제8장. 트레이스, 특수한 행렬

8.1 트레이스 (Trace)

행렬의 rank와 다른게 정방행렬일때만

◎ 트레이스(Trace) : $tr(A_{n \times n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (정방행렬의 대각원소 의 합)

$\underset{(3\times3)}{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$tr(A) = 8 - 3 + 4 = 9$

Theorem 8.1

정방행렬 A, B 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

(2) $tr(cA) = c \cdot tr(A)$, $c \in R$

cf) $tr(AB) \neq tr(A) \times tr(B)$

☆**Theorem 8.2** $tr(AB) = tr(BA)$ (AB 와 BA가 둘 다 정의되는 경우)

A, B가 각각 정방행렬이 아니더라도, AB와 BA가 모두 정의되는 경우

$\underset{3\times2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\underset{2\times3}{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \underset{(3\times3)}{AB} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 16 \\ 4 & -8 & -3 \\ 24 & 16 & 34 \end{pmatrix}$ → 35, $\underset{(2\times2)}{BA} = \begin{pmatrix} 3 & 17 \\ 30 & 32 \end{pmatrix}$ 35

Theorem 8.3 $tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$ (ABC, CAB, BCA가 모두 잘 정의되는 경우)

AB=P로치환

$\boxed{\text{Th8.2}}$ $tr(ABC) = tr(PC) = tr(CP) = t(CAB)$

참고) A가 대각화가능일때 $P^{-1}AP = \Lambda$ (P:정칙, Λ:대각)

$\therefore tr(A) = tr(P^{-1}AP)$

$= tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Theorem 8.4 $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$ (P는 정칙행렬)

$tr(P^{-1}AP) = tr(A\underbrace{PP^{-1}}_{I}) = tr(A)$

Theorem 8.5

$A_{n\times n}$의 고유값이 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$일 때 다음이 성립한다.

중근을가질때는중복해서나열

ex) $\underset{4\times4}{A} \rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=3, \lambda_3=\lambda_4=5$ 인경우

(1) $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

(2) $tr(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$

$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k번}$

★ Th8.5는 A의 대각화가능여부와 관계없이 성립한다.

(3) $tr(A^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}$ (A가 정칙행렬인 경우)

8.3 직교행렬 (Orthogonal Matrix)

Definition

정방행렬 C가 다음을 만족하면 직교행렬이라고 한다.

$$C^T C = C\,C^T = I$$

$AB = I$ ↳ $B = A^{-1}$ (역행렬)

↳ $C^T = C^{-1}$

Theorem 8.7

(1) 직교행렬의 역행렬 이나 전치행렬도 직교행렬이다.

(2) 두 개 또는 그 이상의 직교행렬의 곱 도 직교행렬이다.

Theorem 8.8 C 가 직교행렬이면 $\det(C) = 1$ or -1 이다.

$C^TC = I$

$\det(C^TC) = \det(I)$
$= \det(C^T)\det(C)$
$= 1$

$\det(C^T) = \det(C)$ 이므로 $\det(C)^2 = 1$

$\therefore \det(C) = 1$ or -1

Theorem 8.9

곱이성립

행렬 C 가 $n \times n$ 직교행렬이고 A가 $n \times n$ 행렬이면 다음을 만족한다.

$$\det(C^TAC) = \det(A)$$

$\det(C^TAC) = \det(C^T)\det(A)\det(C)$

$= \det(A)\underbrace{\det(C)^2}_{\hookrightarrow 1}$ $\because$ 행렬식 값은 상수이므로 자리바꾸기가능

참고) A가 대각화가능 $\det(P^{-1}AP) = \det(\Lambda)$

$\det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \cancel{\frac{1}{\det(P)}}\det(A)\cancel{\det(P)}$

$\therefore \det(A) = \det(\Lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ (고유값의곱) : 대각화 불가능해도 성립함

8.4 멱등행렬 (Idempotent Matrix)

곱이 same　　거듭제곱

참고) 두 정방행렬 A, B에 대해 $AB = \emptyset$ (영행렬) 이면
① 행렬 A, B가 둘다 비정칙이거나
② A, B중 하나가 $\emptyset$

즉 $\det(A)\det(B) = \det(\emptyset) = 0$

i) $\det(A) = 0$, $\det(B) = 0$
: A, B 둘다 비정칙

ii) $\det(A) = 0$, $\det(B) \neq 0$
: A는 $\emptyset$, B는 정칙

$\boxed{\text{iii) } \det(A) \neq 0,\ \det(B) = 0 \quad : \text{A는 정칙, B는 } \emptyset}$

◎ **멱등행렬** : (정방행렬에서) $A^2 = A$ 을 만족하는 행렬

ㄴ주로 대칭행렬으로 가정

Theorem 8.10 유일한 정칙 멱등행렬은 단위행렬 이다.

즉, 일반적으로 멱등행렬은 비정칙행렬 (항등행렬, I)

$I^2 = I$

$I \cdot I = I$

$A^2 - A = 0 \rightarrow A(A - I) = 0$

(∵ 멱등행렬 A이므로 $\emptyset$이 될 수 없음)

$\Rightarrow A - I = \emptyset$, $A = I$

Theorem 8.11 멱등행렬의 고유값은 0 또는 1 이다.

$A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ $(\underline{x} \neq \underline{0})$

$A\underline{x} = AA\underline{x} = A\lambda\underline{x} = \lambda A\underline{x} = \lambda\lambda\underline{x} = \lambda^2\underline{x}$

A가 멱등행렬이므로 $A^2 = A$, 따라서 $A\underline{x} = \lambda\underline{x} = \lambda^2\underline{x}$

$\lambda\underline{x} - \lambda^2\underline{x} = \underline{0}$, $\lambda(\lambda - 1)\underline{x} = 0$

$\underline{x} \neq \underline{0}$ 이므로 $\lambda(\lambda - 1) = 0$, $\lambda = 0$ 또는 $\lambda = 1$

Theorem 8.12

고유값이 0 또는 1

$A_{n\times n}$ 가 대칭인 멱등행렬이며 $rank(A) = r$ 일 때,

$$C^T A\, C = R = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

을 만족하는 직교행렬 C 가 존재한다.

대칭행렬의 대각화 → $C^TAC = \Lambda$ (C: 직교, Λ: 대각) → A의 고유값을 원소로 가짐 (0, 1)

n=5인 경우 rank(A) = 3 일때 (r=3)

11100

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{\,I} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Theorem 8.13

$A_{n\times n}$: 대칭, 멱등행렬 $\Rightarrow rank(A) = tr(A)$

$$tr(A) = tr(C^TAC) = tr(R) = tr\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r = rank(A)$$

(대각원소의 합 tr)

〈다음의 사실을 증명해볼 것-과제〉

Theorem 8.14

A , B 가 멱등행렬이고 $AB = BA$ 이면 AB 는 멱등행렬이다.

Theorem 8.15

A 가 멱등행렬이고 C 가 직교행렬이면 $C^T A C$ 는 멱등행렬이다.

Theorem 8.16

A 가 멱등행렬이면

(1) $I - A$ 는 멱등행렬이다.

(2) $A(I - A) = (I - A)A = O$

멱등행렬의 정의 $(I-A)^2 = I-A$ 인지 확인하면된다.

$$(I-A)^2 = (I-A)(I-A) = I^2 - IA - AI + A^2$$

$$= I - 2A + A^2$$

A가 멱등행렬이므로 $A^2 = A$ → $= I-A$ 만족한다.

멱등행렬의 예

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$; 모든원소가 1인 n차정방행렬

Example

1) $\boxed{\text{중심화행렬}}$[1] $C_n = I - \frac{1}{n}J_n$ → 대각원소는 $1-\frac{1}{n}$, 비대각원소는 $-\frac{1}{n}$인 n차정방행렬

멱등행렬이다.

↳ 과제!

정의로해결

($C_n = C_n^2$ 인지)

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & 1-\frac{1}{n} & & \cdots & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

2) hat matrix (or projection matrix)

$X_{(n\times p)}$: data matrix $(n>p)$, X는 full rank

$$H = X(X^TX)^{-1}X^T$$

정리5.3?

$H^2 = H$인가.

$$H^2 = X(X^TX)^{-1}\underbrace{X^TX(X^TX^{-1})}_{I}X^T$$

$$= X(X^TX)^{-1}X^T \to H$$

1) 과제에서 확인해 볼 것