ASINTOTICO e o PICCOLO

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni di numeri reali definitivamente non nulli.

Asintotico: Si dice che a_n è *asintotico* a b_n, e si indica con il simbolo $a_n \sim b_n$, se
$$\frac{a_n}{b_n} \to 1.$$
Si osservi che la relazione $\sim$ tra successioni definitivamente non nulle è

- riflessiva, cioè $a_n \sim a_n$;
- simmetrica, cioè $a_n \sim b_n$ se e solo se $b_n \sim a_n$;
- transitiva, cioè e $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ implica che sia $a_n \sim c_n$.

Esempi: se $a_n \to 0$, allora
$$a_n \sim \sin a_n \sim \tan a_n \sim \arctan a_n \sim \ln(1+a_n) \sim e^{a_n} - 1 \sim \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{\alpha}, \quad (1-\cos a_n) \sim \frac{a_n^2}{2}.$$

"o piccolo": Si dice che a_n è *o piccolo* di b_n, e si indica con il simbolo $a_n = o(b_n)$, se
$$\frac{a_n}{b_n} \to 0.$$
Esempi: $n! = o(n^n)$, $n^b = o(c^n)$ $(b > 0,\ c > 1)$, $c^n = o(n!)$ $(c > 1)$.

Si osservi che la relazione di *o piccolo* tra successioni definitivamente non nulle

- non è riflessiva, cioè **non è** $a_n = o(a_n)$;
- non è simmetrica, cioè se $a_n = o(b_n)$, **non è** $b_n = o(a_n)$;
- è transitiva, cioè se $a_n = o(b_n)$ e $b_n = o(c_n)$, allora $a_n = o(c_n)$.

Le relazioni di *asintotico* e di *o piccolo* sono legate come segue:
$$a_n \sim b_n \text{ se e solo se } a_n = b_n + o(b_n).$$
Infatti,
$$\frac{a_n}{b_n} \to 1 \iff \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 0 \iff \frac{a_n - b_n}{b_n} \to 0 \iff a_n - b_n = o(b_n).$$
Ad esempio, è equivalente scrivere $n^2 + \ln n \sim n^2$, oppure $n^2 + \ln n = n^2 + o(n^2)$.
Si noti che, se $a_n = o(b_n)$, e $a'_n = o(b_n)$, allora $a_n + a'_n = o(b_n)$, e $a_n - a'_n = o(b_n)$.
Attenzione!

- $a_n \sim a'_n$ non implica che sia $e^{a_n} \sim e^{a'_n}$: ad esempio, $n^2 + n \sim n^2$ ma $\frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \not\to 1$;
- $a_n \sim a'_n$ implica che sia $\ln a_n \sim \ln a'_n$ purché **non sia** $a_n \to 1$. Per esempio, vale la relazione $\ln(n! + n^2 - 4) \sim \ln(n!)$, ma è falso $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

USO dei SIMBOLI nei CALCOLI di LIMITE

- Se $a_n = o(b_n)$, allora $\lim(a_n + b_n) = \lim b_n$;
- se $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n$, allora $\lim a_n b_n = \lim a'_n b'_n$, e $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lim \dfrac{a'_n}{b'_n}$.

Si osservi che $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n$ **non implica** $(a_n - b_n) \sim (a'_n - b'_n)$, anche quando $a_n - b_n$ e $a'_n - b'_n$ sono definitivamente non nulli.

Esempio: $a_n = n + 1/n$, $a'_n = n + 1/n^2$, $b_n = b'_n = n$.

Qualche esempio di applicazione:

- $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \sim n \cdot \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} \to 0$;
- $\dfrac{n^3 - \ln n + n!}{n^n - 3^n + \cos n} \sim \dfrac{n!}{n^n} \to 0$;
- $\dfrac{\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{1/3} - 1}{(e^{2/n^2} - 1) \arctan n} \sim \dfrac{\frac{1}{3} \sin \frac{1}{n}}{\arctan n \cdot \frac{2}{n^2}} \sim \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}}{\arctan n \cdot \frac{2}{n^2}} = \dfrac{n}{6 \arctan n} \to +\infty$;
- $\dfrac{\arctan \frac{1}{n+n^3} \cdot \ln(n^2 + n + \sin n)}{3 \ln(4n^2 + \sqrt{n} + 7) \cdot (\cos \frac{1}{2n} - 1)} \sim \dfrac{\arctan \frac{1}{n^3} \cdot \ln n^2}{3 \ln 4n^2 \cdot (-\frac{1}{8n^2})} \sim \dfrac{\frac{1}{n^3} \cdot 2 \ln n}{-6 \ln n \cdot \frac{1}{8n^2}} = -\dfrac{8}{3n} \to 0$.