3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{8}{9}\right)^n$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

7. 다음 무한급수가 수렴함을 확인하여라.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (부분분수 이용)

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n = 1 + 0.9 + 0.81 + 0.729 + \cdots$

(수치적, 그래프적, 해석적 분석) 다음에서 (a) 급수의 합을 구하여라. (b) 그래프 계산기로 표시된 부분합 S_n을 구하여 표를 완성하여라. (c) 그래프 계산기로 부분합 수열의 처음 10항까지의 합을 나타내는 그래프와 수평 직선을 그려라. (d) 급수의 항들의 크기와 부분합 수열이 급수의 합에 접근하는 비율 사이의 관계를 설명하여라(8~10).

n	5	10	20	50	100
S_n					

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+3)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} 2(0.9)^{n-1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} 10(0.25)^{n-1}$

11. 다음 수렴급수의 합을 구하여라.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n+1)(n+2)}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(e) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$

(f) $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin 1)^n$

다음 소수에 대하여 (a) 각 순환소수를 등비급수로 나타내어라. (b) 합을 두 정수의 비로 써라(12~14).

12. $0.\overline{4}$

13. $0.\overline{81}$

14. $0.0\overline{75}$

15. 다음 급수의 수렴, 발산을 결정하여라.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{10n+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+1}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (1.075)^n$

(f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

16. 수열 $a_n = \frac{n+1}{n}$이라 하자. $\{a_n\}$과 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴의 정의를 논하여라.

17. 다음 주어진 급수가 수렴하는 x의 모든 값을 구하고, 이 x값들에 대하여 급수의 합을 x의 함수로 써라.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$

18. (a) 발산하는 급수에서 유한개의 항을 삭제하여라.
새 급수는 그대로 발산하는가? 그 이유를 설명하여라.
(b) 수렴하는 급수에 유한개 항을 더하여라.
새 급수는 그대로 수렴하는가? 그 이유를 설명하여라.

19. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$에 대하여 (a) 이 등비급수의 공비를 구하여라. (b) 급수 합의 함수를 써라. (c) 그래프 계산기로 함수와 부분합 S_3과 S_5의 그래프를 그려라. 무엇에 주의해야 하는가?

20. 그래프 계산기로 함수 $f(x) = 3\left[\frac{1-(0.5)^x}{1-0.5}\right]$의 그래프를 그려라. 이 그래프의 수평점근선을 확인하고 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$의 합과의 관계를 결정하여라.

21. 그래프 계산기로 수렴하는 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

에서 0.0001보다 작은 값을 갖는 첫 항을 각각 결정하여

같은 차수의 n항을 갖는 p급수를 선택해야 한다.

주어진 급수	비교 급수	판정
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-4n+5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	둘 다 수렴
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	둘 다 발산
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-10}{4n^5+n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$	둘 다 수렴

즉 비교할 급수를 선택할 때에는 주어진 급수의 분자와 분모에서 n의 최고차수 항 외의 항 모두를 무시할 수 있다.

예제 5 극한 비교 판정법 이용하기

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$의 수렴, 발산을 판정하여라.

[풀이] 분자와 분모의 n의 최고차수 항 외에는 모두 무시하고, 수렴하는 p급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

과 비교할 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right)\left(\frac{n^{3/2}}{1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

이므로 결론적으로 극한 비교 판정법에 따라 주어진 급수는 수렴한다.

연습문제 7.3

1. 적분 판정법을 이용하여 다음 급수의 수렴, 발산을 결정하여라.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

(c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$

2. 적분 판정법을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+c}$의 수렴, 발산을 결정하여라($k$는 양의 정수).
(c=-10)

3. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$에 적분 판정법을 적용할 수 없는 이유를 설명하여라.

4. 적분 판정법을 이용하여 p급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$의 수렴, 발산을 결정하여라.

5. 정리 7.11를 이용하여 다음 p급수의 수렴, 발산을 결정하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ (b) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.04}}$

6. 급수 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}}$이 수렴하는 양의 정수 p의 값을 구하여라.

7. 연습문제 6의 결과를 이용하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{2}}$의 수렴, 발산을 결정하여라.

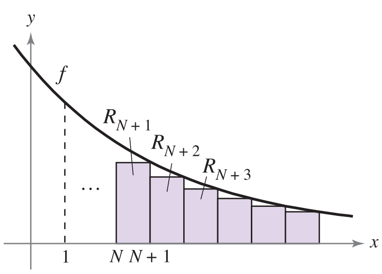
8. $x\ge 1$에 대하여 $a_n=f(n)$을 만족하는 f는 양이고, 연속이고, 감소함수라 하면 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

이 S에 수렴하면 나머지 $R_N=S-S_N$은

$$0\le R_N\le\int_N^{\infty}f(x)\,dx$$

에 의하여 유계임을 증명하여라.



9. 연습문제 8의 결과로 다음과 같이 나타낼 수 있음을 보여라.

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\le\sum_{n=1}^{\infty}a_n\le\sum_{n=1}^{N}a_n+\int_N^{\infty}f(x)\,dx$$

10. 연습문제 8의 결과를 이용하여 주어진 항의 개수에 따라 다음 수렴급수의 합의 근삿값을 구하여라. 구한 근삿값에 대한 최대오차를 어림하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, 10개의 항 (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$, 4개의 항

11. 연습문제 8의 결과를 이용하여 다음 수렴급수에서 $R_N\le 0.001$을 만족하는 N을 구하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-5n}$

12. 비교 판정법을 이용하여 다음의 수렴, 발산을 결정하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2}$

13. 극한 비교 판정법을 이용하여 다음의 수렴, 발산을 결정하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+2)}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{n^k+1},\quad k>2$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$

아래 급수에 대하여 다음 각 판정법을 적어도 한번 적용하여 수렴, 발산을 판정하여라. 어떤 판정법이 이용되었는지 확인하여라 (14~17).

(a) n항 판정법 (b) 등비급수 판정법
(c) p급수 판정법 (d) 축소 급수 판정법
(e) 적분 판정법 (f) 비교 판정법
(g) 극한 비교 판정법

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}$ **15.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+3}$ **17.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)^2}$

18. 조화급수에 대한 극한 비교 판정법을 이용하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$이 유한이고 0이 아니면, 급수 $\sum a_n\ (0<a_n<a_{n-1})$은 발산함을 보여라.

19. $P(n)$, $Q(n)$이 j차, k차 다항식일 때 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$은 $j<k-1$이면 수렴하고 $j\ge k-1$이면 발산함을 증명하여라.

20. 연습문제 19에 주어진 다항식 판정법을 이용하여 급수

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n/n}}{n^{n/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n}=0<1$$

이므로 급수는 절대수렴한다(따라서 수렴한다).

NOTE 예제 10의 급수에 대하여 비 판정법을 적용해 보면 근 판정법을 적용하는 것이 얼마나 유용한지 알 수 있다. 비 판정법을 적용해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^{n+1}}\div\frac{e^{2n}}{n^n}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}e^2\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}e^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

예제 10에서 근 판정법으로 얻은 극한 보다 복잡하다.

급수 판정의 전략

지금까지 급수가 수렴하는지 발산하는지를 결정하는 10가지 판정법을 다루었다. 다음은 적합한 판정법을 선택하는 지침이다.

급수의 수렴, 발산에 대한 판정 지침

1. 급수의 n번째 항이 0에 접근하는가? 아니면 급수는 발산한다.
2. 급수가 특정 유형, 즉 등비급수, p급수, 축소급수, 교대급수인가?
3. 적분 판정법, 근 판정법, 비 판정법을 적용할 수 있는가?
4. 급수가 편리하게 특정 유형의 판정법에 비교될 수 있는가?

NOTE 경우에 따라 한 가지 이상의 판정법을 적용할 수 있다. 그러나 가장 효과적인 판정법을 선택하는 것을 목표로 해야 한다.

더 알아보기

근 판정법의 유용성에 대하여 더 알아보려면 *The American Mathematical Monthly*에 실린 Charles C. Mumma II의 논문 "N! and the Root Test"를 보아라. 이 논문을 보려면 웹사이트 www.matharticles.com을 방문하여라.

연습문제 7.4

1. 다음 급수의 수렴, 발산을 결정하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$　(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\ln(n+1)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$　(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n+2}$　(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$

2. 다음에서 처음 6개항으로 급수의 합을 어림하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3}{n^2}$　(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{n!}$

다음에서 (a) 정리 7.15를 이용하여 근삿값이 수렴급수의 합과 오차가 0.001보다 작은 항의 개수를 구하여라. (b) 그래프 계산기로 급수의 합과 오차가 0.001보다 작은 근삿값을 추정하여라 (3~5).

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{1}{e}$　**4.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\sin 1$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$

6. 다음에서 정리 7.15를 이용하여 근삿값이 수렴급수의 합과 오차가 0.001보다 작은 항의 개수를 구하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$　(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^3-1}$

7. 다음에서 급수가 절대수렴인지 조건부수렴인지 또는 발산하는지를 결정하여라.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$

8. 비 판정법을 이용하여 다음 급수의 수렴, 발산을 결정하여라.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n3^n}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^n}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+1}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$

9. 비 판정법은 다음 p급수에 대하여 결론지을 수 없음을 보여라.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

10. 근 판정법으로 다음 급수의 수렴, 발산을 결정하여라.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\sqrt[n]{n}+1\right)^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$ (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

11. 적합한 판정법으로 다음 급수의 수렴, 발산을 결정하고, 이용한 판정법이 무엇인지 확인하여라.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}5}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-2}}{2^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+3}{n2^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n7^n}{n!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$

12. 다음 중 같은 급수는 어느 것인가?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n5^n}{(n+1)!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{(n+1)!}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$ 과 같은 급수를 $n=0$에서 시작하는 급수로 써라.

14. 다음에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 항은 귀납적으로 정의된다. 급수의 수렴, 발산을 결정하고, 이유를 설명하여라.

(a) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{4n-1}{3n+2} a_n$

(b) $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n$

15. 비 판정법이나 근 판정법을 이용하여 다음 급수의 수렴, 발산을 결정하여라.

(a) $1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots$

(b) $\frac{1}{(\ln 3)^3} + \frac{1}{(\ln 4)^4} + \frac{1}{(\ln 5)^5} + \frac{1}{(\ln 6)^6} + \cdots$

16. 다음 급수가 수렴하기 위한 x값을 구하여라.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{x}{3}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n}$

17. **(참, 거짓)** 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하여라. 거짓이면 그 이유를 설명하거나 예를 들어라.

(a) $\sum a_n$ 과 $\sum (-a_n)$이 수렴하면 $\sum |a_n|$은 수렴한다.

(b) 교대급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 의 부분합 S_{100} 은 주어진 급수의 합을 과대하게 어림한 것이다.

18. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^p}\right)$ 이 수렴하는 p의 값을 구하여라.

19. $\sum |a_n|$이 수렴하면 $\sum a_n^2$ 도 수렴함을 증명하여라. 그 역도 성립하는가? 성립하지 않으면, 성립하지 않는 예를 들어라.

20. 연습문제 19에서 증명한 명제를 입증하는 급수의 예를 들어라.

21. 다음 급수에 대하여

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \cdots$$