제3장. 역행렬과 분할행렬

◎ 역행렬(inverse matrix)이란?

or 단위행렬

[정의] 정방행렬 A에 대해서 $AB = BA = I$ (I 는 항등행렬)를 만족하는 정방행렬 B가 존재하면 B를 A의 역행렬이라고 하고 A^{-1}로 표시 (A^{-1}은 존재하면 유일함)

↳ 존재하지 않을수도있음

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

* $AB = I$ 를 만족하면 $BA = I$ 를 만족하는 것을 보일 수 있음 (반대도 성립)

행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지않지만 역행렬은 성립.

cf) a: 실수($a \neq 0$)

$a \cdot \boxed{\frac{1}{a}} = 1$

↑ a의역수

$\frac{1}{a} = a^{-1}$

[역행렬이 존재하기 위한 조건]

i) A가 정방행렬

ii) $\boxed{\det(A) \neq 0}$

det(A)는 정방행렬에서만 존재

3.1 역행렬 계산 – 관심있는 사람만 읽어볼 것 (강의하지 않음)

Definition $(-1)^{i+j} det(M_{ij})$

행렬 $A_{n\times n}$에서 a_{ij}의 여인자(cofactor)를 A_{ij}라 할 때, 이러한 여인자를 $(i\,,\,j)$원소로 갖는 행렬을 A의 **여인자행렬**이라 한다. 또한 여인자행렬을 전치한 행렬을 A의 수반행렬(adjoint matrix)이라 하며 $adj(A)$라고 쓴다.

$$adj\,A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

※ 2차정방행렬의 역행렬

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$det(A) = ad-bc$

$ad-bc \neq 0$이면 A^{-1} 존재

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Theorem

행렬 $A_{n\times n}$이 $\det(A) \neq 0$ 이면 역행렬은 다음과 같다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\underbrace{adj\,A}_{\text{수반행렬}}$$

$AA^{-1} = A^{-1}A = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이 나오는지 확인

각자확인하기

□ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

① $\det(A)$ 구하기

$1 \cdot 1 \cdot (4-1) + 3 \cdot (0+2)$

$= 3+6 = 9$

② $adj(A)$ 구하기.

여인자행렬 $\begin{pmatrix} (4-1) & -(0+1) & (0+2) \\ -(0-3) & (2+3) & -(1-0) \\ (0-6) & -(1-0) & (2-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

전치하면 $adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

□ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

① $\det(B)$

$= 2(0+2) + 4(1+2) = 16$

② 여인자행렬

$\begin{pmatrix} 0+2 & -(0-2) & 1+2 \\ -(0-4) & 0+4 & -(2) \\ 0-8 & -(-4-4) & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & -2 \\ -8 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{전치}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore B^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

3.2 역행렬의 성질

Theorem 3.1

정방행렬 $A_{n\times n}$의 역행렬이 존재하는 경우 그 역행렬은 유일하다

(한가지뿐임)

Theorem 3.2

$A_{n\times n}$의 역행렬이 존재하기 위한 필요충분조건은 $|A| \neq 0$ 이다.

$A_{n\times n}$의 역행렬존재 $\rightleftarrows$ $\det(A) \neq 0$

A^{-1} : A의 역행렬
A의 inverse 행렬
inverse matrix

Theorem 3.3

$A_{n\times n}$가 가역행렬이면 A^{-1} 역시 가역이며 다음이 성립한다.

역이 가능하다 (invertible)
= 역행렬이 존재한다

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$A\square = \square A = I \rightarrow \square = A^{-1}$
$\therefore A^{-1}\square = \square A^{-1} = I \rightarrow \square = (A^{-1})^{-1} = A$

Theorem 3.4

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

cf) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$
T 가까이 있는게 앞으로

$(AA^{-1})^T = I^T \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I$
$(A^{-1})^T A^T = I$
A^T 의 역행렬은 $(A^{-1})^T$
즉, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Theorem 3.5

$A_{n\times n}$와 $B_{n\times n}$가 각각 정칙이면 AB 도 역시 정칙이며 다음이 성립한다.

= 가역

A^{-1}가 존재
||
A가 가역 (invertable)
||
A가 정칙 (nonsingular)

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$(ABC)^T = C^T B^T A^T$

$ABB^{-1}A^{-1} = I$
AB의 역행렬

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$kA\square = I$

$\frac{1}{k}A^{-1}$

* 상수는자리바꿀수있음

자유롭게

Theorem 3.6

(i) A가 가역행렬일 때 $kA(k \neq 0)$도 가역행렬이고 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

k=0인경우 kA=0 (영행렬)

(ii) A가 가역행렬일 때 A^n(n은 자연수)도 가역행렬이고 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

A를 n번곱한행렬

ex) A^2의경우 $AA\square = I$

$A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$

Theorem 3.7

A가 정칙일 때, $PA = QA$ 이면 $P = Q$ 이다.

역행렬존재

$P\underbrace{AA^{-1}}_{I} = Q\underbrace{AA^{-1}}_{I} \Rightarrow P = Q$

연립방정식에서 역행렬의 이용

$\underset{\sim}{x}$: n차원열벡터 (원소가 n개)

$\underline{A^{-1}A}\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{b} \Rightarrow \underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{b}$

I

단위행렬 I는 상수 1같은 역할

Theorem 3.8

$A\underline{x} = \underline{b}$ 에서 A가 정칙이면 $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ 이다.

* Theorem 3.8을 연립방정식의 풀이에 활용할 수 있음

ex) $x+y=3, x-y=1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{b}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

주어진식과 동일함

양변에 A^{-1}를 곱한다

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1(-1)-1\cdot 1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

cf. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 의 행렬식은 $ad-bc$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.3 행렬의 분할과 분할된 행렬의 계산 (익혀두면 행렬 계산에 매우 유용!)

◉ 분할행렬(Partitioned matrix)

$$A_{m\times n} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

$$A_{11} \Rightarrow (m_1 \times n_1) \quad , \quad A_{12} \Rightarrow (m_1 \times n_2)$$

$$A_{21} \Rightarrow (m_2 \times n_1) \quad , \quad A_{22} \Rightarrow (m_2 \times n_2)$$

$$m_1 + m_2 = m \quad , \quad n_1 + n_2 = n$$

ex) $$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline 5 & 7 & 9 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)_{4\times 5} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A 는 원래 4×5 행렬이나 block화된 행렬을 하나의 숫자로 보면 2×2 행렬로 볼 수도 있게 됨

겉전치 속전치

◉ 분할행렬의 전치

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} B_{11}^T & B_{21}^T \\ B_{12}^T & B_{22}^T \\ B_{13}^T & B_{23}^T \end{pmatrix}$$

ex)

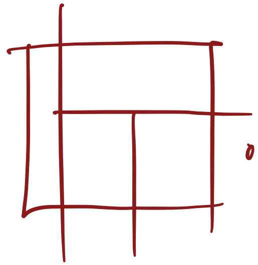
A_{11} A_{12} A_{11}^T A_{21}^T

각각을 전치하고 위치바꾸기

3×4

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right), \quad A^T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \\ \hline 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

A_{21} A_{22} A_{12}^T A_{22}^T



이런식의 분할은 안됨

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right), \quad A^T = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 0 & -4 \end{pmatrix}^T \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^T \end{array}\right)$$

◉ 분할행렬의 곱

$\underset{\sim}{a_1}' = \underset{\sim}{a_1}^T$

$$- \ AB = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{a_1}' \\ \underline{a_2}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{b_1} & \underline{b_2} & \underline{b_3} \end{pmatrix}}_{2\times 2\text{행렬.}} = \begin{pmatrix} \underline{a_1}'\underline{b_1} & \underline{a_1}'\underline{b_2} & \underline{a_1}'\underline{b_3} \\ \underline{a_2}'\underline{b_1} & \underline{a_2}'\underline{b_2} & \underline{a_2}'\underline{b_3} \end{pmatrix}$$

ex)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2×2 $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ 2×3

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1\times5+2\times6 & 1\times7+2\times8 & 1\times9+2\times10 \\ 3\times5+4\times6 & 3\times7+4\times8 & 3\times9+4\times10 \end{pmatrix}$

이 과정을 행벡터, 열벡터를 이용하여 표현하면

$A = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a_1}^T \\ \underset{\sim}{a_2}^T \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{b_1} & \underset{\sim}{b_2} & \underset{\sim}{b_3} \end{pmatrix}$ $\left(\underline{a_1}^T = (1\ 2),\ \underline{a_2}^T = (3\ 4),\ \underline{b_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ \underline{b_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \underline{b_3} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}\right)$

$AB = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a_1}^T \underset{\sim}{b_1} & \underset{\sim}{a_1}^T \underset{\sim}{b_2} & \underset{\sim}{a_1}^T \underset{\sim}{b_3} \\ \underset{\sim}{a_2}^T \underset{\sim}{b_1} & \underset{\sim}{a_2}^T \underset{\sim}{b_2} & \underset{\sim}{a_2}^T \underset{\sim}{b_3} \end{pmatrix}$

$$- \; AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$ ☆☆

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

직접해보기.

ex)

$$\underset{3\times 3}{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (A_{11},\ A_{12},\ A_{21},\ A_{22})$$

$$\times \quad \underset{3\times 4}{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (B_{11},\ B_{12},\ B_{21},\ B_{22})$$

$$\rightarrow \quad \underset{3\times 4}{AB} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 8 & 9 & 5 \\ 7 & 5 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 4 & 2 \end{matrix} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A_{11}B_{11}} + \underline{A_{12}B_{21}} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬A x 열벡터 b

b의원소

$$- \quad A\underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{a_1} & \underline{a_2} & \cdots & \underline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_i \underline{a_i}$$

☞ A의 열벡터의 선형결합 ☆

A의 열벡터

실수배가곱해져서더한형태

$$\underset{(3\times3)}{A} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \times \underset{(3\times1)}{\underset{\sim}{b}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot \boxed{b_1} + 4\cdot \boxed{b_2} + 7\cdot \boxed{b_3} \\ 2\cdot b_1 + 5\cdot b_2 + 8\cdot b_3 \\ 3\cdot b_1 + 6\cdot b_2 + 9\cdot b_3 \end{pmatrix}$$

→ 각각 b의원소 (스칼라값)

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot b_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} b_2 + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} b_3$$

↳ A의 열벡터의 선형결합

행벡터 x 행렬

a^T의 원소

- $\underline{a}^T B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{b_1^T} \\ \underline{b_2^T} \\ \vdots \\ \underline{b_m^T} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_i \underline{b_i^T}$ ☞ B 의 행벡터의 선형결합

B의 행벡터

$\underline{a}^T$ $(a_1\ a_2\ a_3)$ $\times$ B $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(1×3) (3×3)

$= (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 7,\ a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 5 + a_3 \cdot 8,\ a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 6 + a_3 \cdot 9)$

$= a_1(1,2,3) + a_2(4,5,6) + a_3(7,8,9)$