이다. 이 구간에서 $(0.2)^{n+1}/[z^{n+1}(n+1)]$은 $(0.2)^{n+1}/(n+1)$ 보다 작다. 따라서 다음을 만족하는 n을 찾을 수 있다.

$$\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)} < 0.001$$

$$1000 < (n+1)5^{n+1}$$

시행착오를 통하여 이 부등식을 만족하는 가장 작은 n값은 $n=3$임을 알 수 있다. 따라서 원하는 정확도를 만족하는 $\ln(1.2)$의 근삿값을 구하기 위해서는 삼차 테일러 다항식이 필요하다.

연습문제 7.5

1. 다음 주어진 $x=c$에서 f의 값과 기울기가 같은 일차다항식함수 P_1을 구하여라. 그래프 계산기로 f와 P_1의 그래프를 그려라. P_1을 무엇이라 부르는가?

(a) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $c=1$ (b) $f(x)=\sec x$, $c=\dfrac{\pi}{4}$

2. 함수 $f(x)=\cos x$와 그것의 매클로린 다항식 P_2, P_4, P_6이 있다(예제 5 참고).

(a) 그래프 계산기로 f와 지시한 다항 근사식의 그래프를 그려라.

(b) $n=2, 4, 6$에 대하여 $f^{(n)}(0)$과 $P_n^{(n)}(0)$의 값을 계산하고 비교하여라.

(c) (b)의 결과를 이용하여 $f^{(n)}(0)$과 $P_n^{(n)}(0)$을 예측하여라.

3. 다음 함수의 n차 매클로린 다항식을 구하여라.

(a) $f(x)=e^{-x}$, $n=3$ (b) $f(x)=e^{2x}$, $n=4$

(c) $f(x)=\sin x$, $n=5$ (d) $f(x)=xe^{x}$, $n=4$

(e) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $n=4$ (f) $f(x)=\sec x$, $n=2$

4. 다음 주어진 c에서 전개한 n차 테일러 다항식을 구하여라.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $n=4$, $c=1$ (b) $f(x)=\sqrt{x}$, $n=4$, $c=1$

(c) $f(x)=\ln x$, $n=4$, $c=1$

5. 컴퓨터 대수시스템으로 주어진 조건에 맞는 함수 $f(x)=\tan x$의 테일러 다항식을 구하고 함수와 구한 테일러 다항식의 그래프를 그려라.

(a) $n=3$, $c=0$ (b) $n=3$, $c=\pi/4$

6. (수치적, 그래프적 근삿값)

(a) $f(x)=\sin x$에 대한 매클로린 다항식 $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$를 이용하여 다음 표를 완성하여라.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\sin x$	0	0.2474	0.4794	0.6816	0.8415
$P_1(x)$					
$P_3(x)$					
$P_5(x)$					

(b) 그래프 계산기로 $f(x)=\sin x$와 (a)의 매클로린 다항식의 그래프를 그려라.

(c) 그 다항식이 전개한 점으로부터 거리가 증가할 때 다항식 근삿값의 정확도의 변화에 대하여 설명하여라.

7. (수치적, 그래프적 근삿값) $f(x)=\arcsin x$에 대하여 (a) $f(x)$에 대한 매클로린 다항식 $P_3(x)$를 구하여라. (b) $f(x)$와 $P_3(x)$에 대한 다음 표를 완성하여라. (c) 같은 좌표평면에 $f(x)$와 $P_3(x)$의 그래프를 그려라.

x	-0.75	-0.50	-0.25	0	0.25	0.50	0.75
$f(x)$							
$P_3(x)$							

8. 앞에 나온 연습문제의 다항식을 이용하여 주어진 x값에서 함수의 근삿값을 구하여라.

(a) $f(x)=e^{-x}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, 연습문제 3(a)

(b) $f(x)=\ln x$, $f(1.2)$, 연습문제 4(c)

9. 다음에서 테일러정리를 이용하여 근삿값에 대한 오차의 상계를 구하고 오차의 정확한 값을 계산하여라.

(a) $\cos(0.3)\approx 1-\frac{(0.3)^2}{2!}+\frac{(0.3)^4}{4!}$

(b) $\arcsin(0.4)\approx 0.4+\frac{(0.4)^3}{2\cdot 3}$

10. 다음 주어진 x에서 함숫값과 근삿값과의 오차가 0.001보다 작은 매클로린 다항식의 차수를 결정하여라.

(a) $\sin(0.3)$ (b) $e^{0.6}$

11. 다음 주어진 x에서 함숫값과 근삿값과의 오차가 0.0001보다 작은 매클로린 다항식의 차수를 결정하여라. 컴퓨터 대수시스템으로 필요한 도함수를 구하고 계산하여라.

(a) $f(x)=\ln(x+1)$, $f(0.5)$의 근삿값

(b) $f(x)=e^{-\pi x}$, $f(1.3)$의 근삿값

12. 다음에서 오차가 0.001을 초과할 수 없다면 함수가 테일러 다항식으로 대치될 수 있는 x값들을 결정하여라.

(a) $f(x)=e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$, $x<0$

(b) $f(x)=\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$

13. **(매클로린 다항식 비교하기)**

(a) $f(x)=e^x$과 $g(x)=xe^x$의 사차와 오차 매클로린 다항식을 각각 비교하여라. 어떤 관계가 있는가?

(b) (a)의 결과와 $f(x)=\sin x$에 대한 오차 매클로린 다항식을 이용하여 함수 $g(x)=x\sin x$에 대한 육차 매클로린 다항식을 구하여라.

(c) (a)의 결과와 $f(x)=\sin x$에 대한 오차 매클로린 다항식을 이용하여 함수 $g(x)=(\sin x)/x$에 대한 사차 매클로린 다항식을 구하여라.

14. f가 기함수이면 n차 매클로린 다항식은 x의 홀수 지수의 항만을 포함한다는 것을 증명하여라.

7.6 멱급수

- 멱급수의 정의 이해하기
- 멱급수의 수렴반지름과 수렴구간 구하기
- 멱급수의 끝점에서 수렴 결정하기
- 멱급수를 미분, 적분하기

멱급수

7.5절에서 테일러 다항식에 의한 근사 함수 개념을 소개하였다. 예를 들어 함수 $f(x)=e^x$은 아래와 같이 매클로린 다항식으로 어림할 수 있다.

$e^x\approx 1+x$ 일차 다항식

$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}$ 이차 다항식

$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 삼차 다항식

예제 4로부터 위 세 급수 중 도함수 $f'(x)$의 급수는 양 끝점에서 수렴할 것 같지 않다. 사실 $f'(x)$에 대한 급수가 끝점 $x=c\pm R$에서 수렴하면 $f(x)$에 대한 급수도 역시 그 점에서 수렴함을 증명할 수 있다.

연습문제 7.6

1. 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$의 중심을 구하여라.

2. 다음 멱급수의 수렴반지름을 구하여라.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2}$

3. 다음 멱급수의 수렴구간을 구하여라(구간의 끝점에서 수렴여부를 확인한다).

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!\left(\frac{x}{2}\right)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{4^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^{n-1}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-2x)^{n-1}$ (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)x^n}{n!}$

4. $c>0$일 때, 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}}$의 수렴반지름을 구하여라.

5. 다음 멱급수의 수렴구간을 구하여라(구간의 끝점에서 수렴여부를 확인한다).

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n$, $k>0$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)x^n}{n!}$, $k\geq 1$

6. $n=1$에서 시작하는 합이 다음 급수와 같은 급수를 써라.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

다음에서 (a) $f(x)$, (b) $f'(x)$, (c) $f''(x)$, (d) $\int f(x)\,dx$의 수렴구간을 각각 구하여라. 또한 구한 수렴구간의 양 끝점에서 수렴여부를 확인하여라(7~8).

7. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

8. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$

9. 다음 멱급수로 나타낸 함수는 주어진 미분방정식의 한 해임을 보여라.

(a) $y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y''+y=0$

(b) $y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y''-y=0$

(c) $y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$, $y''-xy'-y=0$

10. 다음 급수는 잘 알려진 함수이다. 컴퓨터 대수 시스템으로 부분합 S_{10}의 그래프를 그리고, 그래프로부터 함수가 어떤 함수인지 확인하여라.

(a) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(b) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $-1<x<1$

11. 연습문제 3(a)에서 등비급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$의 수렴구간은 $(-2, 2)$임을 알았다. 다음을 구하여라.

(a) $x=\frac{3}{4}$일 때 급수의 합을 구하여라. 그래프 계산기로 부분합 수열의 처음 6항을 그리고 급수의 합을 나타

내는 수평인 직선을 그려라.

(b) $x=-\frac{3}{4}$ 일 때 (a)를 반복하여라.

(c) 부분합의 수렴비율과 (a)와 (b)에서의 급수의 합을 비교하여 간결하게 서술하여라.

(d) 부분합을 구성하는 것들은 이들이 급수의 합으로 수렴하는 것과 얼마나 다른가? 양의 실수 M이 주어지면 자연수 N이 존재하여 유한 부분합이 다음과 같다.

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}>M$$

그래프 계산기로 다음 표를 완성하여라.

M	10	100	1000	10000
N				

12. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 과 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}$ 에 대하여

(a) f와 g의 수렴구간을 구하여라.

(b) $f'(x)=g(x)$ 임을 보여라.

(c) $g'(x)=-f(x)$ 임을 보여라.

(d) 함수 f와 g는 어떤 함수인지 확인하여라.

13. (참, 거짓) 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하여라. 거짓이면 그 이유를 설명하거나 예를 들어라.

(a) $x=2$ 에서 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$ 이 수렴하면 $x=-2$ 에서도 수렴한다.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$ 의 수렴구간이 $(-1, 1)$이면 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(x-1)^{n}$ 의 수렴구간은 $(0, 2)$이다.

14. p와 q가 양의 정수이면 멱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+p)!}{n!(n+q)!}x^{n}$$

은 수렴반지름이 $R=\infty$ 임을 증명하여라.

15. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}x^{n},\ c_{n+3}=c_{n},\ n\geq 0$ 에 대하여

(a) 급수의 수렴구간을 구하여라.

(b) $f(x)$에 대하여 확실한 공식을 구하여라.

16. $n>0$ 에 대하여, $R>0$ 이고 $c_{n}>0$ 이라 하자. 급수 $\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}(x-x_{0})^{n}$ 의 수렴구간이 $(x_{0}-R,\ x_{0}+R]$ 이면 이 급수는 $x_{0}+R$ 에서 조건부수렴함을 보여라.

7.7 멱급수로의 함수 표현

- 함수를 나타내는 등비 멱급수 구하기
- 급수 연산으로 멱급수 만들기

등비 멱급수

이 절과 다음 절에서는 주어진 함수를 멱급수로 나타내는 여러 가지 방법에 대하여 다룬다.

함수 $f(x)=1/(1-x)$ 이 있다. f는 다음 등비급수의 합과 거의 같다.

$$\sum_{n=0}^{\infty}ar^{n}=\frac{a}{1-r},\quad |r|<1$$

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + C \\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x=0\text{으로 하면 } C=0 \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \text{수렴구간은 } (-1,\,1)
\end{aligned}$$

예제 5에서 $\arctan x$에 대하여 전개한 멱급수가 역시 $x=1$에서 수렴한다 ($\arctan x$에 수렴)는 것을 알 수 있다. 예를 들어 $x=1$이면

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

로 쓸 수 있다. 그러나 이 급수[1671년 그레고리(James Gregory)가 전개]는 매우 느리게 수렴하여 원하는 정확도를 얻으려면 백 항까지 이용해야 하므로 π의 근삿값을 구하는 실질적인 방법으로 부적당하다. 예제 6에서는 아크탄젠트 급수를 이용하여 적은 몇 개의 항만으로도 π의 매우 양호한 근삿값을 구할 수 있는 예를 보여주고 있다.

The Granger Collection

라마누잔
Srinivasa Ramanujan, 1887~1920

π의 근삿값을 구하는 데 이용할 수 있는 급수는 과거 300년 동안 수학자들의 관심사였다. 1914년 인도 수학자 라마누잔은 $1/\pi$의 근삿값을 구하는 데 놀랄만한 급수를 찾았다. 라마누잔의 급수의 각 연속하는 항은 $1/\pi$의 값에 거의 8자리보다 훨씬 더 많은 자리수만큼 참값을 더한다. *Scientific American*에 실린 Jonathan M. Borwein과 Peter B. Borwein의 논문 "Ramanujan and Pi"를 참고하여라.

예제 6 급수로 π의 근삿값 구하기

다음 삼각항등식을 이용하여 π의 근삿값을 구하여라.

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

[풀이] $\arctan(1/5)$과 $\arctan(1/239)$에 대한 급수의 각 5개 항만으로

$$4\left(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\right) \approx 3.1415926$$

을 얻는다. 이는 π의 정확한 값과 0.0000001보다 작은 오차값이다.

연습문제 7.7

1. 함수 $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$의 중심이 0인 등비 멱급수를 (a) 예제 1, 2에서 보인 방법을 이용 (b) 긴 나눗셈을 이용하여 각각 구하여라.

2. 다음 함수의 주어진 중심이 c인 멱급수를 구하고, 수렴구

간을 정하여라.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$, $c=5$ (b) $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$, $c=0$

(c) $g(x)=\dfrac{1}{2x-5}$, $c=-3$ (d) $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$, $c=0$

(e) $g(x)=\dfrac{3x}{x^2+x-2}$, $c=0$

(f) $f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}$, $c=0$

3. 멱급수 $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 을 이용하여 다음 함수의 중심이 0인 멱급수를 구하여라.

(a) $h(x)=\dfrac{-2}{x^2-1}=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$

(b) $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{x+1}\right]$

(c) $f(x)=\ln(x+1)=\int\dfrac{1}{x+1}\,dx$

(d) $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

(e) $h(x)=\dfrac{1}{4x^2+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$ 에 대하여 (a) 그래프 계산기로 급수의 부분합의 그래프를 그려라. (b) 급수의 합과 수렴반지름을 구하여라. (c) 급수의 50개 항을 이용하여 $x=0.5$ 일 때 급수의 합의 근삿값을 구하여라. (d) 근삿값은 무엇을 나타내는지 정하고 그 근삿값이 얼마나 적당한지를 말하여라.

5. $f(x)=\arctan x$ 의 급수를 이용하여 다음 값의 근삿값을 구하여라(단 $R_N\le 0.001$).

(a) $\arctan\dfrac{1}{4}$ (b) $\int_0^{1/2}\dfrac{\arctan x^2}{x}\,dx$

6. 멱급수 $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $|x|<1$를 이용하여 다음 함수의 급수를 구하고, 수렴구간을 결정하여라.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ (b) $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

7. **(확률)** 반복하여 동전을 던진다. n번째 시도에서 처음 앞면이 나올 확률은 $P(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 이다. 이 게임을 여러 번 계속할 때, 처음 앞면이 나올 때까지 던진 평균 횟수는

$$E(n)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(n)$$

이다(이 값을 n의 기댓값이라 한다). 연습문제 6의 결과를 이용하여 $E(n)$을 구하여라. 구한 답이 기대한 답이 되는가? 왜 그런가 또는 그렇지 않은가?

8. 다음 주어진 함수에 대한 멱급수를 구하기 위하여 등비급수

$$g(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1$$

를 이용하는 방법을 설명하여라.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ (b) $f(x)=\dfrac{5}{1+x}$

9. 아래 방정식의 좌변의 값은 $-\pi/2$와 $\pi/2$의 사이에 있다. $xy\ne 1$에 대하여 $\arctan x+\arctan y=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 임을 증명하여라.

10. $2\arctan\dfrac{1}{2}-\arctan\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$ 에 대하여 (a) 이 방정식을 증명하여라. (b) 이 방정식과 아크탄젠트함수에 대한 급수를 이용하여 π의 근삿값을 소수점 아래 둘째 자리까지 정확히 구하여라.

11. 이미 알려진 함수를 이용하여 다음 수렴급수의 합을 구하여라. 그 함수를 알아보고 합을 어떻게 얻었는지를 설명하여라.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{5^n n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}$

12. 급수 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 은 $|x+1|<4$ 에 대하여 수렴한다. 급수 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ 의 수렴여부는 어떻게 결론지을 수 있는가? 설명하여라.

13. 급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$ 의 합을 구하여라.