연습문제 12.8

1. 다음 변수변환에 대한 야코비안 $\partial(x, y)/\partial(u, v)$를 구하여라.

(a) $x = -\frac{1}{2}(u - v),\ y = \frac{1}{2}(u + v)$

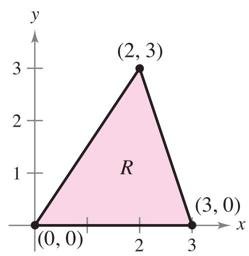
(b) $x = u - v^2,\ \ y = u + v$

(c) $x = u\cos\theta - v\sin\theta,\ \ y = u\sin\theta + v\cos\theta$

(d) $x = e^u \sin v,\ \ y = e^u \cos v$

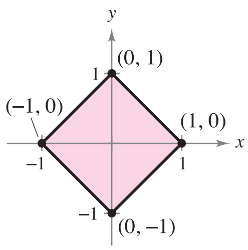
2. 주어진 변환으로 xy평면의 영역 R의 uv평면으로의 상(image) S를 그려라.

$$x = 3u + 2v,\ \ y = 3v$$

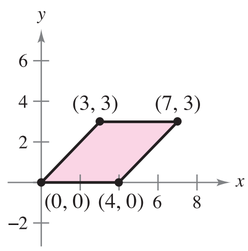


3. 다음 주어진 변수변환으로 이중적분을 계산하여라.

(a) $\displaystyle\int_R\int 4(x^2 + y^2)\,dA,\ \ x = \frac{1}{2}(u + v),\ y = \frac{1}{2}(u - v)$



(b) $\displaystyle\int_R\int y(x - y)\,dA,\ \ x = u + v,\ y = u$



(c) $\displaystyle\int_R\int e^{-xy/2}\,dA,\ x = \sqrt{\frac{v}{u}},\ y = \sqrt{uv}$

R: $y = \frac{1}{4}x,\ y = 2x,\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{4}{x}$의 그래프 사이의 제1사분면에 있는 영역

4. 변수변환으로 다음 곡면 $z = f(x, y)$의 아래와 평면영역 R의 위로 둘러싸인 입체의 부피를 구하여라.

(a) $f(x,\ y) = (x + y)e^{x-y}$

R: 꼭짓점이 (4, 0), (6, 2), (4, 4), (2, 2)인 정사각형 영역

(b) $f(x,\ y) = \sqrt{(x - y)(x + 4y)}$

R: 꼭짓점이 (0, 0), (1, 1), (5, 0), (4, −1)인 평행사변형 영역

(c) $f(x,\ y) = \sqrt{x + y}$

R: 꼭짓점이 $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$인 삼각형 영역$(a>0)$

5. xy평면에서 영역 R은 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$로 둘러싸인 영역이고 변환은 $x = au,\ y = bv$이다.

(a) 주어진 변환에 대하여 영역 R과 상 S의 그래프를 그려라.

(b) $\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$를 구하여라.

(c) 타원의 넓이를 구하여라.

6. 다음 변수변환에 대하여 야코비안 $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$를 구하여라.

$x = f(u, v, w),\ y = g(u, v, w),\ z = h(u, v, w)$일 때 u, v, w에 대한 x, y, z의 야코비안은 $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$로 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(u,\ v,\ w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

(a) $x = u(1 - v),\ \ y = uv(1 - w),\ \ z = uvw$

(b) **(구면좌표계)**

$x = \rho\sin\phi\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\phi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\phi$

넓이는

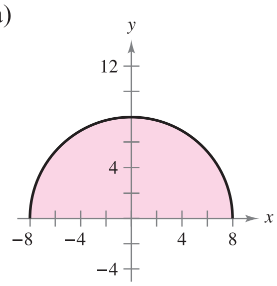
$$A=\int_1^2\int_0^{\pi/(3r)} r\,d\theta dr=\int_1^2 r\theta\Big]_0^{\pi/(3r)} dr=\int_1^2\frac{\pi}{3}\,dr=\frac{\pi r}{3}\Big]_1^2=\frac{\pi}{3}$$

이다(그림 12.32).

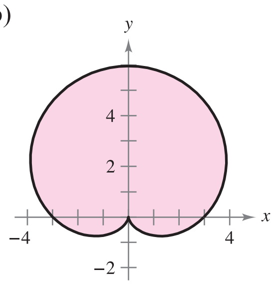
연습문제 12.3

1. 다음 영역을 극좌표계로 나타내어라.

(a)



(b)



2. 다음 이중적분을 계산하고 영역 R을 그려라.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^6 3r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_2^3\sqrt{9-r^2}\,r\,dr\,d\theta$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+\sin\theta}\theta r\,dr\,d\theta$

3. 다음 반복적분을 극좌표로 고쳐서 계산하여라.

(a) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\,dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}(x^2+y^2)^{3/2}\,dydx$

(c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\,dydx$

4. 다음 반복적분의 합을 극좌표 반복적분으로 고쳐서 계산하여라.

$$\int_0^2\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}\,dydx+\int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$$

5. 이중적분 $\displaystyle\int_R\int f(x,\ y)dA$를 극좌표 이중적분으로 고쳐서 계산하여라.

(a) $f(x,\ y)=x+y,\ R: x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

(b) $f(x,\ y)=\arctan\dfrac{y}{x},\ R: x^2+y^2\ge 1,$
$x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x$

6. 다음 방정식의 그래프로 둘러싸인 입체의 부피에 대하여 극좌표 이중적분을 구하여라.

(a) $z=xy,\ \ x^2+y^2=1,$ 제1팔분공간

(b) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0,\ \ x^2+y^2=25$

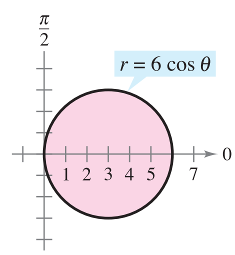
(c) 반구 $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$의 내부와
원기둥 $x^2+y^2-4x=0$의 내부

7. **(부피)** $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$의 내부와 원기둥 $x^2+y^2=a^2$의 외부로 둘러싸인 입체의 부피가 부피의 반이 되도록 a 값을 구하여라.

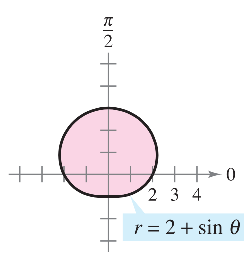
8. **(부피)** $z=25e^{-(x^2+y^2)/4},\ z=0$과 $x^2+y^2=16$의 그래프로 둘러싸인 입체의 중심을 지나 수직으로 원형 구멍을 뚫을 때 부피의 $\dfrac{1}{10}$이 제거되도록 원형의 지름을 구하여라.

9. 다음 영역의 넓이를 이중적분으로 구하여라.

(a)



(b)



10. 컴퓨터 대수시스템으로

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^5 r\sqrt{1+r^3}\,\sin\sqrt{\theta}\,dr\,d\theta$$

의 근삿값을 계산하여라.

11. (참, 거짓) 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하여라. 거짓이면 그 이유를 설명하거나 예를 들어라.

「$\int_R\int f(r,\theta)\,dA>0$ 이면 모든 $(r,\theta)\in R$ 에 대하여 $f(r,\theta)>0$ 이다.」

12. (확률) 적분 $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ 의 값은 정규확률밀도함수를 전개하는 데 유용하다.

(a) 극좌표계를 이용하여 다음 이상적분을 계산하여라.

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dA$$

(b) (a)의 결과를 이용하여 I 값을 구하여라.

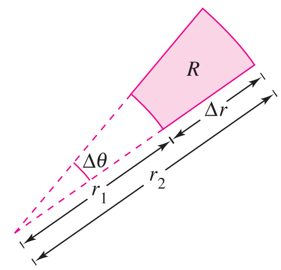
더 알아보기

이 문제에 대하여 더 많은 정보를 얻으려면 *Mathematics Teacher*에 실린 William Dunham의 논문 "Integrating e^{-x^2} Without Polar Coordinates"을 보아라. 이 논문을 보려면 웹사이트 www.matharticles.com을 방문하여라.

13. (인구) 도시 인구밀도는 모델함수 $f(x,y)=4000e^{-0.01(x^2+y^2)}$, $x^2+y^2\le 49$ (x, y의 단위는 마일이다)로 근사한다. 원 영역에서 밀도함수를 적분하여 도시 인구의 근삿값을 구하여라.

14. $y=2,\ y=4,\ y=x,\ y=\sqrt{3x}$ 으로 둘러싸인 영역과 $\int_R\int f\,dA$가 있다. 영역 R을 (a) 수평으로 (b) 수직으로 (c) 부채꼴로 분할할 때 적분한계(적분구간)를 정하여 이 중적분을 나타내어라.

15. 극부채꼴 영역 R의 넓이가 $A=r\Delta r\Delta\theta$ 임을 밝혀라 [$r=(r_1+r_2)/2$ 은 R의 평균반지름이다].



12.4 질량중심과 관성모멘트

- 이중적분으로 평판의 질량 구하기
- 이중적분으로 질량중심 구하기
- 이중적분으로 관성모멘트 구하기

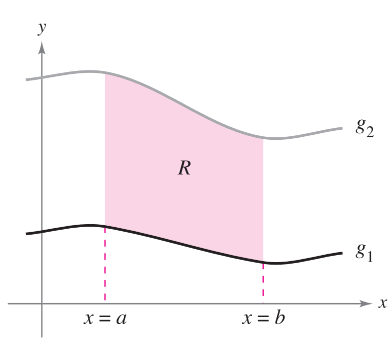


그림 12.33 밀도 ρ가 균일한 면판

질량

그림 12.33에서 영역 R과 같이 밀도 ρ가 균일한 면판의 질량은

$$\text{질량}=\rho A=\rho\int_R\int dA=\int_R\int \rho\,dA$$