Table des matières

Première partie

Mécanique des Milieux Continus

Chapitre 1

Lois de comportement

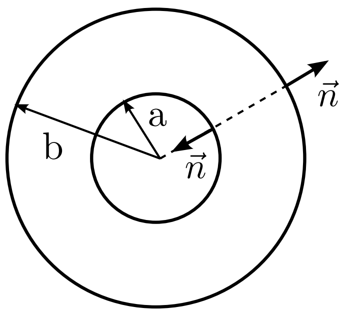
1.1 Problèmes de mécanique des solides

1.1.1 Problèmes dynamiques et quasi-statiques

Pour résoudre un problème de Mécanique des Solides, il faut calculer la solution (u_i, σ_{ij}), c'est à dire calculer les champs de vecteurs déplacements $u_i(x)$ et de tenseurs des contraintes $\sigma_{ij}(x)$, à partir des données, qui sont constituées par

1. L'ensemble des sollicitations imposées au solide
   – forces volumiques
   – conditions aux limites (forces ou déplacements imposés à la surface).
2. Les conditions initiales, précisant la position et la vitesse initiale du solide.

Exemple : Réservoir sphérique soumis à une pression intérieure n



– Les forces volumiques sont supposées nulles (pesanteur négligeable)

$$f_i = 0 \tag{1.1}$$

– La surface extérieure $r = b$ est soumise à la pression atmosphérique, la contrainte est donc nulle d'après (**??**) :

$$r = b : \sigma_{ij} n_j = T_i = 0 \tag{1.2}$$

– La surface intérieure $r = a$ est soumise à la pression p (supposée mesurée par rapport à la pression atmosphérique) d'où

$$r = a : \sigma_{ij} n_j = T_i = -p n_i \tag{1.3}$$

1. Problème dynamique : On donne la pression $p(t)$ comme fonction du temps ; on donne également les conditions initiales – par exemple, à $t = 0$, le réservoir est au repos

$$u_i(x, 0) = 0 \quad V_i(x, 0) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = 0 \tag{1.4}$$

et on cherche la solution $u_i(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ qm doit vérifier l'équation du mouvement (**??**)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \tag{1.5}$$

avec (1.1), les conditions aux limites (1.2) et (1.3), et les conditions initiales (1.4). Ce problème correspond par exemple à l'étude de la mise en charge brutale du réservoir. Moyennant une modification des conditions initiales (1.4), il correspond aussi à l'étude des vibrations du réservoir, si l'on impose une pression $p(t)$ sinusoïdale

$$p(t) = p_0 \cos \omega t \tag{1.6}$$

on recherche alors une solution périodique en t, condition qui remplace (1.4).

2. Problème statique : La pression p est constante c'est la pression en service du réservoir. On recherche alros une solution statique, c'est à dire indépendante du temps $u_i(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ vérifiant les équations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \tag{1.7}$$

avec (1.1) et les CI (conditions aux limites) (1.2) et (1.3). Le temps a disparu, et les conditions initiales n'ont plus lieu d'être.

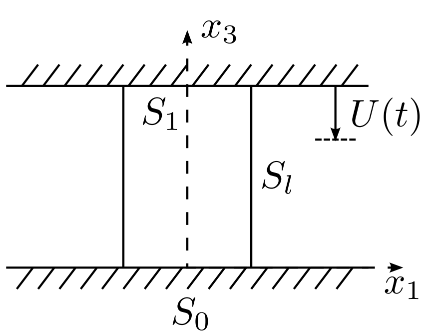
3. Problème quasi-statique : On suppose comme en a) que la pression t varie au cours du temps, $p(t)$, mais on fait l'hypothèse suivante

Hypothèse quasi-statique : Les évolutions sont suffisamment lentes pour que, dans l'équation du mouvement (1.5), on puisse négliger le terme d'accélération et donc la remplacer par l'équation d'équilibre (1.7).

En d'autres termes, la sollicitation dépend du temps, mais on résoud à chaque instant un problème statique. Cette hypothèse est tout à fait essentielle en mécanique des solides, car elle permet de ramener à des problèmes statiques les problèmes réels qui, eux, dépendent toujours du temps. L'essentiel de ce cours sera désormais limité au cas où cette hypothèse est valable, l'étude des problèmes réellement dynamiques (chocs, vibrations) étant renvoyée au cours de Mécanique des Vibrations.

1.1.2 Conditions aux limites

Exemple 2. Ecrasement d'un lopin entre les deux plateaux rigides d'une presse : Un bloc métallique cylindrique est écrasé entre les deux plateaux rigides d'une presse. Le plateau inférieur $x_3 = 0$ est immobile, tandis que le plateau supérieur $x_3 = h$ s'enfonce d'une longueur $U(t)$. À nouveau, on peut s'intéresser aux problèmes dynamique, statique ou quasi-statique, mais nous nous



limiterons au dernier cas : la solution dépend du temps puisque la sollicitation en dépend, mais nous écrirons néanmoins les équations d'équilibre.

Comme dans l'exemple précédent, et comme dans la majorité des cas en Mécanique des Solides, la seule force de volume est la pesanteur, et nous la négligerons, d'où (1.1). La surface latérale S_l est libre de contraintes

$$\text{sur } S_l : \quad T_i = \sigma_{ij} n_j = 0 \tag{1.8}$$

Sur les extrémités S_0 ($x_3 = 0$) et S_1 ($x_3 = h$), la condition exprimant la rigidité des plateaux porte sur le déplacement vertical

$$\begin{cases} x_3 = 0 : & u_3 = 0 \\ x_3 = h : & u_3 = -U(t) \end{cases} \tag{1.9}$$

mais les autres conditions aux limites dépendent des conditions de contact entre les plateaux et le lopin.

S'il n'y a pas de frottement, c'est à dire si le contact est parfaitement lubrifié, alors la force de contact, en $x_3 = h$, par

$$\vec{n} = (0, 0, +1)\,, \quad \vec{T} = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \tag{1.10}$$

doit être normale à la surface de contact. Les conditions (1.9) doivent être complétées par les conditions $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

$$\begin{cases} x_3 = 0 : u_3 = 0, & \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ x_3 = h : u_3 = -U(t), & \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

S'il n'y a pas de glissement, c'est à dire s'il y a adhérence complète entre le lopin et le plateau, alors il faut compléter (1.9) par les conditions cinématiques d'adhérence $u_1 = u_2 = 0$

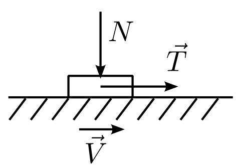
$$\begin{cases} x_3 = 0 : & u_1 = u_2 = u_3 = 0 \\ x_3 = h : & u_1 = u_2 = 0, u_3 = -U(t) \end{cases} \tag{1.12}$$

Dans le cas réel, il y a frottement entre le plateau et le lopin, et il faut compléter (1.9) par la condition exprimant la loi de frottement. Nous adoptons la loi de frottement de Coulomb, avec un coefficient de frottement f,

$$\begin{cases} \vec{V} = 0 \text{si} & |\vec{T}| < fN \\ \vec{V} = \lambda \vec{T} \text{si} & |\vec{T}| = fN, \lambda \geq 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

que l'on peut encore rééecrire sous la forme

$$\begin{cases} \vec{V} = \lambda \vec{T} \\ \lambda \geq 0, \quad fN - |\vec{T}| \geq 0, \quad \lambda \left(fN - |\vec{T}| \right) = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$



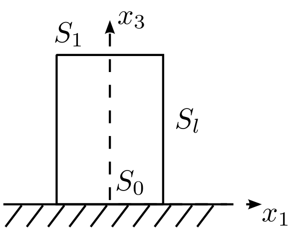
On obtient alors

$$\begin{cases} x_3 = 0 : \quad u_3 = 0, \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \lambda\sigma_{13}, \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \lambda\sigma_{23}, \\ \qquad\qquad \lambda \geq 0, -f\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \geq 0, \lambda\left(-f\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}\right) = 0 \\ x_3 = h : \quad u_3 = -U(t), \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = -\lambda\sigma_{13}, \text{etc.} \end{cases} \tag{1.15}$$

Le problème de l'écrasement d'un lopin consiste donc à trouver $u_i(x,t), \sigma_{ij}(x,t)$, vérifiant à chaque instant les équations d'équilibre (1.7) avec $f_i = 0$, et les conditions aux limites (1.8) et (1.11), (1.12) ou (1.13), suivant la nature du problème et suivant la précision des résultats cherchés : le problème (1.15) est certainement plus proche de la réalité que les problèmes (1.11) ou (1.12), mais les problèmes (1.11) et (1.12) sont beaucoup plus simples, et peuvent constituer une approximation suffisante pour les besoins que l'on a. De même, si le frottement est important, le problème (1.12) est certainement plus proche de la réalité qUe le problème (1.11). Néanmoins, le problème (1.11), qui, comme on le verra, se résoud très simplement, peut être un approxmation suffisante, par exemple pour le calcul de la force F à appliquer sur la presse et qui sera donnée par

$$F(t) = -\iint_{S_0} \sigma_{33}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -\iint_{s_1} \sigma_{33}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1.16}$$

Exemple 3. Bloc pesant posé sur un plan rigide.



Le bloc est soumis à la seule action de la pesanteur. En notant $\rho_0 = \rho$ la masse volumique du solide, et g l'accélération de la pesanteur, on a donc

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = -\rho g \tag{1.17}$$

La surface latérale S_l et l'extrémité S_1 $(x_3 = h)$ sont libres de contraintes

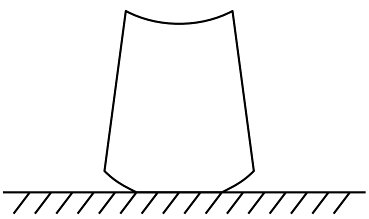
$$\begin{cases} \text{sur } S_l \sigma_{ij} n_j = 0 \\ x_3 = h \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

Sur l'extrémité S_0 $(x_3 = O)$, les conditions aux limites dépendent, comme dans le cas précédent, des conditions de contact : dans le cas de non frottement on a

$$x_3 = 0 : \quad u_3 = 0 \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{1.19}$$

dans le cas de non glissement, on a

$$x_3 = 0 : \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0 \tag{1.20}$$



dans le cas du frottement coulombien, on a une expresslon analogue à (1.15). Toutes ces conditions supposent que le contact entre le bloc et le plan reste maintenu. Il peut arriver – figure ci-contre – qu'une partie du bloc se soulève. Il s'agit alors d'une liaison unilatérale. La surface S_0 se décompose en deux zones (que l'on ne connaît pas, leur détemination fait partie du problème)

– une zone de contact où l'on a

$$u_3 = 0, \quad \sigma_{33} \le 0 \tag{1.21}$$

– une zone de non contact, libre de contraintes, où l'on a

$$u_3 \ge 0, \quad \sigma_{33} = 0 \tag{1.22}$$

On peut regrouper (1.21), (1.22) en

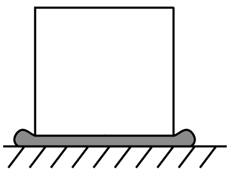
$$u_3 \ge 0, \quad \sigma_{33} \le 0, \quad u_3\sigma_{33} = 0 \tag{1.23}$$

En supposant le contact sans frottement, il faut donc remplacer (1.19) par

$$x_3 = 0 \begin{cases} \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ u_3 \ge 0, \quad \sigma_{33} \le 0, \quad u_3\sigma_{33} = 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

En toute rigueur, il aurait aussi fallu envisager cette possibilité dans l'exemple précédent, mais elle était peu plausible physiquement.

On pourrait également envisager d'autres types de conditions aux limites sur S_0. Par exemple, on peut imaginer de poser le bloc sur le plan par l'intermédiaire d'un ballon de baudruche contenant un gaz à la pression p. Les efforts exercés sur le solide par le ballon se ramènent alors à une pression hydrostatique



$$x_3 = 0 : \quad \sigma_{33} = -p, \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \tag{1.25}$$

On peut déterminer p en remarquant que, d'après les équations d'équilibre, les efforts exercés sur le bloc à travers S_0 doivent équilibrer les autres efforts appliqués, c'est à dire en l'occurence le poids du bloc. On obtient donc la condition suivante

$$-\iint_{S_0} \sigma_{33} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \rho g S h \tag{1.26}$$

valable quelles que soient les conditions aux limites sur S_0. Avec les conditions (1.25), on en tire la valeur de p

$$p = \rho g h \tag{1.27}$$

De manière générale, dans un problème réel, l'écriture des conditions aux limites est une étape tout à fait essentielle, car d'une part ces conditions comprennent l'essentiel de la physique du problème, d'autre part elles conditionnent la facilité – voire la possibilité – de la résolution du problème mathématique obtenu. Il faudra souvent faire un compromis entre la précision de la description physique et la facilité de résolution du problème mathématique.

1.1.3 Lois de comportement

Pour résoudre un problème de mécanique des solides, if faut donc résoudre un système d'équations aux dérivées partielles. Pour l'instant, nous avons trois équations scalaires – les équations du mouvement (1.5) ou les équations d'équilibre (1.7), suivant que l'en considère le problème dynamique ou le problème quasi-statique – pour 9 champs inconnus : 3 composantes du déplacement $u_i(x,t)$ et 6 composantes du tenseur des contraintes $\sigma_{ij}(x,t)$. Il manque donc 6 équations scalaires. Ces 6 équations nous seront fournies par la “loi de comportement” du matériau. Toutes les équations écrites jusqu’à présent étaient – dans le cadre d’une schématisation donnée – -universelles, c’est à dire indépendantes du matériau considéré. Les équations écrites au paragraphe 1.1.2 restent les mêmes pour un bloc d’acier, d’aluminium, de matière plastique, de caoutchouc, de bois, de béton, d’argile, de pâte à modeler, . . . , sous la seule réserve que les hypothèses fondamentales soient vérifiées (théorie du premier gradient, petites déformations).

De manière générale, la loi de comportement se présente comme une “relation” entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Cette relation peut être de nature très diverse – nous en verrons quelques exemples en **??** – mais elle sera en général de nature “fonctionnelle”. À quelques cas singuliers près, nous pouvons admettre qu’elle donne le tenseur des contraintes à partir de l’histoire du tenseur des déformations – c’est à dire de la valeur du tenseur des défornations à l’instant considéré et à tous les instants antérieurs – ou bien le tenseur des déformations à partir de l’histoire du tenseur des contraintes.

$$\mathbb{\sigma}(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbb{\sigma}}}\{\mathbb{\varepsilon}(t-s)\}\,, \quad \mathbb{\varepsilon}(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathbb{\varepsilon}}}\{\mathbb{\sigma}(t-s)\} \tag{1.28}$$

Cette loi de comportement ne peut être déterminée qu’expérimentalement par un certain nombre “d’essais”. Les essais les plus faciles à interpréter sont les “essais homogènes” où l’on cherche à réaliser dans une éprouvette un état de contrainte et de déformation homogène. L’exemple le plus simple est l’essai de compression simple, qui correspond à l’exemple 2 du paragraphe 1.1.2. Si l’on cherche un état de contrainte et de déformation homogène

$$\sigma_{ij}(x,t) = \sigma_{ij}(t), \quad \varepsilon_{ij}(x,t) = \varepsilon_{ij}(t) \tag{1.29}$$

alors la condition aux limites (1.8) sur la surface latérale montre que toutes les composantes de $\sigma_{ij}(t)$ sont nulles, sauf σ_{33} – en effet, sur S_l $n_3 = 0$ tandis que n_1 et n_2 sont quelconques – et (1.16) donne $\sigma_{33}(t) = -F(t)/S$

$$\mathbb{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F(t)/S \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

La loi de conportement (1.28) donne alors $\mathbb{\varepsilon}(t)$ en fonction de $F(t)$. On obtient alors la forme générale de déplacement par (**??**)

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon_{11}x_1 & +\varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 & +\omega_2x_3 - \omega_3x_2 + c_1 \\ u_2 = \varepsilon_{12}x_1 & +\varepsilon_{22}x_2 + \varepsilon_{23}x_3 & +\omega_3x_1 - \omega_1x_3 + c_2 \\ u_3 = \varepsilon_{13}x_1 & +\varepsilon_{23}x_2 + \varepsilon_{33}x_3 & +\omega_1x_2 - \omega_2x_1 + c_3 \end{cases} \tag{1.31}$$

La CL (1.9) en $x_3 = 0$ donne alors

$$c_3 = 0, \quad \omega_1 = -\varepsilon_{23}, \quad \omega_2 = \varepsilon_{13}$$

La CL (1.9) en $x_3 = h$ est alors vérifiée si

$$U(t) = -h\varepsilon_{33}(t) \tag{1.32}$$

et il vient

$$\begin{cases} u_1(x,t) = \varepsilon_{11}x_1 & +(\varepsilon_{12} - \omega_3)x_2 + 2\varepsilon_{13}x_3 \\ u_2(x,t) = (\varepsilon_{12} + \omega_3)x_1 & +\varepsilon_{22}x_2 + 2\varepsilon_{23}x_3 \\ u_3(x,t) = -U(t)x_3/h & \end{cases} \tag{1.33}$$

Et la solution définie par (1.30), (1.33) est solution du problème associé au cas sans frottement défini par les CL (1.11). Ainsi, pour réaliser un essai de compression simple, on écrase un lopin en lubrifiant le contact, pour s'approcher au maximum des conditions de non frottement, et en imposant, par exemple, une force $F(t)$ – essai à force imposée –, la mesure des déplacements donne alors $\varepsilon(t)$, et permet donc de déterminer la loi de comportement pour un tenseur σ de la forme (1.30).

Si le matériau est isotrope – notion que nous préciserons plus tard – alors un tenseur $\sigma(t)$ de la forme (1.30) produit une déformation de la forme

$$\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_T(t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T(t) & 0 \\ 0 & 0 & -U(t)/h \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

La déformation se réduit à un écrasement longitudinal, mesuré par $U(t)$ et une dilatation transversale que l'on mesure facilement à l'aide d'une jauge de déformation.

1.1.4 Les essais classiques