<수리통계학Ⅱ> 5장 5~7절 과제

o **5.5절** 연습문제 #2, #3, #4

& 확률변수 $T = \dfrac{Z}{\sqrt{U/r}}$가 자유도가 r인 t-분포에 따를 때, 다음을 보여라.

(a) $E[T] = 0$ (여기서 $r \geq 2$)

(b) $Var(T) = \dfrac{r}{r-2}$ (여기서 $r \geq 3$)

※ 참고: $E(Z)$, $E(1/\sqrt{U})$, $E(Z^2)$, $E(1/U)$ 먼저 구할 것.

o **5.6절** 연습문제 #3, #4, #7

& 확률변수 X, Y 는 랜덤하게 뽑힌 초등학생이 한 달 동안 TV 영화 또는 만화를 시청한 시간이다. $E(X) = 30$, $E(Y) = 50$, $Var(X) = 52$, $Var(Y) = 64$, $Cov(X, Y) = 14$ 이라고 가정할 때, 랜덤하게 추출된 초등학생 25명이 TV 영화 또는 만화를 시청한 시간의 총합을 확률변수 Z로 정의할 때, 중심극한정리를 이용해 확률 $P(1970 < Z < 2090)$을 근사적으로 구하라.

o **5.7절** 연습문제 #2, #4, #6, #8

& 무게가 25g으로 표시된 라면은 실제로는 무게가 $N(26, 0.25)$에 따르도록 생산되고 있다.

(a) 랜덤하게 선택된 라면의 무게를 X라고 할 때, $P(X < 25.25)$를 구하라.

(b) 라면을 235개 랜덤하게 선택해서 무게를 측정하고, 이 중 무게라 25.25g이 안 되는 라면의 개수를 Y라고 할 때, $P(Y \leq 10)$을 근사적으로 구하라.

(c) 125개 라면의 평균 무게를 $\overline{X}$라고 할 때, $P(26 \leq \overline{X} \leq 28)$을 구하라

수리통계학II(002) 과제4 소프트웨어학부 컴퓨터과학전공 2016133 이유진

#5.6-3

(a) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ random sample from $\chi^2(1)$

χ^2분포는 가법성을 따르므로 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(n)$, 즉 $Y=\sum_{i=1}^{18} X_i \sim \chi^2(18)$

(b) $\chi^2(1)$을 따를 때 $\mu=1$, $\sigma^2=2$ 이며 $\chi^2(n)$을 따를 때 $\mu=n$, $\sigma^2=2n$ 이다

중심극한정리를 이용하면 $Y \dot\sim N(n, 2n) \Rightarrow W=\frac{Y-n}{\sqrt{2n}} \dot\sim N(0,1)$을 이용하면 $n=18$일때 $W=\frac{Y-18}{6} \dot\sim N(0,1)$

$P(Y \le 9.390) = P(\frac{Y-18}{6} \le \frac{9.390-18}{6}) = P(W \le -1.435) = 0.0756$

$P(Y \le 34.80) = P(\frac{Y-18}{6} \le \frac{34.80-18}{6}) = P(W \le 2.8) = 0.9974$

#5.6-4

$X \sim (54.03, 5.8^2) \longrightarrow n=47$일때 n이 '충분히 크다' 고 간주한다면 중심극한정리에 의해

$\bar{X} = \sum_{i=1}^{47} \frac{X_i}{n} \dot\sim N(54.03, \frac{5.8^2}{47})$ 이라고 할 수 있다. 즉 $Z=\frac{\bar{X}-54.03}{5.8/\sqrt{47}} \dot\sim N(0,1)$

$P(52.761 \le \bar{X} \le 54.453) = P(\frac{52.761-54.03}{5.8/\sqrt{47}} \le \frac{\bar{X}-54.03}{5.8/\sqrt{47}} \le \frac{54.453-54.03}{5.8/\sqrt{47}}) = P(-1.5 \le Z \le 0.5) = 0.6247$

#5.6-7

$X_1 \sim gamma(3,2)$, $X_2 \sim gamma(2,2)$, $X_3 \sim gamma(5,2)$, $X_4 \sim gamma(3,2)$ 이며 X_i는 서로 독립

$Y = X_1+X_2+X_3+X_4$

(a) X_i가 서로 독립이므로 $Y \sim gamma(13,2) \Rightarrow Y$의 pdf $f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(13)2^{13}} y^{13-1} e^{-\frac{y}{2}}$

$P(Y \le 25) = \int_0^{25} \frac{1}{\Gamma(13)2^{13}} y^{13-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = 0.4810$

(b) 감마분포는 모수 α가 커질수록 정규분포에 가까워진다. α가 '충분히 크다' 고 간주한다면 중심극한정리에 의해

Y의 $\mu=\alpha\theta=26$, $\sigma^2=\alpha\theta^2=52 \Rightarrow Y \dot\sim N(26, 52)$, 즉 $Z=\frac{Y-26}{\sqrt{52}} \dot\sim N(0,1)$

$P(Y \le 25) = P(\frac{Y-26}{\sqrt{52}} \le \frac{25-26}{\sqrt{52}}) = P(Z \le -0.13868) = 0.4449$

#5.6 - 추가문제

$X \sim (30, 52)$, $Y \sim (50, 64)$, $Cov(X,Y) = 14$ 일때 시청시간총합 $W = X+Y$ 라하면

$E(W) = E(X) + E(Y) = 30 + 50 = 80$

$Var(W) = Var(X) + Var(Y) + Cov(X,Y) = 52 + 64 + 14 = 130$ $\rightarrow W \sim (80, 130)$

$Z = \sum_{i=1}^{25} W_i$ 이므로 $n=25$ 일때 n이 '충분히크다' 고간주한다면 중심극한정리에의해 Z는 정규분포를 가정할수있다.

W_i는 서로독립이므로 $E(Z) = 80 \times 25 = 2000$, $Var(Z) = 130 \times 25 = 3250 \Rightarrow Z \mathrel{\dot\sim} N(2000, 3250)$

$P(1970 < Z < 2090) = P\left(\frac{1970-2000}{\sqrt{3250}} \le \frac{Z-2000}{\sqrt{3250}} \le \frac{2090-2000}{\sqrt{3250}}\right) = P\left(-0.526 \le \frac{Z-2000}{\sqrt{3250}} \le 1.579\right) = 0.6434$

#5.7-2

$X \sim bin(864, 0.6)$ 에서 $np = 864 \times 0.6 = 518.4 > 5$, $n(1-p) = 864 \times 0.4 = 345.6 > 5$ 이므로 n은 '충분히크다'

→ 중심극한정리에 의해 정규근사, 이산형분포를 연속형으로 근사하므로 연속성수정 필요

X의 $\mu = 864 \times 0.6 = 518.4$, $\sigma^2 = 864 \times 0.6 \times 0.4 = 207.36$

$P(496 \le X \le 548) = P(495.5 \le X \le 548.5) \approx P\left(\frac{495.5-518.4}{\sqrt{207.36}} \le \frac{X-518.4}{\sqrt{207.36}} \le \frac{548.5-518.4}{\sqrt{207.36}}\right)$

$= P(-1.59 \le Z \le 2.09) = 0.9258$

이항분포로 계산하면 $\sum_{x=496}^{548} {}_{864}C_x \times 0.6^x \times 0.4^{864-x} = 0.9258$

#5.7-4

$X \sim P(49)$ 일때 $P(45 < X < 60)$의 근삿값을 구하면

이경우 $\lambda = 49$로 충분히 큰 평균을 갖는 포아송분포이므로 정규근사, 즉 $W = \frac{X-49}{\sqrt{49}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$

이산형분포를 연속형으로 근사하므로 연속성수정 필요

$P(45 < X < 60) = P(45.5 \le X \le 59.5) \approx P\left(\frac{45.5-49}{7} \le \frac{X-49}{7} \le \frac{59.5-49}{7}\right) = P(-0.5 \le W \le 1.5) = 0.6247$

포아송분포로 계산하면 $\sum_{x=46}^{59} \frac{49^x e^{-49}}{x!} = 0.6148$

#5.7-6

$X_1, X_2, \cdots, X_{31}$ random sample from $NB(10, \frac{2}{3})$ → 자유투의 총수 $Y = X_1 + \cdots + X_{31} = \sum_{i=1}^{31} X_i$

X의 pmf $f_X(x) = \binom{x-1}{10-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-10}$, $x = 10, 11, \cdots$ 이며 X의 $\mu = \frac{10}{\frac{2}{3}} = 15$, $\sigma^2 = \frac{10 \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 7.5$

$n=31$ 일때 n이 '충분히크다' 고간주한다면 중심극한정리에의해 Y를 정규분포로 근사할수있다.

$\Rightarrow Y \dot{\sim} N(15 \times 31, 7.5 \times 31)$ 즉 $Y \dot{\sim} N(465, 232.5)$ 이며 $Z = \frac{Y-465}{\sqrt{232.5}} \dot{\sim} N(0,1)$

$P(Y \le 500) = P\left(\frac{Y-465}{\sqrt{232.5}} \le \frac{500-465}{\sqrt{232.5}}\right) = P(Z \le 2.295399) = 0.9891$

#5.7-8

생애 첫 1년 이내에 사망하는 유아 $X \sim bin(5000, 0.01)$에서 $np = 5000 \times 0.01 = 50 > 5$, $n(1-p) = 5000 \times 0.99 = 4950 > 5$ 이므로

n은 '충분히크다' $\Rightarrow$ 정규근사가능, 이산형분포를 연속형으로 근사하므로 연속성수정 필요

X의 $\mu = 5000 \times 0.01 = 50$, $\sigma^2 = 5000 \times 0.01 \times 0.99 = 49.5$

$P(45 \le X \le 53) = P(44.5 \le X \le 53.5) \approx P\left(\frac{44.5-50}{\sqrt{49.5}} \le \frac{X-50}{\sqrt{49.5}} \le \frac{53.5-50}{\sqrt{49.5}}\right) = P(-0.78173 \le Z \le 0.497468) = 0.4734$

#5.7-추가문제

(a) $X \sim N(26, 0.25)$ 일때 $Z = \frac{X-26}{0.5} \sim N(0,1)$ 이다

$P(X < 25.25) = P\left(\frac{X-26}{0.5} < \frac{25-26}{0.5}\right) = P(Z < -2) = 0.0228$

(b) $X_1, \cdots, X_{235}$ random sample from $N(26, 0.5^2)$ $\Rightarrow$ $Y \sim bin(235, 0.0228)$ 에서 $np = 5.358 > 5$, $n(1-p) = 229.642 > 5$ 이므로

n은 '충분히크다' $\Rightarrow$ 정규근사가능, 이산형분포를 연속형으로 근사하므로 연속성수정 필요

Y의 $\mu = 235 \times 0.0228 = 5.358$, $\sigma^2 = 235 \times 0.0228 \times (1-0.0228) = 5.236$

$P(Y \le 10) = P(Y \le 10.5) \approx P\left(\frac{Y-5.358}{\sqrt{5.236}} \le \frac{10.5-5.358}{\sqrt{5.236}}\right) = P(Z \le 2.247) = 0.9877$

(c) $\bar{X} = \sum_{i=1}^{125} \frac{X_i}{125} \sim N\left(26, \frac{0.25}{125}\right)$ 이므로 $Z = \frac{\bar{X}-26}{0.5/\sqrt{125}} \sim N(0,1)$

$P(26 \le \bar{X} \le 28) = P\left(\frac{26-26}{0.5/\sqrt{125}} \le \frac{\bar{X}-26}{0.5/\sqrt{125}} \le \frac{28-26}{0.5/\sqrt{125}}\right) = P(0 \le Z \le 44.72) = 0.5$