

## ■ 반복이 있는 이원배치법

### ○ 실험 설계

- 수준 수가  $a$  인 요인 A, 수준 수가  $b$  인 요인 B, 반복 수가  $r$
- $a \times b \times r$  실험 전체를 완전 확률화

### ● 반복이 없는 이원배치법과의 비교

- 요인의 조합의 효과(상호작용, 교호작용, interaction)를 분리하여 계산
- 실험오차를 줄일 수 있음
- 반복한 자료로부터 실험의 관리 상태를 검토할 수 있음

## ○ 자료구조

요인 A \ 요인 B	$A_1$	$A_2$	$\cdots$	$A_a$
$B_1$	$Y_{111}, \dots, Y_{11r}$	$Y_{211}, \dots, Y_{21r}$	$\cdots$	$Y_{a11}, \dots, Y_{a1r}$
$B_2$	$Y_{121}, \dots, Y_{12r}$	$Y_{221}, \dots, Y_{22r}$	$\cdots$	$Y_{a21}, \dots, Y_{a2r}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$B_b$	$Y_{1b1}, \dots, Y_{1br}$	$Y_{2b1}, \dots, Y_{2br}$	$\cdots$	$Y_{ab1}, \dots, Y_{abr}$

## ○ 구조식

$$\begin{aligned} Y_{ijk} &= \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \\ &= \mu + (\mu_{i.} - \mu) + (\mu_{.j} - \mu) + (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu) + \varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b, \quad k = 1, \dots, r,$$

- $\mu$ : 전체 평균,  $\alpha_i$ : 요인 A의 처리효과,  $\beta_j$ : 요인 B의 처리효과

- A와 B를 주효과(main effect)라고 함

- $(\alpha\beta)_{ij}$ : 요인 A와 B의 상호작용 효과 (interaction effect)

- $\varepsilon_{ij} \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$ : 오차항

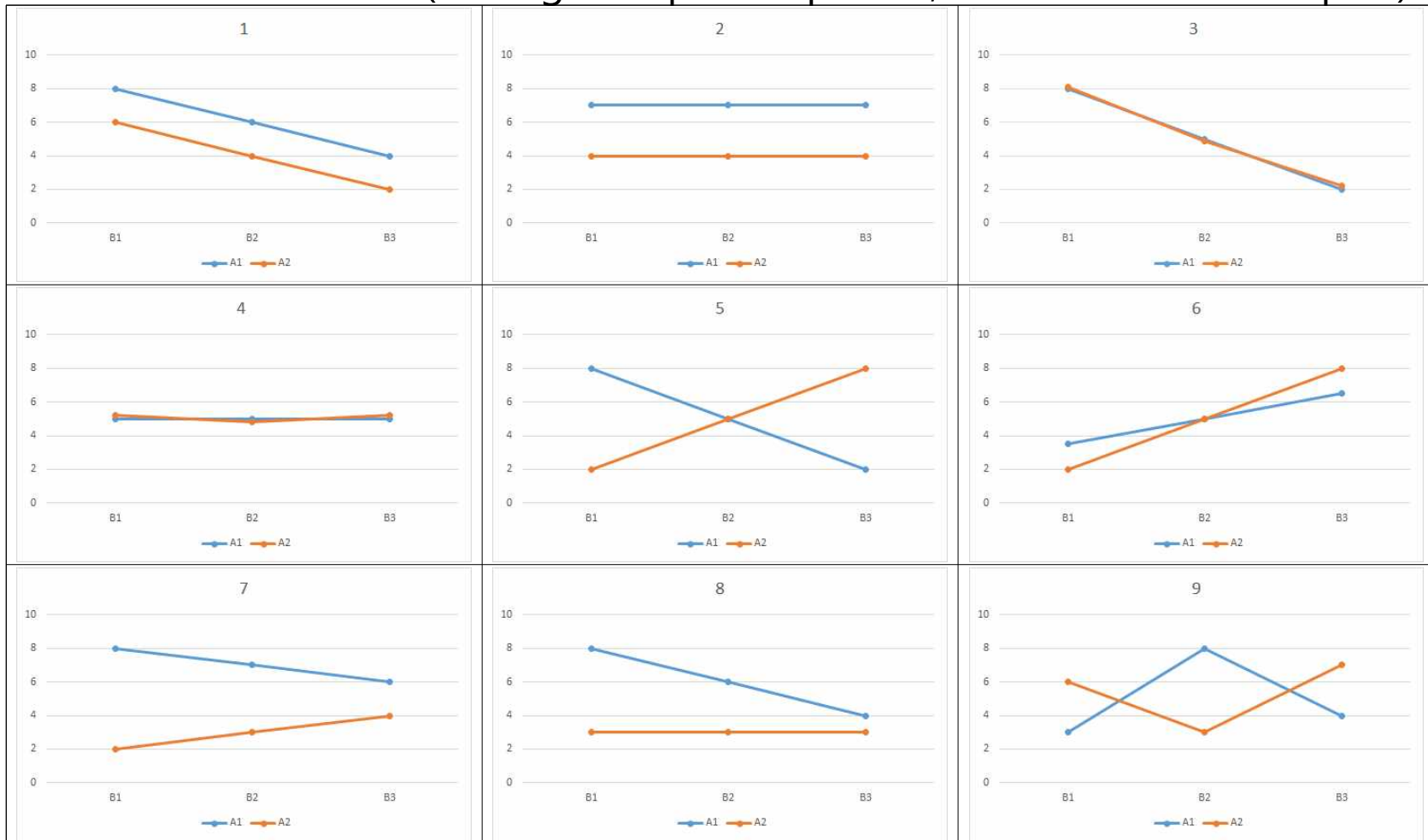
- 제약조건:  $\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^b \beta_j = 0$

$$\text{- } \sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, b, \quad \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, a$$

## ○ 상호작용

- 요인 B의 수준의 변화에 따라 요인 A의 효과가 변하는 경우 상호 작용이 존재한다고 함
  - (예) 요인 A : 촉매, 요인 B : 반응온도
  - 온도  $B_1$ 에서 촉매  $A_1$ 의 인장강도가 촉매  $A_2$ 의 인장강도보다 높는데 반하여 온도  $B_2$ 에서 촉매  $A_2$ 의 인장강도가 촉매  $A_1$ 의 인장강도보다 높을 때 A와 B간에 상호 작용이 있다고 함
- 상호작용이 존재하지 않을 경우, AB의 최적조건은 A 요인의 최적조건을 구하고 B의 최적조건을 구하여 합함
- 상호작용이 존재하는 경우, 모든 수준의 조합  $A_iB_j$ 에서 모평균을 추정함

- 평균반응프로파일(average response profile, treatment means plot)



## ○ 변동의 분해

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} = (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) \\ + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})$$

$$TSS = SSA + SSB + SS(AB) + SSE$$

$$\circ \quad TSS = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{N} : \text{자유도} = N - 1$$

$$\circ \quad SSA = br \sum_{i=1}^a (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \frac{Y_{i..}^2}{br} - \frac{Y_{...}^2}{N} : \text{자유도} = a - 1$$

$$\circ \quad SSB = ar \sum_{j=1}^b (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 = \sum_{j=1}^b \frac{Y_{.j.}^2}{ar} - \frac{Y_{...}^2}{N} : \text{자유도} = b - 1$$

$$\circ \quad SSAB = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{Y_{ij.}^2}{r} - \frac{Y_{...}^2}{N} : \text{자유도} = ab - 1$$

- $SS(AB) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2 = SSTR - SSA - SSB$ 
  - 자유도:  $ab - 1 - (a - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$
- $SSE = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$  : 자유도  $ab(r - 1)$ 
  - 자유도:  $N - 1 - (ab - 1) = ab(r - 1)$

## ○ 가설 검정

- 요인 A의 처리 효과의 동일성 검정

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$$

- 요인 B의 처리 효과의 동일성 검정

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$

- 상호작용의 효과

$$H_0 : (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \cdots = (\alpha\beta)_{ab} = 0$$



○ 분산분석표

변인		자유도	제곱합	평균제곱	F
처리		$ab-1$	SSTR	MSTR	MSTR/MSE
	처리 A	$a-1$	SSA	MSA	MSA/MSE
	처리 B	$b-1$	SSB	MSB	MSB/MSE
	상호작용	$(a-1)(b-1)$	SS(AB)	MS(AB)	MS(AB)/MSE
오차		$ab(r-1)$	SSE	MSE	
전체		$N-1$	TSS		

- 상호작용효과가 유의하면 주효과가 유의하지 않더라도 주효과를 모형에서 생략하지 않음

A요인 주효과	B요인과의 상호작용효과	A요인의 효과
있음	있음	있음
있음	없음	있음
없음	있음	있음
없음	없음	없음

- B요인의 적어도 한 수준에서 A요인의 효과가 있으면 A요인은 효과 있음
- B요인의 모든 수준에서 A요인의 효과가 없으면 A요인은 효과 없음

## ○ 분산분석후의 추정 (모수 모형)

- $\mu(A_i)$ 와  $\mu(B_j)$ 의 구간추정
  - $\bar{Y}_{i..} \pm t_{\alpha/2, ab(r-1)} \sqrt{MSE/br}$
  - $\bar{Y}_{.j.} \pm t_{\alpha/2, ab(r-1)} \sqrt{MSE/ar}$
- $\mu(A_i B_j)$ 의 구간추정
  - $\bar{Y}_{ij.} \pm t_{\alpha/2, ab(r-1)} \sqrt{MSE/r}$

※ 상호작용이 유의한 경우, 일반적으로 요인 A, B의 각 수준의 모평균을 추정하는 것보다 수준의 조합  $A_i B_j$ 에서 모평균을 추정하는 것이 의미가 있을 수 있음

## ○ 상호작용이 있는 경우 다중비교

- $H_0 : \mu_{ij} = \mu_{kl}$  vs  $H_1 : \mu_{ij} \neq \mu_{kl}$  또는  $\mu_{ij} - \mu_{kl}$ 의 신뢰구간
- $\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{kl.} \pm c \sqrt{MSE} \sqrt{1/r + 1/r}$ 
  - 최소유의차:  $c = t_{\alpha/2, ab(r-1)}$
  - Bonferroni:  $c = t_{\alpha/(2k), ab(r-1)}$ ,  $k =$  비교검정의 경우의 수
  - Scheffe:  $c = \sqrt{(ab-1)F_{\alpha, ab-1, ab(r-1)}}$
  - Tukey:  $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{\alpha, ab, ab(r-1)}$

## ■ 강낭콩의 비타민-C 함량 비교

- 요인 A: 저장 온도  $F^0(0, 10, 20)$
- 요인 B: 저장 기간 (2주, 4주, 6주, 8주)
- 반복 수: 3  $\Rightarrow$  총 36개의 강낭콩을 완전 확률화 계획법으로 시험
- 조합별 합계만을 표시

저장기간 저장온도	2주	4주	6주	8주	합계	평균
0	45	47	46	46	184	46.0
10	45	43	41	37	166	41.5
20	34	28	21	16	99	24.8
합계	124	118	108	99	449	
평균	41.3	39.3	36.0	33.0		37.8

$$- \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 = 6025.95$$

○ 변동분해

-  $TSS = 425.92$

- 보정항:  $CT = 449^2/36 = 5600.03$

-  $SSAB = \frac{1}{3}(45^2 + 47^2 + \dots + 16^2) - CT = 408.97$

-  $SSA = \frac{1}{12}(184^2 + 166^2 + 99^2) - CT = 334.39$

-  $SSB = \frac{1}{9}(124^2 + 118^2 + 108^2 + 99^2) - CT = 40.53$

-  $SS(AB) = SSAB - SSA - SSB = 408.97 - 334.39 - 40.53 = 34.05$

-  $SSE = 425.92 - 408.97 = 16.95$

○ 분산분석표

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
온도	2	334.39	167.20	236.83
기간	3	40.53	13.51	19.14
상호작용	6	34.05	5.68	8.04
오차	24	16.95	0.706	
전체	35	425.92		

- 5% 유의수준에서 모든 처리 효과가 유의
- 처리평균그림(treatment mean plot) 작성해보기
- 처리평균그림에 의하면 비타민 C의 함유량이 저장온도가 높아질수록 감소하고 있는 것은 사실이지만 그 감소 경향이 저장기간에 따라 같지 않다는 것을 보여줌