A의 행렬식: det(A) 또는 |A|

↑ 절댓값X

제2장. 행렬식 (Determinants)

2.1 행렬식 계산

→ 하나의 실숫값이 나옴

행렬식: 정사각행렬에 실수값을 대응시키는 함수라고 이해할 수 있음

오직 정방행렬

1x1 2x2

▤ 1차원 행렬의 행렬식과 2차원 행렬의 행렬식

1차원 행렬의 행렬식 : $\det(a_{11}) = a_{11}$

대각원소의 곱 - 비대각원소의 곱

2차원 행렬의 행렬식 : $\det(A_{2\times 2}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

* $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ 의 공식으로 기억하기도 함 ☆

크로스

ex) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \det A = 7\times 6 - 3\times 4$

det(A) = 30

|A| = 30

n차원 행렬의 행렬식 $(n \geq 2)$

n차원 행렬식을 정의하기 위해서 먼저 (i, j)원소 a_{ij}에 대한 소행렬식과 여인자를 정의하여야 함

Definition (소행렬식과 여인자)

행렬 $A_{n \times n} = (a_{ij})$의 i번째 행과 j번째 열을 지운 뒤에 남는 행렬을 M_{ij}라 하면 이것의 행렬식 $\det(M_{ij})$을 a_{ij}의 소행렬식(minor)이라 하고, $(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$을 a_{ij}의 여인자(cofactor)라 한다.

A의 소행렬식은 원소의 개수만큼 구할수있음.

부호구분

□ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

3X3

a_{11}의 소행렬식: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}}$

i=1, j=1

차수가 줄어든 정방행렬

$\det(M_{11}) = 5 \times 10 - 6 \times 8 = 2$

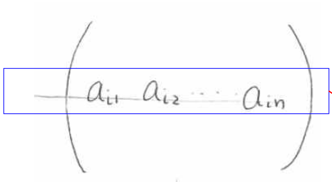
[소행렬식을 구하고자 하는 원소가 있는 행과 열을 지운 후 나오는 행렬의 행렬식]

a_{11}의 여인자: $(-1)^{1+1} \det(M_{11}) = 2$

i+j

Theorem 2.1 (행렬식의 라플라스 전개) ☆

행렬 $A_{n\times n} = (a_{ij})$의 행렬식은 다음과 같이 계산될 수 있다.

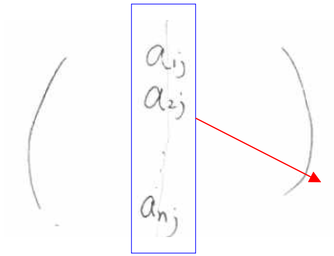


i번째 행

여인자

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) \right)$$

(i번째 행의 각원소(a_{ij})와 그 원소의 여인자($(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$)를 곱하여 합한 것



j번째 열

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

(j번째 열의 각원소(a_{ij})와 그 원소의 여인자($(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$)를 곱하여 합한 것

☆ 어떤 행이나 열을 택해서 라플라스 전개를 통해 행렬식값을 구해도 동일한 값이 나옴. 계산이 쉬운 행이나 열을 택하되 원소값이 0인 원소가 많은 행이나 열을 택하는 것이 좋음

ex)

$$\underset{(3\times 3)}{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

왜 계산결과가 이상하지 49 아 48

행렬식을 구하기 위해 1행과 2행 중 어느 것을 선택하는 것이 좋을까?

2행 (2행을 선택하면 2차원 행렬의 행렬식을 두 번만 계산하면 됨. 1행을 선택하면 2차원 행렬식을 세 번 계산하게 됨)

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{1j} (-1)^{1+j} \det(M_{1j}) \right)$$

1행 → $i=1$

$$= a_{11}(-1)^2 |M_{11}| + a_{12}(-1)^3 |M_{12}| + a_{13}(-1)^4 |M_{13}|$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) \cdot 11 + 1 \cdot 1$$

3행선택 → $i=3$

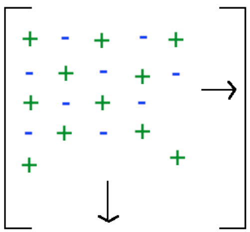
$$\det(A) = 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot|M_{31}| + 0\cdot(-1)^{3+2}\cdot|M_{32}| + 7\cdot(-1)^{3+3}\cdot|M_{33}|$$
$$= 2\cdot1\cdot9 + 0 + 7\cdot1\cdot(-3)$$
$$= -3$$

Example (행렬식 계산)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

0이 있는 3행을 선택하여 라플라스 전개 (2열을 선택하여 전개하는 것과 좋은 방법)

* 여인자의 $(-1)^{i+j}$ 부분이 계산하기 번거로울 수 있다. 그러한 경우 위와 같이 $(-1)^{i+j}$를 미리 계산하여 행렬식값을 구하고자 하는 행렬에 적어놓으면 편리하다. $(-1)^{i+j}$ 값을 행렬에 적는 방법은 1행1열의 원소를 (+)로 하여 chessboard처럼 (+), (−)를 번갈아가며 채워 넣으면 된다.



$(-1)^{1+1}$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}_{4\times4}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = -0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$4 \cdot 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = -12 - 3 + 6 = -9$$

$$4 \cdot 1 \cdot (-4) + 0 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = -16 + 1 = -15$$

$$\therefore \; -9 + 45 = 36$$

0이 많이 있는 2열을 선택하여 라플라스 전개

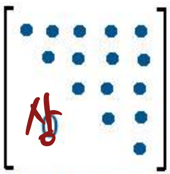
* 라플라스 전개를 할 때 원소 0에 곱해지는 여인자는 계산할 필요가 없음. 따라서 B 의 행렬식을 계산하기 위해서 위와 같이 3차원 정사각행렬 두 개의 행렬식만 구하면 된다. 두 개의 3차원 정사각행렬의 행렬식은 앞에서 A의 행렬식을 구할 때처럼 3차원 행렬의 행렬식은 2차원 행렬식으로 라플라스 전개하여 구할 수 있다. 해당 계산은 각자가 해보고 위에 제시된 정답과 동일한지 확인할 것!

오로지 정방행렬

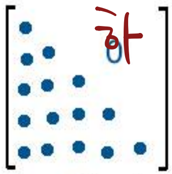
Definition 삼각행렬 (triangular matrix)

– **상삼각행렬(upper triangular matrix)** : 주대각선을 기준으로 대각선의 아래쪽 항들의 값이 모두 0인 정사각행렬

– **하삼각행렬(lower triangular matrix)** : 주대각선을 기준으로 대각선의 위쪽항들의 값이 모두 0인 정사각행렬



Upper Triangular Matrix



Lower Triangular Matrix

있을수도있음

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

A는 상삼각행렬, B는 하삼각행렬

* (삼각행렬이라 하면 상삼각행렬 또는 하삼각행렬을 의미)

Theorem 2.2

행렬 $A_{n\times n}$ 가 삼각행렬일 때 $A_{n\times n}$ 의 행렬식은 대각원소들의 곱이다.

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}\times a_{22}\times\cdots\times a_{nn}$$ n개를 곱한다

i=j

ex) 3×3 상삼각행렬의 예를 통해 확인해보자

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}\cdot 1\cdot(a_{22}a_{33} - 0\cdot a_{23})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33}$$
→ 대각원소들의 곱

[0이 많은 1열에 대해 라플라스 전개를 하여 행렬식을 계산]

* 3×3 하삼각행렬의 경우도 Theorem 2.2가 성립하는 것을 직접 확인해볼 것!

비대각원소가 모두 0이므로

Theorem 2.3

대각행렬의 행렬식은 대각원소들의 곱이다.

(대각행렬은 상삼각행렬이면서 하삼각행렬이다. 따라서 삼각행렬이므로 Theorem 2.2가 성립)

ex)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}}$$

2.2 행렬식의 성질

Theorem 2.4

전치행렬 A^T의 행렬식은 원래 행렬 $A_{n \times n}$의 행렬식과 같다.

행 또는 열로 행렬식을 전개해도
상관이 없다는 점

$$\det(A) = \det(A^T)$$

□ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ☞ $\det A = ad - bc = \det A^T$

□ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

☞ A의 행렬식을 1열에 대해 라플라스 전개를 하여 적어보고 A^T의 행렬식을 1행에 대해 라플라스 전개를 하여 적은 후 서로 비교해볼 것

Theorem 2.5

행렬 $A_{n\times n}$가 0만으로 이루어진 행을 가지고 있으면,

$$\det(A) = 0$$

* 0만으로 이루어진 열을 가지고 있는 가지고 있어도 $\det(A) = 0$

성립하는 이유) 0만으로 이루어진 행(또는 열)에 대해 라플라스 전개를 하면 됨!

이건또외워야..

◉ 행렬의 기본연산 (Elementary operations) : 기본행연산 아 기본열연산

① 두 행을 서로 교환

② 한 행에 0이 아닌 실수를 곱한다.

③ 한 행에 0이 아닌 실수를 곱하여 다른 행에 더한다.

[①, ②, ③에서 행을 열로 바꾼 것도 행렬의 기본연산임]

Theorem 2.6 (행을 열로 바꾸어도 모두 성립) ☆

(1) A의 두 행을 교환하여 행렬 B 를 얻었을 때

$$\det(B) = -\det(A)$$

(2) A의 한 행에 상수 c 를 곱하여 B 를 얻었을 때

$$\det(B) = c\ \det(A)$$

(3) A의 한 행에 어떤 상수를 곱하여 다른 행에 더하여 B 를 얻었을 때

$$\det(B) = \det(A)$$

☞ 하나의 행에 다른 행의 배수를 더하는 것은 원래 행렬식의 값에 영향을 주지 않는다

Theorem 2.7

행렬 $A_{n \times n}$ 의 두 행이 같거나 한 행이 다른 행의 상수배이면,

$$\det(A) = 0$$

* 행을 열로 바꾸어도 동일하게 성립

Example

□ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 　　[직접계산] ☞ -6

※ 하나의 행에 다른행의 배수를 더해도 행렬식값은 달라지지 X

주어진 행렬을 바꿔가며 계산 (0을 늘리기 위해)

[기본행렬연산 이용] ☞

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

1행에 (-2)배해서 2행에 더함 | 2행에 1배해서 3행에 더함 | 삼각행렬의 행렬식 공식

① x(-2)+② 　 ② x1+③

□ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 　　[직접계산] ☞ 10

[기본행렬연산 이용] ☞

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 10$$

1행에 (-2)배해서 2행에 더함 | 1행에 (-1)배해서 3행에 더함 | 1열에 대해 라플라스 전개

*** 기본행렬연산을 잘 이용하면 행렬식 계산에 있어서 계산량을 줄일 수 있음**

같은차수이므로 곱이성립

Theorem 2.8

행렬 $A_{n\times n}$ 와 $B_{n\times n}$ 가 있을 때,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$|AB| = |A|\cdot|B|$$

ex) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot4+2\cdot6 & 1\cdot3+2\cdot6 \\ 3\cdot4+8\cdot6 & 3\cdot3+8\cdot6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 60 & 57 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = 16\cdot57 - 15\cdot60$$

$$= 12$$

$$\det(A) = 1\cdot8 - 2\cdot3$$

$$= 2$$

$$\det(B) = 4\cdot6 - 3\cdot6$$

$$= 6$$

$$\therefore \det(A)\cdot\det(B)$$

$$= 12$$

24

18