6-3)

$X_1, X_2, \cdots, X_{18} \sim \chi^2(1) \rightarrow E(X_i) = 1,\ Var(X_i) = 2 \quad (i=1, \cdots, 18)$

(a) $Y = \sum_{i=1}^{18} X_i$ 일 때, Y의 mgf는

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t\sum_1^{18} X_i}) = \prod_{i=1}^{18} E(e^{tX_i}) = ((1-2t)^{-\frac{1}{2}})^{18} \text{ 이므로,}$$

Y는 $r=18$인 카이제곱분포를 따르는 것을 알 수 있다. ✓

(b) $E(Y) = 18$, $Var(Y) = 36$ 일 때, 중심극한 정리를 이용하여 각 확률의 근삿값을 구하면

$$P(Y \le 9.390) \fallingdotseq P\left(\frac{Y-18}{\sqrt{36}} \le \frac{9.39-18}{\sqrt{36}}\right) ✓$$

$$= P(Z \le -1.435) = 1 - P(Z \le 1.435) \fallingdotseq 0.0764, ✓$$

$$P(Y \le 34.8) \fallingdotseq P\left(\frac{Y-18}{\sqrt{36}} \le \frac{34.8-18}{\sqrt{36}}\right) = P(Z \le 2.8) = 0.9974 \text{ 이다.} ✓$$

6-4)

$X \sim N(54.03, 5.8^2)$ 이면 $n=47$인 $\overline{X}$는 $\overline{X} \sim N\left(54.03, \left(\frac{5.8}{\sqrt{47}}\right)^2\right)$ 을 따른다. ✓

$$P(52.761 \le \overline{X} \le 54.453) = P\left(\frac{52.761-54.03}{5.8/\sqrt{47}} \le \frac{\overline{X}-\mu}{5.8/\sqrt{47}} \le \frac{54.453-54.03}{5.8/\sqrt{47}}\right) ✓$$

$$\fallingdotseq P(-1.5 \le Z \le 0.5) = P(Z \le 0.5) - P(Z \le -1.5) = P(Z \le 0.5) - (1 - P(Z \le 1.5))$$

$$= 0.6915 - (1 - 0.9332) = 0.6247 ✓$$

6-7)

$X_1 \sim \Gamma(3,2)$, $X_2 \sim \Gamma(2,2)$, $X_3 \sim \Gamma(5,2)$, $X_4 \sim \Gamma(3,2)$ 일 때,

감마분포의 pdf : $f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}$ $(0 \le x < \infty)$, mgf : $M_X(t) = \dfrac{1}{(1-\theta t)^{\alpha}}$ $(t < \frac{1}{\theta})$ 이다.

프로젝트를 완성시키는데 소요되는 총 시간을 Y라 하면 $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ 이고,

Y의 분포를 알아내기 위해 Y의 mgf를 구하면

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(X_1+X_2+X_3+X_4)}] = E[e^{tX_1}]\cdot E[e^{tX_2}]\cdot E[e^{tX_3}]\cdot E[e^{tX_4}]$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^3}\cdot\frac{1}{(1-2t)^2}\cdot\frac{1}{(1-2t)^5}\cdot\frac{1}{(1-2t)^3} = \frac{1}{(1-2t)^{13}}$$ 이므로,

확률변수 Y는 support $0 \le y < \infty$ 내에서 $\alpha=13,\ \theta=2$인 감마분포를 따르는것을 알 수 있다.

a) $P(Y \le 25) = \int_0^{25} f_Y(y)\,dy = \int_0^{25} \dfrac{y^{13-1}e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma(13)2^{13}}\,dy$

$= \dfrac{1}{12!\cdot 2^{13}} \int_0^{25} y^{12}e^{-\frac{x}{2}}\,dy \fallingdotseq 0.48102$

b) 정규분포를 이용해 (a)를 근사시키면,

$E(Y) = \alpha\theta = 13 \times 2 = 26$, $Var(Y) = \alpha\theta^2 = 13 \times 4 = 52$

→ CLT에 의해 $Y \approx N(26, 52)$ 이고,

$P(Y \le 25) = P\left(\dfrac{Y-26}{\sqrt{52}} \le \dfrac{25-26}{\sqrt{52}}\right)$

$\fallingdotseq P(Z \le -0.14) = 1 - P(Z \le 0.14) = 1 - 0.5557 = 0.4443$

7-2)

간접성을 확보하지 못 할 확률 $P = 0.6$, $n = 854$ → $X \sim B(854, 0.6)$

$E(X) = np = 864 \times 0.6 = 518.4$

$Var(X) = np(1-p) = 864 \times 0.6 \times 0.4 = 207.36$ 일 때,

$np = 518.4 > 5$, $n(1-p) = 345.6 > 5$ 로 n이 충분히 큼.

따라서 이항분포의 정규근사에 의해 $X \approx N(518.4, 207.36)$ 이고,

$P(496 \le X \le 548)$ 의 근삿값을 구할 때, 연속성 수정에 의해

$$P(496 \le X \le 548) \approx P(495.5 \le X \le 548.5) = P\left(\frac{495.5-518.4}{\sqrt{207.36}} \le \frac{X-518.4}{\sqrt{207.36}} \le \frac{548.5-518.4}{\sqrt{207.36}}\right)$$

$= P(-1.59 \le Z \le 2.09) = \Phi(2.09) - \Phi(-1.59) = \Phi(2.09) - (1 - \Phi(1.59))$

$= 0.9817 - 0.0559 = 0.9258$ 이다.

1-4) $X \sim pois(\lambda=49)$ 일 때, $\mu=49$, $\sigma^2=49$ 이므로

CLT 관점에서 보면 $W = \dfrac{X-49}{\sqrt{49}} \approx N(0,1)$ 이고,

연속성 수정에 의해, $P(45<X<60) \approx P(45.5 \leq X \leq 59.5)$ 이다.

$P(45.5 \leq X \leq 49.5) = P\left(\dfrac{45.5-49}{7} \leq \dfrac{X-49}{7} \leq \dfrac{59.5-49}{7}\right)$

$= P(-0.5 \leq W \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(-0.5) = 0.9332 - 0.3085 = 0.6247$

.7-6)

확률변수 X_i $(i=1,2,\cdots,31)$ 은 $r=10$, $p=\frac{2}{3}$ 인 음이항 분포를 따르므로

$E(X_i) = \dfrac{r}{p} = 10 \times \dfrac{3}{2} = 15$

$Var(X_i) = r \cdot \dfrac{1-p}{p^2} = 10 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{15}{2}$ 이고,

자유투의 총 수를 확률변수 Y라 하면 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{31}$

$E(Y) = \sum_{i=1}^{31} E(X_i) = 31 \times 15 = 465$

$Var(Y) = \sum_{i=1}^{31} 1^2 \cdot Var(X_i) = 31 \times 7.5 = 232.5$ 이다.

CLT 관점에 의해, $W = \dfrac{Y-465}{\sqrt{232.5}} \approx N(0,1)$ 이고,

연속성 수정에 의해 $P(Y \leq 500) \approx P(Y \leq 500.5)$ 라 하면

$P(Y \leq 500.5) = P\left(\dfrac{Y-465}{\sqrt{232.5}} \leq \dfrac{500.5-465}{\sqrt{232.5}}\right) \fallingdotseq P(W \leq 2.32) = 0.9898$ 이다.

.7-8)

생애 첫 1년 이내에 사망할 유아의 수를 X라 하면, 확률변수 X는 $p=0.01$, $n=5000$ 인 이항분포를 따른다.

$E(X) = np = 5000 \times 0.01 = 50$

$Var(X) = np(1-p) = 5000 \times 0.01 \times 0.99 = 49.5$

CLT 관점에서, $W = \dfrac{X-50}{\sqrt{49.5}} \approx N(0,1)$ 이고,

연속성 수정에 의해 $P(45 \leq X \leq 53) \approx P(44.5 \leq X \leq 53.5)$

$P(44.5 \leq X \leq 53.5) = P\left(\dfrac{44.5-50}{\sqrt{49.5}} \leq \dfrac{X-50}{\sqrt{49.5}} \leq \dfrac{53.5-50}{\sqrt{49.5}}\right)$

$\fallingdotseq P(-0.78 \leq W \leq 0.5) = \Phi(0.5) - (1-\Phi(0.78))$

$= 0.6915 - 0.2177 = 0.4738$ 이다.

5.6절 추가문제

W : 임의의 초등학생 1명이 TV 또는 만화영화를 시청한 시간 총합

$E(W) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 30 + 50 = 80$

$Var(W) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\cdot Cov(X,Y) = 52 + 64 + 2\cdot 14 = 144$

$Z = \sum_{i=1}^{25} W_i$

$E(Z) = E(\sum W_i) = \sum E(W_i) = 25 \times 80 = 2000$

$Var(Z) = Var(\sum W_i) = \sum Var(W_i) = 25 \times 144 = 3600$

$Z \simeq N(2000, 60^2)$

표준정규분포를 따르는 확률변수

$P(1970 < Z < 2090) = P(-0.5 < Z < 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(-0.5) = 0.6247$

5.7절 추가문제

$X \sim N(26, 0.25)$

(a). $P(X < 25.25) = P\left(\frac{X-26}{\sqrt{0.25}} < \frac{25.25-26}{\sqrt{0.25}}\right) = P(Z < -1.5) = 0.0668$

(b). $Y \sim Binomial(235, 0.0668)$

$E(Y) = 235 \times 0.0668 = 15.698$, $Var(Y) = 235 \times 0.0668 \times (1-0.0668) = 14.649$

$Y \simeq N(15.698, 14.649)$

$P(Y \le 10) = P\left(\frac{Y+0.5-15.698}{\sqrt{14.649}} \le \frac{10+0.5-15.698}{\sqrt{14.649}}\right) = P(Z \le -1.358) = 0.00872$

연속성 수정

$P(Y \le 10) = P(Y < 11)$ 이므로 0.5를 더해줌

(c). $X_1, \dots, X_{125} \overset{iid}{\sim} N(26, 0.25)$, $\bar{X} = \frac{1}{125}\sum_{i=1}^{125} X_i$

$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{125}\sum X_i\right) = \frac{1}{125}\sum E(X_i) = \frac{1}{125}\cdot 125 \cdot 26 = 26$

$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{125}\sum X_i\right) = \frac{1}{125^2}\sum Var(X_i) = \frac{1}{125^2}\cdot 125 \cdot 0.25 = 0.002$

$\bar{X} \sim N(26, 0.002)$

$P(26 \le \bar{X} \le 28) = P\left(\frac{26-26}{\sqrt{0.002}} \le Z \le \frac{28-26}{\sqrt{0.002}}\right) = P(0 \le Z \le 44.721) \approx 0.5$