게임 이론(스프라그-그런디 정리)

Sprague-Grundy Theorem

PS에서의 게임이란?

1. **순차적 게임**
   모든 플레이어가 순서대로 돌아가면서 행동하는 게임

2. **완전 정보 게임**
   모든 플레이어가 게임에 대한 모든 정보를 공유하는 게임

3. **공정 게임**
   취할 수 있는 행동이 게임 상태에 의해 결정되는 게임
   즉, 플레이어에 따라 취할 수 있는 행동이 달라지지 않는다.

4. **노멀 게임**
   자기 차례에 할 수 있는 행동이 없으면 패배하는 게임

5. **반드시 종료되는 게임**
   유한한 턴 안에 게임이 끝나야 한다.

PS에서의 게임이란?

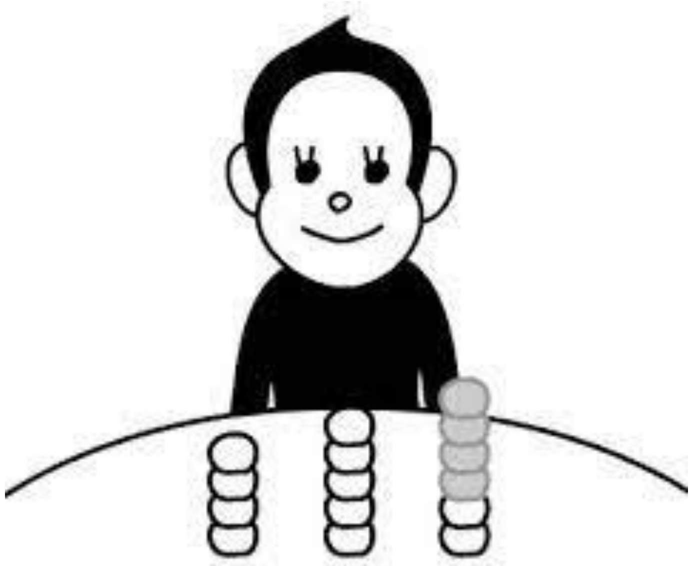
"두 플레이어 모두 필승법을 알고 있다면 누가 이기는가?“를 찾는 문제

님 게임(Nim Game)

1. 몇 개의 돌더미가 있다.
2. 각 플레이어는 자신의 차례에 하나의 돌더미를 선택하고,
3. 그 안에서 하나 이상의 돌을 가져간다.

자신 차례에서 가져갈 돌이 없으면 패배하는 게임이다.

https://www.acmicpc.net/problem/11868



님 게임의 필승 전략

자기 차례에 각 돌 더미에 있는 돌의 개수를
XOR(⊕) 연산했을 때 값을 0으로 만들어주면 이긴다.

님 게임 필승 전략의 증명

각 돌 무더기에 있는 돌의 개수를 XOR한 값을 x라 하자.

Lemma 1. x=0 일 때, 다음 차례는 무조건 x′≠0 이 된다.

Lemma 2. x≠0 일 때, x′=0 으로 항상 만들어 줄 수 있다.

돌이 하나도 남지 않은 상황은 x = 0이다.

➔ 상대방 차례를 x=0으로 만들 수 있으면 이긴다!

님 게임 필승 전략의 활용

다른 게임에서도 님 게임과 비슷하게 필승 전략을 짜서
문제를 해결해보자!

그런디 수(grundy number)

- Nimber라고도 불린다. (님 게임에서의 각 돌더미의 돌의 개수)

- 현재 게임판의 상태를 자연수(그런디 수)로 치환할 수 있다.
  (그런디 수가 같다면 같은 상태라고 생각한다.)

- 현재 게임의 상태를 G라고 하면, 그런디 수는 g(G)라고 표현한다.

- G(G)가 0일 때는 할 수 있는 행동이 없는 상태
  즉, 패배하는 상태를 의미한다.

그런디 수

$G_{state} = mex(G_{state'} \mid state'$ 는 $state$의 다음 상태$)$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if x is a terminal position} \\ mex\{g(y) : y \in F(x)\} & \text{else} \end{cases}$$

$mex(Y)$: 집합Y에 속하지 않는 자연수 중 가장 작은 수(Minimum Excluded Number)

$g(x) = 0$, x is a losing position
$g(x) \neq 0$, x is a winning position

베스킨라빈스31 게임에서의 그런디 수

https://www.acmicpc.net/problem/20004

남은 수의 개수	0	1	2	3	4	5	6	7	8
그런디 수	*0	*1	*2	*3	*0	*1	*2	*3	*0

그런디 수가 0인 수를 말하는 사람이 진다.

= 상대방이 그런디 수 0인 숫자를 말하게 하면 이긴다.

스프라그-그런디 정리(그런디 수의 합성)

$$g((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = g(x_1) \oplus g(x_2) \oplus \cdots \oplus g(x_n)$$

$$ans = G_{state_1} \oplus \ G_{state_2} \oplus \ \ldots \ \oplus \ G_{state_n}$$

여러 게임을 동시에 진행하는 경우의 그런디 수는 각 게임판의 그런디 수를 XOR한 값이다.

(ex. 베스킨라빈스 게임을 5개 동시에 하기)

스프라그-그런디 정리의 증명

증명)

$x := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$b := g(x_1) \oplus g(x_2) \oplus \cdots \oplus g(x_n)$

(1) $\forall a \in [0, b)\ \exists y \in F(x)\ \ g(y) = a$

$d := a \oplus b$

$k :=$ a positive integer such that $2^{k-1} \leq d < 2^k$

정의를 풀어쓰면, a와 b의 비트 표현이 달라지기 시작하는 지점이 (오른쪽으로부터) k-th 비트라는 뜻이다.

이때 $a < b$이므로 a의 k-th 비트는 0, b의 k-th 비트는 1이다.

b의 정의에 의해 $g(x_i)$의 k-th 비트가 1인 i가 반드시 존재한다. (WLOG, $i = 1$)

$d \oplus g(x_1) < g(x_1)$이므로 $g(x_1') = d \oplus g(x_1)$를 만족하는 $x_i' \in F(x_1)$가 반드시 존재한다.

$$\begin{aligned} g((x_1', x_2, \ldots, x_n)) &= g(x_1') \oplus g(x_2) \oplus \cdots \oplus g(x_n) \\ &= d \oplus g(x_1) \oplus \cdots \oplus g(x_n) \\ &= d \oplus b \\ &= a \end{aligned}$$

스프라그-그런디 정리의 증명

(2) $\nexists y \in F(x) \;\; g(y) = b$

(귀류법) $\exists y \in F(x) \;\; g(y) = b$라고 가정하자.

$$g(x_1') \oplus g(x_2) \oplus \cdots \oplus g(x_n) = g(x_1) \oplus g(x_2) \oplus \cdots \oplus g(x_n)$$
$$\therefore g(x_1') = g(x_1)$$

이는 그런디 함수 정의에 모순이다.

https://casterian.net/algo/sprague-grundy.html

스프라그-그런디 문제 파악하고 풀기

- 게임이 분할되는지 파악한다.
- 각 게임의 그런디 수를 구한다.

- 각 게임의 그런디 수를 XOR해서 정답을 찾는다.

[BOJ 3596] 크로스와 크로스

문제

크로스와 크로스 게임은 1 × n칸으로 이루어진 보드에서 진행한다. 두 플레이어는 서로 번갈아가면서 게임을 한며, 각 칸의 크기는 1 × 1이다.

각 플레이어는 자기 턴일때, 빈 칸중 한 곳에 '×' 마크를 한다.

만약, 어떤 플레이어가 연속된 3개의 '×'를 만들 수 있다면 그 플레이어가 이긴다.

n이 주어졌을 때, 두 플레이어가 현재 턴에서 선택할 수 있는 가장 좋은 방법으로 게임을 했을 때, 이기는 사람을 구하는 프로그램을 작성하시오.

입력

첫째 줄에 n이 주어진다. (3 ≤ n ≤ 2000)

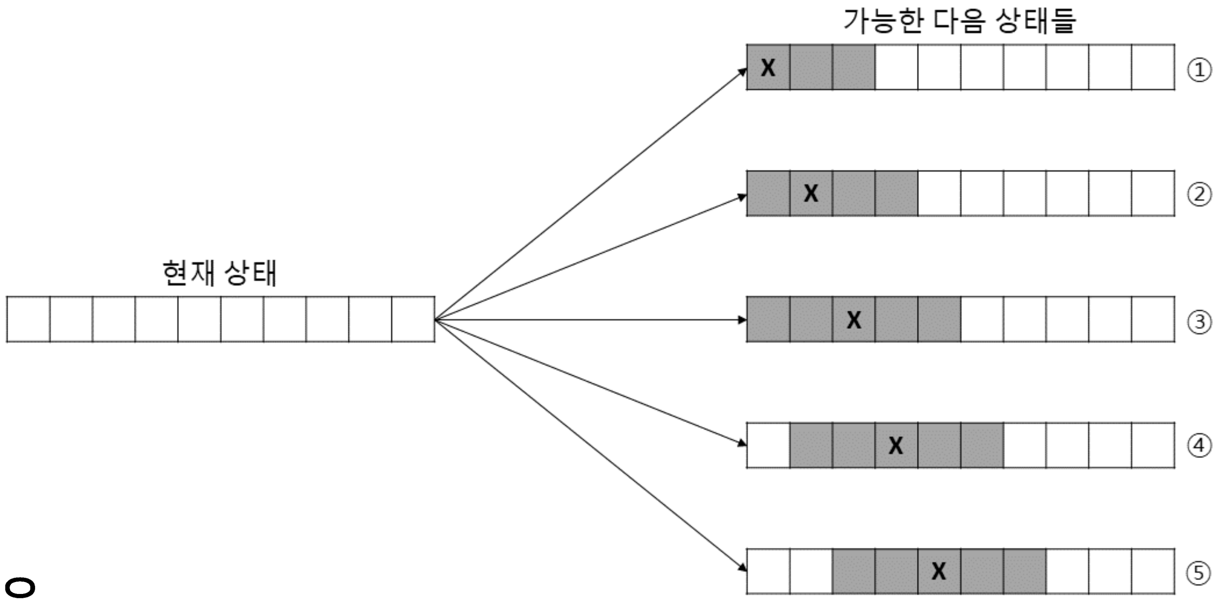
출력

첫 번째 플레이어가 이긴다면 1을, 두 번째 플레이어가 이긴다면 2를 출력한다.

[BOJ 3596] 크로스와 크로스

X마크가 있는 칸을 중심으로 두 칸 이하 떨어진 곳에 마크하면 패배한다.

➔ X마크를 중심으로 5칸을 없앤다.



현재 상태가 10일 때 오른쪽 4,5의 경우

독립된 두개의 게임으로 분할된다.

연습 문제

- **게임이론 연습문제**

[BOJ 9660] 돌게임6 G5

- **스프라그 그런디 연습문제**

[BOJ 11868] 님게임2 P4
[BOJ 11871] 님게임 홀짝 P4
[BOJ 3596] 크로스와 크로스 P3
[BOJ 18937] 왕들의 외나무다리 돌게임 P3