제6장. 행렬의 rank

6.1 행렬의 행벡터과 열벡터

$$\underset{n \times m}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

– **행벡터(row vectors)** : A의 행에서 얻어지는 벡터 → n개 행벡터

$$\underline{r_1^T} = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m})$$

열벡터의 전치

$$\begin{aligned} \underline{r_2^T} &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2m}) \\ &\vdots \\ \underline{r_n^T} &= (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nm}) \end{aligned}$$

* A의 행에서 얻어지는 벡터 $\underline{r_1^T}, \cdots, \underline{r_n^T}$를 선택하여 선형독립이 되도록 최대한 모았을 때 벡터의 개수

맞나?

– 열벡터(column vectors) : A의 열에서 얻어지는 벡터 → m개 열벡터

$$\underline{c_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \underline{c_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \quad \underline{c_m} = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

* A의 열에서 얻어지는 벡터 $\underbrace{\underline{c_1}, \cdots, \underline{c_m}}_{m\text{개}}$중에 벡터를 선택하여 선형독립이 되도록 최대한 모았을 때 벡터의 개수

행렬식 : A가 정방행렬일때만 / 랭크 : 모든행렬에서 가능
트레이스

6.2 rank의 정의 및 계산

Theorem 6.3

일반적인 행렬

임의의 행렬 $A_{m\times n}$에서 다음 두 수는 동일하다

↳ A에서 선형독립인 행의 수

(a) 행으로 만든 벡터를 선택하여 선형독립이 되도록 최대한 모았을 때 벡터의 수

(b) 열로 만든 벡터를 선택하여 선형독립이 되도록 최대한 모았을 때 벡터의 수

) 동일

↳ A에서 선형독립인 열의 수

=> 그 수를 행렬 A의 rank로 정의, $\boxed{\text{rank}(A)=3}$ 과 같이 표기

혹은 계수

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2x3

열로 잡은 c_1 c_2 c_3

c_1, c_2, c_3 中 선형독립이 되도록 최대한 몇개까지 모을수있는지?

$\left\{\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right\}$: 선형독립

정리 4.1 참고

스칼라배 X → 선형독립

(편의상 앞 2개를 먼저 잡음)

$\left\{\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$: 선형종속

c_1, c_2의 선형결합으로 c_3가 표현가능한지?

$a_1\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \rightarrow a_1 = \frac{7}{6}, a_2 = -\frac{11}{12}$

즉 표현가능

$\therefore$ rank(A)=2

$\therefore$ rank(B) = 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$c_1 \quad c_2 \quad c_3$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: 선형독립

cf) 2개벡터로 이루어진 집합의 경우
스칼라배 관계인지 확인

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ 는 스칼라배를 만족하므로

선형종속관계이다.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ 가 선형독립인지?

선형독립의 정의 이용

행렬 X 벡터형태로

$$a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 이 되도록.

중요

★ 추가내용은 따로 영상업로드

Theorem 6.2 2장 p11

행렬에 기본행연산을 수행하여도 행렬의 rank 는 변하지 않는다.

(행렬에 기본열연산을 수행하여도 행렬의 rank 는 변하지 않는다.)

cf) 선형회귀분석에서는 data matrix가 최대열계수가 되도록 주어질것을 요구함

Ⓡ full row-rank, full column-rank도 full rank라고 부름

6.3 rank의 성질

◎ rank의 기본성질

① $rank(A)$는 양의정수 이며 영행렬의 rank는 0 으로 정의한다.

개수이므로

ex) $rank(A_{2\times 2}) \le 2$

행 또는 열로 따진것이 같으므로

② $r = rank(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$

↳ 행과 열의 수 중 작은것보다 작거나같다

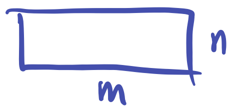
③ $rank(A_{n\times n}) = n$: 최대계수를 갖는다 (full rank) → A가 정칙행렬(역행렬 존재)

(정방행렬이구나

$rank(A_{n\times n}) < n$: 최대계수를 갖지않는다 → A가 비정칙행렬

④ $rank(A_{m\times n}) = m < n$: 최대행계수(full row-rank)

↳ 열의 수가 더 많구나



⑤ $rank(A_{m\times n}) = n < m$: 최대열계수(full column-rank)

↳ 행의 수가 더 많구나

$A_{3\times 5}$

→ $rank(A) = 3$인경우가 최대

↳ 이게 아닌경우는 특별히 지칭하지 않음

Theorem 6.4

전치

$$rank(A) = rank(A')$$

추가 $rank(A) = rank(A^T) = rank(A^TA) = rank(AA^T)$

(5장(2): $(A^TA)^{-1}$이 존재한다 - rank와 역행렬 존재 여부)

*추가영상

Theorem 6.5

$$rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$$

행렬 A에 다른 행렬 B를 곱하는 경우, 새로운 행렬의 계수는 같거나 감소한다.

Theorem 6.10

$n \times n$ 행렬 A에 대하여 다음의 명제들은 동치이다.

rank(A) = n	rank(A) < n
• A가 full rank (최대계수행렬)	• A가 full rank가아님
• A는 n개의 선형독립인 행들을 가진다 A는 n개의 선형독립인 열들을 가진다	• A는 n보다 작은 선형독립인 행들을 가진다 A는 n보다 작은 선형독립인 열들을 가진다
• A는 정칙행렬이다	• A는 비정칙행렬이다
• A^{-1}가 존재한다	• A^{-1}가 존재하지 않는다
• $\lvert A \rvert \neq 0$	• $\lvert A \rvert = 0$ ($\det(A)=0$)
• $A\underline{x} = \underline{0}$의 해는 $\underline{x}=\underline{0}$뿐이다	• $A\underline{x} = \underline{0}$을 만족하는 $\underline{x}=\underline{0}$가 아닌 것가 존재한다