alpha x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce champ de contraintes vérifie directement

- les équations d'équilibre,
- les conditions aux limites sur la surface latérale $\vec{n} = \pm(x_1/r, x_2/r, 0)$

Il n'est pas nécessaire de vérifier les équations de Beltrami, puisque l'on est parti d'un champ de déplacements. Il ne reste donc plus qu'à écrire le torseur des efforts appliqués sur Σ_1 . Puisque σ_{11} est nul, R_1 , M_2 et M_3 sont nuls. Par symétrie, R_2 et R_3 sont nuls, et il reste simplement

$$(40) \quad M_1 = \iint_{\Sigma} G\alpha (x_2^2 + x_3^2) dS = G\alpha \iint_{\Sigma} r^2 dS$$

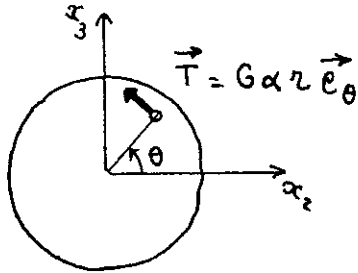
On a donc résolu le problème 4 avec

$$(41) \quad M = G I_0 \alpha, \quad I_0 = \iint_{\Sigma} r^2 dS$$

Le moment de torsion \mathcal{M} crée un "angle unitaire de torsion" α , et le module de rigidité $G I_o$ est à nouveau le produit d'une rigidité matérielle $G = \mu$ et d'une rigidité géométrique I_o , moment d'inertie polaire de la section.

Le vecteur contrainte associé à la section droite est

$$(42) \quad \vec{T} = (0, -G\alpha x_3, G\alpha x_2)$$



On a uniquement une contrainte de cisaillement perpendiculaire au rayon et de module $G\alpha r$. En notant $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$, les vecteurs de base associés aux coordonnées polaires r, θ dans le plan x_2, x_3 , on a

$$(43) \quad \vec{T} = G\alpha r \vec{e}_\theta$$

et dans le repère $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_1$ associé aux coordonnées cylindriques autour de x_1 , le tenseur des contraintes a pour composantes

$$(44) \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\alpha r \\ 0 & G\alpha r & 0 \end{bmatrix}$$

L'état de contraintes en chaque point est un état de cisaillement simple, et le critère de limite d'élasticité s'écrit

$$(45) \quad |\vec{T}| = G\alpha r < \tau_e$$

où τ_e est la limite élastique en cisaillement simple donnée par (V.71). En introduisant R rayon de la section, il vient, en combinant avec (41),

$$(46) \quad \frac{\mathcal{M}}{I_o/R} < \tau_e$$

La rigidité à la torsion d'un arbre circulaire ou annulaire est donc caractérisée par le moment d'inertie polaire de sa section I_o et sa résistance par le rapport I_o/R .

Section circulaire



$$I_o = \frac{\pi D^4}{32}, \quad \frac{I_o}{S} = \frac{D^2}{8}, \quad \frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3}{16}, \quad \frac{I_o}{RS} = \frac{D}{4}$$

Section en tube mince



$$I_o = \frac{\pi D^3 e}{4}, \quad \frac{I_o}{S} = \frac{D^2}{4}, \quad \frac{I_o}{R} = \frac{\pi D^3 e}{2}, \quad \frac{I_o}{RS} = \frac{D}{2}$$

Ces relations montrent la supériorité, à poids égal, des sections annulaires sur les sections massives. Dans le cas des tubes minces, on constate aussi que $r \sim D/2$ et que les composantes (44) du tenseur des contraintes dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ peuvent s'écrire

$$\sigma \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\alpha \frac{D}{2} \\ 0 & G\alpha \frac{D}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

soit, compte tenu de (41) et de la valeur de I_0

$$(47) \quad \sigma \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m}{\pi D^2 e} \\ 0 & \frac{2m}{\pi D^2 e} & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui, superposé à l'état de contraintes dû à une traction simple, redonne bien la forme (IV.36) obtenue au § IV.1.4 .

2.2 THEORIE GENERALE

Nous considérons maintenant le problème 4 dans le cas d'une section quelconque. Le § 1 a montré que la contrainte normale σ_{11} était déterminée par R_1, m_2, m_3 . Puisqu'ici ils sont nuls, on prendra donc $\sigma_{11} = 0$. Les contraintes de cisaillement σ_{12} et σ_{13} par contre ne peuvent pas être nulles d'après (7). Nous cherchons donc un champ de contraintes sous la forme

$$(48) \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec σ_{12} et σ_{13} fonctions de (x_1, x_2, x_3) . Les équations d'équilibre donnent

$$(49) \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 & \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_2, x_3) \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = 0 & \Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{13}(x_2, x_3) \end{cases}$$

L'équation (49) montre alors - voir par exemple le Lemme 2 du § III.3.1 - que la forme différentielle

$$(51) \quad d\Phi = \sigma_{12} dx_3 - \sigma_{13} dx_2$$

est intégrable, càd il existe une "fonction des contraintes" $\Phi(x_2, x_3)$ telle que

$$(52) \quad \sigma_{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \quad \sigma_{13} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$$

Les équations de Beltrami donnent alors

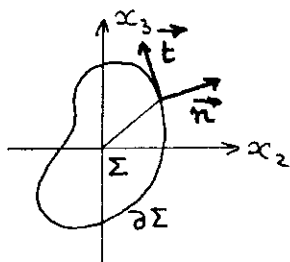
$$(53) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta \Phi = \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta \Phi = 0$$

ce qui montre que $\Delta \Phi$ est constant; nous noterons $-2G\alpha$ cette constante, α étant une constante d'intégration dont nous verrons plus loin la signification

$$(54) \quad \Delta \Phi + 2G\alpha = 0$$

La CL (1) sur la surface latérale s'écrit

$$(55) \quad \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0$$



En introduisant le vecteur unitaire tangent à $\partial \Sigma$

$$\vec{t} = (dx_2/ds, dx_3/ds)$$

il vient

$$(56) \quad n_2 = t_3 = \frac{dx_3}{ds}, \quad n_3 = -t_2 = - \frac{dx_2}{ds}$$

de sorte que, compte tenu de (52), la CL (55) devient

$$(57) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 0$$

La fonction $\Phi(x_2, x_3)$ reste constante lorsque l'on suit $\partial \Sigma$, donc sur chaque composante connexe de $\partial \Sigma$. Nous supposons désormais que la section Σ est simplement connexe. On tire alors de (57) que Φ est constant sur $\partial \Sigma$ et on peut toujours choisir cette constante nulle

$$(58) \quad \Phi|_{\partial \Sigma} = 0$$

La fonction de contrainte Φ est donc déterminée par (54) et (55), équations qui définissent un "problème de Dirichlet", qui admet donc une solution unique. Par le changement de fonction

$$(59) \quad \Phi(x_2, x_3) = G\alpha \varphi(x_2, x_3)$$

ce problème se transforme en

$$(60) \quad \begin{cases} \Delta \varphi + 2 = 0 \\ \varphi|_{\partial \Sigma} = 0 \end{cases}$$

et la fonction φ , unique solution du problème (60), dépend uniquement de la forme de la section Σ .

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante α , ce que nous allons faire en calculant les efforts exercés sur Σ_1 . On sait déjà que $R_1 = m_1 = m_3 = 0$. Pour calculer les autres composantes, nous utiliserons la formule de Stokes

$$(61) \quad \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x_2} - \frac{\partial P}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 = \oint_{\partial S} P dx_2 + Q dx_3$$

A partir de (6) et (52), il vient

$$(62) \quad \begin{aligned} R_2 &= \iint_{\Sigma} \sigma_{12} dx_2 dx_3 = \iint_{\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} dx_2 dx_3 \\ &= - \oint_{\partial \Sigma} \Phi dx_2 = 0 \end{aligned}$$

d'après la formule de Stokes (61) et (58). De la même manière, on a $R_3 = 0$. A partir de (7) on a

$$(63) \quad \begin{aligned} m_1 &= - \iint_{\Sigma} \left(x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 \\ &= - \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 \Phi) + \frac{\partial}{\partial x_3} (x_3 \Phi) - 2 \Phi \right] dx_2 dx_3 \\ &= 2 \iint_{\Sigma} \Phi dx_2 dx_3 + \cancel{\oint_{\partial \Sigma} x_3 \Phi dx_2} - \cancel{\oint_{\partial \Sigma} x_2 \Phi dx_3} \\ &= 2 G \alpha \iint_{\Sigma} \varphi dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

Finalement, le champ de contraintes construit permet de résoudre le problème 4 avec

$$(64) \quad \alpha = \frac{m}{GI}, \quad I = 2 \iint_{\Sigma} \varphi dx_2 dx_3$$

La constante I est appelée "module de rigidité" de la section Σ , et, comme φ , elle ne dépend que de la forme de Σ .

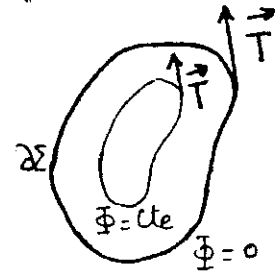
En chaque point de la section, l'état de contraintes est un état de cisaillement simple caractérisé par le vecteur contrainte \vec{T} associé à la section droite

$$(65) \quad \vec{T} = (0, \sigma_{12}, \sigma_{13})$$

La CL (1) exprime que, sur la frontière $\partial\Sigma$, \vec{T} est tangent à $\partial\Sigma$

$$(66) \quad \text{sur } \partial\Sigma \quad \vec{T} \cdot \vec{n} = 0$$

Les relations (12) montrent que les courbes $\Phi = Cte$ sont les enveloppes du champ de vecteurs \vec{T} .



L'état de contraintes

étant un état de cisaillement simple, le critère de limite d'élasticité donne

$$(67) \quad |\vec{T}| = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} < \tau_e$$

avec τ_e donné par (V.71). A partir de Φ ou φ cette condition donne

$$\sqrt{\Phi_{,3}^2 + \Phi_{,2}^2} = G\alpha \sqrt{\varphi_{,3}^2 + \varphi_{,2}^2} = G\alpha |\text{grad } \varphi| < \tau_e$$

Soit finalement

$$(68) \quad \frac{\eta}{I/\rho} < \tau_e, \quad \rho = \left[\sup_{\Sigma} |\text{grad } \varphi| \right]^{-1}$$

où ρ est une longueur caractéristique de la section Σ . On peut par ailleurs montrer que la borne supérieure de $|\text{grad } \varphi|$ est nécessairement atteinte sur la frontière de Σ . Ainsi le problème général de la torsion est résolu, sitôt que l'on connaît la solution $\varphi(x_1, x_2)$ du problème (60).

2.3 CALCUL DU DÉPLACEMENT

Pour terminer le calcul, il reste à calculer le déplacement. A partir de (48), (52) et (59), le tenseur des déformations est donné par

$$(69) \quad \mathcal{E} = \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 0 & \varphi_{,3} & -\varphi_{,2} \\ \varphi_{,3} & 0 & 0 \\ -\varphi_{,2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et on peut intégrer le champ de déplacements

$$(70) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_{11} = u_{1,1} = 0 & \Rightarrow u_1 = u_1(x_2, x_3) \\ \mathcal{E}_{22} = u_{2,2} = 0 & \Rightarrow u_2 = u_2(x_1, x_3) \\ \mathcal{E}_{33} = u_{3,3} = 0 & \Rightarrow u_3 = u_3(x_1, x_2) \\ 2\mathcal{E}_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0 & \Rightarrow u_{2,3} = -u_{3,2} = A(x_1) \end{cases}$$

(car $u_{2,3} = u_{2,3}(x_1, x_3)$ et $u_{3,2} = u_{3,2}(x_1, x_2)$) et on a

$$(71) \quad \begin{cases} u_2 = A(x_1) x_3 + B(x_1) \\ u_3 = -A(x_1) x_2 + C(x_1) \end{cases}$$

et on peut interpréter $A(x_1)$ comme étant la rotation de la section droite d'abscisse x_1

$$(72) \quad \begin{cases} 2 \varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = u_{1,2} + A'(x_1) x_3 + B'(x_1) = \alpha \varphi_{,3} \\ 2 \varepsilon_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} = u_{1,3} - A'(x_1) x_2 + C'(x_1) = -\alpha \varphi_{,2} \end{cases}$$

Mais dans ces relations, seules les dérivées $A'(x_1) (= dA/dx_1)$, $B'(x_1)$ et $C'(x_1)$ dépendent de x_1 ; elles doivent donc être constantes

$$(73) \quad \begin{cases} u_2 = -a x_1 x_3 + d x_3 + b x_1 + e \\ u_3 = a x_1 x_2 - d x_3 + c x_1 + f \end{cases}$$

Déplacement de solide rigide

On voit sur (73) que les 5 constantes b, c, d, e, f , correspondent au déplacement de solide rigide arbitraire, qui doit nécessairement s'introduire dans l'intégration. A un déplacement de solide près, on a donc

$$(74) \quad u_2 = -a x_1 x_3, \quad u_3 = a x_1 x_2$$

ce qui correspond, comme dans le cas de la section circulaire, à une rotation de chaque section d'un angle proportionnel à la distance à l'origine; la constante α , rotation par unité de longueur, est donc "l'angle unitaire de torsion" introduit au § 1.1 pour la section circulaire. On peut maintenant calculer u_1 à partir de (72)

$$(75) \quad u_{1,2} = \alpha \varphi_{,3} + a x_3, \quad u_{1,3} = -\alpha \varphi_{,2} - a x_2$$

système qui sera intégrable Ssi $u_{1,23} = u_{1,32}$

$$\alpha \Delta \varphi + 2a = 0$$

ce qui, d'après (60), donne finalement $a = \alpha$, et la constante α , introduite en (54) est l'angle unitaire de torsion, et le déplacement est finalement, à un déplacement de solide près

$$(76) \quad \begin{cases} u_1 = \alpha \psi(x_2, x_3) \\ u_2 = -\alpha x_1 x_3 \\ u_3 = \alpha x_1 x_2 \end{cases}$$

Ainsi, la rotation de chaque section s'accompagne d'un "gauchissement" que l'on peut observer expérimentalement. La fonction de gauchissement ψ est donnée par

$$(77) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + x_3 \right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_2 \right)$$

et ψ est la fonction harmonique conjuguée de la fonction harmonique $\varphi + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)$. Si on calcule sur $\partial \Sigma$ la dérivée normale de ψ , il vient, en utilisant (56) et (57)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dn} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} n_3 \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} \right) + x_3 \frac{dx_3}{ds} + x_2 \frac{dx_2}{ds} \\ &= \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2} (x_2^2 + x_3^2) \right] \end{aligned}$$

quantité connue le long de $\partial \Sigma$. Ainsi la fonction ψ vérifie

$$(78) \quad \begin{cases} \Delta \psi = 0 \\ \frac{d\psi}{dn} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2} (x_2^2 + x_3^2) \right] \end{cases} \quad \text{sur } \partial \Sigma$$

C'est un problème de Neumann, qui admet une solution unique. Ainsi, pour résoudre le problème de torsion, on peut, soit calculer φ par le problème (60) et en déduire ensuite ψ par (77), soit calculer ψ par le problème (78) et en déduire ensuite φ par (77).

Finalement, si l'on compare les relations (64) et (68) du cas général, aux relations (41) et (46) relatives à la section circulaire, on constate que, dans le cas général également, la rigidité de la section est caractérisée par le module de rigidité I et sa résistance par le rapport I/η . Mais dans le cas général, a) il faut résoudre le problème (60) pour pouvoir calculer ces constantes (nous verrons cependant au chapitre IX que l'on peut obtenir des estimations de I sans calculer φ), b) la torsion s'accompagne d'un gauchissement des sections. Si ce gauchissement est empêché, par exemple par des CL d'encastrement, on rencontre le difficile problème de la torsion gênée (par opposition à la torsion libre).

Bien entendu, conformément à la démarche générale décrite au § 1.1, nous avons résolu un problème particulier correspondant au problème de la torsion, et le principe de Saint Venant nous permet d'affirmer que loin des extrémités c'est la solution. Il peut être utile de formuler explicitement le problème régulier que nous avons résolu. Pour cela, il faut compléter les CL (1) par des CL sur les extrémités. On pourrait écrire des CL donnant sur les extrémités le déplacement (u_1, u_2, u_3) connu par (76), ou bien donnant les efforts appliqués \vec{T} connus par (65) et (52), mais la formulation la plus com-

mode, que nous utiliserons au chapitre IX, fait intervenir des données mixtes

$$(79) \quad \begin{cases} x_1 = 0 : & \sigma_{11} = 0 \quad , \quad u_2 = u_3 = 0 \\ x_1 = l : & \sigma_{11} = 0 \quad , \quad u_2 = -\alpha l x_3 \quad , \quad u_3 = \alpha l x_2 \end{cases}$$

Rajoutées à (1), ces CL définissent bien un problème régulier (§ VI.1.1), et cette formulation présente l'avantage de ne pas faire intervenir les fonctions φ ou ψ a priori inconnues.

2.4 SECTIONS PARTICULIERES

Section circulaire

D'après la symétrie, les fonctions φ et ψ ne dépendent que de r . Il vient directement

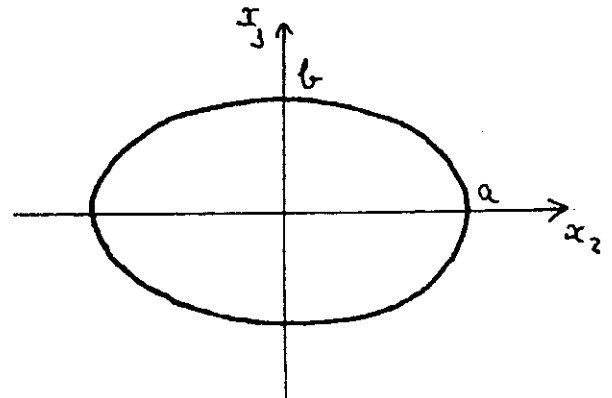
$$(80) \quad \varphi = \frac{1}{2} (a^2 - r^2) \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad r^2 = x_2^2 + x_3^2$$

et on retrouve tous les résultats du § 1.1. En particulier, la fonction de gauchissement est nulle.

Section elliptique

La section Σ est limitée par l'ellipse d'équation

$$(81) \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1$$



On trouve alors pour φ et ψ

$$(82) \quad \varphi = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2} \right)$$

$$(83) \quad \psi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_2 x_3$$

Pour le module de rigidité à la torsion, on trouve

$$(84) \quad I = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Les contraintes sont données par

$$(85) \quad \begin{cases} \sigma_{12} = -\frac{\eta}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = -\frac{2\eta}{\pi a b^3} x_3 \\ \sigma_{13} = \frac{\eta}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{2\eta}{\pi a^3 b} x_2 \end{cases}$$

et la contrainte de cisaillement maximale

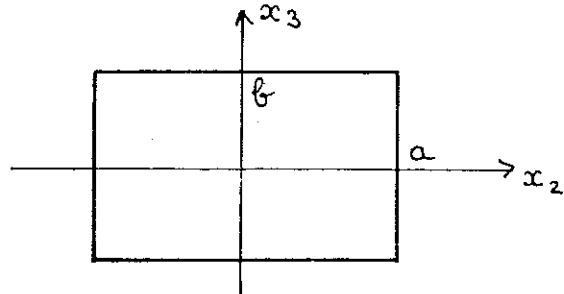
$$(86) \quad |\vec{T}|_{\max} = \sup \frac{2\eta}{\pi a b} \sqrt{\frac{x_3^2}{b^4} + \frac{x_2^2}{a^4}} = \frac{2\eta}{\pi a b^2}$$

est atteinte à l'extrémité du petit axe $x_3 = b$, ce qui donne

$$(87) \quad \rho = \frac{2 a^2 b}{a^2 + b^2}$$

Section rectangulaire

On recherche la solution sous forme d'un développement en série de Fourier double



$$(88) \quad \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{(2m-1)\pi x_2}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi x_3}{2b}$$

qui vérifie automatiquement la CL (58). On dérive (88) terme à terme, ce qui permet d'obtenir le développement de $\Delta\varphi$ que l'on identifie avec le développement de la fonction constante -2 , et on obtient les constantes A_{mn} .

On obtient des calculs plus simples en cherchant la solution sous la forme

$$(89) \quad \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{(2m-1)\pi x_2}{2a} \psi_m(x_3)$$

développement en série de Fourier simple (mais qui présente l'inconvénient de détruire la symétrie en x_2 et x_3). On calcule $\Delta\varphi$ par dérivation terme à terme, on identifie avec le développement de la constante -2 , et on obtient pour ψ_m une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 \psi_m}{d x_3^2} - \left(\frac{(2m-1)^2 \pi^2}{2a} \right)^2 \psi_m(x_3) = (-1)^m \frac{8}{(2m-1)\pi}$$

qui donne ψ_m par intégration avec les conditions aux limites $\psi_m(\pm b) = 0$. On obtient finalement

$$(90) \quad \varphi = \frac{32 a^3}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{(2m-1)\pi x_3}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{(2m-1)b}{2a}} \right\} \cos \frac{(2m-1)\pi x_2}{2a}$$

qui permet de calculer la solution et en particulier le module de rigidité à la torsion I et la longueur ρ qui intervient dans (68). On trouve

$$(91) \quad \begin{cases} I = 16 a^3 b h_1(b/a) = 4 S a^2 h_1(b/a) \\ \rho = 2 a h(b/a) \end{cases}$$

la contrainte tangentielle maximale étant obtenue au milieu du grand côté $x_3 = \pm b$ si on suppose $a > b$. Les fonctions h_1 et h sont données par le tableau suivant

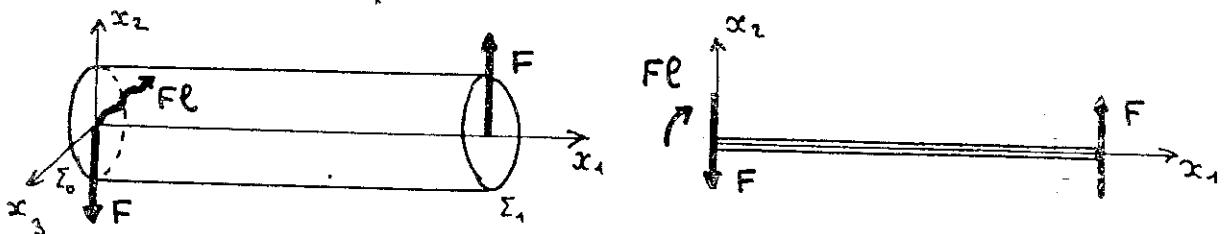
b/a	1	1,5	2	3	5	∞
h	0,675	0,848	0,930	0,985	0,999	1
h_1	0,141	0,196	0,229	0,263	0,291	1/3

Plus généralement, on sait résoudre explicitement le problème pour quelques sections particulières (triangle équilatéral, section circulaire entaillée d'un demi-cercle, etc...). Comme le problème se ramène à des calculs de fonctions harmoniques, on peut également utiliser les techniques de variable complexe (voir [17], [19]). Enfin, le problème (60) se prête bien au calcul numérique.

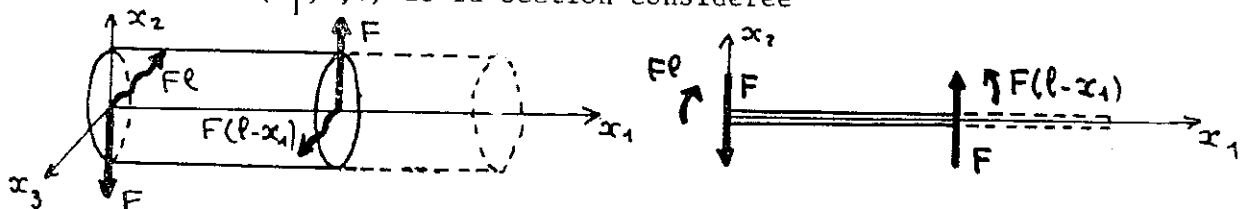
3. FLEXION COMPOSEE

3.1 CHAMP DE CONTRAINTES

Il reste à résoudre le problème 2.



Considérons la section d'abscisse x_1 , et considérons la poutre $[0, x_1] \times \Sigma$. Elle est en équilibre sous l'action du torseur $[\mathcal{T}_0]$ des efforts appliqués sur la section $x_1=0$ et du torseur $[\mathcal{T}(x_1)]$ des efforts de contact exercés sur la poutre $[0, x_1] \times \Sigma$ par la partie supprimée $[x_1, l] \times \Sigma$. Comme précédemment, nous représentons $[\mathcal{T}(x_1)]$ par sa résultante $\vec{R}(x_1)$ et son moment $\vec{M}(x_1)$ par rapport au centre $(x_1, 0, 0)$ de la section considérée



L'équilibre de la poutre $[0, x_1] \times \Sigma$ donne alors

$$\vec{R} = F \vec{e}_2, \quad \vec{M} = F(l-x_1) \vec{e}_3$$

de sorte que la répartition des contraintes dans la section x_1 doit être telle que

$$(92) \quad \begin{cases} \iint_{\Sigma_{x_1}} \sigma_{11} dx_2 dx_3 = 0 \\ \iint_{\Sigma_{x_1}} x_3 \sigma_{11} dx_2 dx_3 = 0 \\ - \iint_{\Sigma_{x_1}} x_2 \sigma_{11} dx_2 dx_3 = F(l-x_1) \end{cases}$$

$$(93) \quad \iint_{\Sigma_{x_1}} \sigma_{12} dx_2 dx_3 = F$$

$$(94) \quad \iint_{\Sigma_{x_1}} \sigma_{13} dx_2 dx_3 = 0$$

$$(95) \quad \iint_{\Sigma_{x_1}} (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dx_2 dx_3 = 0$$

En partant de (92), les résultats du § 1.2 nous suggèrent de prendre

$$(96) \quad \sigma_{11} = - \frac{F(l-x_1)x_2}{J}, \quad J = J_2$$

D'autre part, (93) montre que σ_{12} ne peut pas être nul. Nous prenons donc dans un premier temps

$$(97) \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec σ_{11} donné par (96). Les équations d'équilibre nous donnent alors

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} = 0$$

soit, compte-tenu de (96),

$$(98) \quad \sigma_{12} = - \frac{F}{2J} \{ x_2^2 + f(x_3) \}$$

Les équations de Beltrami sont toutes vérifiées, sauf l'équation relative aux indices 1,2 qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_{12,11} + \sigma_{12,22} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{11,12} &= 0 \\ - \frac{F}{2J} \{ f''(x_3) + 2 \} + \frac{1}{1+\nu} \frac{F}{J} &= 0 \end{aligned}$$

$$(99) \quad \begin{aligned} f''(x_3) &= -\frac{2\nu}{1+\nu} \quad , \quad f(x_3) = -\frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 + ax_3 + b \\ \sigma_{12} &= -\frac{F}{2J} \left\{ x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 + ax_3 + b \right\} \end{aligned}$$

Par contre, puisque σ_{13} est nul, la CL sur la surface latérale, qui s'écrit encore sous la forme (55), ne peut pas être vérifiée. Nous supposons donc à l'état de contraintes σ^0 obtenu jusqu'à présent, un état de contraintes $\tilde{\sigma}$ avec $\tilde{\sigma}_{13}$ non nul

$$(100) \quad \sigma = \sigma^0 + \tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^0 & \sigma_{12}^0 & 0 \\ \sigma_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\sigma}_{12} & \tilde{\sigma}_{13} \\ \tilde{\sigma}_{12} & 0 & 0 \\ \tilde{\sigma}_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(101) \quad \sigma_{11} = -\frac{F(l-x_1)x_2}{J} \quad , \quad \sigma_{12}^0 = -\frac{F}{2J} \left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right)$$

Par construction, le champ σ^0 vérifie les équations d'équilibre et les équations de Beltrami; le champ $\tilde{\sigma}$ devra donc les vérifier également. On peut alors reprendre l'analyse du § 2.2 et obtenir

$$(102) \quad \begin{cases} \tilde{\sigma}_{12} = \frac{F}{J} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_3} & \tilde{\sigma}_{13} = -\frac{F}{J} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_2} \\ \Delta \tilde{\varphi} = C_2 = -2C \end{cases}$$

Nous faisons le changement de fonction

$$(103) \quad \tilde{\varphi}(x_2, x_3) = C \varphi(x_2, x_3) + \chi(x_2, x_3)$$

où φ est la fonction introduite au § 2.2, solution du problème (60), de sorte que

$$(104) \quad \Delta \chi = 0$$

Comme au § 2.2, la CL sur la surface latérale peut s'écrire

$$\begin{aligned} \sigma_{12} \frac{dx_3}{ds} - \sigma_{13} \frac{dx_2}{ds} &= 0 \\ -\frac{F}{2J} \left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) \frac{dx_3}{ds} + \frac{F}{J} \left(\frac{d\chi}{ds} + C \frac{d\varphi}{ds} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Le dernier terme s'annule d'après (60) et on a

$$(105) \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{2} \left[x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right] \frac{dx_3}{ds}$$

Sur $\partial\Sigma$, x_2 et x_3 sont fonctions de s et par intégration de (105) sur $\partial\Sigma$ on peut obtenir la valeur de χ sur $\partial\Sigma$ à une constante près

$$(106) \quad \chi(\lambda) = \chi_0(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{2} \left[x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right] \frac{dx_3}{ds} ds$$

Pour s'assurer que (106) définit sans ambiguïté la fonction χ_0 sur $\partial\Sigma$, il faut vérifier que

$$(107) \quad \oint \frac{1}{2} \left[x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right] dx_3 = 0$$

Ceci résulte directement de la formule de Stokes et de (18).

Ainsi, la fonction χ est déterminée par

$$(108) \quad \begin{cases} \Delta \chi = 0 \\ \chi|_{\partial\Sigma} = \chi_0 \text{ définie par (106)} \end{cases}$$

C'est un problème de Dirichlet qui admet une solution unique dépendant uniquement de la section Σ .

3.2 CALCUL DES EFFORTS APPLIQUES

Pour terminer la détermination du champ de contraintes, en particulier pour déterminer la constante C , il convient de vérifier les conditions aux limites sur l'extrémité $x_1 = l$, c'est-à-dire de vérifier les conditions (92), (93), (94) et (95) pour $x_1 = l$. Par construction de σ_{11} les relations (92) sont vérifiées pour tout x_1 . A partir des calculs du paragraphe précédent, on a

$$(109) \quad \begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{F}{J_2} \left\{ -\frac{1}{2} \left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) + \frac{\partial \chi}{\partial x_3} + C \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right\} \\ \sigma_{13} &= -\frac{F}{J_2} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial x_2} + C \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\} \end{aligned}$$

et σ_{12} et σ_{13} dépendent uniquement de x_2 et x_3 .

Pour (93), nous partons de (109) et

$$(110) \quad \begin{aligned} R_2 &= -\frac{F}{2J_2} \iint_{\Sigma} \left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) dx_2 dx_3 \\ &\quad + \frac{F}{J_2} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_3} + C \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

Compte-tenu de la définition (21) de J_2 et J_3 on obtient pour le premier terme

$$(111) \quad -\frac{F}{2} \left[1 - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{J_3}{J_2} \right]$$

Pour le second terme, on utilise la formule de Stokes

$$\frac{F}{J_2} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_3} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 = - \frac{F}{J_2} \oint_{\partial \Sigma} (\chi + c \varphi) dx_2$$

Le terme en φ disparaît par (60), et on intègre le terme en χ par parties. Compte-tenu de (105), on obtient

$$- \frac{F}{J_2} \oint_{\partial \Sigma} \chi dx_2 = \frac{F}{J_2} \oint_{\partial \Sigma} x_2 d\chi = \frac{F}{2J_2} \oint_{\partial \Sigma} x_2 \left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) dx_3$$

On utilise à nouveau la formule de Stokes

$$\begin{aligned} \frac{F}{2J_2} \oint_{\partial \Sigma} x_2 \left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) dx_3 \\ = \frac{F}{2J_2} \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[x_2 \left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) \right] dx_2 dx_3 \\ = \frac{F}{2J_2} \iint_{\Sigma} \left(3x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

et compte-tenu de (21), le deuxième terme de (110) donne

$$(112) \quad \frac{F}{2} \left[3 - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{J_3}{J_2} \right]$$

La combinaison de (110) et (112) donne alors $R_2 = F$, et permet de vérifier (93). La vérification de (94) est analogue.

$$\begin{aligned} (113) \quad R_3 &= \iint_{\Sigma} \sigma_{13} dx_2 dx_3 = - \frac{F}{J_2} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_2 dx_3 \\ &= - \frac{F}{J_2} \oint_{\partial \Sigma} (\chi + c \varphi) dx_3 = \frac{F}{J_2} \oint_{\partial \Sigma} x_3 d\chi \\ &= \frac{F}{2J_2} \oint_{\partial \Sigma} x_3 \left(x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) dx_3 = \frac{F}{J_2} \iint_{\Sigma} x_3 x_2 dx_2 dx_3 = 0 \end{aligned}$$

d'après (20).

Il reste à écrire (95). Le calcul est mené de manière similaire

$$\begin{aligned} M_1 &= \iint_{\Sigma} (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dx_2 dx_3 \\ &= \frac{F}{J_2} \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left(x_2^2 x_3 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right) dx_2 dx_3 \right. \\ &\quad \left. - \iint_{\Sigma} \left(x_2 \frac{\partial \chi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 - c \iint_{\Sigma} \left(x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 \right\} \end{aligned}$$

D'après le calcul qui a donné (63), il vient

$$- \iint_{\Sigma} \left(x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 = 2 \iint_{\Sigma} \varphi dx_2 dx_3 = I$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$(114) \quad m_1 = \frac{F}{J_2} (H - C I)$$

où la constante H , donnée par

$$(115) \quad H = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left[x_2^2 x_3 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^3 - 2 x_2 \frac{\partial \chi}{\partial x_2} - 2 x_3 \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \right] dx_2 dx_3$$

dépend uniquement de la section Σ . La condition (95) donne alors la valeur de la constante

$$(116) \quad C = \frac{H}{I}$$

et le champ de contraintes est parfaitement défini. Il est de la forme

$$(117) \quad \sigma = \frac{F}{J_2} \begin{bmatrix} -(\ell - x_1) x_2 & \alpha(x_2, x_3) & \beta(x_2, x_3) \\ \alpha(x_2, x_3) & 0 & 0 \\ \beta(x_2, x_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où α et β sont deux fonctions homogènes au carré d'une longueur, et qui dépendent uniquement de la section Σ .

La solution du problème de la flexion composée peut donc, comme pour la torsion, s'obtenir par résolution de problèmes de Dirichlet, mais les calculs sont beaucoup plus laborieux. En particulier, on peut écrire le critère de limite d'élasticité et calculer le déplacement, mais on ne peut pas en tirer une interprétation simple comme pour les autres problèmes. En particulier, l'hypothèse de Navier-Bernoulli (voir § 1.3) n'est plus vérifiée, les sections droites ne restent plus planes: en torsion comme en flexion composée, l'apparition de contraintes de cisaillement entraîne un gauchissement de la section.

3.3 SECTION CIRCULAIRE

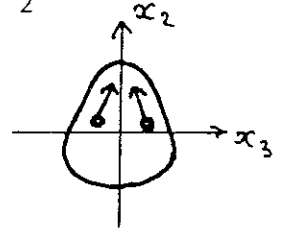
Si la section est symétrique par rapport à l'axe x_2 , alors, en prenant l'origine des abscisses curvilignes sur l'axe x_2 , on voit que la fonction χ_0 définie sur $\partial \Sigma$ par (106) prend des valeurs opposées en deux points symétriques par rapport à l'axe des x_2 . Il en résulte que la fonction χ définie par le problème (108) est impaire en x_3

$$(118) \quad \chi_2(x_2, -x_3) = -\chi(x_2, x_3)$$

La quantité intégrée dans (115) est donc impaire en x_3 , H est nul, et la cons-

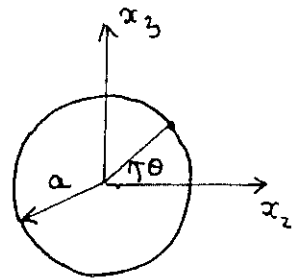
tante C est nulle. On obtient pour le vecteur contrainte tangentielle sur la section droite $(0, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ la symétrie par rapport à l'axe x_2

$$(119) \quad \begin{cases} \sigma_{12}(x_2, -x_3) = \sigma_{12}(x_2, x_3) \\ \sigma_{13}(x_2, -x_3) = -\sigma_{13}(x_2, x_3) \end{cases}$$



A titre d'exemple, nous allons calculer la fonction χ et la répartition de contraintes pour une section Σ circulaire, de rayon a . Pour calculer χ_0 on écrit (105)

$$\begin{aligned} d\chi &= \frac{1}{2} \left[x_2^2 - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right] dx_3 \\ &= \frac{1}{2} \left[(a^2 - x_3^2) - \frac{\nu}{1+\nu} x_3^2 \right] dx_3 \\ &= \frac{1}{2} \left[a^2 - \frac{1+2\nu}{1+\nu} x_3^2 \right] dx_3 \\ \chi_0 &= \frac{1}{2} \left[a^2 x_3 - \frac{1+2\nu}{3(1+\nu)} x_3^3 \right] \\ (120) \quad \chi_0 &= \frac{a^3}{2} \left[\sin \theta - \frac{1+2\nu}{3(1+\nu)} \sin^3 \theta \right] \end{aligned}$$



Pour calculer la fonction $\chi(x_2, x_3)$, nous devons trouver la fonction χ harmonique qui prend la valeur (120) pour $r = a$. Pour cela on remarque que les fonctions

$$(121) \quad r^n \sin n\theta = \text{Im} \{ (x_2 + i x_3)^n \}$$

sont harmoniques pour tout entier n . On écrit alors

$$(122) \quad \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

et on peut réécrire (120) sous la forme

$$\begin{aligned} (123) \quad \chi_0 &= \frac{a^3}{2} \left[\sin \theta - \frac{1+2\nu}{12(1+\nu)} (3 \sin \theta - \sin 3\theta) \right] \\ &= \frac{a^3}{2} \left[\frac{1+2\nu}{12(1+\nu)} \sin 3\theta + \frac{3+2\nu}{4(1+\nu)} \sin \theta \right] \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\chi = \frac{1}{2} \left[\frac{1+2\nu}{12(1+\nu)} r^3 \sin 3\theta + \frac{3+2\nu}{4(1+\nu)} a^2 r \sin \theta \right]$$

On utilise à nouveau (122) pour écrire

$$\chi = \frac{1}{2} \left[\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} r^3 \sin \theta - \frac{1+2\nu}{3(1+\nu)} r^3 \sin^3 \theta + \frac{3+2\nu}{4(1+\nu)} a^2 r \sin \theta \right]$$

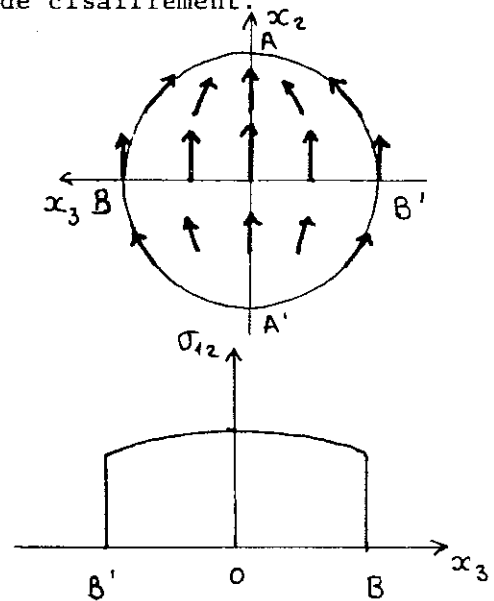
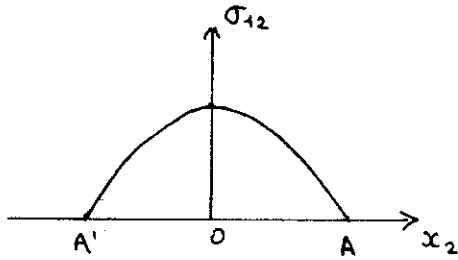
$$(124) \quad \chi = \frac{1}{8(1+\nu)} \left\{ (1+2\nu) \left(x_2^2 x_3 - \frac{x_3^3}{3} \right) + (3+2\nu) a^2 x_3 \right\}$$

ce qui donne pour les contraintes

$$(125) \quad \begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{F}{8J_2} \frac{3+2\nu}{1+\nu} \left[a^2 - x_2^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} x_3^2 \right] \\ \sigma_{13} &= \frac{F}{4J_2} \frac{1+2\nu}{1+\nu} x_2 x_3 \end{aligned}$$

répartition assez complexe des contraintes de cisaillement.

En particulier, on a σ_{13} nul sur l'axe des x_2 et sur l'axe des x_3 . La répartition de σ_{12} sur les deux diamètres AA' et BB' est représentée sur les diagrammes suivants



en B $\sigma_{12} = \frac{F}{S} \frac{1+2\nu}{1+\nu} = 1,23 \frac{F}{S}$

en O $\sigma_{12} = \frac{F}{S} \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)} = 1,38 \frac{F}{S}$

pour $\nu = 0,3$