$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^4 y\Big]_0^{\sqrt{x}} dx \qquad y\text{에 대하여 적분}$$

$$= \int_0^4 \sqrt{x}\, dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad x\text{에 대하여 적분}$$

이다.

하나의 반복적분으로 영역의 넓이를 구할 수 없는 경우가 있다. 이 경우 영역을 구할 수 있는 부분영역으로 나누어 각각 반복적분으로 나타내고 이를 모두 합하면 된다.

예제 6 두 반복적분으로 나누어 넓이 계산하기

x축, 직선 $y = -3x + 6$ 의 윗부분, 포물선 $y = 4x - x^2$ 의 아랫부분으로 둘러싸인 영역 R 의 넓이를 구하여라.

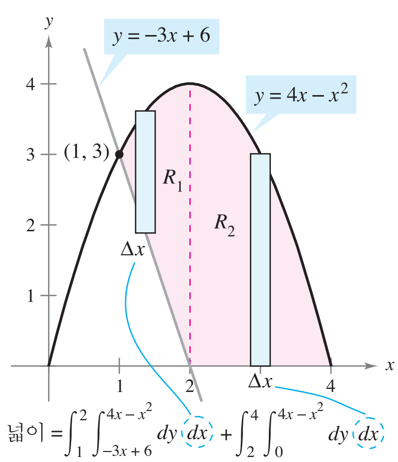


그림 12.7

[풀이] 그림 12.7에서와 같이 영역 R 을 R_1과 R_2로 나누어 계산한다.

$$\text{넓이} = \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dydx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dydx$$

$$= \int_1^2 (4x - x^2 + 3x - 6)\, dx + \int_2^4 (4x - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x\right]_1^2 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^4$$

$$= \left(14 - \frac{8}{3} - 12 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6\right) + \left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{15}{2}$$

연습문제 12.1

1. 다음 적분을 계산하여라.

(a) $\int_0^x (2x - y)\, dy$

(b) $\int_1^{2y} \frac{y}{x}\, dx, \quad y > 0$

(c) $\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y\, dy$

(d) $\int_{e^y}^{y} \frac{y \ln x}{x}\, dx, \quad y > 0$

(e) $\int_0^{x^3} ye^{-y/x}\, dy$

2. 다음 반복적분을 계산하여라.

(a) $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\, dy\, dx$

(b) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} (1 + \cos x)\, dydx$

(c) $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2}\, dydx$

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dxdy$

(e) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dxdy$

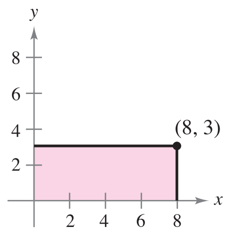
(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} \theta r\,dr\,d\theta$

3. 다음 이상반복적분을 계산하여라.

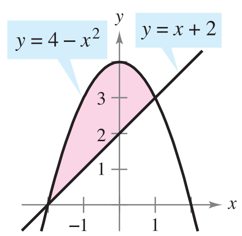
(a) $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_0^{1/x} y\,dy\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{1}{xy}\,dx\,dy$

4. 다음 영역의 넓이를 구하여라.

(a)



(b)



5. 다음 방정식의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이를 반복적분으로 구하여라.

(a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2,\quad x=0,\quad y=0$

(b) $2x-3y=0,\quad x+y=5,\quad y=0$

(c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

6. 다음에서 적분영역 R의 적분순서를 바꾸어 나타내어라.

(a) $\displaystyle\int_0^4\int_0^y f(x,\ y)\,dxdy$

(b) $\displaystyle\int_1^{10}\int_0^{\ln y} f(x,\ y)\,dxdy$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 f(x,\ y)\,dydx$

7. 다음에서 적분영역 R의 적분순서를 바꾸어 나타내어라. 적분값은 적분순서와 관계없음을 보여라.

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 dy\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x dydx+\int_2^4\int_0^{4-x} dydx$

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dxdy$

8. 다음 반복적분을 계산하여라(**힌트:** 적분순서를 바꾼다).

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \sin x^2\,dxdy$

9. 반복적분 $\displaystyle\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^3+3y^2)\,dydx$를 컴퓨터 대수시스템으로 계산하여라.

10. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}}(x^2y-xy^2)\,dxdy$에 대하여 (a) 적분의 영역을 그려라. (b) 적분의 순서를 바꾸어 나타내어라. (c) 컴퓨터 대수시스템으로 순서와 관계없이 적분값이 같음을 보여라.

11. 컴퓨터 대수시스템으로 다음 반복적분의 근삿값을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-x^2} e^{xy}\,dydx$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 6r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$

12. **(참, 거짓)** 다음 명제가 참인지 거짓인지를 판별하여라. 거짓이면 그 이유를 설명하거나 예를 들어라.

$$\int_a^b\int_c^d f(x,\ y)\,dydx=\int_c^d\int_a^b f(x,\ y)\,dxdy$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{32}$$ 월리스 공식

이다.

연습문제 12.2

1. 네 점 (0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 2)를 꼭짓점으로 하는 사각형 영역 R을 8개의 정사각형으로 나누고 각 정사각형의 중심을 (x_i, y_i)로 하여 합 $\sum_{i=1}^{8} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i$를 계산하고 적분 $\iint_R f(x, y)\,dA$의 근삿값을 구하여라. 다음 반복적분을 계산하고 근삿값과 비교하여라.

(a) $\int_0^4 \int_0^2 (x + y)\,dy\,dx$

(b) $\int_0^4 \int_0^2 (x^2 + y^2)\,dy\,dx$

2. 다음 반복적분을 계산하여라.

(a) $\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y)\,dy\,dx$

(b) $\int_0^6 \int_{y/2}^3 (x + y)\,dx\,dy$

(c) $\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y)\,dy\,dx$

3. 다음 적분의 두 적분순서 중에서 계산이 간편한 것을 택하여 주어진 영역에서 적분하여라.

(a) $\iint_R xy\,dA$, R: 꼭짓점이 (0, 0), (0, 5), (3, 5), (3, 0)인 직사각형

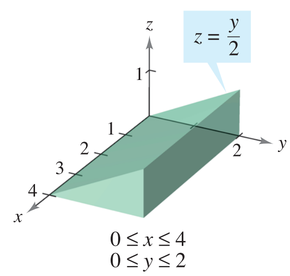
(b) $\iint_R \frac{y}{x^2 + y^2}\,dA$, R: $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$로 둘러싸인 사다리꼴

(c) $\iint_R -2y\,dA$, R: $y = 4 - x^2$, $y = 4 - x$로 둘러싸인 영역

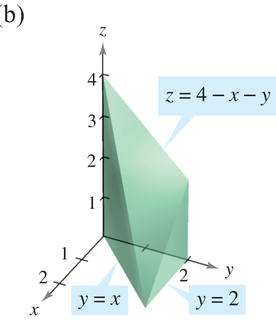
(d) $\iint_R x\,dA$, R: $y = \sqrt{25 - x^2}$, $3x - 4y = 0$, $y = 0$으로 둘러싸인 제1사분면의 원의 일부분

4. 다음 입체의 부피를 이중적분으로 구하여라.

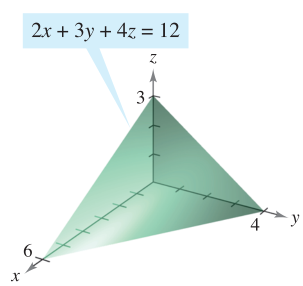
(a)



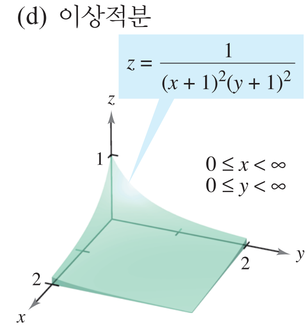
(b)



(c)



(d) 이상적분



5. 다음 방정식의 그래프로 둘러싸인 입체의 부피를 나타내는 이중적분을 쓰고 계산하여라.

(a) $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, $x = 1$, 제1팔분공간

(b) $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$

(c) $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$, 제1팔분공간

(d) $z = x + y$, $x^2 + y^2 = 4$, 제1팔분공간

6. 방정식 $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$의 그래프로 둘러싸인 입체의 부피를 월리스 공식을 이용하여 구하여라.

7. 컴퓨터 대수시스템으로 방정식의 그래프로 둘러싸인 입체의 부피를 구하여라.

(a) $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$

(b) $z=\dfrac{2}{1+x^2+y^2}$, $z=0$, $y=0$, $x=0$, $y=-0.5x+1$

8. f가 넓이 1인 영역 R에서 $0 \le f(x, y) \le 1$을 만족하는 연속함수이면 $0 \le \iint_R f(x, y)\,dA \le 1$임을 증명하여라.

9. 다음 반복적분값을 구하여라(**힌트**: 적분순서를 바꾼다).

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\,dx\,dy$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\arccos y} \sin x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\,dy$

10. R에서 $f(x, y)$의 평균값은 $\dfrac{1}{A}\iint_R f(x, y)\,dA$이다. R은 꼭짓점이 (0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 2)인 사각형일 때 $f(x, y)=x$의 평균값을 구하여라.

11. R은 넓이가 B인 xy평면의 영역이다. 모든 $(x, y)\in R$에 대하여 $f(x, y)=k$일 때 $\iint_R f(x, y)\,dA$의 값은 무엇인가? 설명하여라.

12. **(평균생산)** 어떤 자동차 제조업자의 콥-더글러스 생산함수가 $f(x, y)=100x^{0.6}y^{0.4}$이다. 여기서 x는 노동의 양이고 y는 자본의 양이다. x가 200~250 사이의 변수이고 y가 300~325 사이의 변수일 때 평균생산량을 예측하여라.

13. **(확률)** 연속확률변수 x와 y의 결합밀도함수 $f(x, y)$는

(a) 모든 (x, y)에 대하여 $f(x, y)\ge 0$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dA=1$

(c) $P[(x, y)\in R]=\iint_R f(x, y)\,dA$

이다. 함수

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}, & (0\le x\le 5,\ 0\le y\le 2)\\ 0, & (\text{그밖에서})\end{cases}$$

이 결합밀도함수임을 밝히고 $P(0\le x\le 2, 1\le y\le 2)$를 구하여라.

14. **(참, 거짓)** 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하여라. 거짓이면 그 이유를 설명하거나 예를 들어라.

「구면 $x^2+y^2+z^2=1$의 부피는

$$V=8\int_0^1\int_0^1\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

이다.」

15. 함수 $f(x)=\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt$에 대하여 구간 [0, 1]에서 f의 평균값을 구하여라.

16. $\iint_R (9-x^2-y^2)\,dA$의 값을 최대화할 수 있는 xy평면의 영역 R을 결정하여라.

17. $\displaystyle\int_0^2 [\arctan(\pi x)-\arctan x]\,dx$을 구하여라(**힌트**: 주어진 적분을 이중적분으로 변환한다).

12.3 극좌표로 변수변환

• 극좌표계에서 이중적분을 나타내고 계산하기

극좌표계에서 이중적분

직교좌표계보다 극좌표계를 이용하면 계산이 간편한 이중적분이 있다. 원, 심장형, 장미곡선이나 x^2+y^2이 들어있는 피적분함수에 대한 영역에서 이중

$$= k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[\frac{y^2z^2}{2}+\frac{z^4}{4}\right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dy\,dx$$

$$= k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[\frac{y^2(4-x^2-y^2)}{2}+\frac{(4-x^2-y^2)^2}{4}\right]dy\,dx$$

$$= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[(4-x^2)^2-y^4\right]dy\,dx$$

$$= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2}\left[(4-x^2)^2y-\frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2}\frac{8}{5}(4-x^2)^{5/2}\,dx$$

$$= \frac{4k}{5}\int_{0}^{2}(4-x^2)^{5/2}\,dx \qquad x = 2\sin\theta$$

$$= \frac{4k}{5}\int_{0}^{\pi/2}64\cos^6\theta\,d\theta$$

$$= \left(\frac{256k}{5}\right)\left(\frac{5\pi}{32}\right) \qquad \text{월리스 공식}$$

$$= 8k\pi$$

따라서 $I_x = 8k\pi = I_y$ 이다.

예제 6에서 x축과 y축에 대한 관성모멘트는 같다. 그러나 z축에 대하여는 다르다. z축에 대한 관성모멘트를 구하면

$$I_z = \frac{16}{3}k\pi$$

이다. 이것은 z축보다 x축, y축에 대하여 회전하는 데 더 많은 저항이 있음을 보여준다(그림 12.61).

연습문제 12.6

1. 다음 삼중반복적분을 계산하여라.

(a) $\displaystyle\int_0^3\int_0^2\int_0^1 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

(b) $\displaystyle\int_1^4\int_0^1\int_0^x 2ze^{-x^2}\,dy\,dx\,dz$

(c) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\pi/2}\int_0^{1-x} x\cos y\,dz\,dy\,dx$

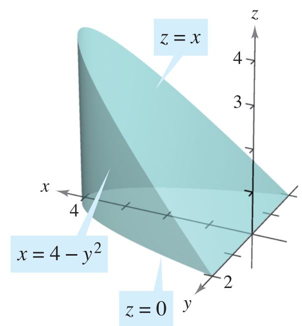
2. 다음 입체의 부피를 삼중적분으로 나타내어라.

(a) 각 좌표평면과 평면 $z = 4 - x - y$로 둘러싸인 제1팔분공간에 있는 입체

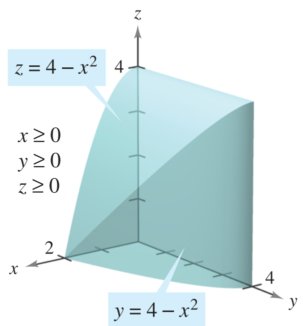
(b) 포물면 $z = 9 - x^2 - y^2$과 평면 $z = 0$으로 둘러싸인 입체

3. 다음 그림의 입체영역의 부피를 삼중적분으로 구하여라.

(a)



(b)



4. 부피가 삼중반복적분 $\displaystyle\int_0^4\int_0^{(4-x)/2}\int_0^{(12-3x-6y)/4} dz\,dy\,dx$ 인 입체를 그리고 순서를 $dy\,dx\,dz$ 로 할 때의 삼중적분으로 나타내어라.

5. $\displaystyle\iiint_Q xyz\,dV$ 를 다음 입체영역 Q에 대하여 여섯 가지 적분순서로 나타내어라.

(a) $Q=\{(x,\ y,\ z): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le 3\}$

(b) $Q=\{(x,\ y,\ z): x^2+y^2\le 9,\ 0\le z\le 4\}$

6. (질량과 질량중심) 다음 방정식의 그래프로 둘러싸인 입체영역의 주어진 밀도함수에 대하여 지시한 질량중심과 질량 m을 각각 구하여라.

(a) $\bar{x},\ \rho(x,\ y,\ z)=k$

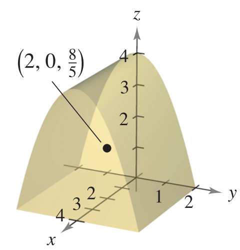
$Q: 2x+3y+6z=12,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$

(b) $\bar{z},\ \rho(x,\ y,\ z)=kx$

$Q: z=4-x,\quad z=0,\quad y=0,\quad y=4,\quad x=0$

7. (질량과 질량중심) $x=0,\ x=b,\ y=0,\ y=b,\ z=0,\ z=b$ 로 둘러싸인 입체에서 $\rho(x,\ y,\ z)=kxy$ 일 때 질량과 질량중심을 구하기 위한 삼중적분을 나타내어라.

8. 그림은 밀도가 균일한 입체의 질량중심을 나타낸다. 다음과 같이 변하는 밀도함수에 대하여 질량중심 $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$가 어떻게 바뀌는지 추측하여라.



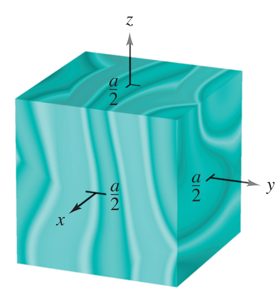
(a) $\rho(x,\ y,\ z)=kx$ (b) $\rho(x,\ y,\ z)=k(y+2)$

9. 다음 방정식으로 둘러싸인 입체영역의 무게중심을 구하여라. 삼중적분을 컴퓨터 대수시스템으로 계산하여라(밀도는 균일하다고 가정하고 질량중심을 구한다).

(a) $z=\dfrac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2},\ z=h$

(b) $z=\sqrt{4^2-x^2-y^2},\ z=0$

10. (관성모멘트) 다음 주어진 입체의 밀도에 대한 $I_x,\ I_y,\ I_z$ 를 구하여라. 삼중적분은 컴퓨터 대수시스템으로 계산하여라.



(a) $\rho(x,\ y,\ z)=k$

(b) $\rho(x,\ y,\ z)=k(x^2+y^2)$

11. (관성모멘트) 밀도 ρ 인 입체영역 Q의 z축에 대한 관성모멘트를 구하는 삼중적분을 나타내어라.

$Q=\{(x,\ y,\ z): -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\ 0\le z\le 1-x\}$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

12. 밀도함수가 $\rho=kz$ 이고 $z=4-x^2-y^2$ 과 $z=0$ 으로 둘러싸인 입체영역 Q에 대하여 (a) 질량 (b) 질량중심 (c) z축에 대한 관성모멘트를 삼중적분으로 나타내어라.

13. (평균값) 좌표평면과 평면 $x=1,\ y=1,\ z=1$로 둘러싸인 제1팔분공간의 정육면체에 대하여 함수 $f(x,\ y,\ z)=z^2+4$의 평균값을 구하여라. 입체영역 Q에서 연속함수 $f(x,\ y,\ z)$의 평균값은

$$\frac{1}{V}\iiint_Q f(x,\ y,\ z)\,dV$$

이다(V는 Q의 부피).

14. 삼중적분 $\iiint_Q (1-2x^2-y^2-3z^2)\,dV$ 가 최대인 입체 영역 Q를 구하여라. 최대 근삿값을 컴퓨터 대수시스템으로 구하여라. 정확한 최댓값은 얼마인가?

15. 다음에서 a값을 구하여라.

$$\int_0^1 \int_0^{3-a-y^2} \int_a^{4-x-y^2} dz\,dx\,dy = \frac{14}{15}$$

12.7 원주좌표계와 구면좌표계의 삼중적분

- 원주좌표계에서 삼중적분을 나타내고 계산하기
- 구면좌표계에서 삼중적분을 나타내고 계산하기

The Granger Collection

라플라스
Pierre Simon de Laplace, 1749~1827

원주좌표계를 처음 사용한 사람은 프랑스 수학자 라플라스이다. 그는 "프랑스의 뉴턴"으로 불렸으며 역학, 미분방정식, 확률론 분야에서 주요 업적을 남겼다.

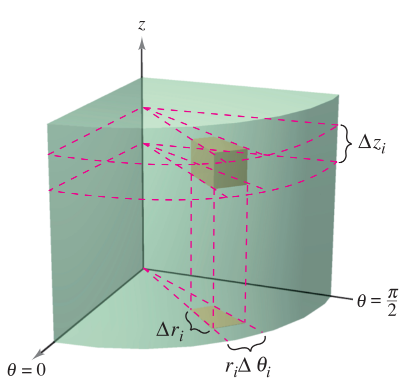


그림 12.62 원주블록의 부피는 $\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i \Delta z_i$이다.

원주좌표계에서 삼중적분

이 절에서는 삼중적분을 계산하기 위하여 원주좌표계와 구면좌표계를 이용하는 방법을 다룬다. 원주좌표를 직교좌표로 전환하는 방정식은

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

이다(9.7절 참고). 원주좌표계에서 가장 단순한 입체영역은 그림 12.62에서와 같이

$$r_1 \le r \le r_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad z_1 \le z \le z_2$$

로 정하는 원주영역이다.

입체영역 Q는

$$Q = \{(x, y, z) : (x, y) \in R,\ h_1(x, y) \le z \le h_2(x, y)\}$$

이고 이때 R은 Q의 xy평면으로의 정사영이고 극좌표계로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R = \{(r, \theta) : \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$$

여기서 $f(x, y, z)$가 Q에서 연속함수이면 Q에서 f의 삼중적분은

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \int_R \int \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right] dA$$