# ☐ 추정량(estimator)의 "바람직한" 성질

1) 비편향성 (unbiasedness)

2) 효율성 (efficiency)

3) 충분성 (sufficiency)

4) **일치성 (consistency)** $n \to \infty$ 일때의 성질

총신의 길이를 과녁까지 늘리면 딱 그자리에 꽂힘

score func. 에서 sample size $= n$ 일때

$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \boxed{\frac{d}{d\theta} \ln f(x_i;\theta)} \to Y_i$

중심극한정리 → 정규분포

▶ **추정량의 점근적 성질 (asymptotic properties)**

- **최대가능도추정량의 점근분포** (asymptotic distribution MLE ) ☞ 6.6절

- **일치성** (consistency) & **대수의 법칙** (law of large numbers) ☞ 5.8절

  $n \to \infty$ 일때 $\bar{X}_n \to \mu$

- **극한 적률생성함수** (limiting moment generating functon) ☞ 5.9절

$U(0,\theta)$ 에서 $\hat{\theta}_n = X_{(n)} \to \theta$? as $n \to \infty$

support가 $\theta$에 의존돼있으므로 ~~

# 6.6 최우추정량의 점근분포 (asymptotic distribution of MLE)

▶ **MLE (maximum likelihood estimator)**

$f(x;\underline{\theta})$가 regularity condition 만족할 때, (support free from $\theta$, 미분/적분 가능 등)

**MLE는 "log-likelihood equation"** ($\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\underline{\theta})=0$)의 **solution**임

※ NOTE

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ random sample from $f(x;\theta)$

⇨ $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)$ : "score function"의 성질 p.296~297

※ $1^{st}$ moment (expectation) & $2^{nd}$ moment of score function

## <정리> MLE 점근분포 (asymptotic distribution of MLE)

이 때만!

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ random sample from $f(x;\theta)$이고, ($f(x;\theta)$, regularity condition 만족)

$\hat{\theta}$ 이 $\theta$에 대한 MLE 일 때, $n \to \infty$ 이면 $\hat{\theta}$는 다음과 같은 점근분포를 갖는다. 증명생략

$$\hat{\theta} \approx N(\theta, \frac{1}{I_n(\theta)})$$

n: 충.큰

여기서 **Fisher Information** of $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

θ에대해 2번미분?

$$I_n(\theta) = n\,E[(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta))^2] = -n\,E[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)]$$

※ **recall,** $\hat{\theta} = u(X_1, X_2, ..., X_n)$ 이 $\theta$에 대한 비편향추정량이면,

라오-크래머부등식: 최소분산계정 (교재 P299)

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

"Rao-Cramer lower bound" → $Var(\hat{\theta}) \geq \dfrac{1}{n\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right)^2 f(x;\theta)\,dx}$

⇨ **MLE는 점근적으로 최소분산비편향추정량 (asymptotically MVUE)** $= \dfrac{1}{n\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x;\theta)\right) f(x;\theta)\,dx}$

## ▪ 점근분포 (asymptotic distribution)

**[예제 6.6-1]**

모집단 분포 $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, 0 < x < \infty$ ☞ $\overline{X}$ : MLE of $\theta$ ※ [예제 6.4-3]

- Fisher Information $I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$ → RC lower bound

⇨ $\overline{X}_n \approx N(\theta, \theta^2/n)$ ☜ MLE $\overline{X}$ 의 점근분포 (asymptotic dist.)

**[예제 6.6-2]**

모집단 분포 $f(x;\theta) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$ ☞ $\overline{X}$ : MLE of $\lambda$ ※ [예제 6.4-2]

- Fisher Information $I_n(\theta) = \frac{n}{\lambda}$

⇨ $\overline{X}_n \approx N(\lambda, \lambda/n)$ ☜ MLE $\overline{X}$ 의 점근분포 (asymptotic dist.)

## ■ 점근분포 (asymptotic distribution)

**[예제 6.6-3]**

모집단 분포 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1$

- **MLE** of $\hat{\theta} = \dfrac{-n}{\ln(\prod_{i=1}^{n} X_i)} = \dfrac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$ ☜ 연습문제 #6.4-4

~? 쉽지않아보임

- **Fisher Information** $I_n(\theta) = \dfrac{n}{\theta^2}$

⇨ $\hat{\theta} \approx N(\theta, \dfrac{\theta^2}{n})$ ☜ MLE $\hat{\theta} = \dfrac{n}{-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$ 의 점근분포 (asymptotic dist.)

rc를만족하므로 점근분포는 쉽게 알수있음

**※ 과제(H.W.)**

$\hat{\theta} = -n/\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ **unbiased estimator?**

Hint, $Y_i = -\ln X_i$ 분포 (변수변환) ⇒ $W = \sum Y_i = -\sum \ln X_i$ 분포?

$X_1 \cdots X_n$ r.s from $(\mu, \sigma^2)$

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\Sigma X_i$

$E(\overline{X}_n) = \mu$, $Var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

$\rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$

degenerated r.v (퇴화된 확률변수) : 확률변수로서의 기능이 사라짐

## ▶ 추정량의 일치성 (consistency)

$\hat{\theta}$ 이 $\theta$에 대한 일치 추정량 (consistent rstimator)

$$\Leftrightarrow \quad P[\,\underbrace{|\,\widehat{\theta}_n - \theta\,|}_{\text{오차} \rightarrow 0} < \epsilon\,] \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \text{ for all } \epsilon > 0$$

또는 $P[\,|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon\,] \rightarrow 0$

※ **NOTE**

1) **Chebyshev's inequality** (체비세프 부등식)

2) **convergence in probability** (확률 수렴)

3) **law of large numbers** (대수의 법칙) $\overline{X}_n \rightarrow \mu$ as $n \rightarrow \infty$

# 5.8 체비셰프 부등식과 확률수렴 (Chebyshev's inequality & convergence in probability)

**recall,**

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ random sample from $f(x;\mu)$일 때,

$$E(\overline{X_n}) = \mu \ \& \ Var(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

**<정리> law of large numbers (대수의 법칙)**

$\overline{X_n} \to \mu$ as $n \to \infty$ "**law of large numbers (대수의 법칙)**"

추정량의 일치성 中 특별한경우; θ가 μ인경우

$\Leftrightarrow \ P[|\overline{X_n} - \mu| < \epsilon] \to 1$ as $n \to \infty$, for all $\epsilon > 0$

## ■ 점근분포 (asymptotic distribution)

**<정리 5.8-1> 체비셰프 부등식 (Chebyshev's inequality)**

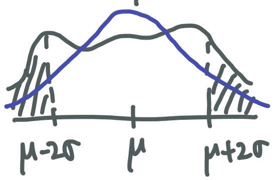
확률변수 $X$의 평균이 $\mu$이고 분산이 $\sigma^2$일 때, 모든 $k \geq 1$에 대해 다음이 성립한다.

$$P[\,|X-\mu| \geq k\sigma\,] \leq \frac{1}{k^2} \qquad (\Leftrightarrow P[\,|X-\mu| < k\sigma\,] \geq 1-\frac{1}{k^2})$$

(증명) p.232

정리5.8-1 아래에

ex) k=2일때 $P[\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma] \geq \frac{3}{4}$




normal인경우 1.96일때 0.05

**<따름정리 5.8-1>**

확률변수 $X$의 평균이 $\mu$이고 분산이 $\sigma^2$일 때, $\epsilon = k\sigma$ 이면 다음이 성립한다.

$$P[\,|X-\mu| \geq \epsilon\,] \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \qquad (\Leftrightarrow P[\,|X-\mu| < \epsilon\,] \geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2})$$

$\sigma^2 \to \frac{\sigma^2}{n}$

$\to 0$ $\qquad$ $\to 1$

(증명) <정리 5.8-1> 참조

"대수의법칙"

## ■ 점근분포 (asymptotic distribution)

**[예제] “$X$의 분포와 상관없이”**

$\epsilon = 3\sigma$ 이면 : $P[|X-\mu| \geq 3\sigma] \leq \dfrac{\sigma^2}{(3\epsilon)^2} = \dfrac{1}{9} = 0.1111$

$\epsilon = 2\sigma$ 이면 : $P[|X-\mu| \geq 2\sigma] \leq \dfrac{\sigma^2}{(2\epsilon)^2} = \dfrac{1}{4} = 0.25$

※ 만약, 정규분포 가정하면; $P[|X-\mu| \geq 2\sigma] = 0.0456$

**[예제 5.8-1]** $\epsilon = 2\sigma$ 인 경우, (각자 확인)

**[예제] 이항분포 "law of large numbers (대수의 법칙)"**

n이 중요하니까 꼭 첨자를 붙임!

$Y_n \sim bin(n, p)$ ☜ $Y_n = \sum X_i$ 여기서 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ r.s. from B($p$)

표본비율 $\hat{p}_n = Y/n$ ☜ $\hat{p}_n = \sum X_i / n \; (= \overline{X}_n)$

X 자리에 $\hat{p}$ 넣은 것과 같음!

⇨ $P[|\hat{p}_n - p| \geq \epsilon] \leq \dfrac{pq/n}{\epsilon^2}$ or $P[|\hat{p}_n - p| < \epsilon] \leq 1 - \dfrac{pq/n}{\epsilon^2}$

⇨ $\lim_{n \to \infty} [|\hat{p}_n - p| \geq \epsilon] = 0$

⇨ $\hat{p}_n = Y/n$ convergence in probability to p (확률적으로 수렴)

$\neq$

* converge (실수가 값으로)

$a_n = \frac{1}{n+1}$ 이면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

즉 $a_n \to 0$ as $n \to \infty$

" $\hat{p}_n \to p$ in probability "

**<정리> Law of large numbers (대수의 법칙)**

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ random sample from a population with $(\mu, \sigma^2)$

$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum X_i$ (note, $E(\overline{X_n}) = \mu$ & $Var(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$)

$\Rightarrow P[|\overline{X_n} - \mu| \geq \epsilon] \leq \frac{\sigma^2/n}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon}$ (by Chebyshev's ineq.) $\Rightarrow 0$ as $n \to \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [|\overline{X_n} - \mu| \geq \epsilon] = 0$ ($\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} [|\overline{X_n} - \mu| < \epsilon] = 1$ )

$\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum Y_i \to p$

$\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$ : $\hat{p}_n - p \to p$ ??

⇨ $\overline{X_n}$ convergence in probability to $\mu$

i.e. $\overline{X_n} \to \mu$ as $n \to \infty$ "law of large numbers (대수의 법칙)"

## ■ 점근분포 (asymptotic distribution)

**[예제]** $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta},\ 0<x<\theta$ → regularity condition 만족X (θ에 의존) → 일치추정량 만족?

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ random sample from $U(0,\theta)$, where $\Omega=\{\theta;\, 0<\theta<\infty\}$

MLE : $\hat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

( ※ regularity condition 만족? ☜ MLE의 점근 분포(asymptotic dist.)? )

MLE : $\hat{\theta}=X_n$

MME : $\tilde{\theta}=2\bar{X}$

↳ 어떤게 좋은지?

시험

① unbiased인지 : $E(\hat{\theta})=\frac{n}{n+1}\theta$

$E(\tilde{\theta})=\theta$

$n\to\infty$일때로 생각 ⇒ 둘다 unbiased

② 효율성 : $MSE(\hat{\theta})$ vs $MSE(\tilde{\theta})$

⇒ 과제 (분산 & bias 고려)

$4\,Var(\bar{X})$ ??

**Q.** MLE $\hat{\theta}=X_{(n)}$는 일치 추정량인가? ⇒ 계산해봐야됨

$$P[|\hat{\theta}-\theta|<\epsilon]=P[\theta-\epsilon<X_{(n)}<\theta]$$

$$=1-P[X_{(n)}\le\theta-\epsilon]=1-\prod_{i=1}^{n}P[X_i\le\theta-\epsilon]$$

$$=1-\left(\frac{\theta-\epsilon}{\theta}\right)^n\to 1 \text{ as } n\to\infty$$

↳ $\int_0^{\theta-\epsilon}\frac{1}{\theta}dx$

⇨ $\lim_{n\to\infty}[|X_{(n)}-\theta|<\epsilon]=1$

MLE 성질을 이용못하는 특수한경우 → 정의로 차근차근

i.e. $\hat{\theta}=X_{(n)}$는 $\theta$에 대한 **일치추정량 (consistent estimator)**

대수의법칙은 평균에 대한것

Yn~? as n→∞ ⇒ mgf 계산후 n을 ∞로 → 특정분포의 mgf인경우 Y: limiting dist. of Yn

# 5.9 극한 적률생성함수(limiting moment generating function)

**recall, Poisson approximation** for binomial distribution (수리통계학Ⅰ (교재 p.87))

$X_n \sim bin(n,p)$; $\lambda = np$ (즉, $p = \lambda/n$)  $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

※ 가정: $\lambda$ fixed (상수) & $n \rightarrow \infty$ (☞ $p \rightarrow 0$)

o $X_n$ 의 **probability mass function**

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \rightarrow \underbrace{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}_{\text{pmf of } P(\lambda)} \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

⇒ n이 크고 p가 작으면 이항분포는 포아송분포를 따른다

## ▶ 극한 적률생성함수 (limiting mgf) 이용

$$M_X(t) = [(1-p) + qe^t]^n = [1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^t]^n = [1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}]^n \rightarrow e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

i.e $X_n \approx$ Poisson$(\lambda)$, as $n \rightarrow \infty$

## ■ 점근분포 (asymptotic distribution)

**<정리 5.9-1>**

만약 $M_{Y_n}(t) \rightarrow M_Y(t)$ as $n \rightarrow \infty$ 이면

읽어보기

$n \rightarrow \infty$일 때, $Y_n$의 확률분포 ∻ $Y$의 확률분포

**[예제 5.9-1]**

$\lambda = np = 5$ 인 포아송 분포 vs $np = 5$인 Bin(10, 1/2), Bin(20, 1/4), Bin(50, 1/10)

i.e $n \rightarrow \infty$ & $p \rightarrow 0$

☞ 그림 5.9-1 (p.237) 참조

**[예제 5.9-2]**

$Y_n \sim bin(50, 0.04)$ vs $Y \sim Poisson(2)$ ☜ $\lambda = np = 2$

$$P[\, Y_n \leq 1] = 0.4 \;\approx\; P[Y \leq 1] = 0.406$$

$Y_n = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i}^{n} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)$

## ■ 점근분포 (asymptotic distribution)

$M_{Y_n}(t) \to e^{\frac{t^2}{2}}$ as $n\to\infty$, 즉 n이 커지면 $Y_n$은 표준정규분포를따른다: limiting mgf

**<정리 5.6-1> "중심극한정리(central limit theorem)"**

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 $(\mu, \sigma^2)$인 모집단(분포)에서 추출된 확률표본(random sample)일 때,

$$Z_n = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \to N(0,1), \quad \text{as } n\to\infty$$

(증명) 5.9절(극한 적률생성함수) p.239

- $M(t) = M(0) + M'(0)t + \frac{M''(h)t^2}{2}$, $(0<h<t/n)$ ☜ 테일러 급수전개

→ t가 $\frac{t}{\sqrt{n}}$ 순서바꿔서 $Y_i$ iid r.v이므로

- $M_{Z_n}(t) = E[\exp[(\frac{t}{\sqrt{n}})(\sum \frac{X_i-\mu}{\sigma})]] = \prod_{i=1}^{n} E[\exp[(\frac{t}{\sqrt{n}})(\frac{X_i-\mu}{\sigma})]] = [M_{Y_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n$

$Y_i$의 mgf

note $Y_i = (X_i-\mu)/\sigma$ & $E(Y_i)=0$, $E(Y_i^2)=1$ → 분산

- $\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty}[M_{Y_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n = \lim_{n\to\infty}[1+\frac{t^2}{2n}+\frac{[M''(h)-1]t^2}{2n}]^n$, $(h\to 0$, as $n\to\infty)$

무시

⇨ $\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty}[1+\frac{t^2}{2n}]^n = e^{t^2/2}$ ☜ mgf of $N(0,1)$

$(1+\frac{t^2}{2n})^n$ 에서 $n\to\infty$면 $e^{\frac{t^2}{2}}$