La fibración de Hopf

vista desde la geometría diferencial

David Lozano Campillo
Universidad de Murcia
9 de enero de 2023

Resumen

Keywords: lorem, ipsum, dolor, sit amet, lectus

Introducción

La fibración de Hopf es una poderosa herramienta para poder visualizar la 3-esfera S^3, una superficie de 3 dimensiones en $\mathbb{R}^4$, como fibras de la 2-esfera. Para poder describirla de forma adecuada, debemos introducir el concepto de cuaterniones. El concepto de cuaternión fue descubierto por William Rowan Hamilton cuando buscaba una manera sencilla de descibir rotaciones en $\mathbb{R}^3$ al igual que los números complejos describen fácilmente una rotación en el plano $\mathbb{R}^2$ mediante la multiplicación.

Definimos los cuaterniones $\mathbb{H}$ como el conjunto de puntos de la forma $a + bi + cj + dk$, donde $ij = jk = ki = 1$ y $ji = kj = ik = -1$, con el p. Dado un cuaternión $r = a + bi + cj + dk$, definimos su conjugado como $\bar{r} = a - bi - cj - dk$, y la norma como $|r|^2 = r\bar{(r)} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Tenemos por lo tanto que el inverso de un cuaternón r viene dado por $r^{-1} = \frac{\bar{r}}{|r|^2}$.

Un cuaternión r define una aplicación $R_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la siguiente manera: identificando $\mathbb{R}^3$ como el conjunto de cuaterniones imaginarios, definimos $R_r(p) = rpr^{-1}$. Se puede comprobar que dicho producto es también un cuaternión imaginario, luego podemos identificarlo con un punto de $\mathbb{R}^3$

Claramente la aplicación R_r conserva la norma, pues $|rpr^{-1}| = |r||p||r^{-1}| = |p||r||r|^{-1} = |p|$. Además, se puede verificar que $R_{kr} = R_r$ siendo k un número real, luego suponemos a partir de ahora que r tiene norma 1. Es fácil comprobar que si $r = a + bi + cj + dk$, entonces (b, c, d) es un autovector de R_r con autovalor 1. Por lo tanto, R es una rotación en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y su eje viene determinado por el subespacio generado por (b, c, d). El ángulo se puede calcular fácilmente tomando un vector w perpendicular a (b, c, d), por ejemplo $(c, -b, 0)$ si al menos algún b, c es distinto de cero, o $(1, 0, 0)$ en el otro caso. Aplicando la fórmula

$$\cos\theta = \frac{wR_r w}{|w|^2}$$

obtenemos que $\theta = 2\arccos(a)$.

Vamos a definir un punto distinguido en la 2-esfera, $P_0 = (1, 0, 0) = i$ en nuestra identificación. Entonces dado un punto en la 3-esfera, por la discusión anterior vemos que dicho cuaternión define una rotación R_r, y definimos entonces la fibración de Hopf $\pi : S^3 \to S^2$ como $\pi(r) = ri\bar{r}$.

T

Referencias