<수리통계학Ⅱ> 5장 5~7절 과제

o **5.5절** 연습문제 #2, #3, #4

& 확률변수 $T = \dfrac{Z}{\sqrt{U/r}}$가 자유도가 r인 t-분포에 따를 때, 다음을 보여라.

(a) $E[T]=0$ (여기서 $r \geq 2$)

(b) $Var(T) = \dfrac{r}{r-2}$ (여기서 $r \geq 3$)

※ 참고: $E(Z)$, $E(1/\sqrt{U})$, $E(Z^2)$, $E(1/U)$ 먼저 구할 것.

o **5.6절** 연습문제 #3, #4, #7

& 확률변수 X, Y 는 랜덤하게 뽑힌 초등학생이 한 달 동안 TV 영화 또는 만화를 시청한 시간이다. $E(X)=30$, $E(Y)=50$, $Var(X)=52$, $Var(Y)=64$, $Cov(X,Y)=14$ 이라고 가정할 때, 랜덤하게 추출된 초등학생 25명이 TV 영화 또는 만화를 시청한 시간의 총합을 확률변수 Z로 정의할 때, 중심극한정리를 이용해 확률 $P(1970 < Z < 2090)$을 근사적으로 구하라.

o **5.7절** 연습문제 #2, #4, #6, #8

& 무게가 25g으로 표시된 라면은 실제로는 무게가 $N(26, 0.25)$에 따르도록 생산되고 있다.

(a) 랜덤하게 선택된 라면의 무게를 X라고 할 때, $P(X < 25.25)$를 구하라.

(b) 라면을 235개 랜덤하게 선택해서 무게를 측정하고, 이 중 무게라 25.25g 이 안 되는 라면의 개수를 Y라고 할 때, $P(Y \leq 10)$을 근사적으로 구하라.

(c) 125개 라면의 평균 무게를 $\overline{X}$라고 할 때, $P(26 \leq \overline{X} \leq 28)$을 구하라

#5.2-4 서로 다른 두 도시에서 임의로 한 사람씩 선택한 것이므로 이들은 iid random sample

X의 pdf: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & 1<x<\infty \\ 0, & o.w \end{cases}$ 이고 Y의 pdf: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{y^4}, & 1<y<\infty \\ 0, & o.w \end{cases}$ 이므로

X와 Y의 joint pdf $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}\cdot\frac{3}{y^4}, & 1<x<\infty, 1<y<\infty \\ 0, & o.w \end{cases}$

$P(X<Y) = \int_1^\infty \int_1^y \frac{6}{x^3\cdot y^4}\,dx\,dy = 0.4$

#5.2-8 $Var(X+Y) = var(X) + Var(Y) + Cov(X+Y)$

$\rightarrow 20000 = 8100 + 10000 + Cov(X,Y)$ 이므로 $Cov(X,Y) = 1900$

즉 X와 Y는 독립이 아니다.

$Var(X+500+1.08Y) = Var(X) + 1.08^2 \times Var(Y) + 1\times 1.08 \times Cov(X,Y)$

$= 8100 + 1.08^2 \times 10000 + 1.08 \times 1900$

$= 21816$ 달러

#5.2-9 $X_1, X_2 \sim gamma(1,2)$ 이며 서로 독립 (iid random variable)

두 부품의 수명 pdf : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1)\cdot 2^1} x^{1-1} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & 0\le x<\infty \\ 0, & o.w \end{cases}$ 이며

$\mu = \alpha\theta = 2,\ \sigma^2 = \alpha\theta^2 = 4$

$Y_1 = min(X_1, X_2)$ 이므로 $0<y<\infty$ 에서

$P(Y_1 \le y) = P(min(X_1,X_2)\le y) = 1-P(min(X_1,X_2)>y)$

$= 1-P(X_1>y)\cdot P(X_2>y)$

$= 1-\left(\int_y^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx\right)^2 = 1-\left(e^{-\frac{y}{2}}\right)^2 = 1-(1-P(X_1\le y))^2$

$\frac{d}{dy}P(Y_1\le y) = 2(1-P(X_1\le y))\cdot f_{Y_1}(y)$

$\frac{d}{dy}(1-e^{-y}) = 2\cdot e^{-\frac{y}{2}}\cdot f_{Y_1}(y)$

정리하면 $e^{-y} = 2\cdot e^{-\frac{y}{2}}\cdot f_{Y_1}(y)$, $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{y}{2}}$

$Y_2 = \max(X_1, X_2)$ 이므로 $0<y<\infty$ 에서 $P(Y_2 \le y) = P(\max(X_1,X_2) \le y)$

$= P(X_1 \le y)\cdot P(X_2 \le y)$

$= \left(\int_0^y \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx\right)^2 = (1-e^{-\frac{y}{2}})^2$

$\frac{d}{dy} P(Y_2 \le y) = 2(1-e^{-\frac{y}{2}})\cdot(-\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}})$

$\frac{d}{dy}(1-e^{-\frac{y}{2}})^2 = e^{-y}(e^{\frac{y}{2}}-1)\cdot f_{Y_2}(y)$, 정리하면 $f_{Y_2}(y)=1$

따라서 $E(Z) = E(2Y_1+Y_2) = 2E(Y_1)+E(Y_2) = 4+1 = 5$

#5.3-10 fair한 동전을 던져서 드면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 모두 독립

동전을 던진 횟수 X의 pmf: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x=1,2,3,\cdots$

(a) $Y = \max(X_1,\cdots,X_8)$ 이므로 $0<y<\infty$ 에서 $P(Y\le y) = P(\max(X_1,\cdots,X_8)\le y)$

$= P(X_1\le y)\times\cdots\times P(X_8 \le y)$

$= \left\{\sum_{x=1}^{y}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^8$

$= \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^y\right)^8$, $y=1,2,\cdots$

(b) $P(Y=y) = P(Y\le y) - P(Y<y)$

$P(Y<y) = P(\max(X_1,\cdots,X_8)<y) = P(X_1<y)\times\cdots\times P(X_8<y)$

$= \left\{\sum_{x=1}^{y-1}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^8 = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}\right)^8$

따라서 $P(Y=y) = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^y\right)^8 - \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}\right)^8$, $y=1,2,\cdots$

#5.4-2 $X_1\sim P(2)$, $X_2\sim P(1)$, $X_3 \sim P(4)$

(a) $P(\lambda)$의 mgf : $M_X(t) = \begin{cases} e^{\lambda(e^t-1)} \\ 0, \text{ o.w} \end{cases}$, $-\infty<t<\infty$, $\lambda>0$ 이므로

X_1, X_2, X_3의 mgf는 해당범위에서 각각

$M_{X_1}(t) = e^{2(e^t-1)}$, $M_{X_2}(t) = e^{(e^t-1)}$, $M_{X_3}(t) = e^{4(e^t-1)}$

$Y = X_1+X_2+X_3$일 때 $M_Y(t) = M_{X_1}(t)\cdot M_{X_2}(t)\cdot M_{X_3}(t) = e^{7(e^t-1)}$, $-\infty<t<\infty$

(b) Y는 $\lambda=7$인 포아송분포를 따른다. $Y\sim P(7)$

(c) $P(\lambda)$의 pmf : $f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, $x=0,1,2\cdots$ 이므로

$P(3\le Y\le 9) = \sum_{y=3}^{9}\frac{7^y e^{-7}}{y!} = 0.80086$

#5.4-4 X_1, X_2, X_3 는 gamma(7,5)의 분포를 갖는 모집단에서 추출한 확률표본 → $M_X(t) = \frac{1}{(1-5t)^7}, \ t<\frac{1}{5}$

(a) $Y = X_1 + X_2 + X_3$ 일 때

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{3} M_{X_i}(t) = M_X(t)^3 = \left(\frac{1}{(1-5t)^7}\right)^3 = \frac{1}{(1-5t)^{21}}, \ t<\frac{1}{5}$$

(b) Y는 $\alpha=21, \theta=5$인 감마분포를 따른다. $Y \sim gamma(21,5)$

(c) $\bar{X} = \sum_{i=1}^{3} \frac{X_i}{3}$ 이므로 $M_{\bar{X}}(t) = \prod_{i=1}^{3} M\left(\frac{t}{3}\right) = M_X\left(\frac{t}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{(1-\frac{5}{3}t)^7}\right)^3 = \frac{1}{(1-\frac{5}{3}t)^{21}}, \ t<\frac{1}{5}$

즉 $\bar{X}$는 $\alpha=21, \theta=\frac{5}{3}$인 감마분포를 따른다. $\bar{X} \sim gamma(21, \frac{5}{3})$

#5.4-6 X와 Y는 각각 다른 공평한 주사위의 결과이므로 독립이다.

(a) X의 pmf $f_X(x) = \frac{1}{2}, \ x=0,2$

Y의 pmf $f_Y(y) = \frac{1}{6}, \ y=0,1,4,5,8,9$

$W = X+Y$ 의 분포

w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	sum
$f_W(w)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

즉 W의 pmf $f_W(w) = \frac{1}{12}, \ w=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$

(b) X의 pmf $f_X(x) = \frac{1}{6}, \ x=0,1,2,3,4,5$

Y의 pmf $f_Y(y) = \frac{1}{6}, \ y=0,6,12,18,24,30$

$W=X+Y$의 분포는 모든 (x,y) 조합에 대해 $x+y$ 값이 모두 다르므로 그 확률은 모두 $\frac{1}{36}$

즉 W의 pmf $f_W(w) = \frac{1}{36}, \ w=0,1,2,\cdots,35$

#5.4-10 비어있는 택시의 도착시간 $X \sim Exp(2)$ 의 mgf : $M_X(t) = \frac{1}{1-2t}$

택시 3대 (X_1, X_2, X_3)를 잡는 시간 $Y = X_1+X_2+X_3$ ← 이때 X_i는 모두 서로 독립

따라서 Y의 mgf: $M_Y(t) = \frac{1}{(1-2t)^3}$ → gamma(3,2)의 mgf

$Y \sim gamma(3,2)$ 이므로 Y의 pdf: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(3)\cdot 2^3} y^{3-1} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{16} y^2 e^{-\frac{y}{2}}, & 0 \le y < \infty \\ 0, & o.w \end{cases}$

$$P(Y<6) = \int_0^6 \frac{1}{16} y^2 e^{-\frac{y}{2}} dy = 1 - \frac{17}{2e^3} \approx 0.57681$$

#5.5-2 (a) $X \sim N(46.58, 40.96)$ 이므로 $\bar{X} \sim N(46.58, \frac{40.96}{16})$ → 따름정리 5.5-1

즉 $E(\bar{X}) = 46.58$, $Var(\bar{X}) = 2.56$

(b) $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

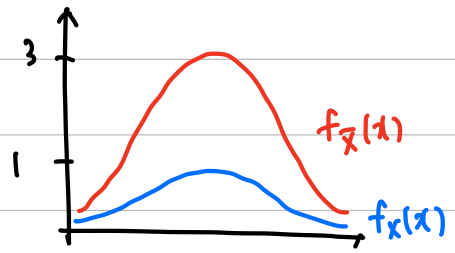
$P(44.42 \le \bar{X} \le 48.98) = P\left(\frac{44.42 - 46.58}{\sqrt{2.56}} \le Z \le \frac{48.98 - 46.58}{\sqrt{2.56}}\right)$

$= P(-1.35 \le Z \le 1.5) = 0.8447$

#5.5-3 (a) $X \sim N(8.78, 0.16)$ 이므로 $\bar{X} \sim N(8.78, \frac{0.16}{9})$

X의 pdf : $f_X(x) = \frac{1}{0.4\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-8.78)^2}{2 \times 0.16}\right)$, $-\infty < x < \infty$

$\bar{X}$의 pdf : $f_{\bar{X}}(x) = \frac{3}{0.4\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-8.78)^2}{2 \times 0.16}\right)$, $-\infty < x < \infty$



(b) $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 이므로 $\frac{8S^2}{0.16} \sim \chi^2(8)$

$P(a \le S^2 \le b) = P\left(\frac{8a}{0.16} \le \frac{8S^2}{0.16} \le \frac{8b}{0.16}\right) = 0.90$ 인 상수 a, b를

χ^2 분포표에서 구하면

$\frac{8a}{0.16} = 2.733$, $a = 0.05466$

$\frac{8b}{0.16} = 15.51$, $b = 0.3102$

#5.5-4 1파운드들이 상자무게 $\sim N(1.18, 0.07^2)$, 3파운드들이 상자무게 $\sim N(3.22, 0.09^2)$

Y= 1파운드들이 상자 3개 무게 (X_1, X_2, X_3)의 합,

W = 3파운드들이 상자 1개 무게일때 $Y = X_1 + X_2 + X_3$ 의 분포를 구하면

$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$ 이므로 $Y \sim N(3.54, 0.0147)$

같은 방법으로 $Y-W$의 분포는 $Y-W \sim N(0.32, 0.0228)$

$P(Y > W) = P(Y - W > 0) = P\left(\frac{(Y-W)-0.32}{\sqrt{0.0228}} > \frac{0-0.32}{\sqrt{0.0228}}\right) = P(Z > -2.119) = 0.983$

#5.5-추가문제 $T=\frac{Z}{\sqrt{U/r}} \sim t(r)$, $Z\sim N(0,1)$, $U\sim \chi^2(r)$ 일때

T의 pdf $f(t)=\frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})}\frac{1}{\sqrt{r\pi}}\left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}$, $-\infty<t<\infty$ (정리5.5-3)

(a) $E(T)=E\left(\frac{Z}{\sqrt{U/r}}\right)=E(Z)\cdot E\left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{U}}\right)$

$E\left(\frac{1}{\sqrt{U}}\right)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}f_U(u)\,du=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{\frac{r}{2}}}u^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}\,du$

$=\frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{\frac{r}{2}}}\int_0^\infty u^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}}e^{-\frac{u}{2}}\,du$

$=\frac{\Gamma(\frac{r-1}{2})2^{\frac{r-1}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}}$ (단 $r>1$, 감마함수 $\Gamma(t)$에서 $t>0$)

이때 $Z\sim N(0,1)$이므로 $E(Z)=0$, 따라서 $r>1$에서 $E(T)=0$

(b) $E(T^2)=E(Z^2)\cdot E\left(\frac{r}{U}\right)$

$E\left(\frac{1}{U}\right)=\int_0^\infty \frac{1}{u}f_U(u)\,du=\int_0^\infty \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}}u^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}\,du$

$=\frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}}\int_0^\infty u^{\frac{r}{2}-2}e^{-\frac{u}{2}}\,du=\frac{\Gamma(\frac{r}{2}-1)\cdot 2^{\frac{r}{2}-1}}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{\frac{r}{2}}}=\frac{1}{r-2}$

(단, $r>2$)

$Z^2\sim\chi^2(1)$이므로 $E(Z^2)=1$, 따라서 $E(T^2)=\frac{r}{r-2}$

$Var(T)=E(T^2)-E(T)^2=\frac{r}{r-2}-0^2=\frac{r}{r-2}$, $r>2$

r은 자연수 → $r>1$은 $r\geq2$, $r>2$는 $r\geq3$으로 볼수 있음