■ 변량효과(random effect)모형과 혼합효과(mixed effect)모형

○ 고정효과 모형(fixed effect model)

- 요인의 수준이 실험자의 의도에 의해 조정 또는 결정되는 경우
- 처리효과에 대한 가설검정의 결과는 분석에서 **고려된 요인의 수준에 대해서만 적용**할 수 있음

○ 변량효과 모형(random effect model)

- 고려할 수 있는 요인의 수준에서 random하게 선택된 경우
- 처리효과는 모수가 아니고 **확률변수로 취급**
- 처리효과의 분산에 대해 $\sigma_\tau^2 = 0$인지를 검정함
- 선택된 수준뿐만 아니라 **고려했던 모든 요인의 수준에 대해서도 결과를 확장**시킬 수 있음

○ 모형의 분류

- 모든 요인이 고정수준을 가지면 고정효과모형
- 모든 요인이 변량수준을 가지면 변량효과모형
- 일부 요인은 고정수준, 나머지는 변량수주을 가지면 혼합효과모형

□ 1 요인 변량효과 모형

○ 두 종류의 모집단

① 수준들의 모집단 Ω : 비교대상인 많은 수준들의 집합

◉ 초등학생들의 학업성취도 비교 ⇨ 전국에 있는 모든 초등학교

○ 표준상황: Ω에서 수준평균은 $N(\mu, \sigma_\mu^2)$ 분포를 따름

- 모든 학교의 평균 성적의 분포는 $N(\mu, \sigma_\mu^2)$

○ μ: 수준평균들의 평균(상수) ⇨ 모든 학교의 전체평균

○ σ_μ^2: 수준평균들의 분산

② 각 수준별 관측단위들의 모집단

○ 표준상황: 각 수준에서 반응변수는 정규분포를 따름

○ 그 평균은 다를 수 있으나 ⇦ 학교마다 평균을 다를 수 있음

○ 분산은 모든 수준에서 σ^2

○ 두 단계 추출

① 수준 추출

- 수준들의 모집단 Ω 에서 p개의 수준을 무작위 추출
- μ_i: i번째 추출되는 수준들의 평균반응

$$\Rightarrow \mu_i \sim \text{iid } N(\mu, \sigma_\mu^2)$$

② 관측단위 추출

- 추출되는 각 수준에서 n_i개의 관측단위를 무작위로 추출(무작위 배정)
- $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$

● i번째 수준이 **추출되었다**고 할 때 그 평균반응이 μ_i^*라고 하면, 그 수준에 대한 관측단위의 모집단에서 반응변수는 $N(\mu_i^*, \sigma^2)$를 따름

○ 1 요인 변량효과 분산분석 모형

- Y_{ij}: i번째 추출 수준(학교)에서 j번째 추출하는 관측단위(학생)의 반응변수

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \qquad i=1,\ ...,p,\ \ j=1,...,n_i$$

  - $\mu_i \sim$ iid $N(\mu, \sigma_\mu^2)$: i번째 추출수준의 수준평균
  - $\varepsilon_{ij} \sim$ iid $N(0, \sigma^2)$
  - $\tau_i = \mu_i - \mu$라고 하면

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \qquad i=1,\ ...,p,\ \ j=1,...,n_i$$

    - $\tau_i \sim$ iid $N(0, \sigma_\mu^2)$
    - 모든 τ_i와 ε_{ij}는 서로 독립

- 모형의 특징
  - $E(Y_{ij}) = E(\mu_i + \varepsilon_{ij}) = \mu$
  - $Var(Y_{ij}) = Var(\mu_i + \varepsilon_{ij}) = \sigma_\mu^2 + \sigma^2$

    ↳ 어떤 학교가 추출될지 모르는 것에 대한 변동
  - $Y_{ij} \sim N(\mu, \sigma_\mu^2 + \sigma^2)$
  - $Cov(Y_{ij}, Y_{ik}) = Cov(\mu_i + \varepsilon_{ij}, \mu_i + \varepsilon_{ik}) = Var(\mu_i) = \sigma_\mu^2$

    ⇨ 추출된 한 학교에서 추출된 두 학생의 성적의 공분산은 $\sigma_\mu^2 (\geq 0)$

    ⇒ 한 학생의 성적이 높으면 다른 학생의 성적이 높은 경향이 있음
  - 분산 σ_μ^2와 σ^2를 variance components라고 함

    ⇨ components of variance 또는 random effects 모형이라고 부름

○ 관심문제

- ○ 특정 수준의 평균에는 관심이 없음
- ○ 수준에 따라 평균반응이 다른가?
  - ⇒ μ_i는 확률변수로 $\sigma_\mu^2 > 0$라는 것은 μ_i가 다른 값을 가질 수 있음을 의미
- ○ 가설: $H_0 : \sigma_\mu^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_\mu^2 > 0$

- σ_μ^2의 추정
- μ의 추정
- σ^2의 추정
- $\dfrac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma^2}$의 추정

$$Var(Y_{ij}) = \sigma_{\mu}^2 + \sigma^2$$

어느 학교인가? ↲ ↳ 그 학교의 어느 학생인가?

$$Cov(Y_{ij}, Y_{ik}) = \sigma_{\mu}^2$$

$\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2$	전체 분산	한 수준을 추출하고 그 수준에서 한 관측단위를 추출해서 반응변수 값을 얻을 때,
σ_{μ}^2	학교 간의 차이의 분산	수준평균의 분산이 차지하는 비율

$$\rho = \frac{Cov(Y_{ij}, Y_{ik})}{\sqrt{Var(Y_{ij})}\sqrt{Var(Y_{ik})}} = \frac{\sigma_{\mu}^2}{\sigma_{\mu}^2 + \sigma^2}$$

○ ρ가 크다는 것은

- 전체분산 중 수준평균의 분산이 차지하는 비율이 높음
- 한 수준의 두 관측값의 상관관계가 높음

○ 분산분석

- 가정: $\varepsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$, $\tau_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma_\tau^2)$, τ_i와 ε_{ij}는 독립

- H_0 : $\sigma_\tau^2 = 0$ VS H_1 : $\sigma_\tau^2 > 0$
  - $\sigma_\tau^2 = 0$이라면, 모든 처리는 동일
  - $\sigma_\tau^2 > 0$이라면, 처리들 간에 변동이 있다는 것을 의미

- 제곱합 등식 $TSS = SSTR + SSE$는 계속 사용

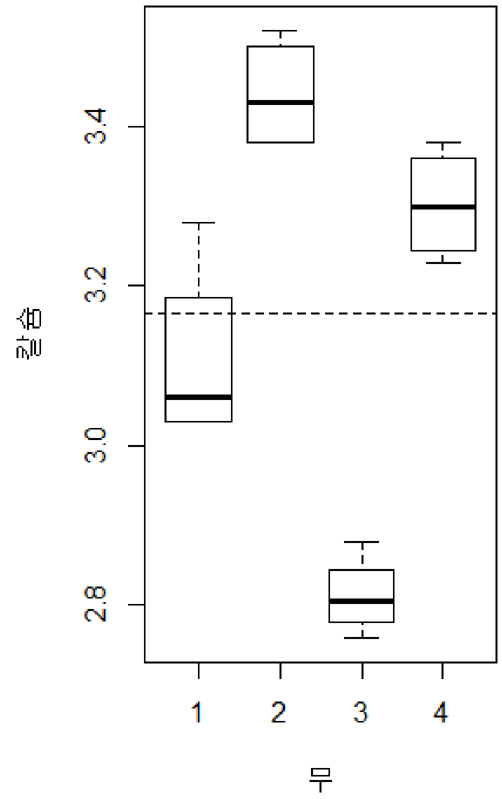
변인	자유도	제곱합(SS)	평균제곱(MS)	F
처리(모형)	$p-1$	SSTR	MSTR	MSTR/MSE
오차	$N-p$	SSE	MSE	
전체	$N-1$	TSS		

○ $E(MSTR) = \sigma^2 + n'\sigma_\mu^2$, $\quad n' = (N - \sum n_i^2 / N)/(p-1)$

- 모든 $n_i = n$ 이면 $n' = n$
- $n'\sigma_\mu^2 = E(MSTR) - E(MSE)$
- $\sigma_\mu^2 = \dfrac{E(MSTR) - E(MSE)}{n'}$ ⇨ $\hat{\sigma}_\mu^2 = \dfrac{MSTR - MSE}{n'}$
- $MSTR < MSE$이면 $\hat{\sigma}_\mu^2 < 0$ ⇨ $\hat{\sigma}_\mu^2 = 0$ 으로 고쳐 사용

◉ 무 4개를 무작위로 추출하여 잎에 포함된 칼슘함량을 4회씩 측정

종류	1	2	3	4	
	3.28	3.52	2.88	3.34	
	3.09	3.48	2.80	3.38	
	3.03	3.38	2.81	3.23	
	3.03	3.38	2.76	3.26	
합	12.43	13.76	11.25	13.21	50.65
평균	3.11	3.44	2.81	3.30	3.17



- H_0 : $\sigma_\tau^2 = 0$ VS H_1 : $\sigma_\tau^2 > 0$
  - ○ $CT = 50.65^2/16 = 160.3389$
  - ○ $TSS = 3.28^2 + 3.52^2 + \cdots + 3.26^2 - CT = 0.9676$
  - ○ $SSTR = \frac{1}{4}(12.43^2 + \cdots + 13.21^2) - CT = 0.8884$
  - ○ $SSE = TSS - SSTR = 0.9676 - 0.8884 = 0.0792$
  - ○ 분산분석표

변인	자유도	제곱합(SS)	평균제곱(MS)	F
처리(모형)	3	0.8884	0.2961	44.9
오차	12	0.0792	0.0066	
전체	15	0.9676		

- $F_{0.01,3,12} = 5.95$ < 44.9 ⇨ 1% 유의수준에서 H_0 기각

○ 무에 따라 칼슘함량에 차이가 있음

- μ의 추정
  - $\mu = E(\mu_i)$
    - $\hat{\mu}_i = \overline{Y}_{i.}$
    - $\hat{\mu} = \overline{Y}_{i.}$의 평균 ⇨ 균형 자료이므로 $\hat{\mu} = \overline{Y}_{..}$ ⇦ 3.17

- σ^2와 σ_μ^2의 추정
  - $\hat{\sigma}^2 = MSE$ ⇦ 0.0066
  - $\hat{\sigma}_\mu^2 = \dfrac{MSTR - MSE}{n'}$ ⇦ $\dfrac{0.2961 - 0.0066}{4} = 0.0724$

- $\dfrac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma^2}$의 추정 ⇦ $\dfrac{\widehat{\sigma_\mu^2}}{\widehat{\sigma_\mu^2} + \widehat{\sigma^2}} = \dfrac{0.0724}{0.0724 + 0.0066} = 0.916$
  - 칼슘 함량의 정도가 대부분 무 간의 차이에 의해 발생
  - 동일 무에서 추출된 칼슘의 함량의 상관계수는 0.916

□ 2 요인 변량효과 모형과 혼합효과 모형

- 반복이 없는 2요인 변량효과 모형

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

  - $\alpha_i \sim$ iid $N(0, \sigma_\alpha^2)$, $\beta_j \sim$ iid $N(0, \sigma_\beta^2)$, $\varepsilon_{ij} \sim$ iid $N(0, \sigma^2)$
  - $\alpha_i, \beta_j, \varepsilon_{ij}$ 서로독립
  - $Var(Y_{ij}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma^2$
  - $Cov(Y_{ij}, Y_{ik}) = Cov(\alpha_i, \alpha_i) = \sigma_\alpha^2$, $Cov(Y_{ij}, Y_{kj}) = Cov(\beta_j, \beta_j) = \sigma_\beta^2$

- 반복이 없는 2요인 혼합효과 모형(A: 고정, B: 변량)

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

  - $\alpha_i = \mu_{i.} - \mu$: 요인 A의 i 번째 처리효과 ⇨ $H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_a = 0$
  - $\beta_j \sim$ iid $N(0, \sigma_\beta^2)$, $\varepsilon_{ij} \sim$ iid $N(0, \sigma^2)$, β_j와 ε_{ij}는 서로독립
  - $E(Y_{ij}) = \mu + \alpha_i = \mu_{i.}$
  - $Var(Y_{ij}) = \sigma_\beta^2 + \sigma^2$
  - $Cov(Y_{ij}, Y_{ik}) = 0$, $Cov(Y_{ij}, Y_{kj}) = Cov(\beta_j, \beta_j) = \sigma_\beta^2$

변인	EMS		
	Fixed	Random	Mixed
A	$\sigma^2 + \frac{b}{a-1}\sum_i \alpha_i^2$	$\sigma^2 + b\sigma_\alpha^2$	$\sigma^2 + \frac{b}{a-1}\sum_i \alpha_i^2$
B	$\sigma^2 + \frac{a}{b-1}\sum_j \beta_j^2$	$\sigma^2 + a\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + a\sigma_\beta^2$
Error	σ^2	σ^2	σ^2

- 반복이 있는 2요인 변량효과 모형에서의 관심문제

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

  - ○ $\alpha_i \sim$ iid $N(0, \sigma^2_\alpha)$, $\beta_j \sim$ iid $N(0, \sigma^2_\beta)$, $(\alpha\beta)_{ij} \sim$ iid $N(0, \sigma^2_{(\alpha\beta)})$
  - ○ 상호작용이 있는가? ⇨ $\sigma^2_{(\alpha\beta)} > 0$
  - ○ A 요인의 주효과가 있는가? ⇨ $\sigma^2_\alpha > 0$
  - ○ B 요인의 주효과가 있는가? ⇨ $\sigma^2_\beta > 0$
  - ○ 분산요소 $\sigma^2_\alpha, \sigma^2_\beta, \sigma^2_{(\alpha\beta)}, \sigma^2$의 추정

- 반복이 있는 2요인 혼합효과 모형에서의 관심문제(A: 고정, B: 변량)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

  - $\alpha_i = \mu(A_i) - \mu = \mu_{i.} - \mu, \beta_j \sim$ iid $N(0, \sigma^2_\beta)$, $(\alpha\beta)_{ij} \sim$ iid $N(0, \sigma^2_{(\alpha\beta)})$
  - 상호작용이 있는가? ⇨ $\sigma^2_{(\alpha\beta)} > 0$
  - A 요인의 주효과가 있는가? ⇨ 하나 이상의 α_i가 0이 아니다.
  - B 요인의 주효과가 있는가? $\sigma^2_\beta > 0$
  - 분산요소 $\sigma^2_\beta, \sigma^2_{(\alpha\beta)}, \sigma^2$의 추정
  - 고정수준 요인의 효과 추정과 비교

- 분산분석표
  - 변량효과모형과 혼합효과모형의 제곱합, 자유도, 평균제곱은 고정효과모형의 경우와 같음
  - EMS는 고정수준의 경우와 다르고 이에 따라 검정통계량도 달라짐

① 상호작용

- $H_0 : \sigma^2_{(\alpha\beta)} = 0$ vs $H_1 : \sigma^2_{(\alpha\beta)} > 0$
- $F = MS(AB)/MSE \sim F_{(a-1)(b-1), ab(n-1)}$
- 상호작용의 강약
  - $Var[(\widehat{\alpha\beta})_{ij}] > \hat{\sigma}^2$ 이면 강한 것으로 보고 아니면 약한 것으로 봄

② 주효과 검정

○ $H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_\alpha^2 > 0$ (변량효과모형)

○ $H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_a = 0$ vs H_1 : not H_0 (혼합모형)

변인	자유도	SS
A	a-1	$nb\sum(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...})^2$
B	b-1	$na\sum(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2$
(AB)	(a-1)(b-1)	$n\sum\sum(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2$
Error	ab(n-1)	$\sum\sum\sum(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2$

변인	EMS	
	Fixed	Random
A	$\sigma^2+\dfrac{nb}{a-1}\sum_i \alpha_i^2$	$\sigma^2+n\sigma^2_{(\alpha\beta)}+nb\sigma^2_\alpha$
B	$\sigma^2+\dfrac{na}{b-1}\sum_j \beta_j^2$	$\sigma^2+n\sigma^2_{(\alpha\beta)}+na\sigma^2_\beta$
(AB)	$\sigma^2+\dfrac{n}{(a-1)(b-1)}\sum_{ij}(\alpha\beta)^2_{ij}$	$\sigma^2+n\sigma^2_{(\alpha\beta)}$
Error	σ^2	σ^2

가설	검정통계량
$H_0 : \sigma_{\alpha}^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_{\alpha}^2 > 0$	
$H_0 : \sigma_{\beta}^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_{\beta}^2 > 0$	
$H_0 : \sigma_{(\alpha\beta)}^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_{(\alpha\beta)}^2 > 0$	