통계수학1 과제#2

제출일 : 4월 17일 토요일 17시까지

1. 다음에 주어진 행렬들에 대해 고유값과 각 고유값에 해당하는 고유벡터의 일반적인 형태를 구하였다. 빈칸에 적절한 숫자를 채우시오. ((2)번 $\underline{x_2}$ Hint : 제시하고 있는 벡터를 이용하여 x1,x2,x3를 표현한 후 구한 관계식을 만족하는 빈칸 값을 찾으면 됨)

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 5,\ \underline{x_1} = k\begin{pmatrix} 1 \\ \square \end{pmatrix}, (k \neq 0)$, $\lambda_2 = \square,\ \underline{x_2} = k\begin{pmatrix} 1 \\ \square \end{pmatrix}, (k \neq 0)$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,\ \underline{x_1} = k\begin{pmatrix} 1 \\ \square \\ \square \end{pmatrix} (k \neq 0),$

$\lambda_2 = \square,\ \underline{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \square \end{pmatrix}s + \begin{pmatrix} 1 \\ \square \\ 0 \end{pmatrix}t,\ (s,t) \neq (0,0)$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \square,\ \underline{x_1} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$, $\lambda_2 = \square,\ \underline{x_2} = k\begin{pmatrix} 1 \\ \square \end{pmatrix} (k \neq 0)$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \square,\ \underline{x_1} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} (k \neq 0),$ $\lambda_2 = \square,\ \underline{x_2} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (k \neq 0),$

$\lambda_3 = \square,\ \underline{x_3} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (k \neq 0)$

2. 다음에 주어진 행렬 중 $X = P\Lambda P^{-1}$ (P 는 정칙행렬, Λ는 대각행렬)의 형태로 대각화되지 않는 행렬을 모두 고르시오.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 다음에 주어진 행렬들의 계수를 구하시오.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & -12 \end{pmatrix}$

4. 다음에 주어진 행렬 A를 $A = P\Lambda P^{-1}$ 대각화하였을 때 행렬 P와 행렬 Λ에 있는 빈 칸을 채우시오

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Lambda = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. 다음에 주어진 행렬 중에 양정치행렬을 모두 고르시오.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 20 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. 다음 이차형식을 $\underline{x}^T A \underline{x}$ (A는 대칭행렬)로 나타내고 A가 양정치인지 여부를 확인하시오.

(1) $3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$

(2) $x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1x_3 + 3x_3^2 + 5x_2x_3$

7. $\underline{b} = (x_1\ \ x_2\ \ x_3)^T$의 벡터공간 $V = \left\{k_1(1\ \ 0\ \ 1)^T + k_2(1\ \ 1\ \ -1)^T : k_1, k_2\text{는 실수}\right\}$위로의 정사영을 $\underline{p}$라고 할 때 $\underline{p} = H\underline{b}$ (H 는 3×3 행렬)로 표현할 수 있다. 이 때, H^{2019}를 구하시오.