■ 반복이 있는 이원배치법

○ 실험 설계

- ◦ 수준 수가 a인 요인 A, 수준 수가 b인 요인 B, 반복 수가 r
- ◦ $a \times b \times r$ 실험 전체를 완전 확률화

● 반복이 없는 이원배치법과의 비교

- ◦ 요인의 조합의 효과(**상호작용, 교호작용, interaction**)를 분리하여 계산
- ◦ 실험오차를 줄일 수 있음
- ◦ 반복한 자료로부터 실험의 관리 상태를 검토할 수 있음

○ 자료구조

요인 A / 요인 B	A_1	A_2	$\cdots$	A_a
B_1	$Y_{111}, \ldots, Y_{11r}$	$Y_{211}, \ldots, Y_{21r}$	$\cdots$	$Y_{a11}, \ldots, Y_{a1r}$
B_2	$Y_{121}, \ldots, Y_{12r}$	$Y_{221}, \ldots, Y_{22r}$	$\cdots$	$Y_{a21}, \ldots, Y_{a2r}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
B_b	$Y_{1b1}, \ldots, Y_{1br}$	$Y_{2b1}, \ldots, Y_{2br}$	$\cdots$	$Y_{ab1}, \ldots, Y_{abr}$

반복r개

○ 구조식

$$\begin{aligned} Y_{ijk} &= \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \\ &= \mu + (\mu_{i.} - \mu) + (\mu_{.j} - \mu) + (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu) + \varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

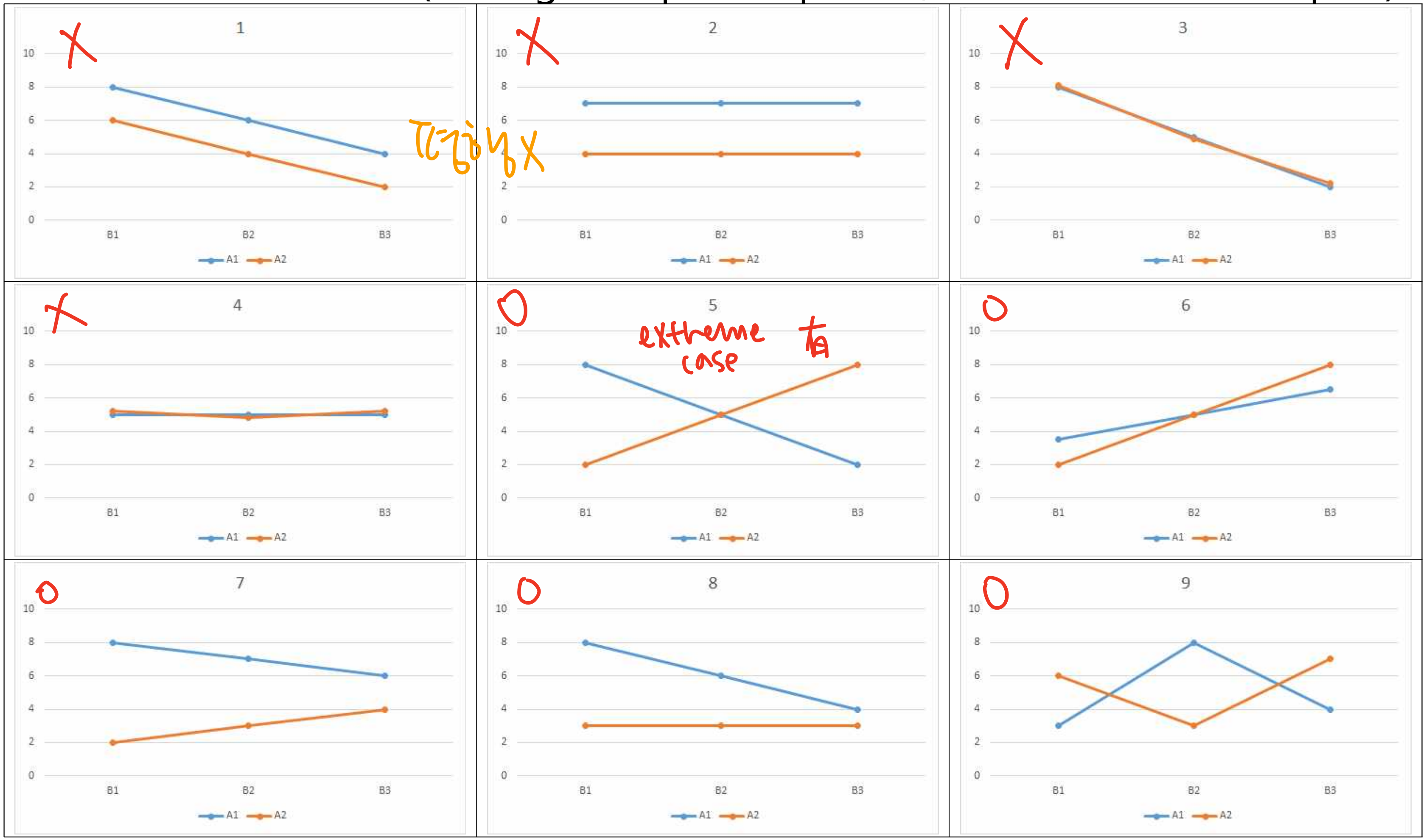
⇨ $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$, $i = 1,\ \ldots, a,\ \ j = 1,\ \ldots, b,\ \ k = 1,\ \ldots, r$,

- ○ μ: 전체 평균, α_i: 요인 A의 처리효과, β_j: 요인 B의 처리효과
  - A와 B를 주효과(main effect)라고 함
- ○ $(\alpha\beta)_{ij}$: 요인 A와 B의 상호작용 효과 (interaction effect)
- ○ $\varepsilon_{ij} \sim$ iid $N(0, \sigma^2)$: 오차항
- ○ 제약조건: $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$
  - $\sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = 0,\ \ j = 1, \ldots, b$, $\sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0,\ \ i = 1, \ldots, a$

○ 상호작용

- ○ 요인 B의 수준의 변화에 따라 요인 A의 효과가 변하는 경우 상호 작용이 존재한다고 함
  - (예) 요인 A : 촉매,   요인 B : 반응온도
  - 온도 B_1에서 촉매 A_1의 인장강도가 촉매 A_2의 인장강도보다 높은데 반하여 온도 B_2에서 촉매 A_2의 인장강도가 촉매 A_1의 인장강도보다 높을 때 A와 B간에 상호 작용이 있다고 함
- ○ 상호작용이 존재하지 않을 경우, AB의 최적조건은 A 요인의 최적조건을 구하고 B의 최적조건을 구하여 합함
- ○ 상호작용이 존재하는 경우, 모든 수준의 조합 A_iB_j에서 모평균을 추정함

● 평균반응프로파일(average response profile, treatment means plot)



○ 변동의 분해

$$Y_{ijk} - \overline{Y}_{...} = (\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}) + (\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}) + (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})$$

$CT = \frac{Y_{...}^2}{N}$

$$TSS = SSA + SSB + SS(AB) + SSE$$

○ $TSS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{N}$: 자유도 $= N-1$

○ $SSA = br\sum_{i=1}^{a}(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{a}\frac{Y_{i..}^2}{br} - \frac{Y_{...}^2}{N}$: 자유도 $= a-1$

○ $SSB = ar\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2 = \sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{.j.}^2}{ar} - \frac{Y_{...}^2}{N}$: 자유도 $= b-1$

○ $SSTR = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{ij.}^2}{r} - \frac{Y_{...}^2}{N}$: 자유도 $= ab-1$

treatment 변동

$SSA = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{r}(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...})^2 = br\sum_{i}^{a}(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...})^2$

$SSB = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{r}(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2 = ar\sum_{j}^{b}(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2$

$SSTR = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{r}(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{...})^2 = r\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{...})^2$

○ 간편식 X $SS(AB)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\overline{Y}_{ij.}-\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{.j.}+\overline{Y}_{...})^2=SSTR-SSA-SSB$

- 자유도: $ab-1-(a-1)-(b-1)=(a-1)(b-1)$

○ $SSE=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij.})^2$: 자유도 $ab(r-1)$

- 자유도: $N-1-(ab-1)=ab(r-1)$

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
처리	ab-1	SSTR	MSTR	
처리A	a-1	SSA	MSA	①
처리B	b-1	SSB	MSB	②
상호작용	(a-1)(b-1)	SS(AB)	MS(AB)	③
오차	ab(r-1)	SSE	MSE	
전체	N-1	TSS		

① → $H_0: \alpha_1=\cdots=\alpha_a=0$

② → $H_0: \beta_1=\cdots=\beta_b=0$

③ → $H_0: (\alpha\beta)_{11}=\cdots=(\alpha\beta)_{ab}=0$

○ 가설 검정

- 요인 A의 처리 효과의 동일성 검정

① $H_0 \ : \ \alpha_1 = \alpha_2 = \ \cdots \ = \alpha_a = 0$

- 요인 B의 처리 효과의 동일성 검정

② $H_0 \ : \ \beta_1 = \beta_2 = \ \cdots \ = \beta_b = 0$

- 상호작용의 효과

③ $H_0 : (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \ \cdots \ = (\alpha\beta)_{ab} = 0$

모든처리에대한동일성검정
H_0 : 모든 μ_{ij}들이같다
H_1 : not H_0

○ 분산분석표

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
처리	ab-1	SSTR	MSTR	MSTR/MSE
처리 A	a-1	SSA	MSA	MSA/MSE ①
처리 B	b-1	SSB	MSB	MSB/MSE ②
상호작용	(a-1)(b-1)	SS(AB)	MS(AB)	MS(AB)/MSE ③
오차	ab(r-1)	SSE	MSE	
전체	N-1	TSS		

AB ig 가 하나라도 유의하면 B가 유의하지 않아도 빼지않음

- 상호작용효과가 유의하면 주효과가 유의하지 않더라도 주효과를 모형에서 생략하지 않음

A요인 주효과	B요인과의 상호작용효과	A요인의 효과
있음	있음	있음
있음	없음	있음
없음	있음	있음
없음	없음	없음

  - B요인의 적어도 한 수준에서 A요인의 효과가 있으면 A요인은 효과 있음
  - B요인의 모든 수준에서 A요인의 효과가 없으면 A요인은 효과 없음

○ 분산분석후의 추정 (모수 모형)

○ $\mu(A_i)$와 $\mu(B_j)$의 구간추정

- $\overline{Y}_{i..} \pm t_{\alpha/2, ab(r-1)} \sqrt{MSE/br}$
- $\overline{Y}_{.j.} \pm t_{\alpha/2, ab(r-1)} \sqrt{MSE/ar}$

$Var(\overline{Y}_{i..}) = Var\left(\frac{\sum_j \sum_k Y_{ijk}}{br}\right) = \frac{br\sigma^2}{b^2 r^2} = \frac{\sigma^2}{br}$

$Var(\overline{Y}_{.j.}) = Var\left(\frac{\sum_i \sum_k Y_{ijk}}{ar}\right) = \frac{ar\sigma^2}{a^2 r^2} = \frac{\sigma^2}{ar}$

○ $\mu(A_iB_j)$의 구간추정

- $\overline{Y}_{ij.} \pm t_{\alpha/2, ab(r-1)} \sqrt{MSE/r}$

$Var(\overline{Y}_{ij.}) = Var\left(\frac{\sum Y_{ijk}}{r}\right) = \frac{r\sigma^2}{r^2} = \frac{\sigma^2}{r}$

※ 상호작용이 유의한 경우, 일반적으로 요인 A, B의 각 수준의 모평균을 추정하는 것보다 수준의 조합 A_iB_j에서 모평균을 추정하는 것이 의미가 있을 수 있음

$$Var(\overline{Y}_{ij\cdot} - \overline{Y}_{kl\cdot})$$

$$= \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma^2}{r} = \sigma^2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right).$$

○ 상호작용이 있는 경우 다중비교

- $H_0: \mu_{ij} = \mu_{kl}$ vs $H_1: \mu_{ij} \neq \mu_{kl}$ 또는 $\mu_{ij} - \mu_{kl}$의 신뢰구간
- $\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{kl.} \pm c\sqrt{MSE}\sqrt{1/r + 1/r}$
  - 최소유의차: $c = t_{\alpha/2, ab(r-1)}$
  - Bonferroni: $c = t_{\alpha/(2k), ab(r-1)}$, $k =$ 비교검정의 경우의 수
  - Scheffe: $c = \sqrt{(ab-1)F_{\alpha, ab-1, ab(r-1)}}$
  - Tukey: $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{\alpha, ab, ab(r-1)}$

▣ 강낭콩의 비타민-C 함량 비교

- 요인 A: 저장 온도 F^0(0, 10, 20) → a=3
- 요인 B: 저장 기간 (2주, 4주, 6주, 8주) → b=4
- 반복 수: 3 ⇨ 총 36개의 강낭콩을 완전 확률화 계획법으로 시험 → r=3
- 조합별 합계만을 표시

저장기간 / 저장온도	2주	4주	6주	8주	합계	평균
0	45	47	46	46	184	46.0
10	45	43	41	37	166	41.5
20	34	28	21	16	99	24.8
합계	124	118	108	99	449	
평균	41.3	39.3	36.0	33.0		37.8

- $\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 = 6025.95$

a=3, b=4, r=3

○ 변동분해

- $TSS = 425.92$ = 6025.95−5600.03 → $\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{r} y_{ijk}^2 - CT$
- 보정항: CT = $449^2/36 = 5600.03$ → $\frac{y_{\cdot\cdot\cdot}^2}{CT}$
- $SS\cancel{AB}_{TR} = \frac{1}{3}(45^2 + 47^2 + \cdots + 16^2) - CT = 408.97$ → $\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} \frac{y_{ij\cdot}^2}{r} - CT$
- $SSA = \frac{1}{12}(184^2 + 166^2 + 99^2) - CT = 334.39$ → $\sum_{i}^{a} \frac{y_{i\cdot\cdot}^2}{br} - CT$
- $SSB = \frac{1}{9}(124^2 + 118^2 + 108^2 + 99^2) - CT = 40.53$ → $\sum_{j}^{b} \frac{y_{\cdot j\cdot}^2}{ar} - CT$
- $SS(AB) = SSAB - SSA - SSB = 408.97 - 334.39 - 40.53 = 34.05$
- $SSE = 425.92 - 408.97 = 16.95$

= TSS − SSTR

자유도

SSTR → ab−1

SSA → a−1

SSB → b−1

SS(AB) → (a−1)(b−1)

SSE → ab(r−1)

TSS → N−1

○ 분산분석표

	변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
SSA	온도	$a-1$ 2	334.39	167.20	236.83 $> F_{0.05}(2,24)=3.40$
SSB	기간	$b-1$ 3	40.53	13.51	19.14 $> F_{0.05}(3,24)=3.01$
SS(AB)	상호작용	$(a-1)(b-1)$ 6	34.05	5.68	8.04 $> F_{0.05}(6,24)=2.51$
SSE	오차	$ab(r-1)$ 24	16.95	0.706	
TSS	전체	$N-1$ 35	425.92		

- 5% 유의수준에서 모든 처리 효과가 유의
- 처리평균그림(treatment mean plot) 작성해보기
- 처리평균그림에 의하면 비타민 C의 함유량이 저장온도가 높아질수록 감소하고 있는 것은 사실이지만 그 감소 경향이 저장기간에 따라 같지 않다는 것을 보여줌