11장. 다변수함수

11장. 다변수함수

11.1 다변수함수

- ✓ 다변수함수의 기호 이해하기
- ✓ 이변수함수의 그래프 그리기
- ✓ 이변수함수의 등위선 그리기
- ✓ 삼변수함수의 등위선 그리기

이변수함수 (Bivariate Function)

이변수함수의 정의

D를 두 실수의 순서쌍들의 집합이라 하자. D에 속하는 각 순서쌍 (x, y)에 대하여 하나의 실수 $f(x, y)$가 대응할 때, f는 x와 y의 **함수**(function of x and y)라고 한다. 이때 D는 f의 **정의역**이고, 이에 대응하는 $f(x, y)$ 값들의 집합은 f의 **치역**이다.

- 함수 $f : D \rightarrow R$
  - $z = f(x, y)$
  - x, y : 독립변수
  - z : 종속변수
  - $D \subset R^2$: 정의역
  - $f(D) \subset R$: 치역

a. $z = x^2 + y^2$
b. $z = x + y$
c. $z = x^2 + y$
d. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
e. $z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$

다변수함수 (Multivariate Function)

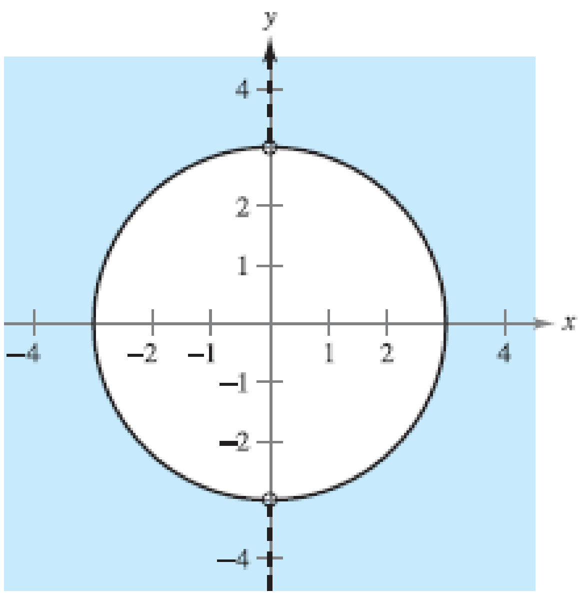
- n변수함수 $f : D \rightarrow R$
  - $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - $x_1, x_2, \ldots, x_n$: 독립변수
  - z : 종속변수
  - $D \subset R^n$: 정의역 (특별한 경우를 제외하면, $D = R^n$)
  - $f(D) \subset R$: 치역

- 예.
  - $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow$ 정의역 $= R^2$: xy 평면
  - $f(x, y) = ln(xy) \rightarrow$ 정의역 $= \{(x, y) \in R^2 | \ xy > 0\}$: 제1사분면과 제3사분면

예제1. 다변수함수의 정의역

다음 함수의 정의역을 구하여라.

a. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$ b. $g(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$



다변수함수의 연산

- 합/차, 곱, 몫

$$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y) \quad \text{합 또는 차}$$

$$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y) \quad \text{곱}$$

$$\frac{f}{g}(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad g(x, y) \neq 0 \quad \text{몫}$$

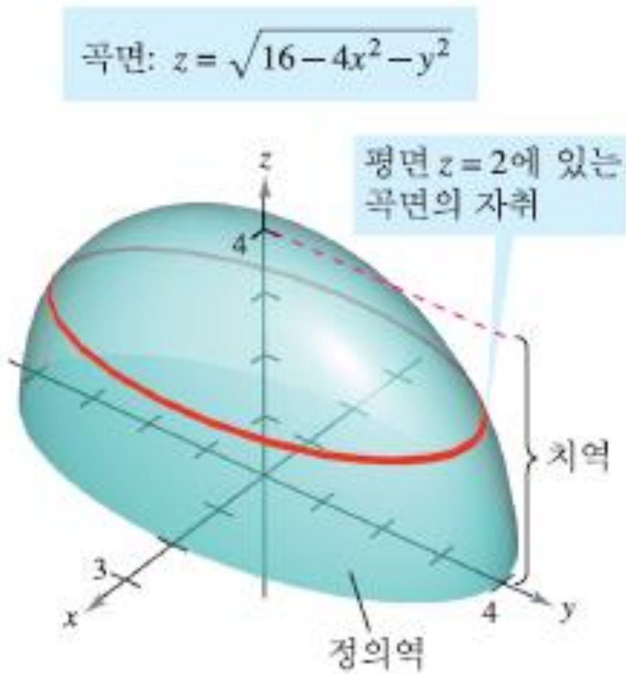
- 합성
  - h : 다변수함수
  - g : 일변수함수

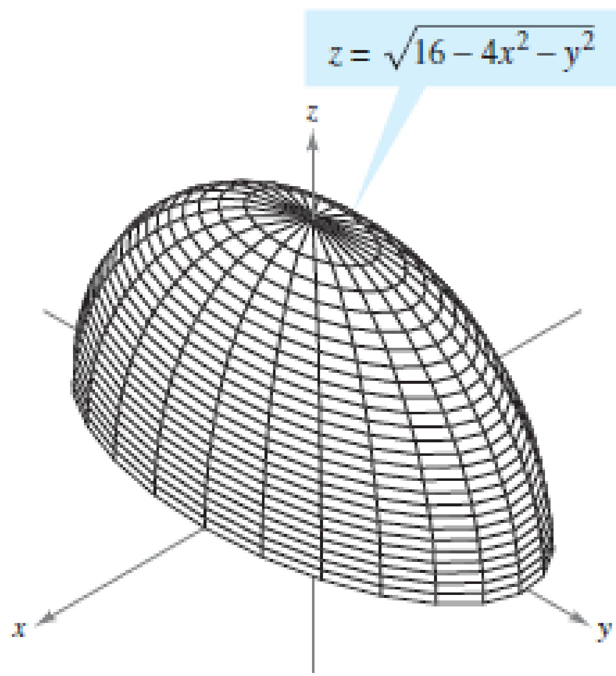
$$(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y)) \quad \text{합성}$$

예제 2: 이변수함수의 그래프

함수 $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ 의 치역은 무엇인가? 함수 f의 그래프를 그려라.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, \qquad 0 \le z \le 4$$

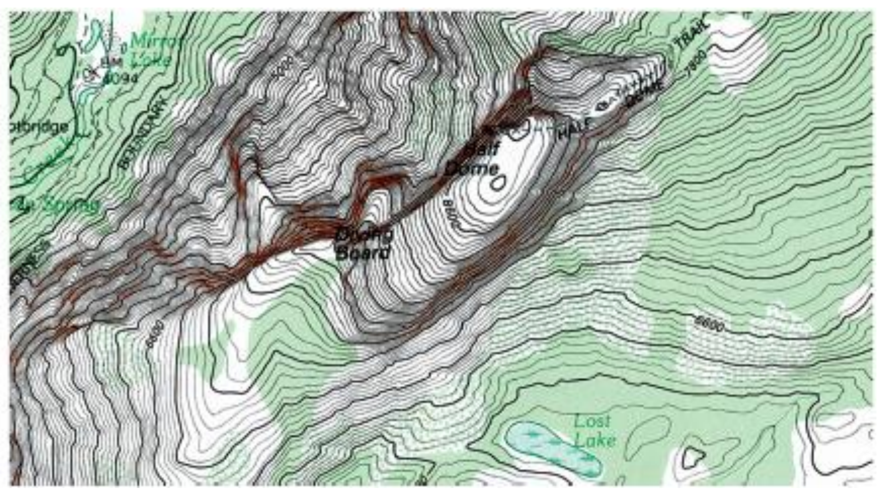




등위선/등고선 (Level Curve/Contour line)

- 이변수함수를 시각적으로 표현하는 방법 중 하나
  - 스칼라장 (Scalar field)을 이용
  - $f(x, y)$ 의 값이 같은 점 (x, y) 들을 연결하여 그린 선
  - 예. 등압선 (isobar), 등온선 (isotherm), 등전위선 (equipotential line)
- 지형도 (topographic map)
  - 해수면으로부터의 높이를 나타내는 등위선

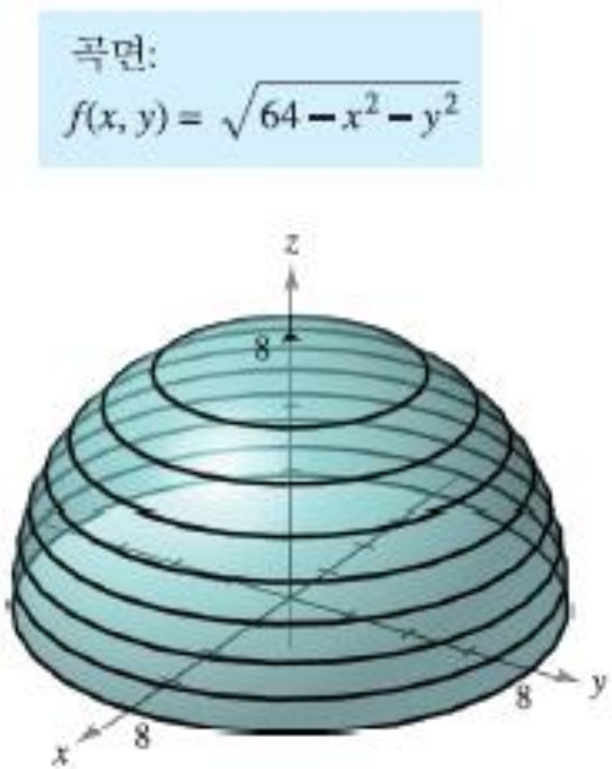
Alfred B. Thomas/Earth Scenes

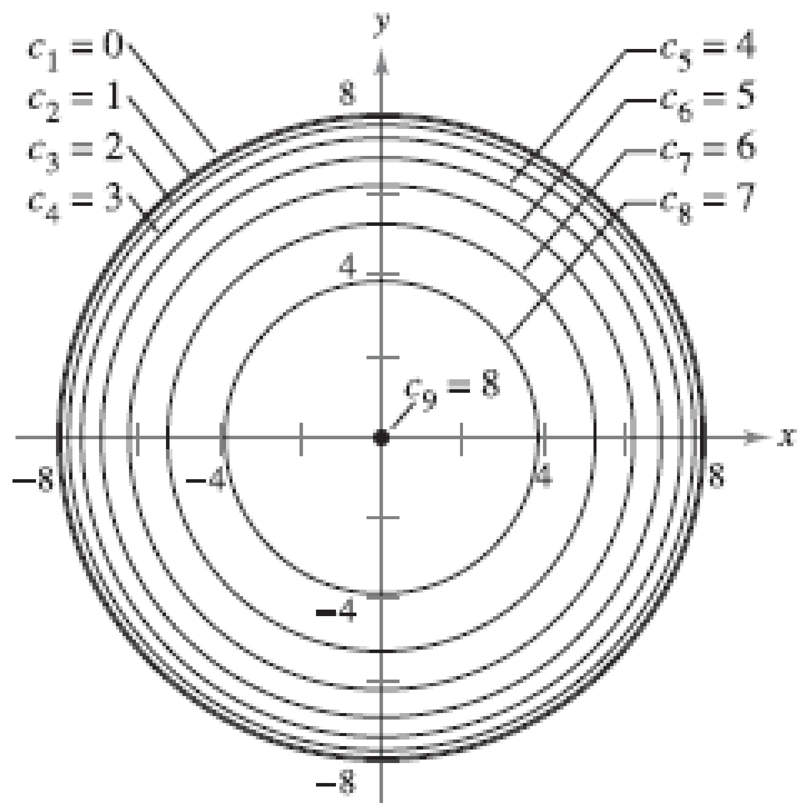


USGS

예제 3: 등고선 그리기

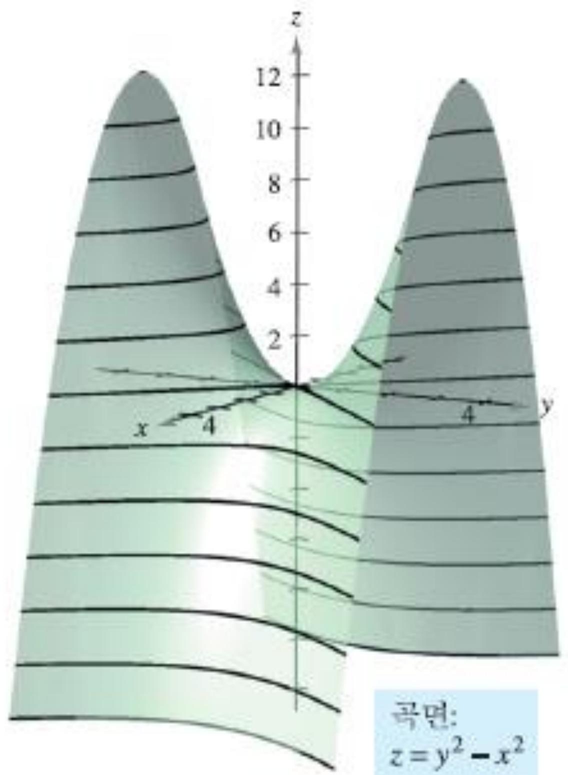
반구 $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$

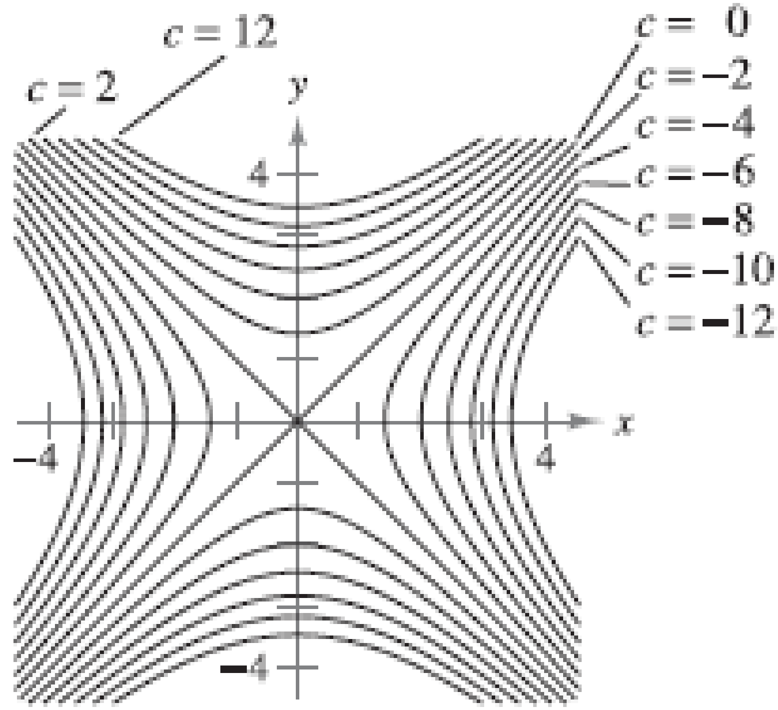




예제 4: 등고선 그리기

$z = y^2 - x^2$





11.2 극한과 연속

- ✓ 평면에서 근방의 정의
- ✓ 이변수함수의 극한의 정의
- ✓ 연속 개념의 이변수함수로의 확장
- ✓ 연속 개념의 삼변수함수로의 확장

Review: 일변수함수에서 극한의 정의

- A. L. Cauchy의 극한에 대한 ε–δ 정의 (limit)

극한의 정의

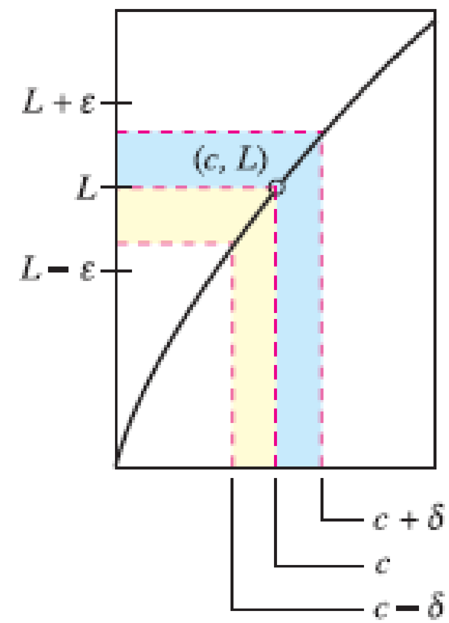
함수 f는 c를 포함하는(c는 제외가능) 열린구간에서 정의되고 L은 실수라 하자. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta > 0$가 존재해서

$$0 < |x - c| < \delta \text{이면 } |f(x) - L| < \varepsilon$$

이 성립하면 $x = c$에서 $f(x)$의 극한은 L이라 하고

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

로 나타낸다.



- x가 c 근방의 열린 구간에 있으면, $f(x)$는 L 근방에 있음!

평면에서의 근방 (Neighborhood)

- 중심이 (x_0, y_0)이고 반지름이 $\delta > 0$인 열린 원판 (open disk)

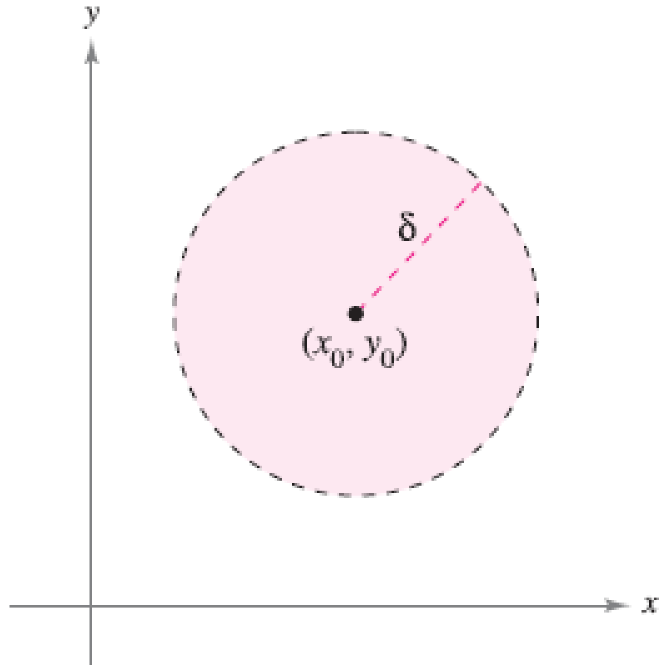
$$\left\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\right\}$$

  - 직선의 열린 구간의 확장
  - (x_0, y_0)의 δ−근방 (δ−neighborhood)이라 함

- 중심이 (x_0, y_0)이고 반지름이 $\delta > 0$인 닫힌 원판 (closed disk)

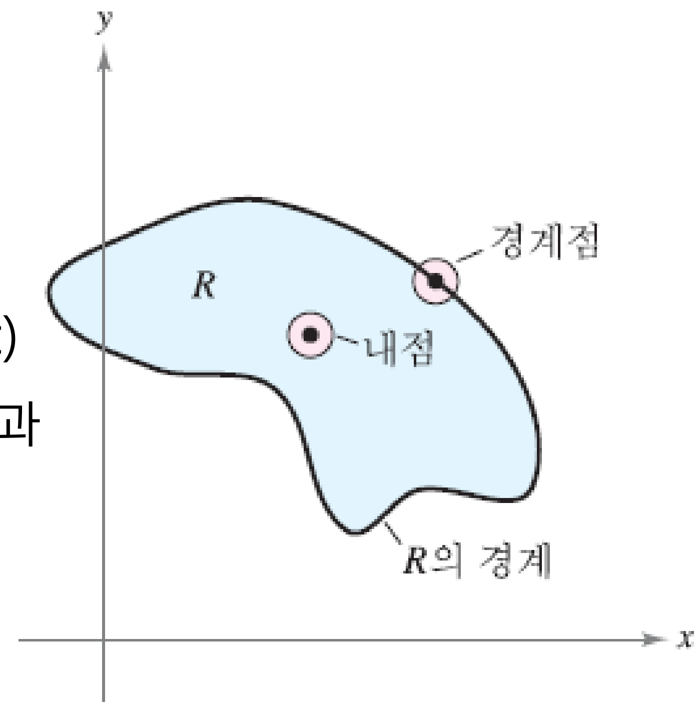
$$\left\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\delta^2\right\}$$

  - 직선의 닫힌 구간의 확장



평면의 영역과 내점/경계점

- 점 (x_0, y_0)가 영역 R의 내점 (interior point)
  - 영역 R에 완전히 포함되는 (x_0, y_0)의 δ-근방이 존재할 때
- 점 (x_0, y_0)가 영역 R의 경계점 (boundary point)
  - 중심이 (x_0, y_0) 인 모든 열린 원판이 영역 R의 점과 영역 R 에 포함되지 않은 점을 항상 포함할 때
- 점 (x_0, y_0)가 영역 R의 외부점 (exterior point)
  - 영역 R에 포함되지 않으면서 영역 R의 경계가 아닌 점



이변수함수의 극한

이변수함수의 극한의 정의

함수 f를 점 (x_0, y_0)을 중심으로 하고 점 (x_0, y_0)을 제외한 열린원판에서 정의되는 이변수함수라 하고, L을 실수라고 하자. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여

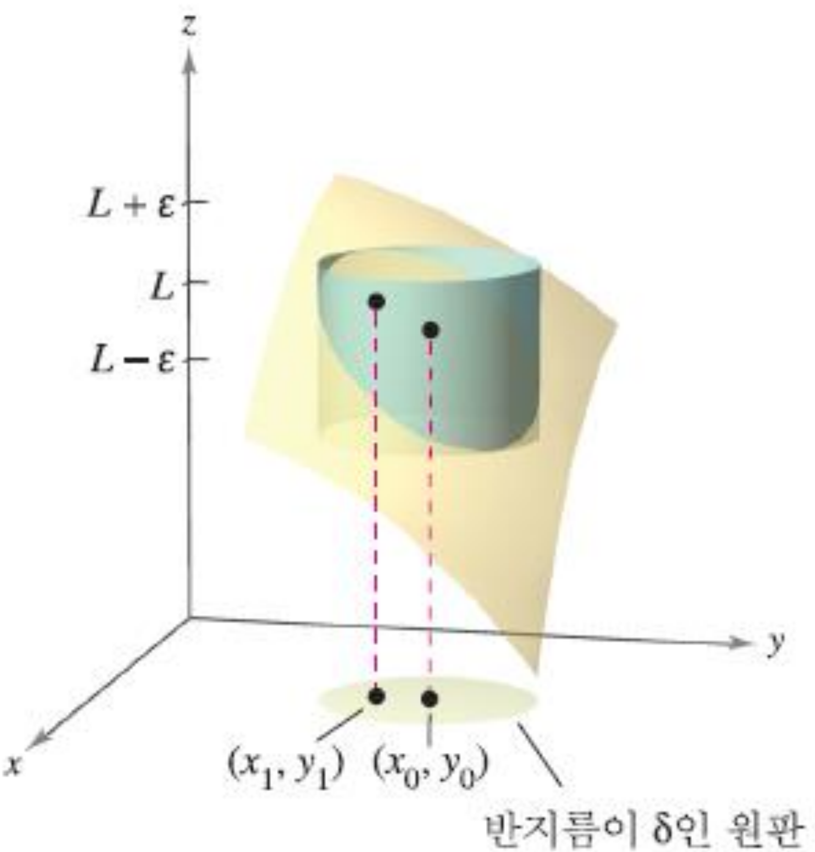
$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ 이면 } |f(x, y) - L| < \varepsilon \text{ 이다}$$

를 만족하는 $\delta > 0$가 존재하면

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

이다.

이변수함수의 극한



- (x_0, y_0)의 δ-근방에 있는 모든 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$에 대하여 $f(x, y)$의 값이 $L - \varepsilon$과 $L + \varepsilon$ 사이에 있음

- $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 의 의미
  - 점 (x, y) 가 모든 방향으로부터 점 (x_0, y_0)으로 접근함

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ 의 의미
  - 극한값의 존재성 – (x_0, y_0)으로 접근하는 방향과 경로에 관계없이 같은 값 L로 수렴함

이변수 함수 극한의 예

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$$

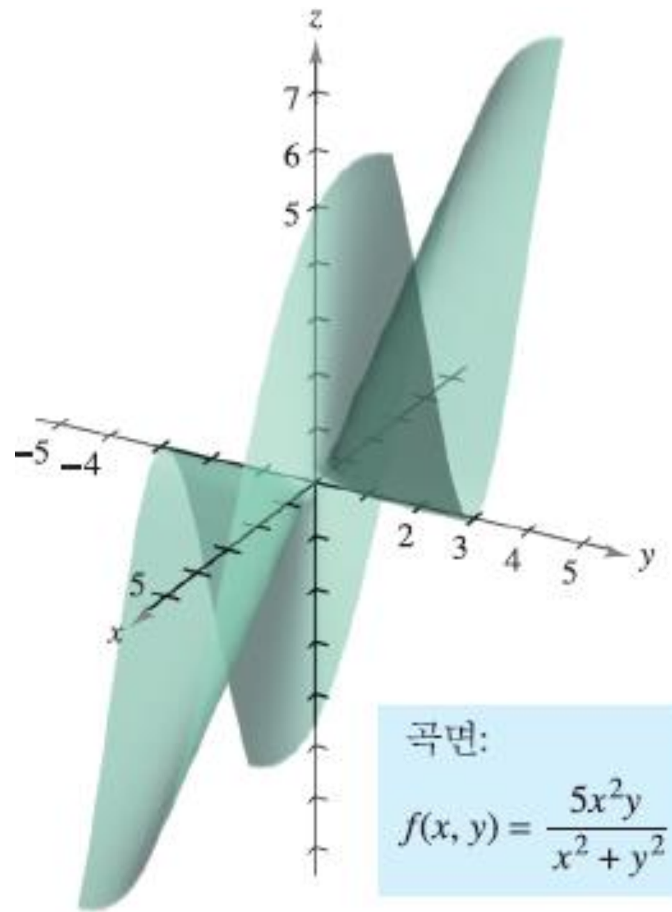
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x + y = x_0 + y_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} a = a$$

예제 2: 극한 계산하기

예제 2 극한 계산하기

극한 $\lim_{(x,\,y)\to(1,\,2)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ 를 구하여라.



예제 3: 극한 계산하기

예제 3 극한 계산하기

극한 $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ 를 구하여라.

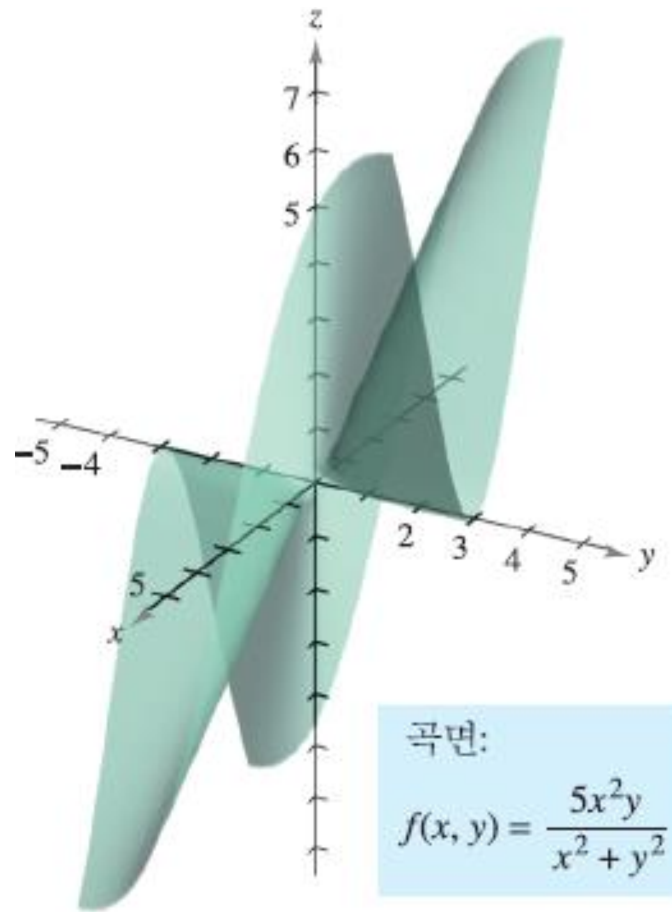
$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$$

$$\left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right|$$

$$= 5|y|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\le 5|y|$$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 5|y| = 0$ 이므로 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$



예제: 극한 계산하기

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

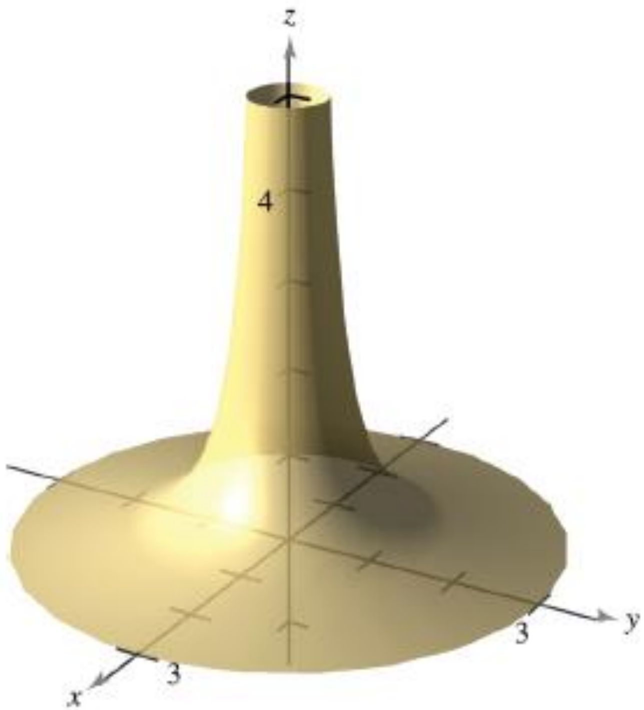
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

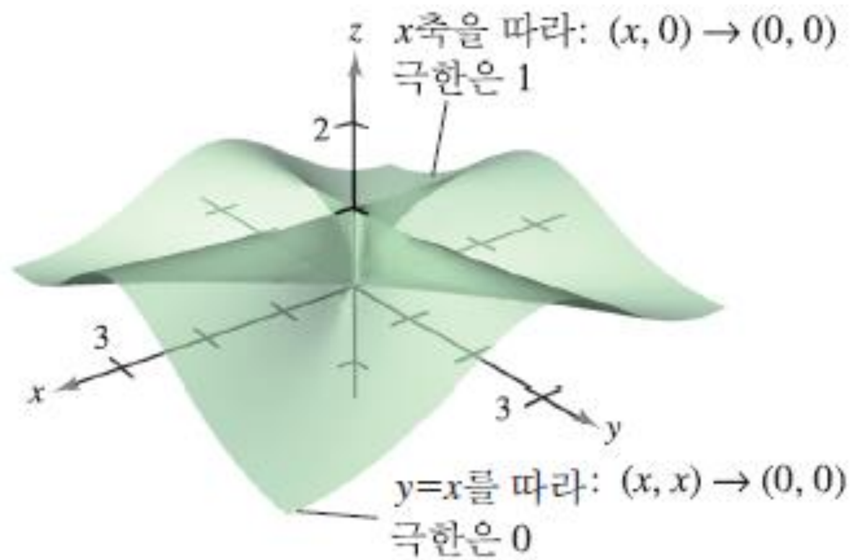
$$= 0(0+0) = 0$$

예제 4: 극한이 존재하지 않는 경우

예. $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$



예제 4. $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2.$



Review: 일변수함수의 연속성 (열린 구간)

연속의 정의

한 점에서 연속: 함수 f가 다음 세 조건을 만족하면 c**에서 연속**(continuous at c)이라 한다.

1. $f(c)$가 정의된다.

2. $\lim_{x \to c} f(x)$가 존재한다.

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$이다.

열린구간에서 연속 : 함수가 열린구간 (a, b)의 각 점에서 연속일 때 **열린구간 (a, b)에서 연속**[continuous on an open interval (a, b)]이라 한다. 실직선 $(-\infty, \infty)$ 전체에서 연속인 함수를 **연속함수**(everywhere continuous)라 한다.

이변수함수의 연속성 (Continuity)

이변수함수의 연속에 대한 정의

이변수함수 f와 열린영역 R에 속하는 점 (x_0, y_0)에 대하여 (x, y)가 (x_0, y_0)에 한없이 접근할 때 $f(x, y)$의 극한값이 $f(x_0, y_0)$과 같으면, 즉

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

이면 함수 f는 **점 (x_0, y_0)에서 연속**이라고 한다.

함수 f가 R의 모든 점에서 연속일 때 함수 f는 **열린영역 R에서 연속**이라고 한다.

- 제거가능한 불연속: 극한이 존재할 때 $f(x, y) = \dfrac{5x^2 y}{x^2 + y^2}$
- 제거불가능한 불연속: 극한이 존재하지 않을 때 $f(x, y) = \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$

이변수연속함수의 성질 I

정리 11.1 이변수 연속함수

k가 실수이고 f와 g가 (x_0, y_0)에서 연속이면, 다음 함수들은 (x_0, y_0)에서 연속이다.

1. 스칼라곱: kf

2. 합과 차: $f \pm g$

3. 곱: fg

4. 몫: $\dfrac{f}{g}$ $[g(x_0, y_0) \neq 0]$

이변수연속함수의 성질 II

정리 11.2 합성함수의 연속성

h가 (x_0, y_0)에서 연속이고, g가 $h(x_0, y_0)$에서 연속이면, 합성함수 $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$는 (x_0, y_0)에서 연속이다. 즉

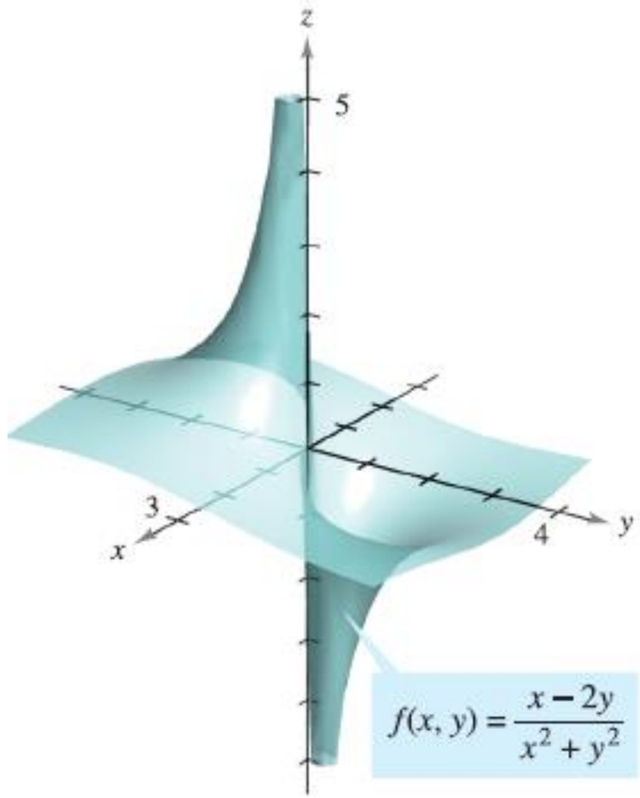
$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0))$$

이다.

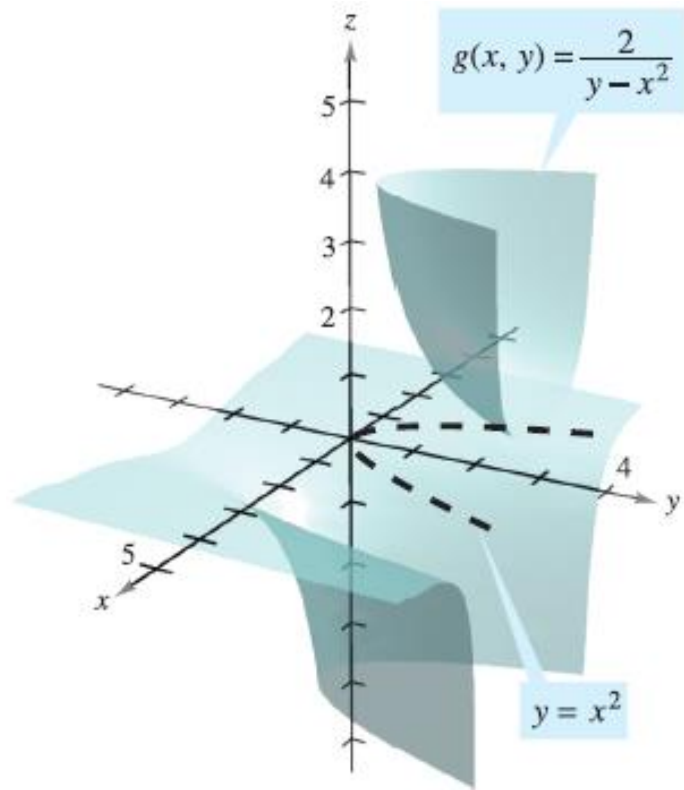
- h : 이변수함수
- g : 일변수함수

예제 5: 연속성 판별하기

a. $f(x, y) = \dfrac{x - 2y}{x^2 + y^2}$



b. $g(x, y) = \dfrac{2}{y - x^2}$



공간에서의 근방

- 중심이 (x_0, y_0, z_0)이고 반지름이 $\delta > 0$인 열린 구 (open sphere)

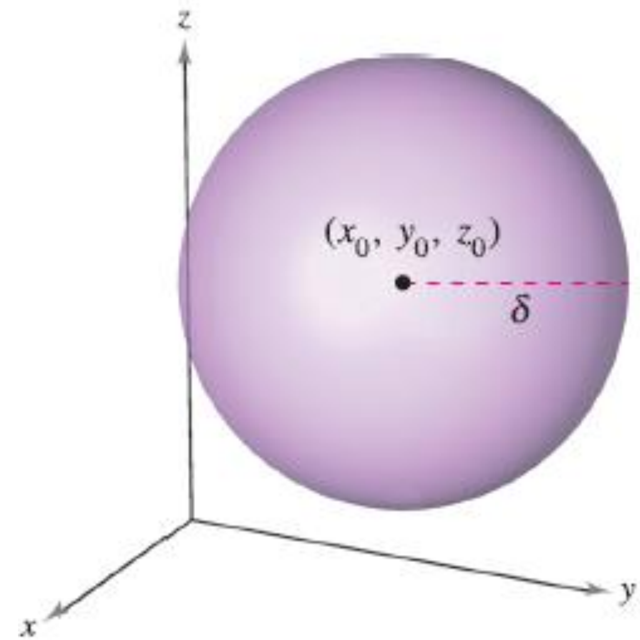
$$\left\{(x, y, z) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2\right\}$$

  - (x_0, y_0, z_0)의 δ–근방 (δ–neighborhood)이라 함

- 중심이 (x_0, y_0)이고 반지름이 $\delta > 0$인 닫힌 구 (closed sphere)

$$\left\{(x, y, z) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le \delta^2\right\}$$

  - 직선의 닫힌 구간의 확장



삼변수함수의 연속성

삼변수함수의 연속성의 정의

점 (x_0, y_0, z_0)을 포함하는 영역 R이 주어지고 함수 f가 점 (x_0, y_0, z_0)에서 정의되었다고 하자. (x, y, z)가 점 (x_0, y_0, z_0)에 한없이 접근함에 따라 함수 $f(x, y, z)$의 극한값이 $f(x_0, y_0, z_0)$과 같으면 삼변수함수 f는 **점 (x_0, y_0, z_0)에서 연속**이라 한다. 즉

$$\lim_{(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

이다. 함수 f가 **열린영역 R 안의 모든 점에서 연속**이면 f는 R에서 연속이라 한다.

- 예제 6. 연속성 판별하기

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z}$$

11.3 편도함수 (Partial Derivative)

- ✓ 이변수함수의 편도함수 구하기
- ✓ 삼변수함수의 편도함수 구하기
- ✓ 이/삼변수함수의 고계도편도함수 구하기

이변수함수의 편미분계수

이변수 함수 z=f(x, y) 위의 점 (a, b)에서의 편미분 계수

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

이변수함수의 일계편도함수

이변수함수의 편도함수에 대한 정의

이변수함수 $z = f(x, y)$의 x, y에 대한 **일계편도함수**는 함수 f_x, f_y이고 아래 극한이 존재할 때

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

와 같이 정의한다.

- f_x는 y를 상수로 취급하고 x에 대해 미분하여 구함
- f_y는 x를 상수로 취급하고 y에 대해 미분하여 구함

이변수함수의 일계편도함수의 기호

일계편도함수의 기호

이변수함수 $z = f(x, y)$에 대하여 편도함수 f_x와 f_y를 다음과 같은 기호로 쓴다.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

점 (a, b)에서 일계편도함수의 값은 다음과 같이 나타낸다.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,\ b)} = f_x(a, b), \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,\ b)} = f_y(a, b)$$

예제 1~2: 편도함수 구하기

예제 1 편도함수 구하기

다음 함수의 편도함수 f_x와 f_y를 구하여라.

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$$

예제 2 편도함수를 구하고 함숫값 계산하기

함수 $f(x, y) = xe^{x^2y}$에 대하여 f_x와 f_y를 구하고, 점 $(1, \ln 2)$에서 함숫값을 계산하여라.

삼변수/다변수함수의 편미분

- 삼변수함수 $w = f(x, y, z)$ 의 일계 편도함수

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

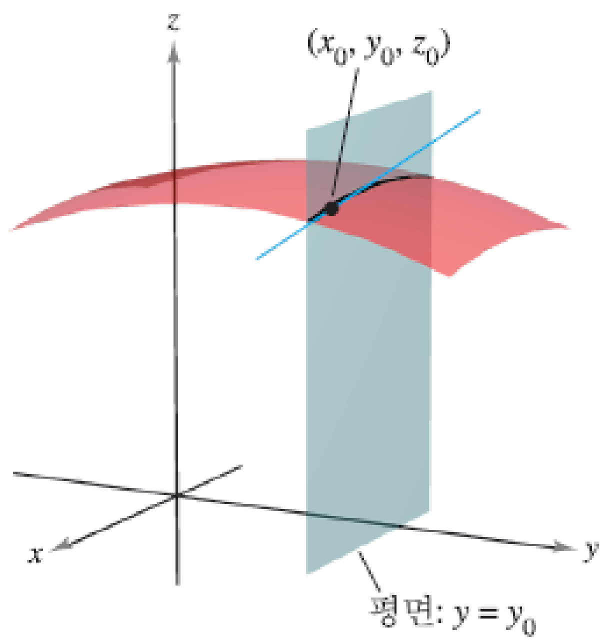
$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

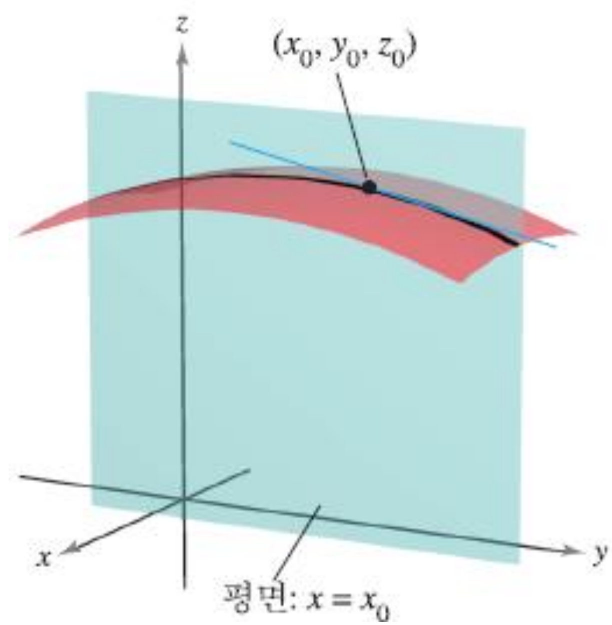
- 다변수함수 $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 의 일계 편도함수

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

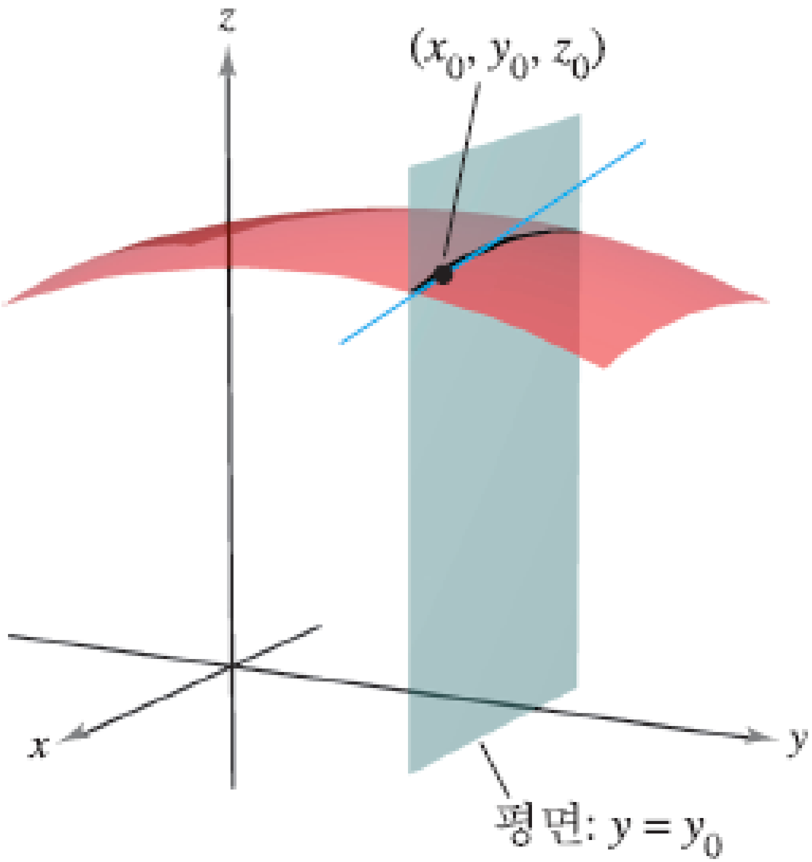
이변수함수의 일계편도함수의 기하학적 의미

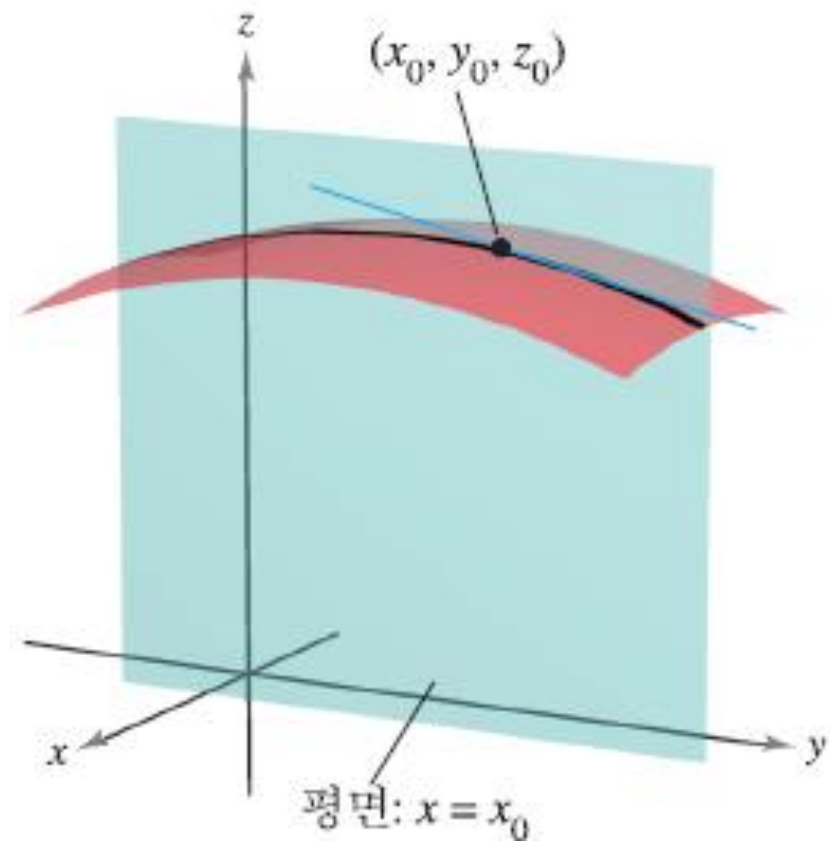
- $f_x(x_0, y_0) = x$축 방향에서 곡면의 기울기
  - 점 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$에서 평면 $y = y_0$ 와 곡면 $z = f(x, y)$ 가 만나는 절단선의 기울기
- $f_y(x_0, y_0) = y$축 방향에서 곡면의 기울기
  - 점 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$에서 평면 $x = x_0$ 와 곡면 $z = f(x, y)$ 가 만나는 절단선의 기울기





이변수함수의 일계편도함수의 기하학적 의미

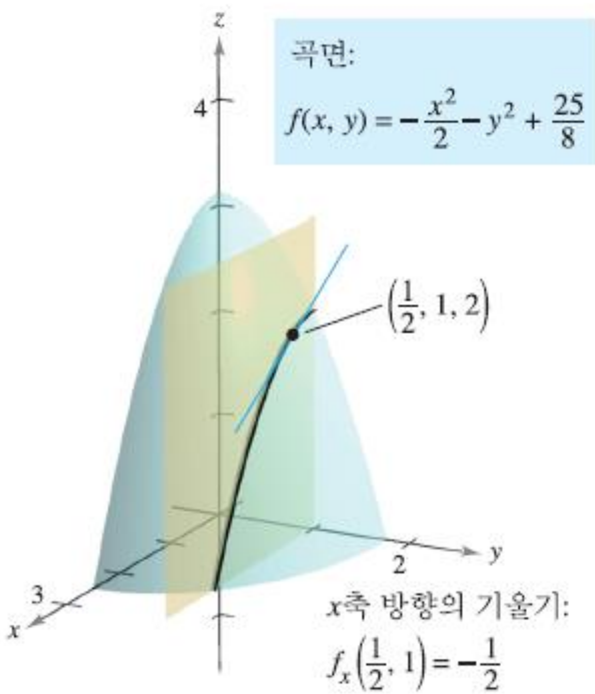


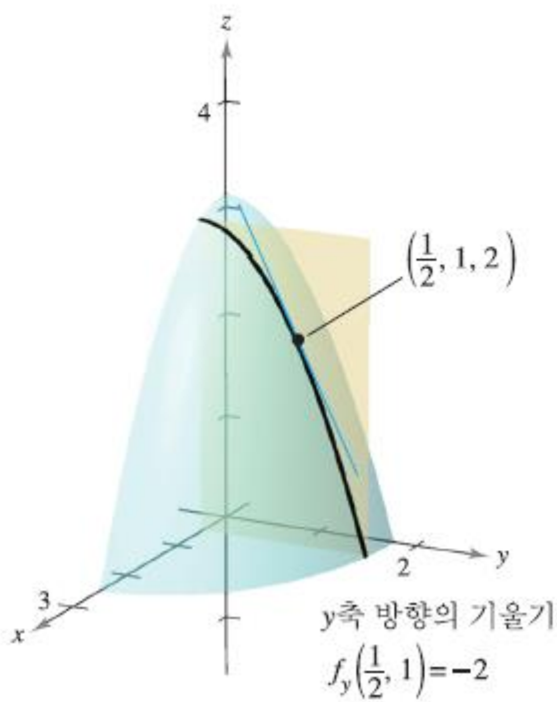


예제 3: 곡면의 기울기 구하기

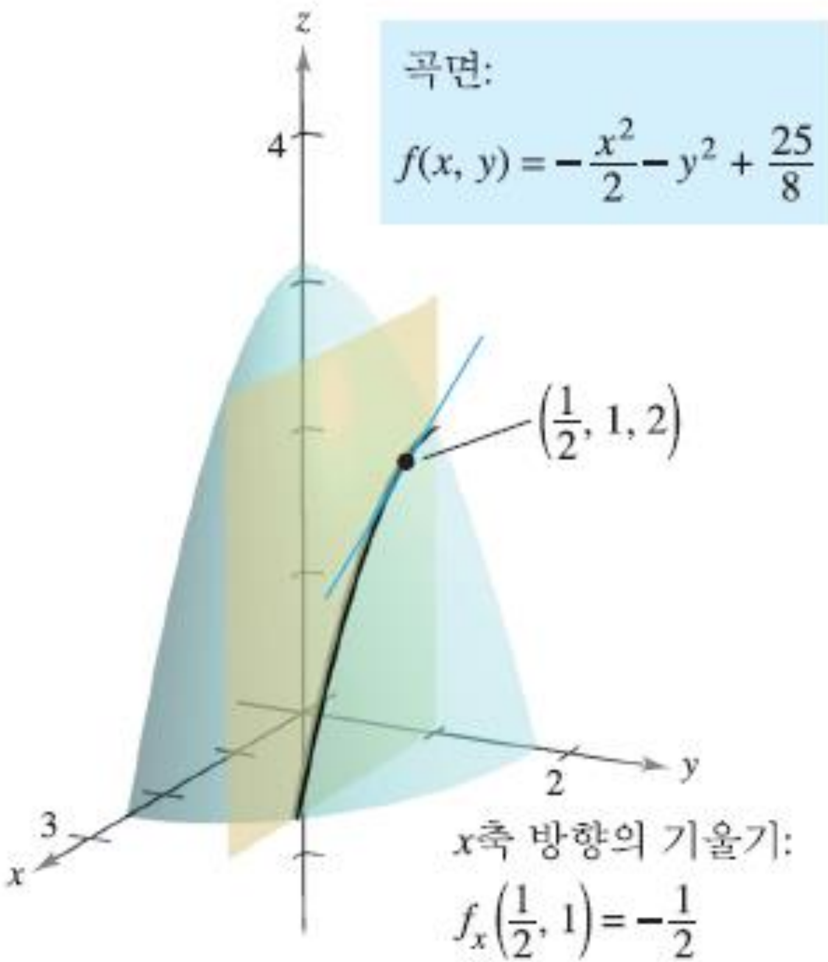
다음과 같이 주어진 곡면의 점 $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$에서 x축 방향과 y축 방향의 곡면의 기울기를 구하여라.

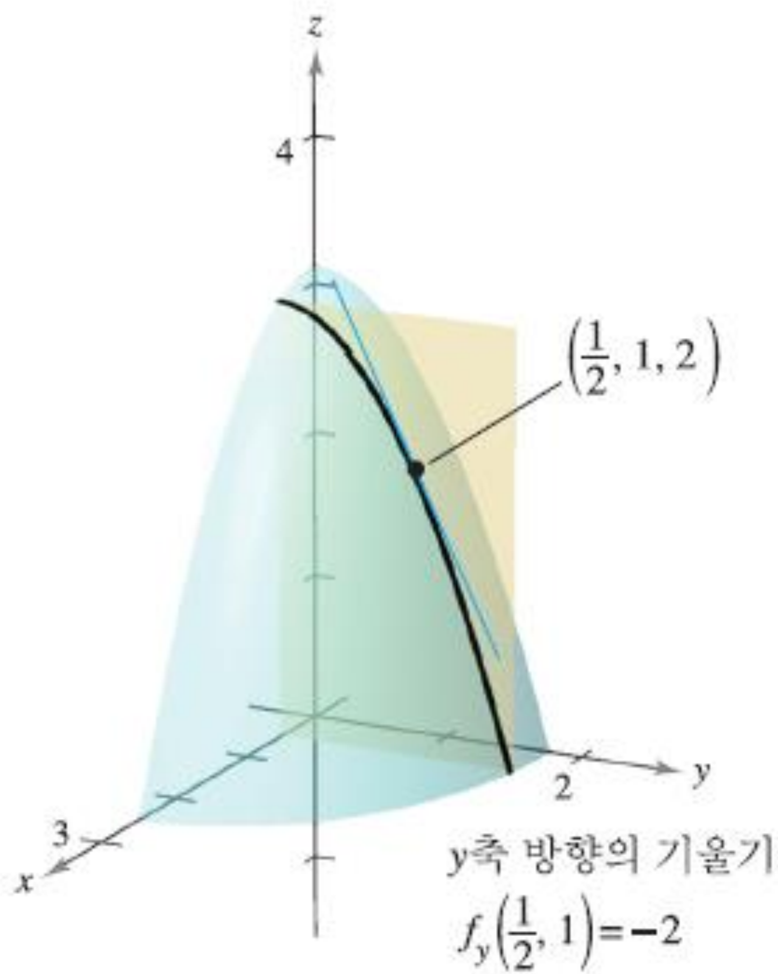
$$f(x,\ y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$





예제 3: 곡면의 기울기 구하기

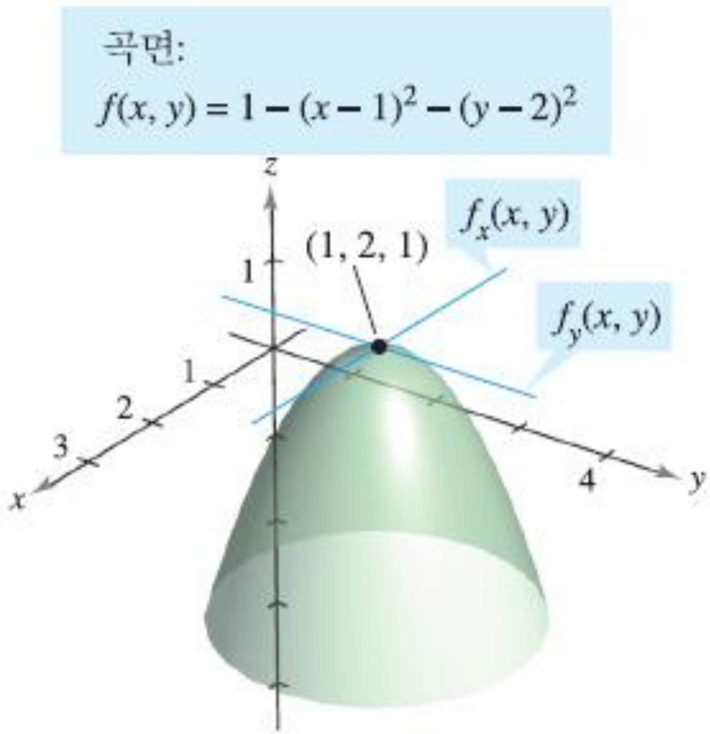




예제 4: 곡면의 기울기 구하기

다음과 같이 주어진 곡면의 점 (1, 2, 1)에서 x축 방향 또는 y축 방향의 곡면의 기울기를 구하여라.

$$f(x,\ y) = 1 - (x-1)^2 - (y-2)^2$$

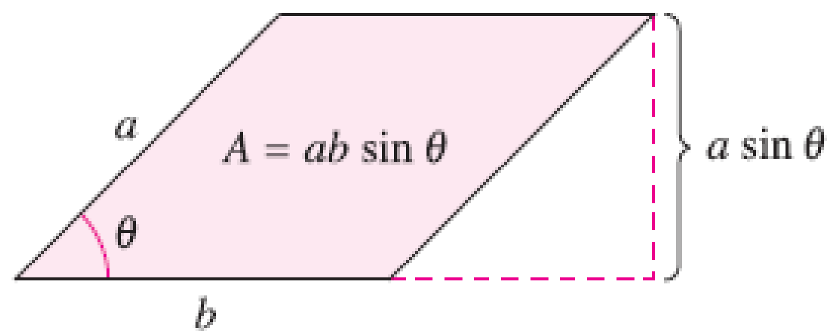


예제 5: 편도함수로 변화율 구하기

그림 11.33에서와 같이 이웃한 두 변의 길이가 a, b이고 끼인각이 θ인 평행사변형의 넓이는 $A = ab\sin\theta$이다.

a. $a = 10,\ b = 20,\ \theta = \dfrac{\pi}{6}$일 때, a에 대한 A의 변화율을 구하여라.

b. $a = 10,\ b = 20,\ \theta = \dfrac{\pi}{6}$일 때, θ에 대한 A의 변화율을 구하여라.



이계편도함수 (Second Partial Derivatives)

1. x에 대한 이계편도함수: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}$

2. y에 대한 이계편도함수: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}$

3. x에 대하여 미분한 후 y에 대하여 미분한 이계편도함수: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f_{xy}$

4. y에 대하여 미분한 후 x에 대하여 미분한 이계편도함수: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=f_{yx}$

- 3, 4를 혼합편도함수 (mixed partial derivatives)라 함
- 혼합편도함수들은 반드시 같지는 않음

혼합편도함수가 같을 조건

정리 11.3 두 혼합편도함수의 값이 같기 위한 조건

f가 x와 y에 대한 함수이고 열린영역 R에서 f_{xy}와 f_{yx}가 연속이면, R의 모든 점 (x, y)에서 다음이 성립한다.

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

예제 7: 고계편도함수 구하기

예제 7 이계편도함수 구하기

이변수함수 $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$의 이계편도함수들을 구하고, $f_{xy}(-1, 2)$의 값을 구하여라.

예제 8 고계편도함수 구하기

다음 함수에 대하여 $f_{xz} = f_{zx}$와 $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$가 성립함을 보여라.

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z$$

11.4 미분과 연쇄법칙

- ✓ 증분과 미분의 개념
- ✓ 이변수함수의 미분가능성의 개념 확장하기
- ✓ 미분을 이용한 근사값
- ✓ 다변수함수의 연쇄법칙
- ✓ 음함수에서 편도함수 구하기

증분 (Increment)과 전미분 (Total Differential)

- 이변수함수 $z = f(x, y)$
  - x 와 y의 증분 (increment): Δx , Δy
  - x 와 y의 미분 (differential): dx , dy

- z 의 증분/변화량: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

- z 의 전미분: $dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

- 예제 1. 전미분 구하기

  a. $z = 2x\sin y - 3x^2y^2$ **b.** $w = x^2 + y^2 + z^2$

미분가능성 (Differentiability)

미분가능성의 정의

$z = f(x, y)$인 함수 f에 대하여 f가 점 (x_0, y_0)에서 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$일 때 $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$이 되는 Δz가

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

이면 함수 f는 (x_0, y_0)에서 **미분가능**이다.

정리 11.4 미분가능성을 위한 충분조건

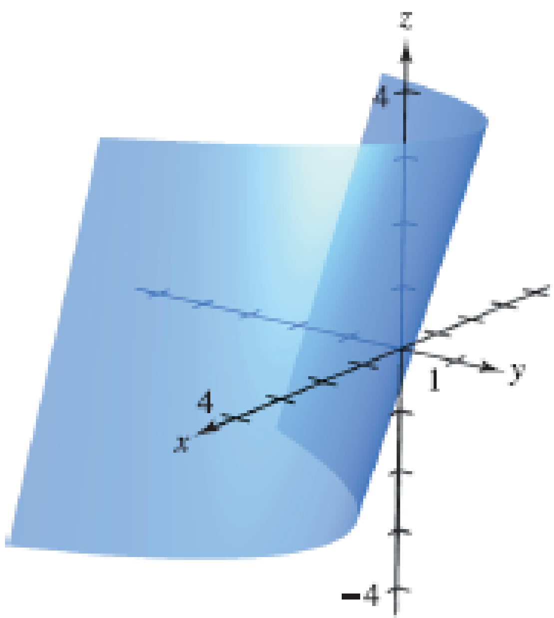
이변수함수 $f(x, y)$에 대하여 f_x와 f_y가 열린영역 R에서 연속이면 f는 R에서 미분가능이다.

정리 11.5 미분가능이면 연속이다

변수 x와 y의 함수 f가 (x_0, y_0)에서 미분가능이면 함수 f는 (x_0, y_0)에서 연속이다.

예제 2: 미분가능성

- 다음 함수가 평면의 모든 점에서 미분가능임을 보이자



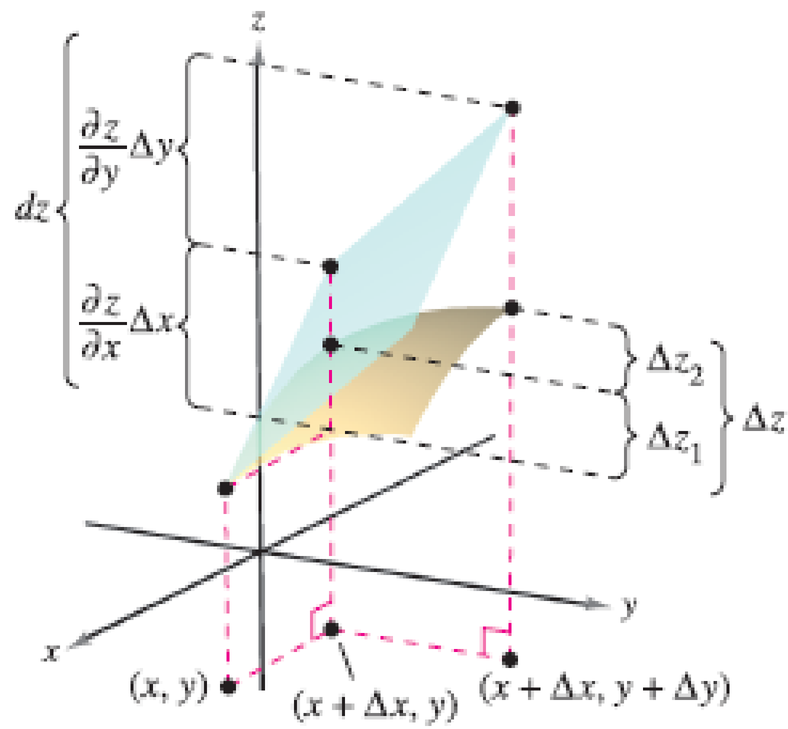
$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

전미분 (dz) 을 이용한 증분 (Δz)의 근사값

- 충분히 작은 Δx, Δy 에 대하여 $\Delta z \approx dz$
- x, y 에 각각에 대한 편도함수들은 x축, y축 방향으로의 곡면의 기울기
- dz 는 곡면의 점 $(x, y, f(x, y))$ 에서 접평면의 높이의 변화

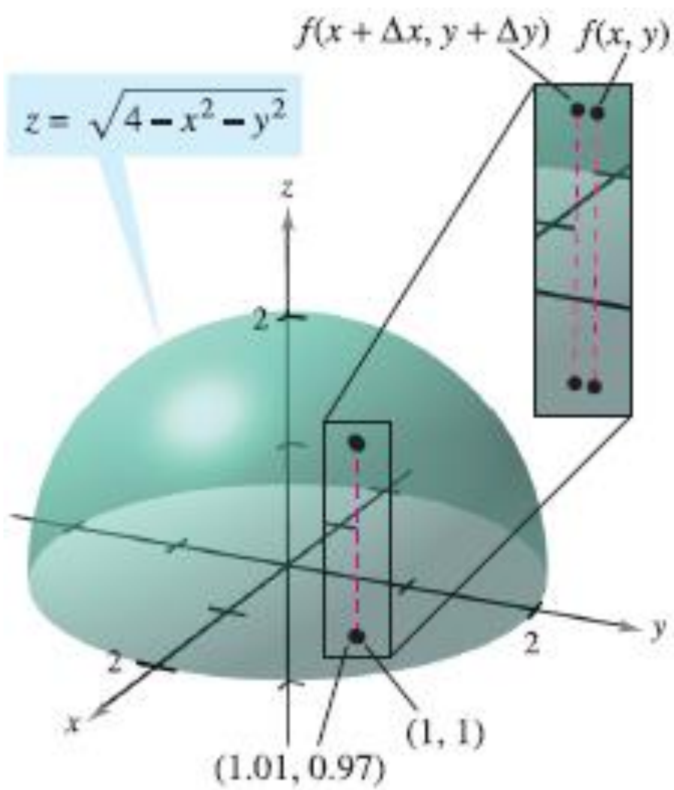
- Δz 의 1차 근사 (linear approximation)

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$



예제 3: 전미분을 이용한 근사

- dz를 이용하여 (x, y)값이 $(1, 1)$에서 $(1.01, 0.97)$로 변할 때 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 의 변화를 추정하자



$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}(0.01)-\frac{1}{\sqrt{2}}(-0.03)=\frac{0.02}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,(0.01)\approx 0.0141$$

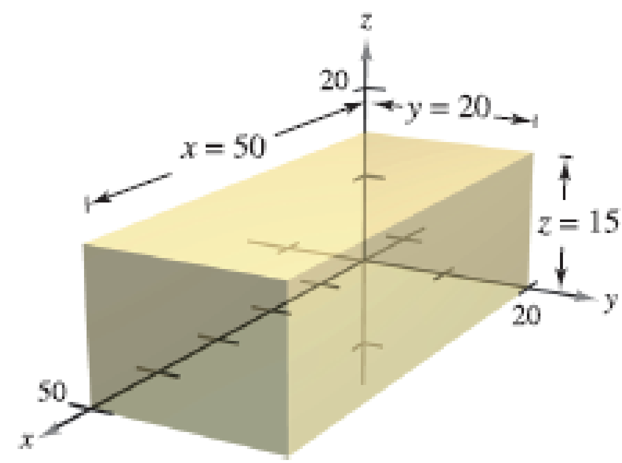
$$\begin{aligned}\Delta z &= f(1.01, 0.97)-f(1, 1)\\ &=\sqrt{4-(1.01)^2-(0.97)^2}-\sqrt{4-1^2-1^2}\approx 0.0137\end{aligned}$$

예제 4: 오차 해석 (Error Analysis)

직육면체 상자의 각 모서리를 측정할 때 나타나는 허용오차는 ±0.1밀리미터이다. 이 상자의 각 모서리의 길이는 그림 11.37에서와 같이 $x = 50$ cm, $y = 20$ cm, $z = 15$ cm이다. dV를 이용하여 이 상자의 부피를 계산할 때, 증가오차와 상대오차를 추정하여라.

$$
\begin{aligned}
dV &= (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (50)(20)(\pm 0.01) \\
&= 300(\pm 0.01) + 750(\pm 0.01) + 1000(\pm 0.01) \\
&= \pm 20.5\ \text{cm}^3
\end{aligned}
$$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15000} \approx 0.14\,\%$$



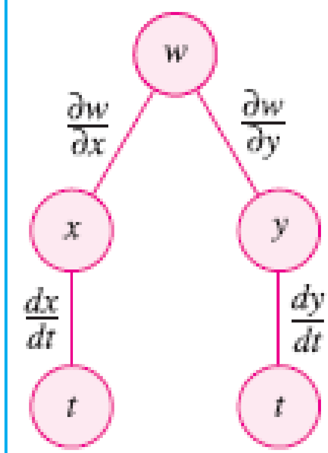
연쇄법칙 (Chain Rule): 독립변수 1개인 경우

정리 11.6 연쇄법칙: 독립변수가 한 개인 경우

$w = f(x, y)$를 변수 x, y에 대한 미분가능인 함수라 하자. $x = g(t)$와 $y = h(t)$도 t에 대한 미분가능인 함수이면 w는 변수 t에 대해 미분가능인 함수이고

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

이다(그림 11.38).



정리 11.6의 연쇄법칙은 변수의 개수에 관계없이 확장할 수 있다. x_i가 미분가능인 t의 함수로 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, …, $x_n = x_n(t)$일 때

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

이면

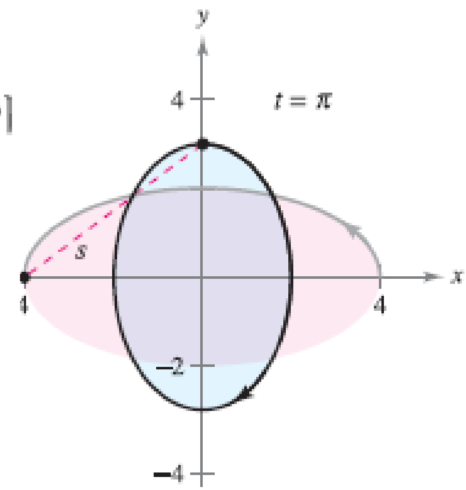
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

예제 5~6: 연쇄법칙 이용하기

예제 5　독립변수가 한 개인 함수에 대한 연쇄법칙

$x = \sin t$ 이고 $y = e^t$ 인 함수 $w = x^2 y - y^2$ 이 있다. $t = 0$ 일 때 $\dfrac{dw}{dt}$ 를 구하여라.

예제 6　연쇄법칙을 응용하여 상관변화율 구하기



두 물체가 다음과 같이 매개변수방정식으로 주어진 각기 다른 타원 경로를 움직이고 있다.

$x_1 = 4\cos t,\qquad y_1 = 2\sin t$　　첫 번째 물체

$x_2 = 2\sin 2t,\qquad y_2 = 3\cos 2t$　　두 번째 물체

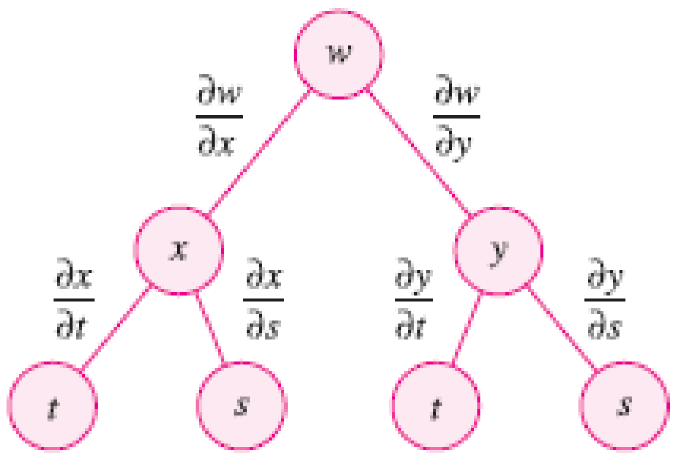
$t = \pi$ 일 때 두 물체 사이의 거리의 변화율을 구하여라.

연쇄법칙: 독립변수 2개인 경우

정리 11.7 연쇄법칙: 독립변수가 두 개인 경우

$w = f(x, y)$를 변수 x, y에 대한 미분가능인 함수라 하자. $x = g(s, t)$와 $y = h(s, t)$의 일계편도함수 $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$가 모두 존재하면 $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}$가 존재하고 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



연쇄법칙: 독립변수 m개인 경우

정리 11.7의 연쇄법칙은 변수의 개수에 관계없이 확장할 수 있다. 예를 들어 w가 n개의 변수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 갖는 함수이고, 각각의 x_i도 m개의 변수 $t_1, t_2, \ldots, t_m$에 대한 함수일 때, $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$의 편도함수는 다음과 같다.

$$\frac{\partial w}{\partial t_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_2} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_m} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

예제 8~9: 연쇄법칙 이용하기

예제 8 독립변수가 두 개인 함수에 대한 연쇄법칙

$w = 2xy$, $x = s^2 + t^2$, $y = \dfrac{s}{t}$일 때 연쇄법칙을 이용하여 $\dfrac{\partial w}{\partial s}$와 $\dfrac{\partial w}{\partial t}$를 구하여라.

예제 9 독립변수가 세 개인 함수에 대한 연쇄법칙

함수 $w = xy + yz + xz$에서 $x = s\cos t$, $y = s\sin t$, $z = t$이다. $s = 1$, $t = 2\pi$일 때

$\partial w/\partial s$, $\partial w/\partial t$를 각각 구하여라.

음함수의 (편)미분 (Implicit Differentiation)

정리 11.8 연쇄법칙: 음함수의 미분법

방정식 $F(x, y)=0$이 y가 x에 대하여 미분가능인 음함수로 정의되면 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \qquad F_y(x, y)\neq 0$$

방정식 $F(x, y, z)=0$이 z가 x와 y에 대하여 미분가능인 음함수로 정의되면 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \qquad F_z(x, y, z)\neq 0$$

예제 10~11: 음함수의 (편)미분

예제 10 **음함수의 도함수 구하기**

$y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$ 의 도함수 dy/dx 를 구하여라.

예제 11 **음함수의 편도함수 구하기**

$3x^2 z - x^2 y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$ 의 편도함수 $\partial z/\partial x$ 와 $\partial z/\partial y$ 를 구하여라.

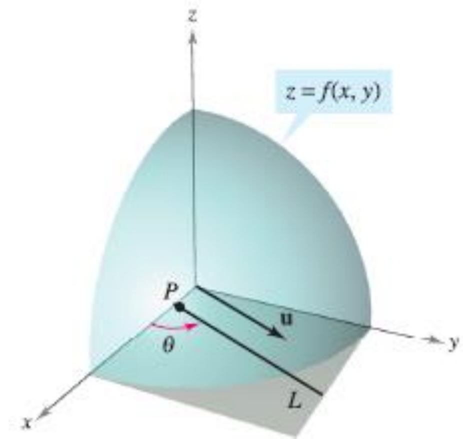
9장 벡터와 공간기하

11.5 방향도함수와 기울기

- ✓ 이변수함수의 방향도함수
- ✓ 이변수함수의 그래디언트

곡면 $z = f(x, y)$ 의 한 점에서의 기울기

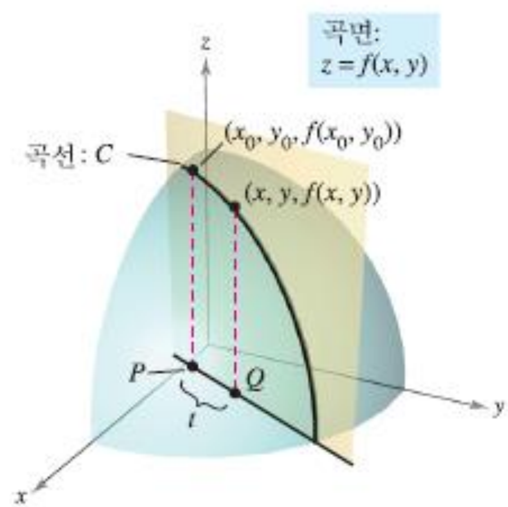
- x축 방향의 곡면의 기울기: 편도함수 $f_x(x, y)$
- y축 방향의 곡면의 기울기: 편도함수 $f_y(x, y)$



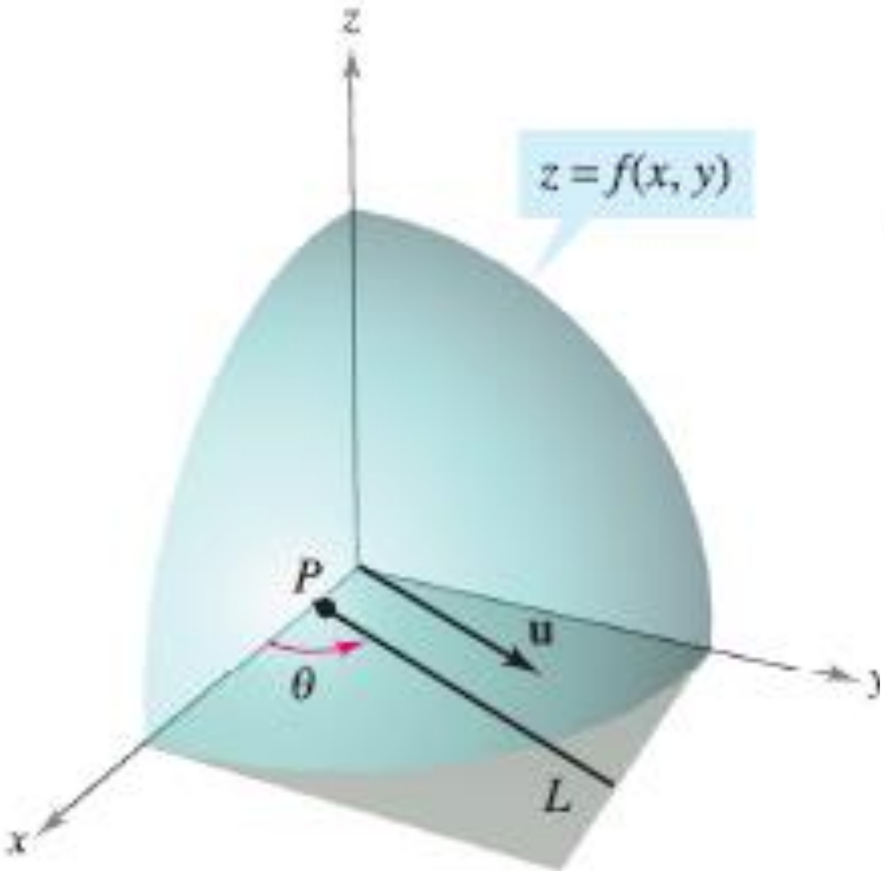
- 곡면의 한 점 $P^*(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 에서 곡면의 기울기?
  - 단위벡터 $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ 방향의 곡면의 기울기
    - 평면 A와 xy 평면과의 교선 L 위의 임의의 점 $Q(x, y)$
    - Q에 대응하는 곡면 위의 점: $Q^*(x, y, f(x, y))$
  - $P(x_0, y_0)$ 를 지나고 벡터 **u**와 평행이며 xy평면에 수직인 평면과 곡면이 만나는 곡선 C 의 기울기

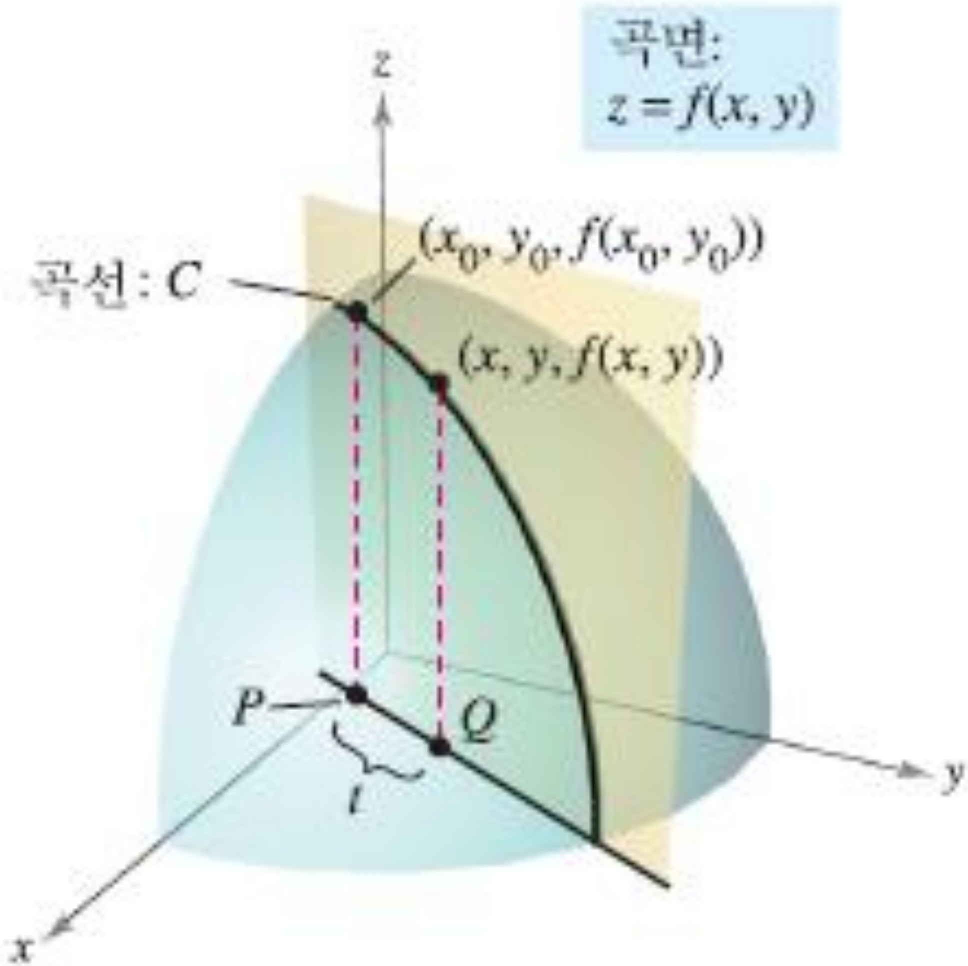
    → (P^*, Q^*의 z값의 차이) / (PQ의 길이)

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{t} \qquad \text{단}, t = \frac{x-x_0}{\cos\theta}$$



곡면 $z = f(x, y)$ 의 한 점에서의 기울기





방향도함수 (Directional Derivatives)

방향도함수의 정의

이변수함수를 $f(x, y)$라 하고 임의의 단위벡터를 $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$라 하면, $\mathbf{u}$ **방향으로의 f의 방향도함수**는 $D_{\mathbf{u}}f$와 같이 쓰고 아래 극한이 존재할 때 다음과 같이 정의한다.

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + t\sin\theta) - f(x, y)}{t}$$

정리 11.9 방향도함수

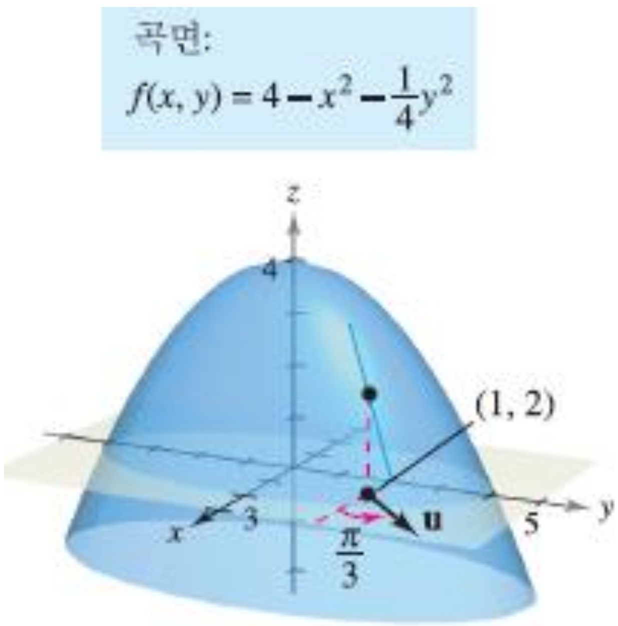
f가 x와 y의 미분가능인 함수이면 단위벡터 $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$의 방향으로 f의 방향도함수는

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta$$

이다.

예제 1: 방향도함수 구하기

벡터 $\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$의 방향으로 점 $(1, 2)$에서 함수 $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$의 방향도함수를 구하여라.



그래디언트 (Gradient)

이변수함수의 그래디언트의 정의

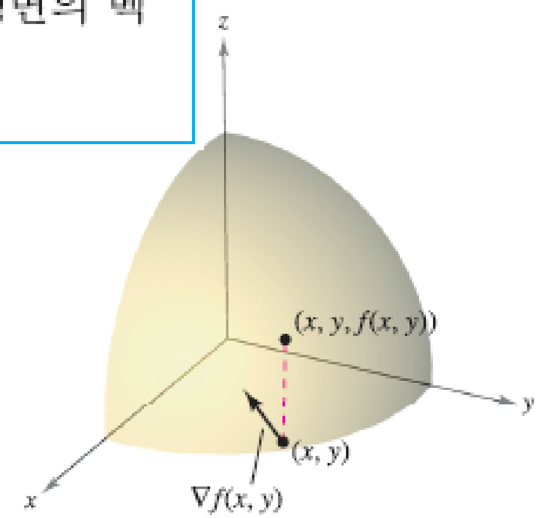
$z=f(x, y)$는 f_x, f_y가 존재하는 x와 y의 함수라 할 때 **f의 그래디언트**는 $\nabla f(x, y)$로 나타내고 다음과 같은 벡터이다.

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

∇f를 "그래디언트 f"(또는 del f)라 읽는다. 다른 기호로는 **grad** $f(x, y)$로 쓰기도 한다. 그림 11.46에서와 같이 점 (x, y)에서 그래디언트 $\nabla f(x, y)$는 평면의 벡터이다(공간의 벡터가 아니다).

예제 2 함수의 그래디언트 구하기

점 $(1, 2)$에서 함수 $f(x, y) = y\ln x + xy^2$의 그래디언트를 구하여라.



그래디언트를 이용한 방향도함수 구하기

정리 11.10 방향도함수의 다른 형태

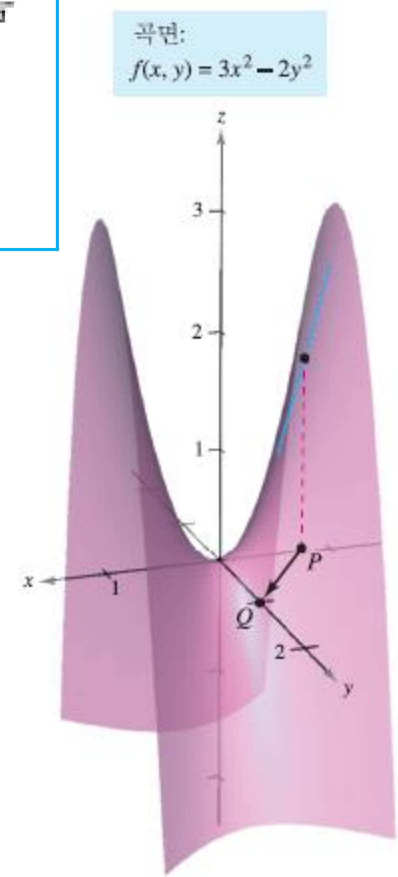
x, y의 미분가능인 함수를 f라 하면 단위벡터 $\mathbf{u}$ 방향으로 f의 방향도함수는 다음과 같다.

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

예제 3 $\nabla f(x, y)$를 이용하여 방향도함수 구하기

$P\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$에서 $Q(0, 1)$의 방향으로 점 $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$에서 다음 함수의 방향도함수를 구하여라.

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$



그래디언트의 성질

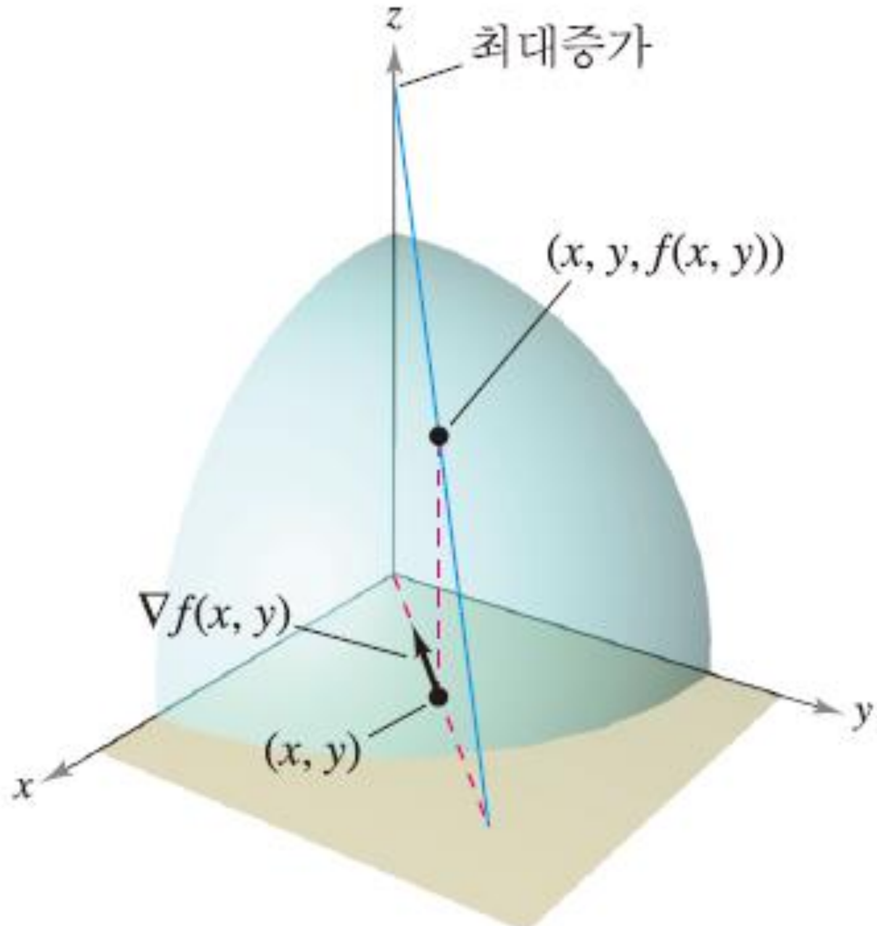
정리 11.11 그래디언트의 성질

함수 f가 점 (x, y)에서 미분가능이라고 하면

1. $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$이면 모든 $\mathbf{u}$에 대하여 $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 0$이다.
2. f의 최대증가의 방향은 $\nabla f(x, y)$로 주어지고, $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$의 최댓값은 $\|\nabla f(x, y)\|$이다.
3. f의 최소증가의 방향은 $-\nabla f(x, y)$로 주어지고, $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$의 최솟값은 $-\|\nabla f(x, y)\|$이다.

- 함수 $f(x, y)$가 어느 방향으로 가장 빠르게 증가하는가?
  - 가장 빠른 상승 방향
  - 그래디언트로 주어짐

그래디언트의 성질



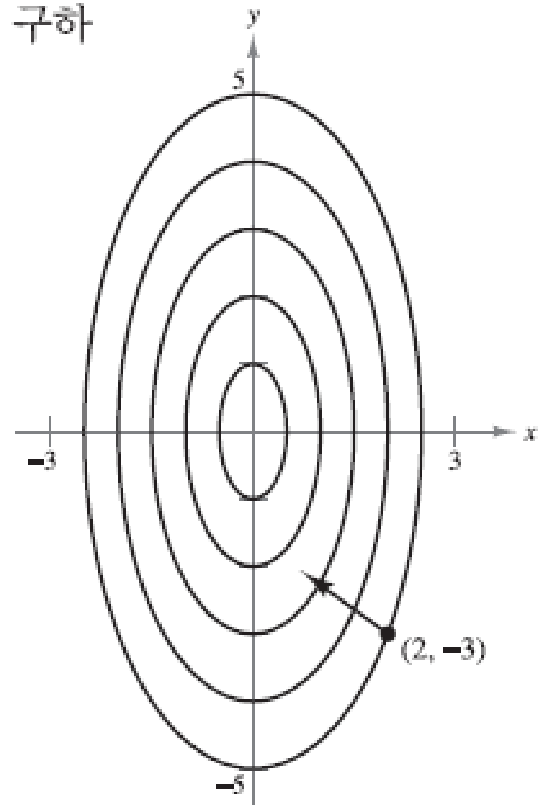
예제 4: 증가량이 최대인 방향 구하기

금속판의 표면온도를 섭씨온도로 나타내는 온도함수 T가 변수 x, y (cm)에 대하여

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

으로 주어진다. 점 $(2, -3)$으로부터 온도함수가 가장 빨리 증가하는 방향을 구하여라. 그리고 이때의 증가율을 구하여라.

등위선:
$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$



예제 4: 증가량이 최대인 방향 구하기

계속 증가량이 최대인 방향으로 이동해 간다면....

최대값을 갖는 점

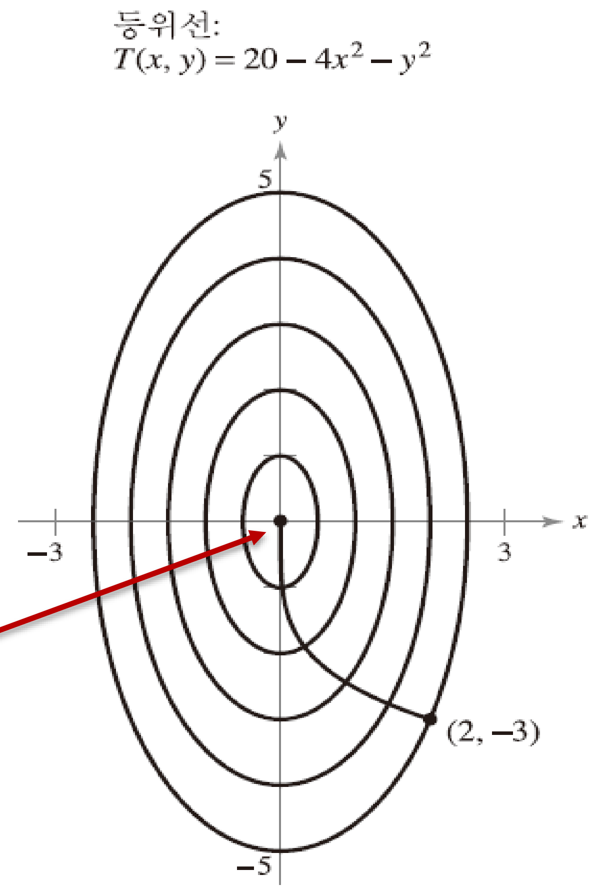


그림 11.50 열 감지 입자의 경로

그래디언트의 성질

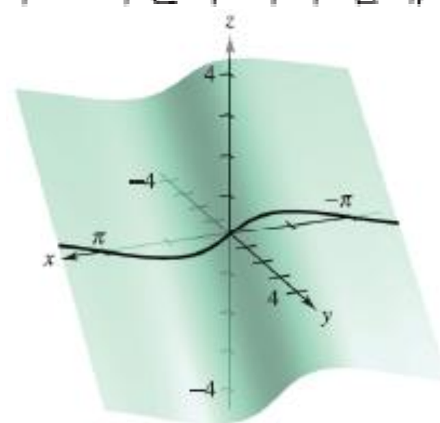
정리 11.12 그래디언트는 등위선의 법선벡터이다

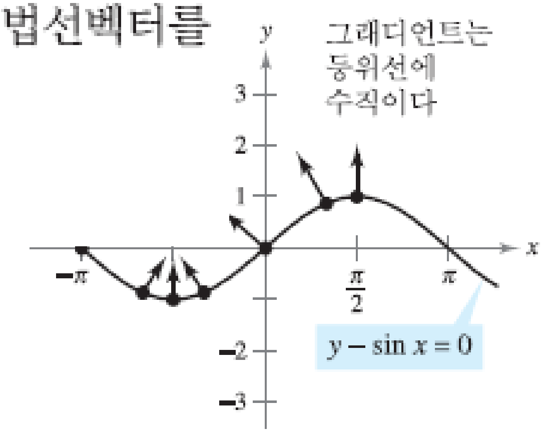
f가 점 (x_0, y_0)에서 미분가능이고 $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$이면, $\nabla f(x_0, y_0)$은 (x_0, y_0)을 지나는 등위선에 수직이다.

예제 6 등위선의 법선벡터 구하기

다음 함수에 대하여 $c=0$일 때 등위선을 그리고 곡선의 여러 점에서 법선벡터를 구하여라.

$$f(x, y) = y - \sin x$$





(b) $f(x, y) = 0$로 주어진 등위선

11.7 이변수함수의 극값

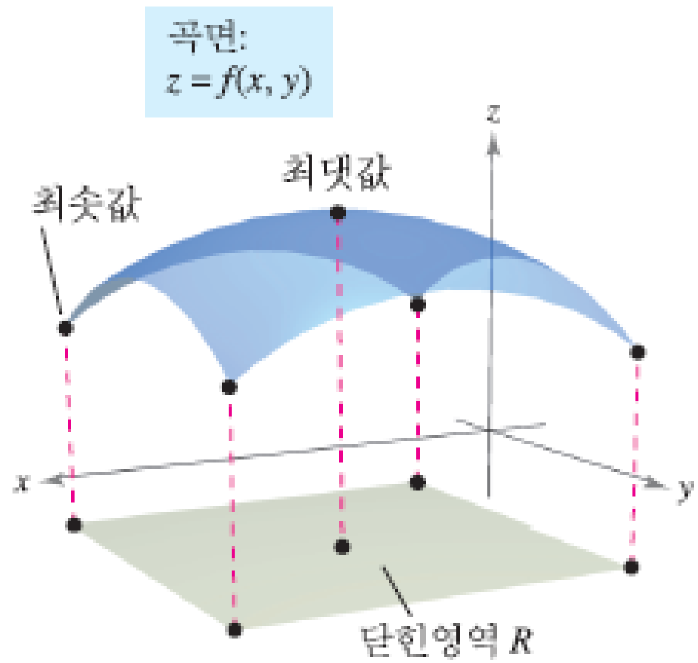
- ✓ 이변수함수의 최대값, 최소값, 극값
- ✓ 이차편도함수 판정법으로 이변수함수의 극값 구하기

최대값과 최소값

- 이변수함수 $f(x, y)$ 가 유계이고 닫힌 영역 R에서 정의되는 연속함수
- R의 임의의 (x, y) 에 대하여 두 값 $f(a, b)$ 와 $f(c, d)$ 가 아래를 만족하면

$$f(a,b) \le f(x,y) \le f(c,d), \quad (a,b),(c,d) \in R$$

- $f(a, b) = f$ 의 최소값 또는 절대 극소값
- $f(c, d) = f$ 의 최대값 또는 절대 극대값



최대/최소값 정리

정리 11.15 극값정리

이변수함수 f는 xy평면에서 유계이고 닫힌영역 R에서 정의되는 연속함수라 할 때

1. 영역 R에 f가 최솟값을 갖는 점이 적어도 하나 존재한다.

2. 영역 R에 f가 최댓값을 갖는 점이 적어도 하나 존재한다.

극값 (Relative Extrema)

극값의 정의

함수 f가 (x_0, y_0)을 포함하는 영역 R에서 정의된다고 할 때

1. (x_0, y_0)을 포함하는 열린원판에 있는 모든 점 (x, y)에 대하여

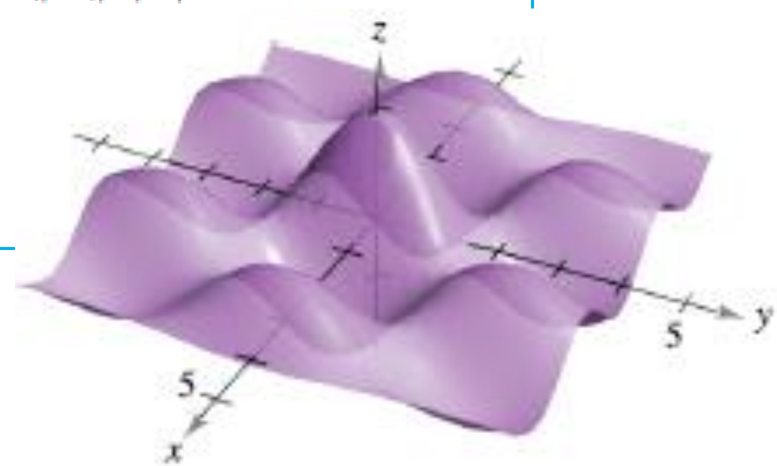
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

이면 함수 f는 (x_0, y_0)에서 **극솟값**을 갖는다.

2. (x_0, y_0)을 포함하는 열린원판에 있는 모든 점 (x, y)에 대하여

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

이면 함수 f는 (x_0, y_0)에서 **극댓값**을 갖는다.



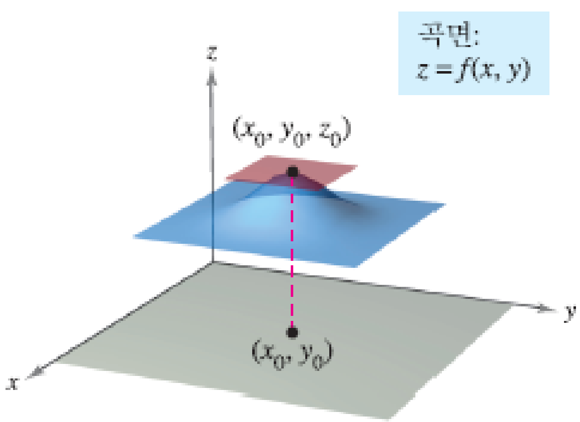
임계점 (Critical Point)

임계점의 정의

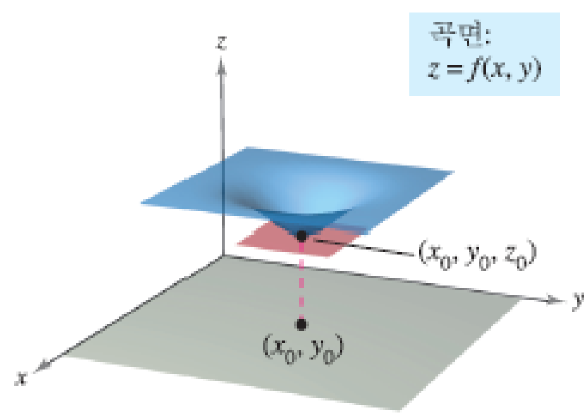
함수 f가 점 (x_0, y_0)을 포함하는 열린영역 R에서 정의된다고 할 때 점 (x_0, y_0)가 다음 성질 중 하나를 만족하면 점 (x_0, y_0)을 f의 **임계점**이라 한다.

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ 그리고 $f_y(x_0, y_0) = 0$ $\Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 0$

2. $f_x(x_0, y_0)$ 또는 $f_y(x_0, y_0)$이 존재하지 않는다.



극댓값



극솟값

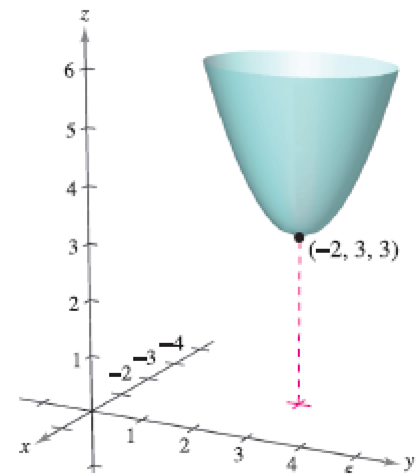
극값 → 임계점

정리 11.16 극값은 임계점에서만 나타난다

함수 f가 열린영역 R의 점 (x_0, y_0)에서 극값을 가지면 (x_0, y_0)은 f의 임계점이다.

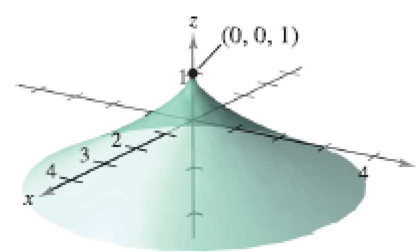
예제 1 극값 구하기

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$$



예제 2 극값 구하기

$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$의 극값을 구하여라.



안장점 (Saddle Point)

- 임계점에서 극값을 갖지 않는 경우

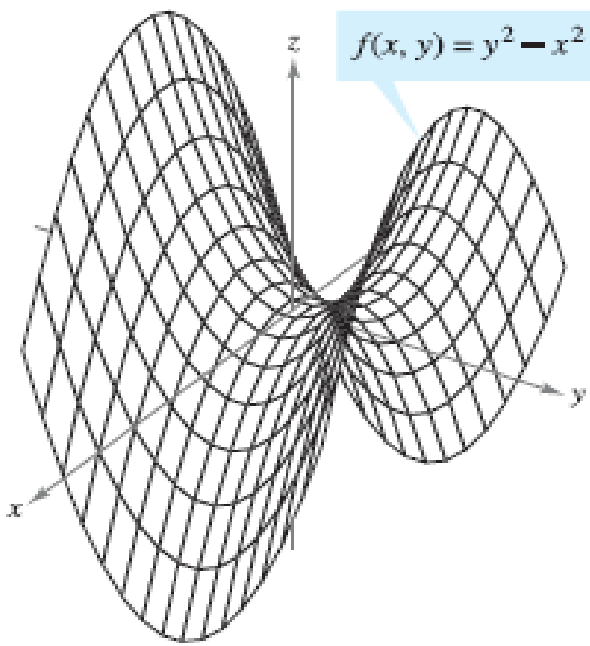


그림 11.66 안장점 (0, 0, 0): $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

이계편도함수 판정법 (Second Partial Test)

정리 11.17 이계편도함수 판정법

f가 $(a, b) \in R$(열린영역)에서 $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$이고 연속인 이계편도함수이면 f의 극값 판정은

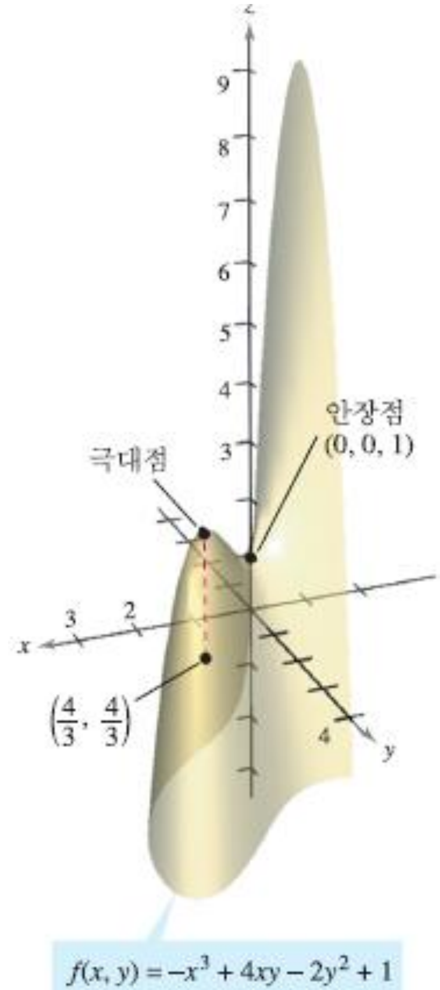
$$d = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

에 대하여

1. $d > 0$이고 $f_{xx}(a, b) > 0$이면 f는 점 (a, b)에서 **극솟값**을 갖는다.
2. $d > 0$이고 $f_{xx}(a, b) < 0$이면 f는 점 (a, b)에서 **극댓값**을 갖는다.
3. $d < 0$이면 점 $(a, b, f(a, b))$는 **안장점**이다.
4. $d = 0$이면 이 판정법으로는 결론지을 수 없다.

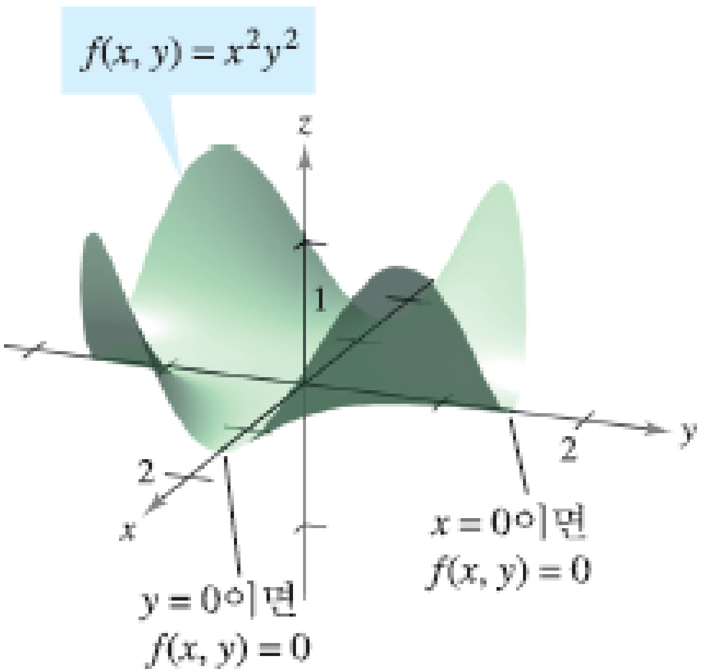
예제 3: 이계편도함수 판정법 이용하기

$f(x,\ y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$의 극값을 구하여라.



예제 4: 이계편도함수 판정법의 실패

$f(x,\ y) = x^2y^2$ 의 극값을 구하여라.



11.8 라그랑즈 승수

- ✓ 라그랑즈 승수법
- ✓ 라그랑즈 승수를 이용하여 제약조건 1개를 갖는 최적화 문제 풀기
- ✓ 라그랑즈 승수를 이용하여 제약조건 2개를 갖는 최적화 문제 풀기

라그랑즈 승수 (Lagrange Multiplier, λ)

정리 11.18 라그랑즈의 정리

함수 f와 g는 연속인 일계편도함수를 갖고 f는 제약조건 $g(x, y) = c$의 곡선의 점 (x_0, y_0)에서 극값을 갖는다고 하자. $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$이면 다음을 만족하는 실수 λ가 존재한다.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

- 제약조건을 갖는 최적화 문제
- 두 곡선 f와 g가 한 점에서 접함 $\leftrightarrow$ 두 곡선의 그래디언트가 평행

라그랑즈 승수법: 제약조건이 1개인 경우

라그랑즈 승수법

함수 f와 g가 라그랑즈 정리의 가정을 만족한다고 하자. 제약조건이 $g(x, y) = c$인 f가 최솟값, 최댓값을 갖는다고 할 때 f의 최솟값, 최댓값을 구하는 과정은 다음과 같다.

1. 연립방정식

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$
$$f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$
$$g(x, y) = c$$

를 풀어서 두 방정식 $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$와 $g(x, y) = c$의 해를 구한다.

2. 앞의 단계에서 구한 해를 함수 f에 대입한다. 가장 큰 값이 제약조건 $g(x, y) = c$를 만족하는 f의 최댓값이 되고, 가장 작은 값이 f의 최솟값이 된다.

예제 1: 라그랑즈 승수법

제약조건이 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$일 때, 영역 $x>0$, $y>0$에서 $f(x, y)=4xy$의 최댓값을 구하여라.

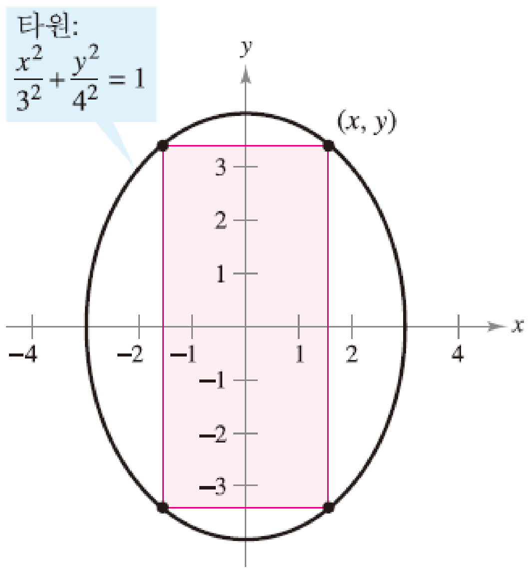


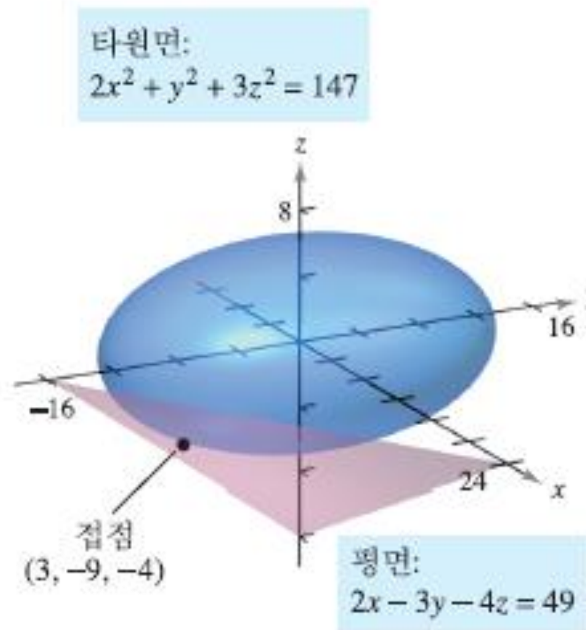
그림 11.69 목적함수: $f(x, y) = 4xy$

예제 2: 라그랑즈 승수법과 삼변수함수

제약조건이 $2x - 3y - 4z = 49$ 일 때

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$$

의 최솟값을 구하여라.



라그랑즈 승수법: 제약조건이 2개인 경우

- 제약조건: $g(x, y, z) = c,\ h(x, y, z) = d$
- $f(x, y, z)$의 최적화 문제
- 2개의 라그랑즈 승수 도입

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) = c \\ h(x,y,z) = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = \lambda g_x(x,y,z) + \mu h_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) = \lambda g_y(x,y,z) + \mu h_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z) + \mu h_z(x,y,z) \\ g(x,y,z) = c \\ h(x,y,z) = d \end{cases}$$

예제 4: 제약조건이 2개인 경우

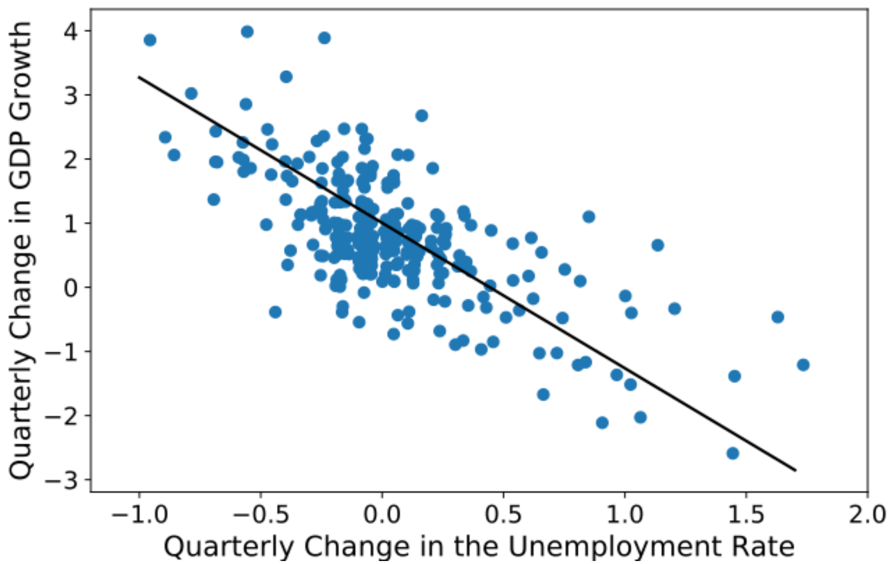
구면 $x^2+y^2+z^2=11$의 각 점에서 온도함수가 $T(x, y, z)=20+2x+2y+z^2$으로 주어졌을 때, 평면 $x+y+z=3$으로 잘린 구면의 교차선에서 온도함수의 극값을 구하여라.

다변수함수 최대,최소의 통계에서의 활용

- ✓ 단순선형회귀, 최소제곱법

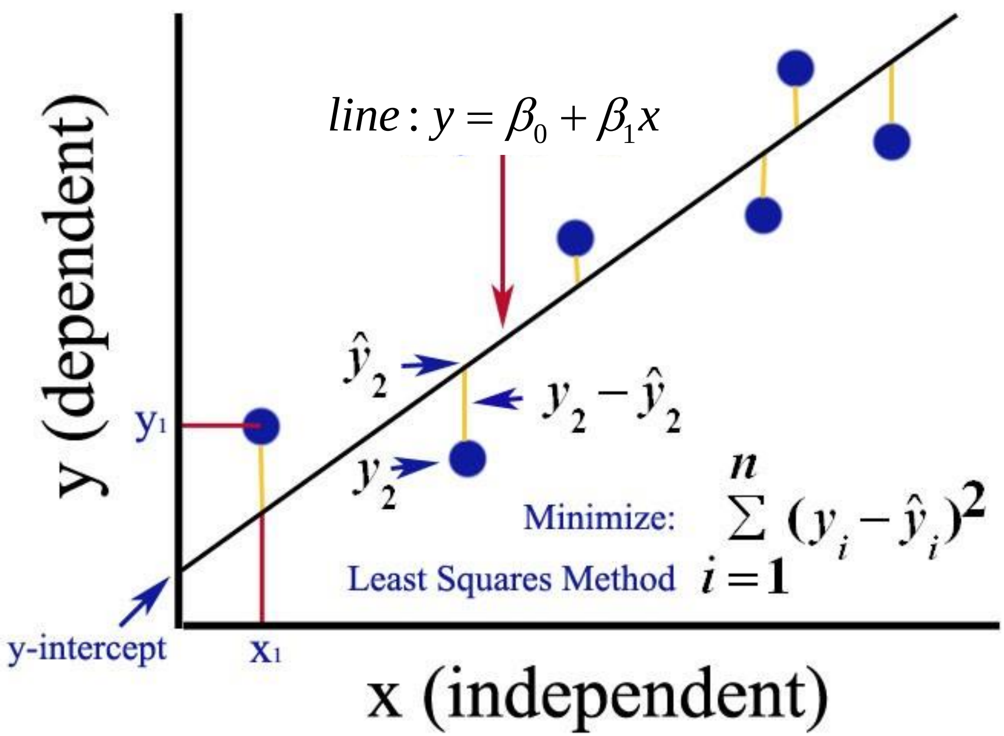
단순선형회귀모형

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n$$



단순선형회귀모형의 추정

β_0, β_1 의 추정 ⇨ 최소제곱법 (연습문제 11.7의 20번)



단순선형회귀모형의 추정