

■ 일원 배치법(single factorial design, one-way layout)

○ 용어정리

- 요인(factor) : 실험에 고려된 설명변수 (회귀분석: predictor)
 - experimental factor vs observational factor
- 수준(level) : 요인의 값
- 처리(treatment) : 요인과 수준의 조합

◎ 4 종류의 사료에 의한 병아리 무게증가 실험

- 요인: 사료
- 수준(처리)의 수: 4
- 하나의 요인의 여러 수준에 대한 특성치의 비교를 위한 계획법
- 실험 단위의 배치 또는 실험순서에 있어 확률화의 원리에 충실해야 한다고 해서 **완전 확률화 계획법(completely randomized design)**이라고도 불림

□ 통계적 모형

○ 자료 형태

		요인의 수준(처리)			
		1	2	...	p
반 복 수	1	Y_{11}	Y_{21}	...	Y_{p1}
	2	Y_{12}	Y_{22}	...	Y_{p2}
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
	n	Y_{1n}	Y_{2n}	...	Y_{pn}

○ 구조식

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \mu_i + \varepsilon_{ij}, & i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n \\ &= \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

- μ : 전체 모평균
- $\tau_i = \mu_i - \mu$: i 번째 처리 효과
- $\varepsilon_{ij} \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$

○ 통계적 추론

① 처리효과에 대한 적절한 가설 검정

(예) $H_0 : \tau_1 = \dots = \tau_p = 0 \Rightarrow$ 평균이 같은지?

(예) $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_p = 0 \Rightarrow$ 평균이 0 인지?

② 처리효과의 추정 (단, 처리효과의 동일성 가설 기각시)

□ 모형의 분류

○ 고정효과 모형(fixed effect model)

- 요인의 수준이 실험자의 의도에 의해 조정 또는 결정되는 경우
- τ_i 에 대한 가설검정의 결과는 분석에서 고려된 요인의 수준에 대해서만 적용할 수 있음

○ 변량효과 모형(random effect model)

- 고려할 수 있는 요인의 수준에서 random하게 선택된 경우
- τ_i 는 모수가 아니고 확률변수로 취급
- τ_i 의 분산에 대해 $\sigma_\tau^2 = 0$ 인지를 검정함
- 선택된 수준뿐만 아니라 고려했던 모든 요인의 수준에 대해서도 결과를 확장시킬 수 있음

□ 고정효과모형

- Notations :

$$N = \sum_{i=1}^p n_i, \quad Y_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \quad \bar{Y}_{i.} = Y_{i.}/n_i, \quad Y_{..} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \quad \bar{Y}_{..} = Y_{..}/N$$

- 고정효과 모수모형에서는 $\sum_{i=1}^p \tau_i = 0$

- 모수추정

- $\mu \Leftarrow \bar{Y}_{..}$

- $\mu_i \Leftarrow \bar{Y}_{i.}$

- $\tau_i = \mu_i - \mu \Leftarrow \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$

- $\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu_i \Leftarrow e_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}, \quad \sum_j e_{ij} = 0, \quad \forall i$

○ 가설검정

- $H_0 : \tau_1 = \dots = \tau_p = 0$ vs $H_1 : \text{최소한 하나의 } i \text{에 대해 } \tau_i \neq 0$
- 귀무가설 하에서

$$Y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij} \Rightarrow Y_{ij} - \mu = \varepsilon_{ij} \Leftrightarrow \hat{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{..}$$

○ 변동분해

$$\begin{aligned} SSTO &= \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \\ &= \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + 2 \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) \\ &= \sum_i \sum_{j=1}^{j_1} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_i n_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \\ &\quad \quad \quad SSE \quad (N-p) \quad \quad \quad SSTR \quad (p-1) \end{aligned}$$

- SSTO: 총제곱합, SSE: 오차제곱합, SSTR: 처리제곱합

- 평균제곱

- $MSE = SSE/(N-p)$

- $E(MSE) = \sigma^2$

- $MSTR = SSTR/(p-1)$

- $E(MSTR) = \sigma^2 + \sum_{i=1}^p n_i \tau_i^2 / (p-1)$

- 검정통계량

$$F_0 = \frac{SSTR/(p-1)}{SSE/(N-p)} = \frac{MSTR}{MSE} \sim F_{p-1, N-p}$$

- 대립가설 하에서는 $E(MSTR) > E(MSE) \Rightarrow$ 기각역 : $F_0 > F_{\alpha, p-1, N-p}$

○ 분산분석표(ANOVA table)

변인	자유도	제곱합(SS)	평균제곱(MS)	F
처리(모형)	$p-1$	SSTR	MSTR	MSTR/MSE
오차	$N-p$	SSE	MSE	
전체	$N-1$	SSTO		

● 간이식

- 보정항 $CT = Y_{..}^2 / N$
- $SSTO = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - CT$
- $SSTR = \sum_i Y_{i.}^2 / n_i - CT$

□ 처리 평균치간의 비교

- 어떻게 가설을 설정할 것인가?

- 적절한 형태의 선형식을 유도하여 가설을 설정

- ① $H_0 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 3\mu_4 = 0$ vs $H_1 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 3\mu_4 \neq 0$

- ② $H_0 : \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3 = 0$ vs $H_1 : \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3 \neq 0$

- ③ $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

- ※ 각 선형식 계수의 합은 0

○ 대비

- p개의 평균값에 대한 임의의 선형 결합식을

$$L = c_1 \bar{Y}_{1.} + \cdots + c_p \bar{Y}_{p.} \quad \left(\text{단, } \sum_i c_i = 0 \right)$$

처리 평균값의 비교 또는 대비(contrast)

- $L \sim N(\mu_L, \sigma_L^2)$
 - $\mu_L = c_1\mu_1 + \dots + c_p\mu_p$
 - $\sigma_L^2 = \text{Var}(c_1\bar{Y}_{1.} + \dots + c_p\bar{Y}_{p.}) = c_1^2\frac{\sigma^2}{n_1} + \dots + c_p^2\frac{\sigma^2}{n_p} = \sigma^2 \sum_i \frac{c_i^2}{n_i}$
 - σ_L^2 의 추정량: $S_L^2 = MSE \sum_i \frac{c_i^2}{n_i}$
- $T = \frac{L - \mu_L}{S_L} = \frac{L - \mu_L}{\sqrt{MSE} \sqrt{\sum_i c_i^2/n_i}} \sim t_{N-p}$
 - 귀무가설: $T_0 = \frac{L}{\sqrt{MSE} \sqrt{\sum_i c_i^2/n_i}} \sim t_{N-p} \Rightarrow T^2 = \frac{L^2}{MSE \sum_i c_i^2/n_i} \sim F_{1, N-p}$

□ 모든 평균치간의 다중비교

○ F-검정을 기초로 한 다중비교

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_i \neq \mu_j$$

① Fisher's least significant difference(최소유의차 방법)

- 모든 $i \neq j$ 인 모든 쌍에 대해 t-검정을 실시

- 귀무가설 하에서
$$T_0 = \frac{\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{j.}}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \sim t_{N-p}$$

$$- \hat{\sigma} = \sqrt{MSE}$$

- $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}| > t_{\alpha/2, N-p} \sqrt{MSE} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$ 이면 이 쌍의 차이는 유의함

② Bonferroni 방법

- $t_{\alpha/2, N-p}$ 을 $t_{\alpha/2c, N-p}$ 로 대신
- $|\bar{y}_i - \bar{y}_j| > t_{\alpha/2c, N-p} \sqrt{MSE} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$ 이면 이 쌍의 차이는 유의함

③ Scheffe 방법

- F-검정에서 H_0 을 기각시키지 못하면 Scheffe 방법에 의한 비교에서 유의한 차이가 있는 경우가 없음
- F-검정에서 H_0 을 기각시킨 경우에는 최소한 하나의 비교에서 차이가 있는 것으로 나옴
- $|\bar{y}_i - \bar{y}_j| > \sqrt{(p-1)F_{\alpha, p-1, N-p}} \sqrt{MSE} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$ 이면 이 쌍의 차이는 유의함

○ 평균의 범위를 기초로 한 다중비교

$$Q = \sqrt{n} [\max(\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_p) - \min(\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_p)] / \sqrt{MSE} \sim q(p, N-p)$$

- $q(p, N-p)$ 는 표준화 범위분포로써 표로 주어짐
- $Q > q(\alpha, p, N-p)$ 이면, H_0 을 기각시킬 수 있음

① Tukey's honest significant difference(HSD)

- $HSD_{ij} = [q(\alpha, p, N-p) / \sqrt{2}] \sqrt{MSE} \sqrt{1/n_i + 1/n_j}$
- $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}| > HSD_{ij}$ 이면, 두 평균의 차이는 유의적임

■ 분산분석 검진(ANOVA Diagnostics)

- 기본가정: $\varepsilon_{ij} \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$ \Leftrightarrow 잔차분석(residual analysis)

- 등분산성
- 독립성 \Rightarrow 잔차들 간에는 항상 상관관계가 존재
- 정규성
- 이상치 유무

- 잔차

- $e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_i.$

- studentized 잔차 : $r_{ij} = \frac{e_{ij}}{se(e_{ij})}, \quad se(e_{ij}) = \sqrt{\frac{(n_i - 1)MSE}{n_i}}$

- studentized deleted 잔차 : $t_{ij} = e_{ij} \left[\frac{N - p - 1}{SSE(1 - 1/n_i) - e_{ij}^2} \right]^{1/2}$

□ 등분산 검정

- 반복수가 같은 경우 동일한 분산을 가진다는 가정을 약간 어기는 경우
분산분석 방법은 robust함
- 반복수가 다르거나 어떤 한 분산이 다른 분산들보다 상당히 큰 경우
분산분석 방법은 robust하지 않음 \Rightarrow 분산들이 같은지 다른지를 검정필요
- 가설: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_p^2$ VS H_1 : 최소한 하나 이상의 분산은 다름

○ Hartley 검정

- 동일 반복수 n
- 검정통계량 : $H^* = \frac{\max(S_i^2)}{\min(S_i^2)} \sim H(p, n-1)$
 - $S_i^2 = \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 / (n_i - 1)$
- 기각역 : $H^* > H(\alpha, p, n-1)$

○ Brown-Forsythe 검정

- 절대편차를 먼저 계산

$$D_{ij} = |Y_{ij} - \tilde{Y}_i|$$

- \tilde{Y}_i : i 번째 그룹의 중앙값

- 검정통계량 : $F_{BF}^* = \frac{MSTR^*}{MSE^*} \simeq F_{p-1, N-p}$

- $MSTR^* = \sum n_i (\bar{D}_{i.} - \bar{D}_{..})^2 / (p-1), \quad MSE^* = \sum \sum (D_{ij} - \bar{D}_{i.})^2 / (N-p)$

□ 정규성 검정

- Shapiro-Wilk test, Kolmogorov-Smirnov test, Cramer-von Mises test, Anderson-Darling test
- Jarque-Bera test

$$JB = \frac{n}{6} \left(b_1 + \frac{1}{4} (b_2 - 3)^2 \right)$$

- $\sqrt{b_1}$: 왜도(skewness)
- b_2 : 첨도(kurtosis)

□ 문제 발생 시 해결방안

- 분산상수화변환(variance stabilizing transformation, 분산안정화 변화)
 - 잔차그림에서 잔차의 표준편차(분산)이 \hat{Y} 의 값과 연관성을 보이는 경우
 - 분산을 상수화시키기 위한 변환을 찾는 방법
 - $\sigma_i^2 = \text{Var}(Y_{ij})$ 와 $\mu_i = E(Y_{ij})$ 사이에 함수관계가 존재하는 경우:

$$\sigma_i^2 = f(\mu_i)$$

- $\sigma_i^2 = c\mu_i^2$ ($\sigma_i = c\mu_i$) \Rightarrow 자연로그변환인 $\log(Y_{ij})$ 를 이용
- $\sigma_i^2 = c\mu_i$ ($\sigma_i = \sqrt{\mu_i}$) \Rightarrow 제곱근변환인 $\sqrt{Y_{ij}}$ 를 이용

- **비모수적 방법:** 자료의 값 대신 순위(rank)를 사용

- 자료를 정렬한 후 해당 자료의 순위를 구함
- tie가 있는 경우 순위의 중간값 사용

- $SSTO = \sum_i \sum_j (R_{ij} - \bar{R}_{..})^2$

- $SSE = \sum_i \sum_{j=1} (R_{ij} - \bar{R}_{i.})^2$

- $SSTR = \sum_i n_i (\bar{R}_{i.} - \bar{R}_{..})^2$

- 검정통계량

$$F_0 = \frac{SSTR/(p-1)}{SSE/(N-p)} = \frac{MSTR}{MSE} \sim F_{p-1, N-p}$$

■ 반복이 없는 이원배치법

○ 실험 설계

- 수준 수가 p 인 요인 A, 수준 수가 q 인 요인 B
- $p \times q$ 실험 전체를 완전 확률화

○ 자료구조

요인 B \ 요인 A	요인 A			
	A_1	A_2	\cdots	A_p
B_1	Y_{11}	Y_{21}	\cdots	Y_{p1}
B_2	Y_{12}	Y_{22}	\cdots	Y_{p2}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
B_q	Y_{1q}	Y_{2q}	\cdots	Y_{pq}

○ 구조식

- 1-요인설계의 구조식

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} = \mu + (\mu_i - \mu) + \varepsilon_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

- τ_i : 요인의 처리효과

- 2-요인설계의 구조식

$$\Rightarrow Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q$$

- μ : 전체 평균, α_i : 요인 A의 처리효과, β_j : 요인 B의 처리효과

- $\varepsilon_{ij} \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$: 오차항

- 제약조건: $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^q \beta_j = 0$

○ 변동의 분해

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{..} = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})$$

$$SSTO = SSA + SSB + SSE$$

$$\circ SSTO = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N} : \text{자유도 } N-1$$

$$\circ SSA = q \sum_{i=1}^p (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^p \frac{Y_{i.}^2}{q} - \frac{Y_{..}^2}{N} : \text{자유도 } p-1$$

$$\circ SSB = p \sum_{j=1}^q (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{j=1}^q \frac{Y_{.j}^2}{p} - \frac{Y_{..}^2}{N} : \text{자유도 } q-1$$

$$\circ SSE = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2 : \text{자유도 } (p-1)(q-1)$$

$$- SSE \text{ 자유도: } N - (p-1) - (q-1) - 1 = (p-1)(q-1)$$

○ 가설 검정

- 요인 A의 처리 효과의 동일성 검정

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

- 요인 B의 처리 효과의 동일성 검정

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0$$

- 분산분석표

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
모형(처리A)	$p-1$	SSA	MSA	MSA/MSE
모형(처리B)	$q-1$	SSB	MSB	MSB/MSE
오차	$(p-1)(q-1)$	SSE	MSE	
전체	$N-1$	SSTO		

※ 분산분석에서 요인 처리에 대해 유의한 차이가 없는 것으로 나오면 일원배치법으로 재분석

○ $\mu(A_i)$ 와 $\mu(B_j)$ 의 구간추정

○ $\bar{Y}_{i.} \pm t_{\alpha/2, (p-1)(q-1)} \sqrt{MSE/q}$

○ $\bar{Y}_{.j} \pm t_{\alpha/2, (p-1)(q-1)} \sqrt{MSE/p}$

■ 반복이 있는 이원배치법

○ 실험 설계

- 수준 수가 p 인 요인 A, 수준 수가 q 인 요인 B, 반복 수가 r
- $p \times q \times r$ 실험 전체를 완전 확률화

○ 자료구조

요인 A 요인 B	A_1	A_2	\cdots	A_p
B_1	Y_{111}, \dots, Y_{11r}	Y_{211}, \dots, Y_{21r}	\cdots	Y_{p11}, \dots, Y_{p1r}
B_2	Y_{121}, \dots, Y_{12r}	Y_{221}, \dots, Y_{22r}	\cdots	Y_{p21}, \dots, Y_{p2r}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
B_q	Y_{1q1}, \dots, Y_{1qr}	Y_{2q1}, \dots, Y_{2qr}	\cdots	Y_{pq1}, \dots, Y_{pqr}

○ 구조식

$$\begin{aligned} Y_{ijk} &= \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \\ &= \mu + (\mu_{i.} - \mu) + (\mu_{.j} - \mu) + (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu) + \varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r,$$

○ μ : 전체 평균, α_i : 요인 A의 처리효과, β_j : 요인 B의 처리효과

- A와 B를 주효과(main effect)라고 함

○ $(\alpha\beta)_{ij}$: 요인 A와 B의 교호작용 효과 (interaction effect)

○ $\varepsilon_{ij} \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$: 오차항

○ 제약조건: $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^q \beta_j = 0$

- $\sum_{i=1}^p (\alpha\beta)_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, q, \quad \sum_{j=1}^q (\alpha\beta)_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, p$

○ 교호작용

- 요인 B의 수준의 변화에 따라 요인 A의 효과가 변하는 경우 교호작용이 존재한다고 함
- 교호작용이 존재하지 않을 경우, AB의 최적조건은 A 요인의 최적조건을 구하고 B의 최적조건을 구하여 합함
- 교호작용이 존재하는 경우, 모든 수준의 조합 $A_i B_j$ 에서 모평균을 추정함

○ 변동의 분해

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} = (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) \\ + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})$$

$$SSTO = SSA + SSB + SS(AB) + SSE$$

$$\circ SSTO = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{N}$$

: 자유도 = $N - 1$

$$\circ SSA = qr \sum_{i=1}^p (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^p \frac{Y_{i..}^2}{qr} - \frac{Y_{...}^2}{N} : \text{자유도} = p - 1$$

$$\circ SSB = pr \sum_{j=1}^q (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 = \sum_{j=1}^q \frac{Y_{.j.}^2}{pr} - \frac{Y_{...}^2}{N} : \text{자유도} = q - 1$$

$$\circ SSTR = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \frac{Y_{ij.}^2}{r} - \frac{Y_{...}^2}{N} : \text{자유도} = pq - 1$$

- $SS(AB) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2 = SSTR - SSA - SSB$
 - 자유도: $pq - 1 - (p - 1) - (q - 1) = (p - 1)(q - 1)$
- $SSE = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$: 자유도 $pq(r - 1)$
 - 자유도: $N - 1 - (pq - 1) = pq(r - 1)$

○ 가설 검정

- 요인 A의 처리 효과의 동일성 검정

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

- 요인 B의 처리 효과의 동일성 검정

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0$$

- 교호작용의 효과

$$H_0 : (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \cdots = (\alpha\beta)_{pq} = 0$$

- 모든 처리의 동일성 검정

$$H_0 : \text{모든 } \mu_{ij} \text{ 들이 같다.}$$

○ 분산분석표

변인		자유도	제곱합	평균제곱	F
처리		$pq - 1$	SSTR	MSTR	MSTR/MSE
	처리 A	$p - 1$	SSA	MSA	MSA/MSE
	처리 B	$q - 1$	SSB	MSB	MSB/MSE
	교호작용	$(p - 1)(q - 1)$	SS(AB)	MS(AB)	MS(AB)/MSE
오차		$pq(r - 1)$	SSE	MSE	
전체		$N - 1$	SSTO		

- 교호작용효과가 유의하면 주효과가 유의하지 않더라도 주효과를 모형에서 생략하지 않음

A요인 주효과	B요인과의 교호작용효과	A요인의 효과
있음	있음	있음
있음	없음	있음
없음	있음	있음
없음	없음	없음

- B요인의 적어도 한 수준에서 A요인의 효과가 있으면 A요인은 효과 있음
- B요인의 모든 수준에서 A요인의 효과가 없으면 A요인은 효과 없음

○ 분산분석후의 추정 (모수 모형)

- $\mu(A_i)$ 와 $\mu(B_j)$ 의 구간추정
 - $\bar{Y}_{i..} \pm t_{\alpha/2, pq(r-1)} \sqrt{MSE/qr}$
 - $\bar{Y}_{.j.} \pm t_{\alpha/2, pq(r-1)} \sqrt{MSE/pr}$
- $\mu(A_i B_j)$ 의 구간추정
 - $\bar{Y}_{ij.} \pm t_{\alpha/2, pq(r-1)} \sqrt{MSE/r}$

※ 교호작용이 유의한 경우, 일반적으로 요인 A, B의 각 수준의 모평균을 추정하는 것은 의미가 없으며 수준의 조합 $A_i B_j$ 에서 모평균을 추정하는 것이 의미가 있음

○ 교호작용이 있는 경우 다중비교

- $H_0 : \mu_{ij} = \mu_{kl}$ vs $H_1 : \mu_{ij} \neq \mu_{kl}$ 또는 $\mu_{ij} - \mu_{kl}$ 의 신뢰구간
- $\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{kl.} \pm c \sqrt{MSE} \sqrt{1/r + 1/r}$
 - 최소유의차: $c = t_{\alpha/2, pq(r-1)}$
 - Bonferroni: $c = t_{\alpha/(2a), pq(r-1)}$, $a =$ 비교검정의 경우의 수
 - Scheffe: $c = \sqrt{(pq-1)F_{\alpha, pq-1, pq(r-1)}}$
 - Tukey: $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{\alpha, pq, pq(r-1)}$