제5장. 직교성과 정사영

5.1 직교벡터

(내적) 스칼라

- 두 n차원 벡터 $\underline{x}$, $\underline{y}$ 에 대하여 $\underline{x}\cdot\underline{y}=0$ 일 때, $\underline{x}$와 $\underline{y}$ 는 서로 직교(orthogonal)한다 또는 서로 수직(perpendicular)이라고 한다.

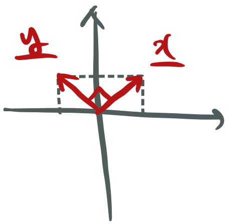
예) ① $\underline{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\underline{y}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$$\underline{x}\cdot\underline{y}=\underline{x}^T\underline{y} = (-1)\cdot 1+0\cdot(-2)+1\cdot 1$$
$$=0$$

∴ 직교(수직)

② $\underline{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{y}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$$\underline{x}\cdot\underline{y}=0$$



- 벡터 $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$ 의 노음 (norm) (=길이)

$$\| \underline{x} \| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- 단위벡터(unit vector) : 길이가 1 인 벡터

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 라면 $\| \underline{x} \| = \sqrt{3^2+0^2+2^2}$
$= \sqrt{13}$

$\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \underline{z}$

↳ $\underline{x}$와 같은 방향을 가진 단위벡터

단위벡터를 만드려면 노음으로 나눈다.

$\underline{z}$ (단위벡터) $= \frac{1}{\| \underline{x} \|} \underline{x}$

Definition

직교집합(orthogonal set)

n차원 벡터 집합 $S=\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \cdots, \underline{x}_p\}$에 속해 있는 임의의 두 벡터가 서로직교 일 때, 즉

임의의두벡터를 선택해서 내적계산 했을때 결과가 모두 1 ?

9m47s 강의설명맞는건가

$$\boxed{\underline{x}_i{}' \underline{x}_j = 0}\ (i \neq j \ ; \ i, j = 1, 2, \cdots, p)$$

모든가능

일 때, S 를 **직교집합**이라고 한다.

정규직교집합(orthonormal set)

직교집합 S 에 속하는 모든 벡터가 단위벡터 일 때,

즉 $\| \underline{x}_i \| = 1$, $(i = 1, 2, \cdots, p)$일 때, S 를 **정규직교집합**이라고 한다.

ex) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

각각의벡터의길이가 1, 서로내적결과가 모두 0이므로

Example

$$\underline{x_1} = (-3, -1, 1, 3)^T \qquad \underline{x_2} = (1, -1, -1, 1)^T \qquad \underline{x_3} = (-1, 3, -3, 1)^T$$

1) 직교집합인지? → 임의의 두벡터가 직교하는지

$\underline{x}_1^T \underline{x}_2 = 0$, $\underline{x}_1^T \underline{x}_3 = 0$, $\underline{x}_2^T \underline{x}_3 = 0$

$\therefore S = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3\}$ 은 직교집합

2) 정규직교집합? → 단위벡터로

(증명) $\|\underline{x}_1\| = \sqrt{20}$, $\|\underline{x}_2\| = \sqrt{4}$, $\|\underline{x}_3\| = \sqrt{20}$

$$\underline{z}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{20}} \\ -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} \end{pmatrix} \qquad \underline{z}_2 \qquad \underline{z}_3$$

직교집합 $\xrightarrow{\ o\ }$ 선형독립
직교집합 $\xleftarrow{\ \times\ }$ 선형독립

구성하는원소의수 n개

영벡터가아닌 벡터들

Theorem 5.1

영벡터가 아닌 n차원 벡터 $\underline{x_1}, \underline{x_2}, \cdots, \underline{x_p}$ 가 직교집합이면 이 벡터집합은 선형독립 이다.

임의의 두벡터 가수직 (내적=0)

$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_p x_p) = 0 \cdot x_1$

$\cdot x_1$

양변에 x_1로내적

내적의결과:스칼라

$\Rightarrow a_1 x_1 \cdot x_1 + a_2 \underline{x_2 \cdot x_1} + \cdots + a_p \underline{x_p \cdot x_1} = 0$

$\quad\quad 0 \quad\quad\quad 0$

$\therefore a_1 \underline{x_1 \cdot x_1} = 0$

↳ x_1이 영벡터가아니므로 자기자신과의 내적은 0이될수 없다. 따라서 $a_1 = 0$

같은방식으로계산하면 나머지 계수들도모두 0이다.

$(a_2 = 0, a_3 = 0, \cdots a_p = 0)$

$\therefore$ 선형독립이다.

열들의길이가1, 임의의두벡터의 내적이0

※ 직교행렬(orthogonal matrix) : 정규직교 열들로 구성된 정방행렬.

직교행렬을 Q라 하면 $QQ^T = I$ 와 $Q^TQ = I$ 성립하며, 직교행렬은 정칙행렬이다.(역행렬이 존재하므로)

+) 직교행렬의 역행렬은 자기자신의 전치행렬이다. $(Q^{-1} = Q^T)$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

→ 각각의 열의 길이가 1이다 (모두더해보면) → 정규(o)

두열의 내적이 0이다 → 직교(o)

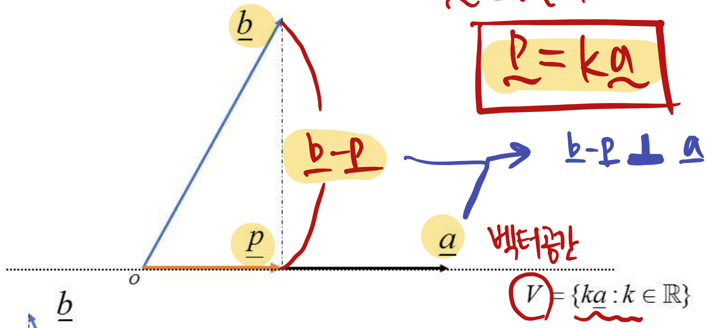
전치행렬과의 곱이 단위행렬이다

5.2 정사영

※ 벡터 $\underline{b}$ 의 벡터 $\underline{a}$위로의 정사영(orthogonal projection) $\underline{p}$

$\underline{p}$는 $\underline{a}$와 스칼라배 관계를 가짐

$$\boxed{\underline{p} = k\underline{a}}$$



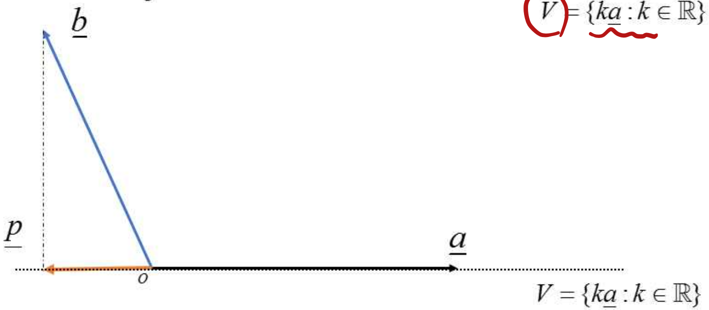
$\underline{b}-\underline{p} \perp \underline{a} \rightarrow (\underline{b}-\underline{p})\cdot\underline{a} = 0$

$(\underline{b}-k\underline{a})\cdot\underline{a} = 0$

$\underline{b}\cdot\underline{a} - k\,\underline{a}\cdot\underline{a} = 0$

$\therefore k = \dfrac{\underline{b}\cdot\underline{a}}{\underline{a}\cdot\underline{a}}$

$\underline{p} = \dfrac{\underline{b}\cdot\underline{a}}{\underline{a}\cdot\underline{a}}\,\underline{a}$



※ 벡터 $\underline{b}$ 의 평면 V 위로의 정사영(orthogonal projection) $\underline{p}$

(평면 V 는 선형독립인 두 벡터 $\underline{a}_1, \underline{a}_2$로 만들어짐)

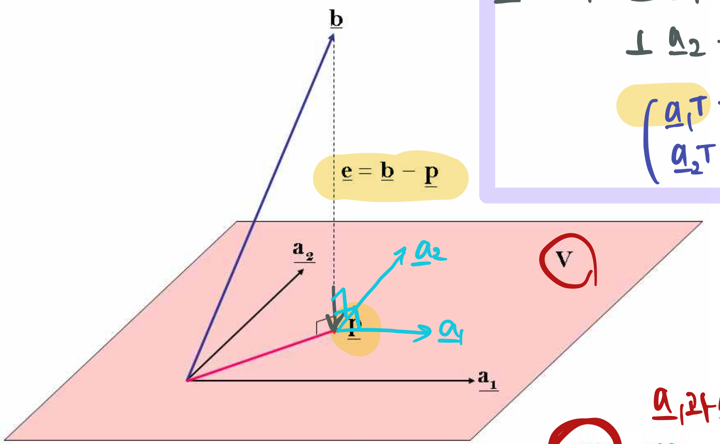
$\underline{e}=\underline{b}-\underline{p} \perp \underline{a}_1 \to \underline{e}\cdot\underline{a}_1=0 \to \underline{a}_1^T\underline{e}=0 \; (\underline{e}^T\underline{a}_1=0)$

$\perp \underline{a}_2 \to \underline{e}\cdot\underline{a}_2=0 \to \underline{a}_2^T\underline{e}=0 \; (\underline{e}^T\underline{a}_2=0)$

$\begin{pmatrix}\underline{a}_1^T\\ \underline{a}_2^T\end{pmatrix}\underline{e}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 이므로 $\boxed{A^T\underline{e}=\underline{0}}$

$A=(\underline{a}_1\ \underline{a}_2)$

$\underline{x}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$



$\underline{a}_1$과 $\underline{a}_2$의 선형결합

$V=\{k_1\underline{a}_1+k_2\underline{a}_2 : k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$

$\underline{e}=\underline{b}-\underline{p}=\underline{b}-(k_1\underline{a}_1+k_2\underline{a}_2)$

$=\underline{b}-(\underline{a}_1\ \underline{a}_2)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$

$=\boxed{\underline{b}-A\underline{x}}$

$\Downarrow$

$A^T(\underline{b}-A\underline{x})=\underline{0}$

$A^T\underline{b}=A^TA\underline{x}$

$\underline{x}=(A^TA)^{-1}A^T\underline{b}$

($\underline{a}_1, \underline{a}_2$가 선형독립이면 $(A^TA)^{-1}$ 이 존재)

$\underline{p}=A\underline{x}$

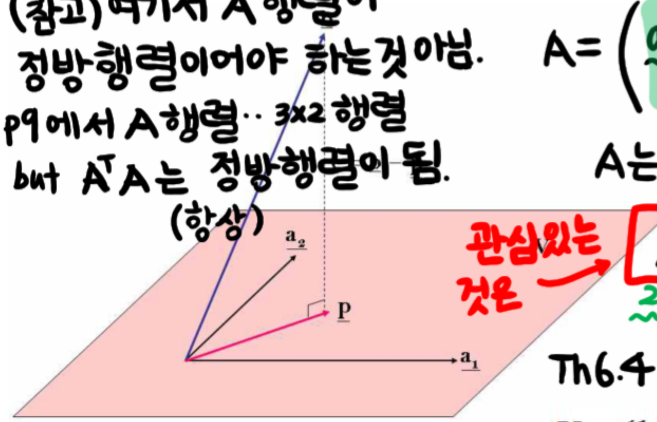
$=A(A^TA)^{-1}A^T\underline{b}$

※ 벡터 $\underline{b}$ 의 평면 V 위로의 정사영(orthogonal projection) $\underline{p}$

(평면 V 는 선형독립인 두 벡터 $\underline{a}_1, \underline{a}_2$로 만들어짐)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1^T \\ \underset{\sim}{a}_2^T \end{pmatrix}}_{2\times\square} \underbrace{\underset{\sim}{e}}_{\square\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

(참고) 여기서 A행렬이 정방행렬이어야 하는것 아님.
p9에서 A행렬.. 3x2 행렬
but A^TA는 정방행렬이 됨.
(항상)



$A = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 & \underset{\sim}{a}_2 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1^T \\ \underset{\sim}{a}_2^T \end{pmatrix}$

A는 선형독립인 2개 열로 이루어짐 → rank(A)=2

관심있는 것은 → $\boxed{A^TA}$를 생각해보면 크기는 2x2행렬(정방행렬)

$\underset{2\times\square\ \square\times 2}{}$

Th6.4 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^TA)$ 이용하면

$V = \{k_1\underline{a}_1 + k_2\underline{a}_2 : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$

$\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(A) = 2$이다.

A^TA는 2x2 정방행렬 & 계수는 2이므로 최대계수행렬!

따라서 A^TA는 역행렬 존재!

* 실시간 강의에서는 A행렬을 최대계수행렬이라고 말했는데 A가 최대계수행렬 아니어도 성립함.

중요

Theorem 5.3

선형독립인 $\underline{a}_1 \ \cdots \ \underline{a}_p$에 의해 생성되는 벡터공간을 V 라고 할 때 벡터 $\underline{b}$의 V로의 정사영(orthogonal projection) $\underline{p}$는 다음과 같다. $(A = [\underline{a}_1 \ \cdots \ \underline{a}_p])$

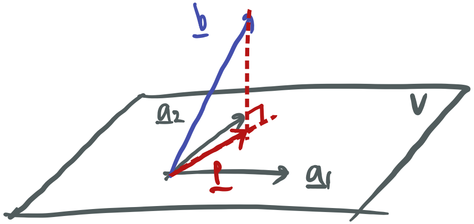
$$\underline{p} = A\underline{x}, \quad \underline{x} = (A'A)^{-1}A'\underline{b}, \quad \underline{p} = A(A'A)^{-1}A'\underline{b}$$

참고) 선형독립인 $\underline{a}_1 \ \cdots \ \underline{a}_p$에 의해 생성되는 벡터공간을 V 는

$V = \{k_1\underline{a}_1 + \cdots + k_p\underline{a}_p : \ k_1, \ldots, k_p \text{는 실수}\}$ 라고 표현할 수 있다. 정사영벡터 $\underline{p} = A\underline{x}$는 벡터공간 V 에 속하는 벡터들 중 $\underline{b}$와의 거리가 가장 짧은 벡터가 되는 성질이 있다. 따라서 함수 $f(\underline{k}) = \| (k_1\underline{a}_1 + \cdots + k_p\underline{a}_p) - \underline{b} \| = \| \underline{b} - A\underline{k} \|$의 최솟값을 갖게 하는 $\underline{k}$는 $\underline{x}$로 주어지게 된다.

Example

벡터공간 $V=\{k_1\overbrace{\boxed{(1\ \ 2\ \ 1)^T}}^{a_1}+k_2\overbrace{\boxed{(1\ \ 1\ \ 2)^T}}^{a_2}: k_1,k_2$는 실수$\}$에 속하는 벡터 중에 $\underline{b}=(4\ \ 8\ \ 5)^T$와 의 거리가 가장 짧은 벡터를 구하시오.



$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5\\5&6\end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1}=\begin{pmatrix}6&5\\5&6\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}6&-5\\-5&6\end{pmatrix}$$

$$\underline{p}=A(A^TA)^{-1}A^T\underline{b}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}\frac{1}{11}\begin{pmatrix}6&-5\\-5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\8\\5\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{11}\underset{3\times2}{\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}}\underset{2\times2}{\begin{pmatrix}6&-5\\-5&6\end{pmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{pmatrix}25\\22\end{pmatrix}}\ \Rightarrow 3\times1$$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}47\\87\\54\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \underline{p}=\begin{pmatrix}\frac{47}{11}\\\frac{87}{11}\\\frac{54}{11}\end{pmatrix}$$