7장. 무한급수 (Infinite Series)

7장. 무한급수

7.1 수열

- ✓ 수열의 항 나열하기
- ✓ 수열의 수렴, 발산 결정하기
- ✓ 수열의 일반항에 대한 공식 구하기
- ✓ 단조수열과 유계수열의 성질 이용하기

수열 (Sequence)의 정의

- 정의역이 양의 정수인 함수 또는 함수의 치역
  - $f: X \rightarrow Y$
  - 수열의 일반항 $a_n = f(n)$
  - 수열 전체 $Y = \{ a_n \mid n \in X \}$
  - 유한수열 (Finite sequence): $X = \{1, 2, \ldots, N\}$
  - 무한수열 (Infinite sequence): $X = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

- 예제 1

$$a. \quad \{a_n\} = \left\{ \frac{n}{1-2n} \right\} = \left\{ -1, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}, \cdots \right\}$$

$$b. \quad \{b_n\} = \left\{ \frac{n^2}{2^n - 1} \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{16}{15}, \cdots \right\}$$

$$c. \quad \{c_n\} = \{c_1 = 25, c_{n+1} = c_n - 5\} = \{25, 20, 15, 10, \cdots\}$$

수열의 극한과 수렴, 발산

수열의 극한의 정의

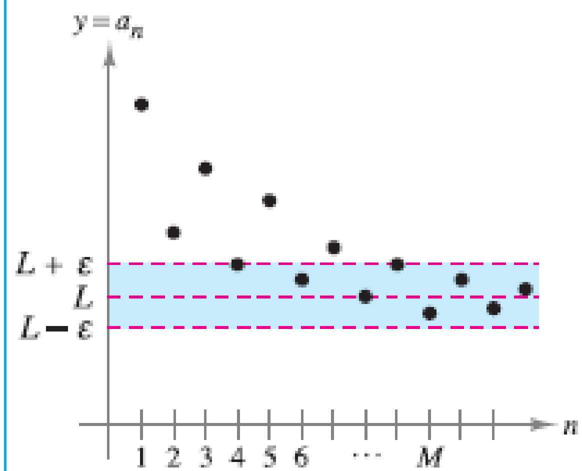
L이 실수일 때 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 $M > 0$이 존재해서 $n > M$일 때

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

이면 수열 $\{a_n\}$의 극한은 L이고 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

극한 L이 존재하면 이 수열은 L에 **수렴한다**고 하고 수열의 극한이 존재하지 않으면 이 수열은 **발산한다**고 한다.



- 수열이 수렴하는 경우 – 수열의 극한이 존재
- 수열이 발산하는 경우의 예
  - 수열의 항들이 무한히 커지는 경우: $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$
  - 수열의 항들이 한없이 작아지는 경우: $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$

수열의 극한 구하기

정리 7.1 수열의 극한

L은 실수이고 f는 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$인 실변수함수일 때 $\{a_n\}$이 모든 양의 정수 n에 대하여 $f(n) = a_n$을 만족하는 수열이면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

이다.

- 예제 2

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

수열의 극한의 성질

정리 7.2 수열의 극한의 성질

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = K$ 이면

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L \pm K$

2. $\lim_{n\to\infty} ca_n = cL$ (c는 실수)

3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = LK$

4. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{K}$, $b_n \neq 0$ 이고 $K \neq 0$

- 예제 3 $$a_n = \left(\frac{n}{1-2n}\right)$$

- 예제 4 $$a_n = \left(\frac{n^2}{2^n - 1}\right)$$

수열의 극한 구하기

정리 7.3 수열에 대한 조임정리

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

이고 모든 $n > N$ 에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$ 인 정수 N이 존재하면

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

이다.

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

정리 7.4 절댓값 정리

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad 이면 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

이다.

7.2 급수(Series)와 수렴(Convergence)

- ✓ 수렴무한급수의 정의
- ✓ 무한등비(기하)급수
- ✓ 무한급수의 발산에 대한 일반항 판정법

무한급수 (Infinite Series)

- (무한)수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
- (유한)부분합 (partial sum)
  - 수열의 처음 유한 개의 합
  - $S_n \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
  - 부분합의 수열 $\{S_n\}$ 도 무한수열!

- (무한)급수 (infinite series)
  - 수열의 무한합
  - $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum a_k \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

무한급수의 수렴 (Convergence)

수렴급수 및 발산급수의 정의

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여 n항까지의 부분합은 다음과 같다.

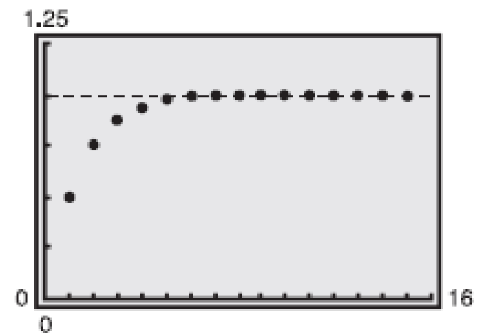
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

부분합의 수열 $\{S_n\}$이 S에 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴하며 극한 S를 **급수의 합**이라 한다.

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

$\{S_n\}$이 발산하면 급수는 발산한다.

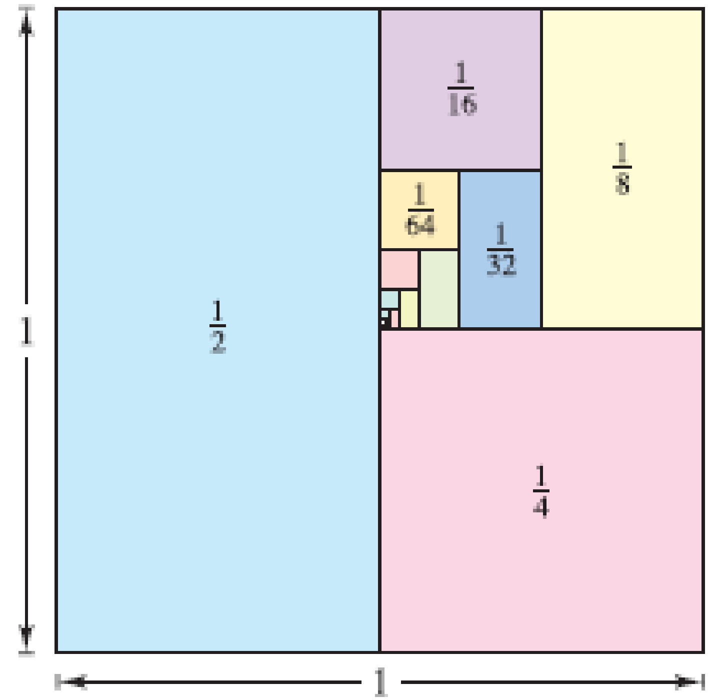
- 부분합이 수렴 → 급수가 수렴 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$
- 부분합이 발산 → 급수가 발산



예제 1: 수렴 및 발산급수

$$a. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$$



예제 1: 수렴 및 발산급수

$$b.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

$$c.\quad \sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+1+\cdots$$

$$S_n=n\Rightarrow \lim_{n\to\infty}n=\infty$$

등비/기하급수 (Geometric Series)

- 정의 $$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots \qquad (a \neq 0)$$

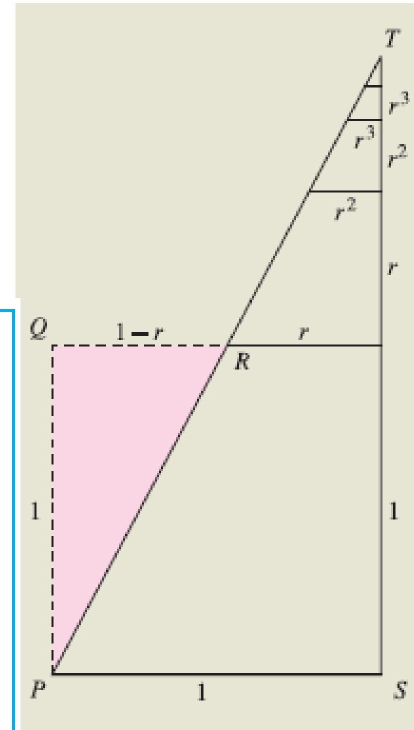
- 일반항과 공비 (ratio) r $\quad a_n = ar^{n-1}$

- 등비/기하급수의 수렴 판정

정리 7.6 등비급수의 수렴 판정

공비가 r인 등비급수는 $|r| \geq 1$이면 발산하고, $0 < |r| < 1$이면 다음 합에 수렴한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad 0 < |r| < 1$$



$\Delta PQR \approx \Delta TSP$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

예제 3: 등비급수의 수렴/발산

$$a. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a = 3, r = \frac{1}{2} \Rightarrow |r| < 1 \Rightarrow convergent!! \qquad \therefore S = \frac{a}{1-r} = 6$$

$$b. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$a = 1, r = \frac{3}{2} \Rightarrow |r| > 1 \Rightarrow divergent!!$$

무한급수의 성질

정리 7.7 무한급수의 성질

$\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ 이고 c가 실수이면, 다음 급수는 오른쪽 값에 수렴한다.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

발산급수에 대한 일반항 판정법

정리 7.8 수렴급수의 n항의 극한

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다.

정리 7.9 발산에 대한 n항 판정법

$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

예제 5: 발산 여부 판정

a. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = diverge?$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty \neq 0 \qquad \therefore diverge!!$$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1} = diverge?$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2n!+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \qquad \therefore diverge!!$$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = diverge?$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \therefore \text{can not use n-term test!!}$$

7.3 수렴판정법: 양항급수의 경우

- ✓ 적분판정법
- ✓ p급수 및 조화급수
- ✓ 비교판정법
- ✓ 극한 비교판정법

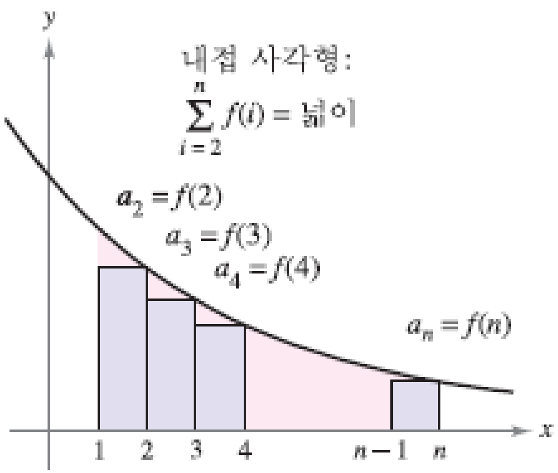
적분판정법 (Integral Test)

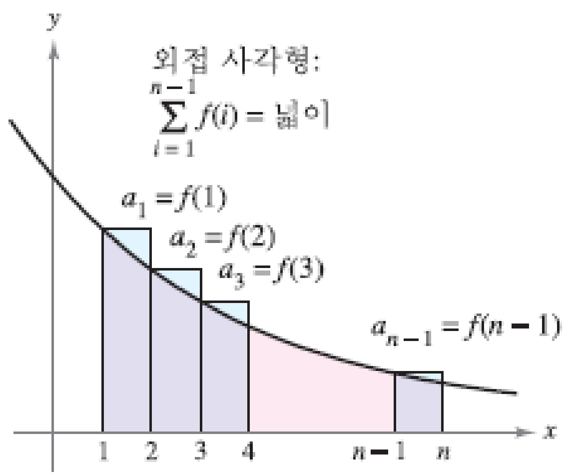
정리 7.10 적분 판정법

연속인 양함수 f가 $x \geq 1$일 때 감소하고 $a_n = f(n)$이면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 과 \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

는 둘 모두 수렴하거나 둘 모두 발산한다.





예제 1: 급수의 수렴 판정

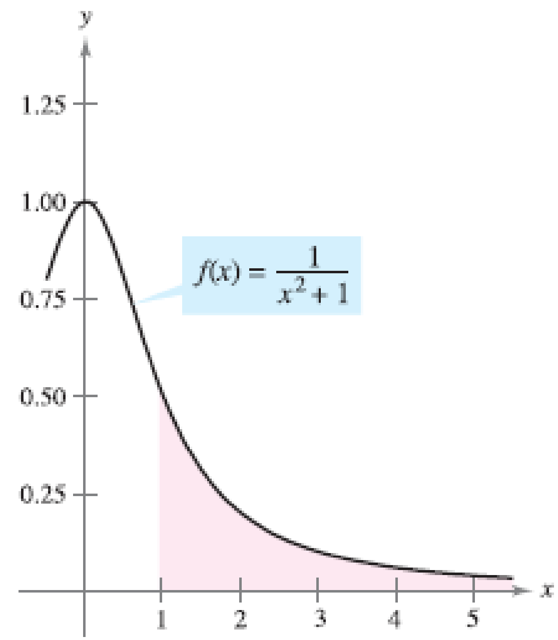
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = converge?$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{(positive \& continuous)}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} < 0 \qquad for\ x \geq 1 \qquad \text{(decreasing!)}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\arctan x\right]_1^b = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = converge!!$$



예제 3: 급수의 수렴 판정

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = converge?$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \qquad \text{(positive \& continuous)}$$

$$f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{x^2 (\ln x)^2} < 0 \qquad for \;\; x \geq 2 \qquad \text{(decreasing!)}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_2^{b} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to \infty} \left[\ln(\ln x) \right]_2^b = \infty$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = diverge!!$$

p-급수(p-Series)와 조화급수 (Harmonic Series)

- p-급수 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \qquad (p > 0)$$

- 조화급수 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad (p = 1)$$

- 일반조화급수 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{3a+b} + \cdots \qquad (p = 1)$$

p-급수의 수렴

정리 7.11 p급수의 수렴

p급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$은

1. $p > 1$이면 수렴한다.
2. $0 < p \le 1$이면 발산한다.

- 예제 2

$a.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$b.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

비교판정법 (Comparison Test)

- Idea : 복잡한 항을 갖는 급수와 수렴/발산을 알고 있는 간단한 급수를 비교하여 복잡한 항을 갖는 급수의 수렴여부를 판정해보자!

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$은 등비급수이나 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$은 아니다.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$은 p급수이나 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$은 아니다.

3. $a_n = \frac{n}{(n^2+3)^2}$은 쉽게 적분되지만 $b_n = \frac{n^2}{(n^2+3)^2}$은 그렇지 않다.

1. 급수의 합이 큰 급수가 수렴하면 급수의 합이 작은 급수 역시 수렴해야 한다.

2. 급수의 합이 작은 급수가 발산하면 급수의 합이 큰 급수 역시 발산해야 한다.

직접비교판정법 (Direct Comparison Test)

정리 7.12 비교 판정법

모든 n에 대하여 $0 < a_n \le b_n$일 때

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

NOTE 비교 판정법은 모든 n에 대하여 $0 < a_n \le b_n$을 조건으로 하고 있다. 하지만 급수의 수렴은 처음 몇 개 항으로 좌우되지 않기 때문에 유한수 N보다 큰 모든 n에 대하여 $0 < a_n \le b_n$으로 바꾸어 적용할 수 있다.

예제 4: 직접비교판정법 이용

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}} = converge?$$

$$a_n = \frac{1}{n} \le \frac{1}{2+\sqrt{n}} = b_n \quad (\forall n \ge 4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = diverge$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}} = diverge!!$$

극한비교판정법 (Limit Comparison Test)

정리 7.13 극한 비교 판정법

$a_n > 0$, $b_n > 0$ 이고 L은 유한이고 양일 때

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$$

이라 하면 $\sum a_n$과 $\sum b_n$은 둘 모두 수렴하거나 발산한다.

- 복잡한 항을 갖는 급수가 수렴/발산을 알고 있는 간단한 급수와 거의 흡사 BUT 항별 비교가 불가능하여 일반 비교판정법을 사용할 수 없는 경우

극한비교판정법의 이용

- 같은 차수의 일반항을 갖는 급수간의 비교

주어진 급수	비교 급수	판정
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-4n+5}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	둘 다 수렴
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	둘 다 발산
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-10}{4n^5+n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$	둘 다 수렴

- 예제 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} = converge?$$

예제5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}=converge?$$

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2+1},b_n=\frac{1}{n^{3/2}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}=converge \qquad (\because p>1)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}=converge!!$$

7.4 수렴판정법: 양항급수가 아닌 경우

- ✓ 교대급수 판정법
- ✓ 수렴하는 교대급수의 값 어림하기
- ✓ 수렴급수 구분하기: 절대수렴 또는 조건부수렴
- ✓ 비판정법
- ✓ 근판정법

교대급수판정법 (Alternating Series Test)

- 교대급수
  - 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수
  - 예. $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$$

정리 7.14 교대급수 판정법

$a_n > 0$에 대하여 교대급수

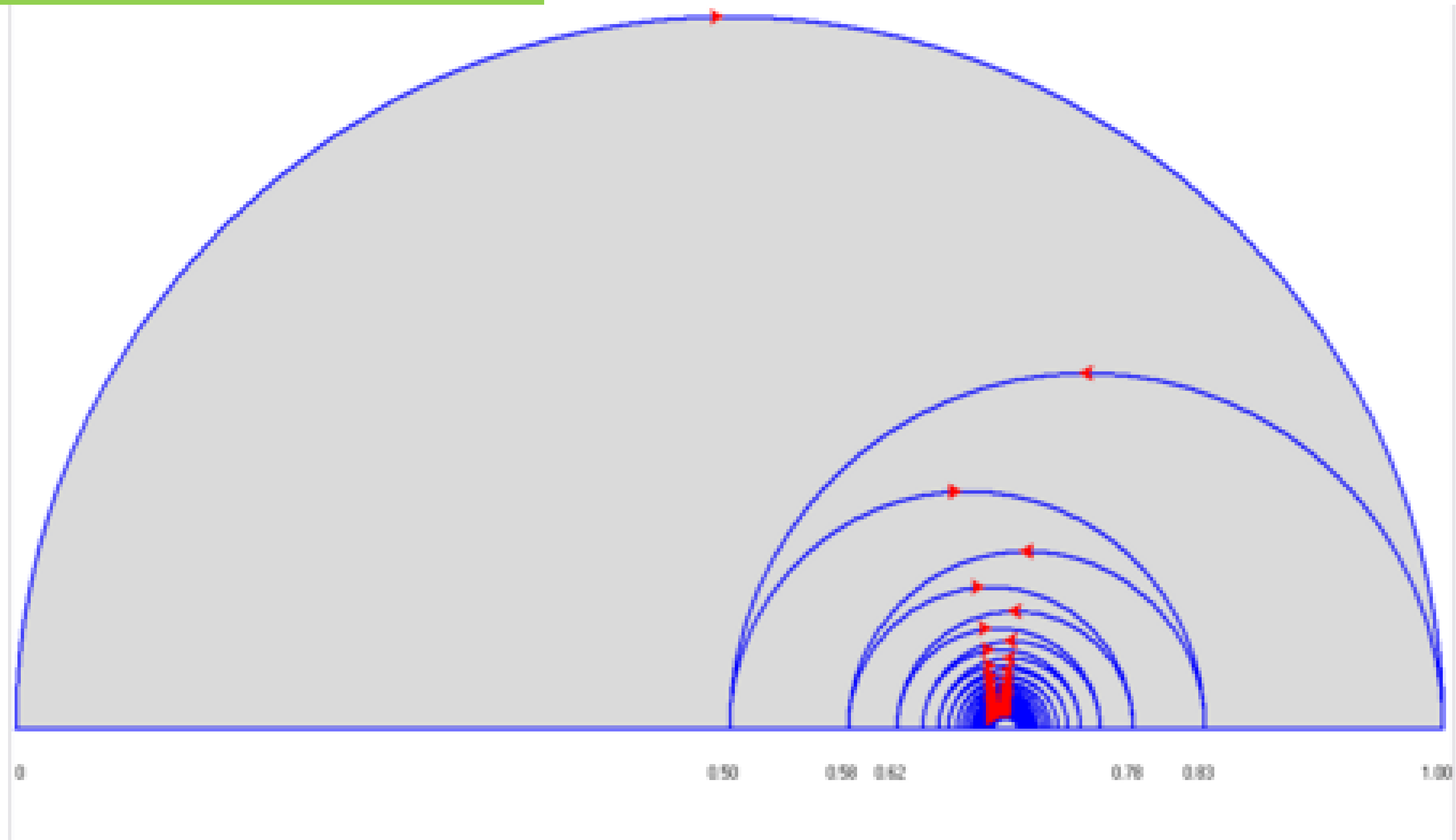
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{과} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

은 다음 두 조건 모두를 만족하면 수렴한다.

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 2. 모든 n에 대하여 $a_{n+1} \le a_n$

정리 7.14가 성립하는 이유

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots$$



정리 7.14의 조건을 만족하지 않는 교대급수는 발산?

NO!

정리 7.14 교대급수 판정법

$a_n > 0$에 대하여 교대급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{과} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

은 다음 두 조건 모두를 만족하면 수렴한다.

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. 모든 n에 대하여 $a_{n+1} \le a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$$

예제 1 & 2: 교대급수판정법 적용하기

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = converge?$$

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$\forall n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = converge!$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-2)^{n-1}} = converge?$$

$$a_n = \frac{n}{2^{n-1}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^{x-1}(\ln 2)} = 0$$

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{2} \leq \frac{n}{1}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{2^n} \leq \frac{n}{2^{n-1}} = a_n \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-2)^{n-1}} = converge!$$

예제 3: 수렴하는 교대급수가 아닌 예

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n} = converge?$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{cannot use alternating series test!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\} \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n} = diverge!$$

$$\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\cdots = converge?$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{but} \quad a_5 = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} = a_4 \Rightarrow \text{cannot use alternating series test!}$$

$$\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\cdots$$

$$= \left(\frac{2}{1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = diverge!$$

교대급수 나머지항

- 나머지항 (Remainder term)
  - 정의: $R_N = S - S_N$
  - 활용: 부분합 S_N 를 S 의 근사값으로 사용할 때, 근사값의 오차 = R_N

정리 7.15 교대급수의 나머지항

수렴하는 교대급수 의 합 S를 근삿값 S_N 으로 어림해서 오는 나머지항 R_N 의 절댓값은 $(N+1)$항 **의 절대값보다 작거나 같다**

$$|S - S_N| = |R_N| \le a_{N+1}.$$

예제 4: 교대급수의 근사값 구하기

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n!}\right)=?$$

$$a_n=\frac{1}{n!}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$$

$$\forall n,\qquad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{n!}=a_n\qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n!}\right)=converge!$$

$$S_6=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}-\frac{1}{720}=\frac{91}{144}\approx 0.63194$$

$$|R_6|=|S-S_6|\le a_7=\frac{1}{5040}\approx 0.0002\qquad \therefore\quad 0.63174\le S\le 0.63214$$

절대수렴 (Absolute Convergence)

- 예. 양항급수도 교대급수도 아닐 때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{4}+\frac{\sin 3}{9}+\cdots$$

$$a_n=\frac{\sin n}{n^2}\Rightarrow |a_n|=\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2},\qquad \forall n\ge 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = converge! \qquad (\because \text{comparison test})$$

정리 7.16 절대수렴

급수 $\sum|a_n|$이 수렴하면 급수 $\sum a_n$도 수렴한다.

- 절대수렴하는 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다

절대수렴 vs 조건부수렴 (Conditional Convergence)

절대수렴 및 조건부수렴의 정의

1. $\sum |a_n|$이 수렴하면 $\sum a_n$은 **절대수렴**한다.

2. $\sum a_n$은 수렴하고 $\sum |a_n|$이 발산하면 $\sum a_n$은 **조건부수렴**한다.

- 조건부수렴의 예 – 교대조화급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = converge! \qquad (\because \text{예제}1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

예제 5: 수렴판정 및 수렴종류 구분

$a. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n} = diverge! \qquad (\because n-\text{term test})$$

$b. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad and \quad \forall n, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = converge! \qquad (\because \text{alternating series test})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = diverge! \quad \left(\because \ p-\text{series with } p = \frac{1}{2} < 1 \right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = conditional\ convergence!$$

예제 5: 수렴판정 및 수렴종류 구분

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n} = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = converge! \quad \left(\because \text{geometric series with } r = \frac{1}{3} \right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n} = absolute\ convergence!$$

비판정법 (Ratio Test)

정리 7.17 비 판정법

$\sum a_n$ 을 0이 아닌 항을 갖는 급수라고 할 때

1. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ 이면 $\sum a_n$ 은 절대수렴한다.
2. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ 또는 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ 이면 $\sum a_n$ 는 발산한다.
3. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ 이면 비 판정법으로는 결론지을 수 없다.

예제 7~8: 비판정법 적용하기

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 2^{n+1}}{3^n} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{3n^2} = \frac{2}{3} < 1 \qquad \therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 2^{n+1}}{3^n} = converge! \qquad (\because \text{ratio test})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!} = diverge! \qquad (\because \text{ratio test})$$

예제 9: 비판정법 적용할 수 없는 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 1 \qquad \therefore \text{cannot use ratio test}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$$

$$\forall n \geq 1, \qquad \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad \left(\because\ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \Rightarrow f'(x) < 0\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \mathit{converge!} \qquad (\because \text{alternating series test})$$

근판정법 (Root Test)

정리 7.18 근 판정법

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$이면 $\sum a_n$은 절대수렴한다.
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ 또는 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$이면 $\sum a_n$은 발산한다.
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$이면 근 판정법으로는 결론지을 수 없다.

- 예제 10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n} = 0 < 1 \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n} = (absoulte)\ converge! \qquad (\because \text{root test})$$

급수의 수렴판정법의 선택

급수의 수렴, 발산에 대한 판정 지침

1. 급수의 n번째 항이 0에 접근하는가? 아니면 급수는 발산한다.
2. 급수가 특정 유형, 즉 등비급수, p급수, 축소급수, 교대급수인가?
3. 적분 판정법, 근 판정법, 비 판정법을 적용할 수 있는가?
4. 급수가 편리하게 특정 유형의 판정법에 비교될 수 있는가?

7.5 테일러 다항식과 근사값

- ✓ 함수의 근사식
- ✓ 함수의 테일러와 메클로린 근사식
- ✓ 테일러 다항식의 나머지 이용

함수의 다항식 근사

- 함수 $f(x)$를 n차 다항함수 $P_n(x)$로 근사 시켜 보자!
- 우선, 함수의 1차 다항근사식을 찾아 보자
  - $P_1(x) = a_0 + a_1 x$
  - "점 c 에서 전개한 1차 근사식" → 점 $x = c$를 지나는 접선

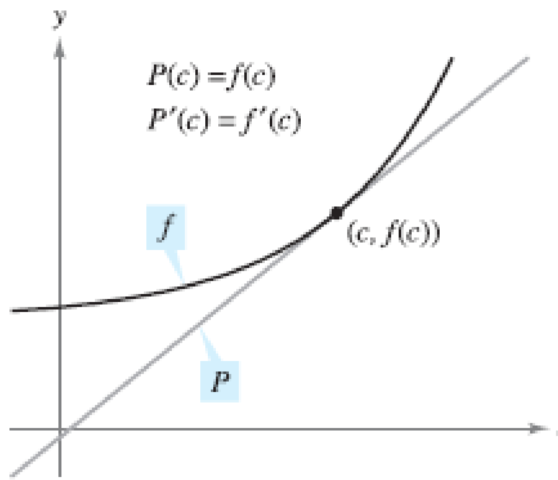
$$P_1(c) = f(c) \quad \& \quad P_1'(c) = f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad P_1(c) = a_0 + a_1 c = f(c) \quad \& \quad P_1'(c) = a_1 = f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = f'(c) \quad \& \quad a_0 = f(c) - cf'(c)$$

$$\Rightarrow \quad P_1(x) = f(c) - cf'(c) + f'(c)x$$

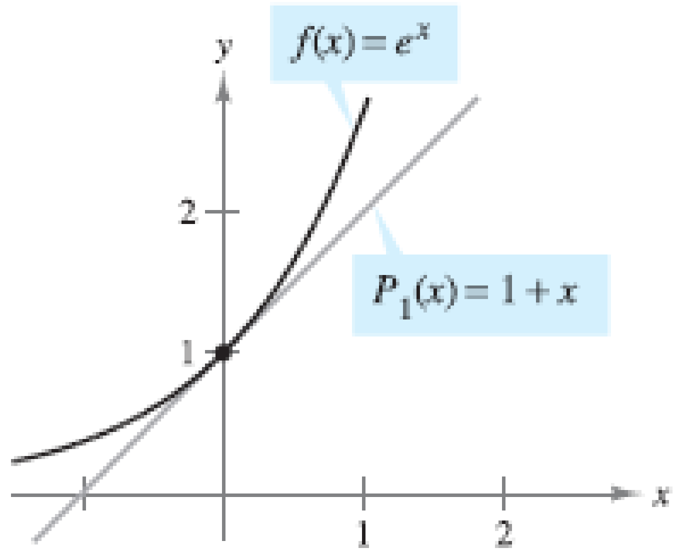
$$\therefore P_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$



예제 1: $f(x) = e^x$ 의 1차 다항식 근사

- 점 $x = 0$ 에서 전개한 1차 근사식을 구하자

$$f(0) = e^0 = 1$$
$$f'(0) = e^0 = 1$$
$$P_1(x) = 1 + 1 \times (x - 0)$$
$$\therefore P_1(x) = x + 1$$



- 점 $x = 0$ 에서 멀어지면 두 함수는 멀어진다!

함수의 2차 다항식 근사

- 함수 $f(x)$를 n차 다항함수 $P_n(x)$로 근사 시켜 보자!
- 함수의 2차 다항근사식을 찾아 보자
  - $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$
  - "점 c 에서 전개한 2차 근사식"

$$P_2(c) = f(c), \quad P_2'(c) = f'(c), \quad P_2''(c) = f''(c)$$

$$\Rightarrow \quad P_2(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 = f(c), \quad P_2'(c) = a_1 + 2a_2c = f'(c), \quad P_2''(c) = 2a_2 = f''(c)$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}f''(c), \quad a_1 = f'(c) - cf''(c), \quad a_0 = f(c) - c\left[f'(c) - cf''(c)\right] - \frac{c^2}{2}f''(c)$$

$$\Rightarrow \quad P_2(x) = f(c) - c\left[f'(c) - cf''(c)\right] - \frac{c^2}{2}f''(c) + \left[f'(c) - cf''(c)\right]x + \frac{1}{2}f''(c)x^2$$

$$\therefore P_2(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2$$

예제 2: $f(x) = e^x$ 의 2차 다항식 근사

- 점 $x = 0$ 에서 전개한 2차 근사식을 구하자

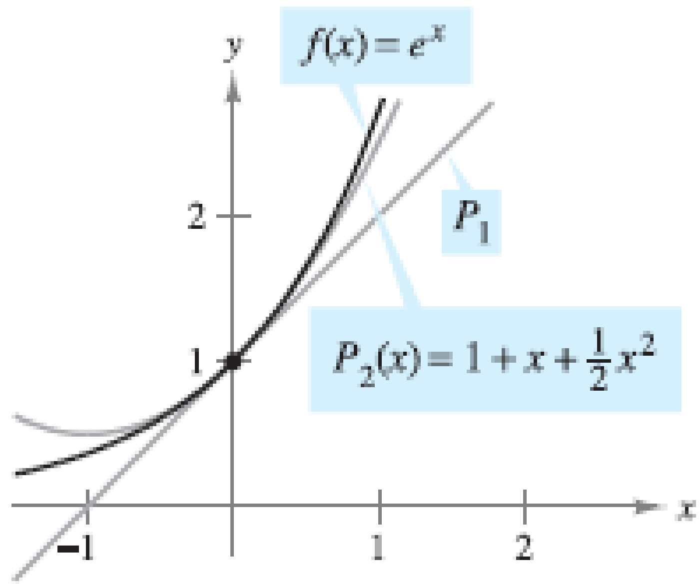
$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(0) = e^0 = 1$$

$$P_2(x) = 1 + 1 \times (x-0) + \frac{1}{2}(x-0)^2$$

$$\therefore P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$



함수의 n차 다항식 근사: n차 테일러 다항식

- 함수 $f(x)$의 n계 도함수가 존재할 때, 점 c 에서 전개한 n차 근사식

n차 테일러 다항식과 n차 매클로린 다항식의 정의

f가 c에서 n계도함수를 가지면 다항식

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

을 c에서 f에 대한 **n차 테일러 다항식**이라 한다. $c=0$일 때

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

을 f에 대한 **n차 매클로린 다항식**이라 한다.

예제 3 & 5: 매클로린 다항식

- 예제 3: $f(x) = e^x$ 의 n차 매클로린 다항식을 구하자

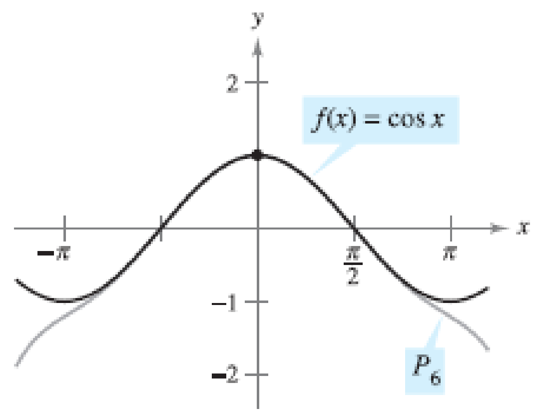
$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1, \forall k$$

$$\therefore P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

- 예제 5: $f(x) = \cos x$ 의 6차 매클로린 다항식을 구하자

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0$$
$$\cdots$$

$$P_1(x) = 1$$
$$P_2(x) = P_3(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$
$$P_4(x) = P_5(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$
$$P_6(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$



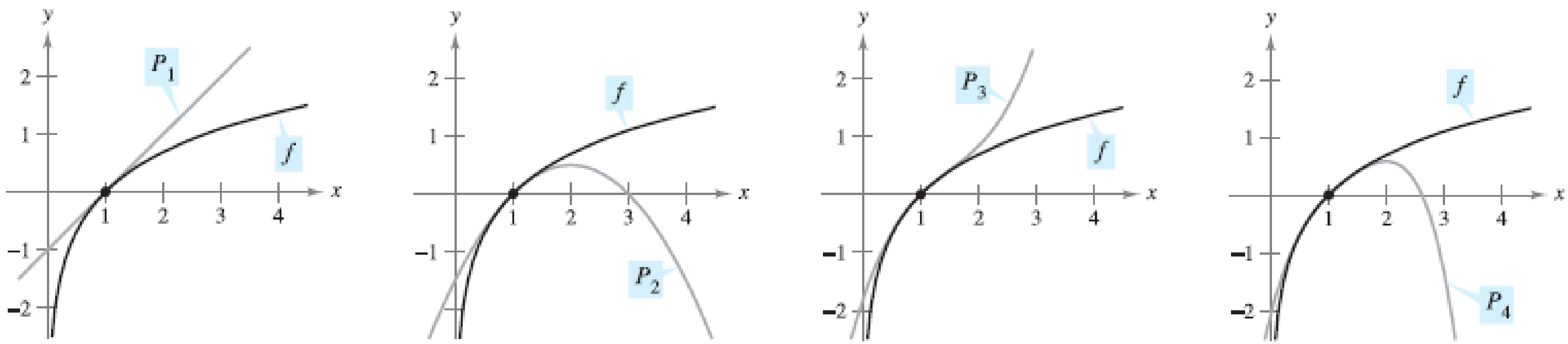
예제 4: 테일러 다항식

- 점 c = 1 에서 전개한 $f(x)=\ln x$ 의 4차 테일러 다항식을 구하자

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f(1)=0$$
$$f'(x)=1/x \Rightarrow f'(1)=1$$
$$f''(x)=-x^{-2} \Rightarrow f''(1)=-1$$
$$f'''(x)=2!\,x^{-3} \Rightarrow f'''(1)=2!$$
$$f^{(4)}(x)=-3!\,x^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(1)=-6$$

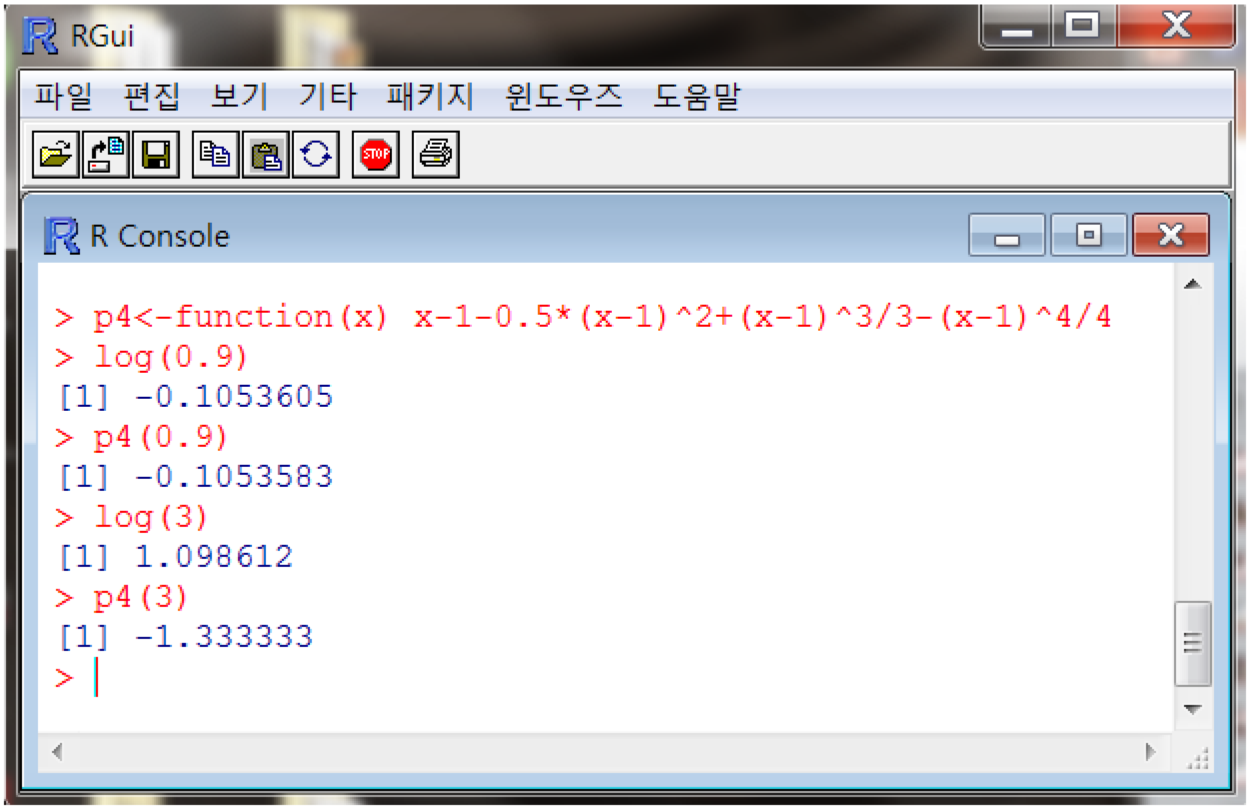
$$P_1(x)=(x-1)$$
$$P_2(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2$$
$$P_3(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$$
$$P_4(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4$$

예제 4: 테일러 다항식 (계속)



- $ln(0.9)$의 근사값을 구하자
  - 컴퓨터: $ln(0.9) \approx -0.1053605$
  - 테일러 다항식: $P_4(0.9; c = 1, \ln x) \approx -0.1053583$

예제 4: 테일러 다항식 (계속)



예제 7: 매클로린 다항식을 이용한 근사값 구하기

- 4차 매클로린 다항식을 이용하여 $ln(1.1)$의 근사값을 구하자

$$f(x)=\ln(x+1) \Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(x)=(x+1)^{-1} \Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=-(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(0)=-1$$
$$f'''(x)=2!(x+1)^{-3} \Rightarrow f'''(0)=2$$
$$f^{(4)}(x)=-3!(x+1)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0)=-6$$

$$P_4(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$$

  - 컴퓨터: $ln(1.1) \approx 0.09531018$
  - 매클로린다항식:
    $ln(1.1) = ln(0.1+1) = f(0.1) \approx P_4(0.1;\ c=0,\ \ln(x+1)) \approx 0.09530833$
  - 예제 4. 테일러 다항식: $P_4(1.1;\ c=1,\ \ln x) \approx 0.09530833$

테일러 다항식을 이용한 근사값의 정확도

- 예제 7 (계속) $f(x)=\ln(x+1)\approx P_4(x;c=0,\ln(x+1))=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$

  - x_0에서의 근사값은 x_0가 전개 중심인 c값에 가까울수록 더 정확도가 높음

x	0	0.1	0.5	0.75	1.0
$\ln(1+x)$	0	0.0953102	0.4054651	0.5596158	0.6931472
$P_4(x)$	0	0.0953083	0.4010417	0.5302734	0.5933333

  - 테일러/매클로린 다항식의 차수가 높을 수록 더 정확도가 높음

n	$P_n(0.1)$
1	0.1000000
2	0.0950000
3	0.0953333
4	0.0953083

테일러 다항식을 이용한 근사값의 정확도

- 테일러 다항식의 나머지 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$$\underbrace{f(x)}_{\text{정확한 값}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{근사값}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{나머지}}$$

- 테일러 다항식을 이용한 근사값의 Error 계산 (오차의 절대값)

$$Error = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$$

테일러 정리 (Taylor's Theorem)

정리 7.19 테일러정리

함수 f가 c를 포함하는 구간 I에서 $n+1$계도함수까지 미분가능이면($n+1$번 미분가능이면) 모든 $x \in I$에 대하여

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

이고

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

을 만족하는 z가 x와 c 사이에 존재한다.

$$Error = |R_n(x)| \le \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} M \quad if \ \left|f^{(n+1)}(z)\right| \le M \ (z \in (c,x) \ or \ z \in (x,c))$$

예제 8: 근사값의 정확도 결정하기

- 3차 매클로린 다항식을 이용하여 $sin(0.1)$의 근사값을 구하고 정확도를 결정하자

$$\sin x = f(x) = P_3(x) + R_3(x) = \left\{ x - \frac{1}{3!}x^3 \right\} + R_3(x)$$

$$where \quad R_3(x) = \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4, \quad 0 < z < x$$

$$\Rightarrow \sin(0.1) \approx P_3(0.1) = 0.099833$$

$$R_3(0.1) = \sin z \frac{1}{24}(0.1)^4 \le 1\frac{(0.1)^4}{24} \le \frac{0.0001}{24} \approx 0.000004 \ (0 < z < 1)$$

$$\Rightarrow 0 < R_3(0.1) < 0.000004$$

$$\therefore 0.099833 < \sin(0.1) < 0.099837$$

예제 9: 원하는 정확도의 근사값 구하기

- $ln(1.2)$의 근사값의 오차가 0.001보다 작아지도록 $c = 1$ 에서 전개한 테일러 다항식의 차수를 결정하자

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)z^{n+1}}, \quad 1 < z < x$$

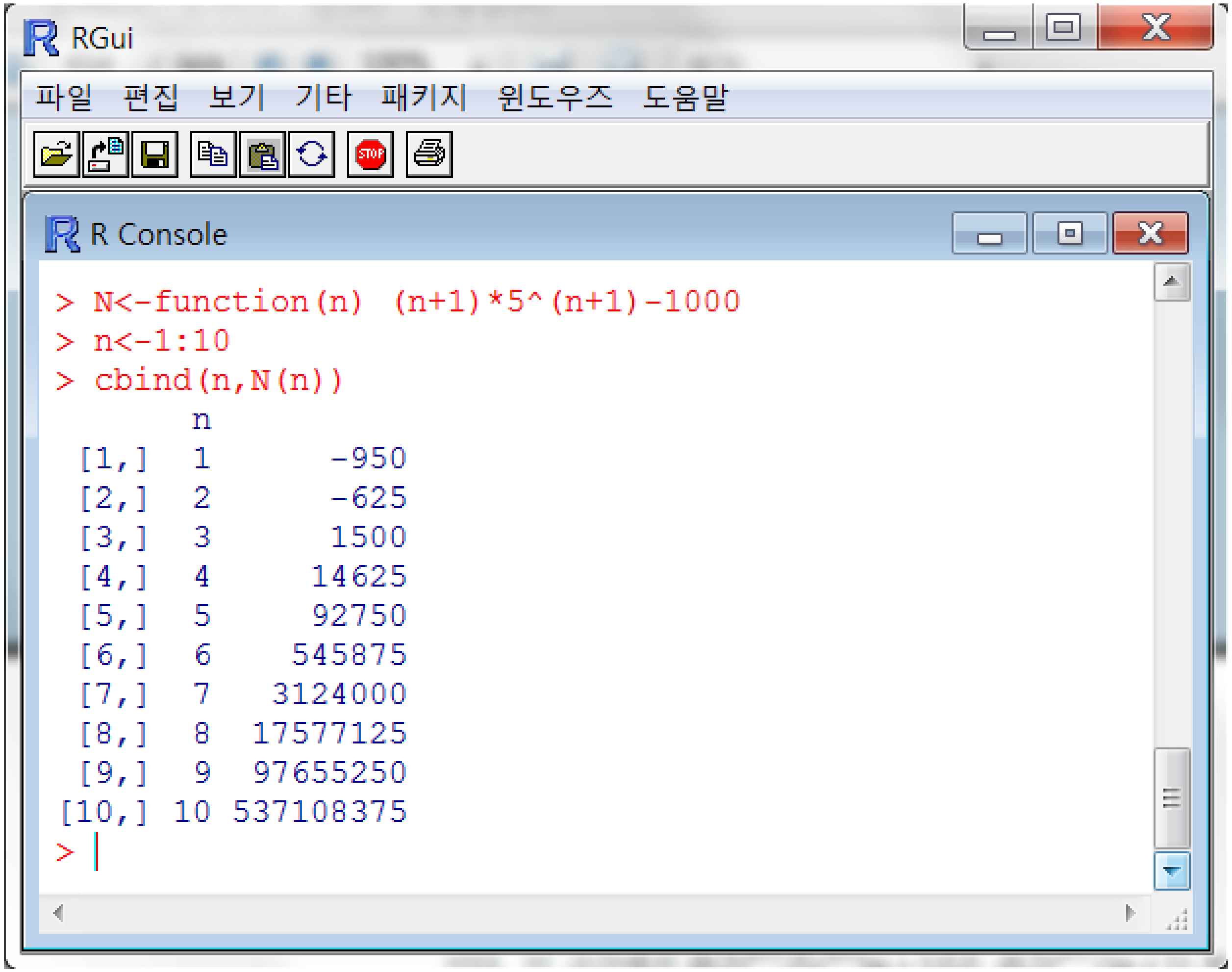
$$Error = |R_n(1.2)| = \left|\frac{(1.2-1)^{n+1}}{(n+1)z^{n+1}}\right| \le 1 \frac{(0.2)^{n+1}}{n+1} = \frac{(0.2)^{n+1}}{n+1} < 0.001$$

$$(\because 0 < \frac{1}{z^{n+1}} \le 1 \; when \; 1 < z < 1.2)$$

$$\Rightarrow n+1 > 1000(0.2)^{n+1} \Rightarrow (n+1)5^{n+1} > 1000$$

$$\therefore n > 2 \quad OR \quad n \ge 3$$

예제 9: 원하는 정확도의 근사값 구하기



7.6 멱급수 (Power Series)

- ✓ 멱급수의 정의
- ✓ 멱급수의 수렴반경과 수렴구간
- ✓ 멱급수의 끝점에서 수렴여부 결정
- ✓ 멱급수의 미분과 적분

멱급수/제곱급수 (Power Series)

- 일반항이 $a_n x^n$ 인 무한급수

멱급수의 정의

x가 변수이면 다음 무한급수를 **멱급수**라 한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

일반적으로 다음 무한급수를 **중심이 c인 멱급수**라 한다(c는 상수).

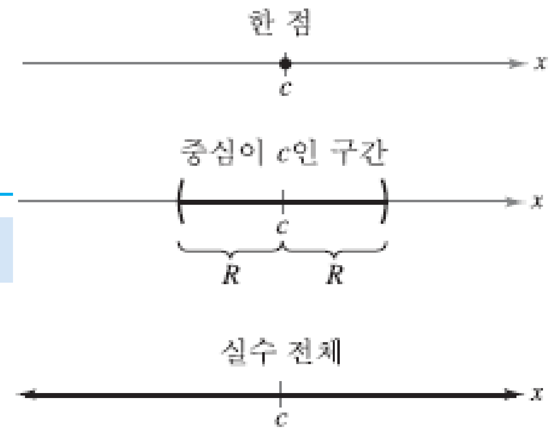
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

- 예제 1

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$ c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$

멱급수의 수렴반경 및 수렴구간

- 멱급수로 정의된 함수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$



정리 7.20 멱급수의 수렴

중심이 c인 멱급수에 대하여 다음 중 하나는 참이다.

1. 급수는 c에서만 수렴한다.

2. 양의 실수 $R(>0)$이 존재하여 급수는 $|x-c|<R$에서 절대수렴하고 $|x-c|>R$에서 발산한다.

3. 급수는 모든 x에 대하여 절대수렴한다.

실수 R을 멱급수의 **수렴반지름**(radius of convergence)이라 한다. 멱급수가 c에서만 수렴하면 수렴반지름은 $R=0$이고, 모든 x에 대하여 수렴하면 수렴반지름은 $R=\infty$이다. 멱급수가 수렴하는 모든 x값의 집합을 그 멱급수의 **수렴구간**(interval of convergence)이라 한다.

예제 2: 멱급수의 수렴반지름

a. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \Rightarrow f(0) = 1$$

For a fixed $x \neq 0$, let $u_n \equiv n!\, x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \qquad \therefore R = 0$$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n \Rightarrow f(2) = 3$$

For a fixed $x \neq 2$, *let* $u_n \equiv 3(x-2)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(x-2)^{n+1}}{3(x-2)^n}\right| = |x-2|$$

$\Rightarrow$ *converge if* $|x-2| < 1$ ($\because$ *ratio test*) $\qquad \therefore R = 1$

예제 2: 멱급수의 수렴반지름 (계속)

$$c.\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

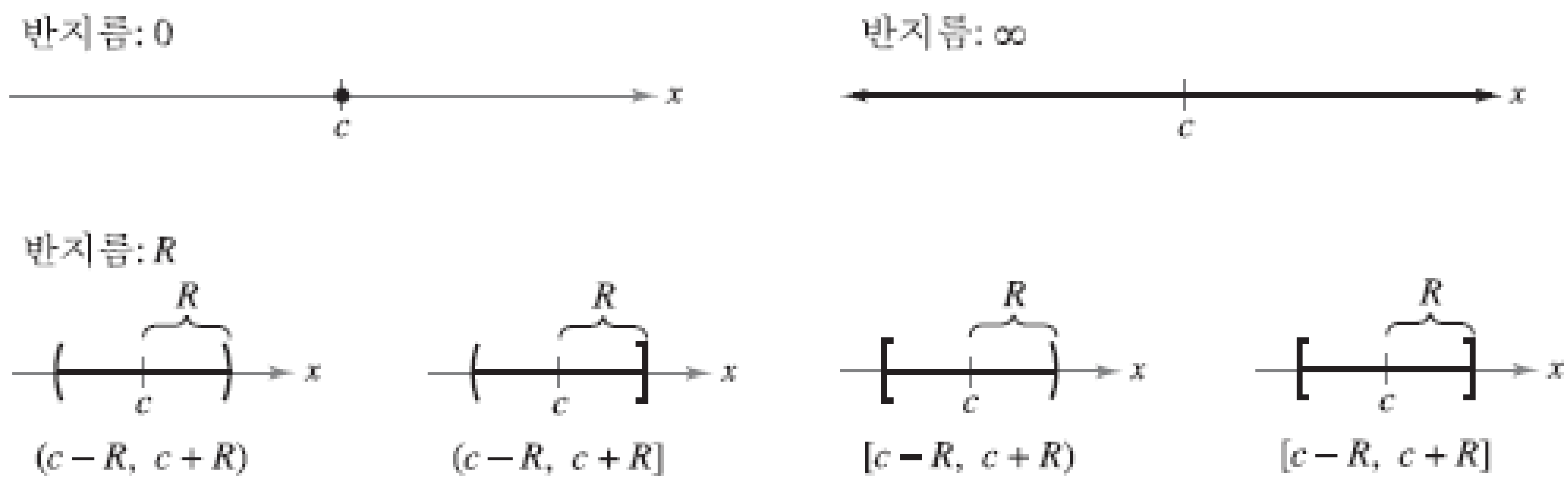
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$For\ a\ fixed\ x \neq 0,\quad let\ u_n \equiv \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 \qquad \therefore R = \infty$$

멱급수의 수렴구간과 끝점에서의 수렴여부

- 멱급수의 수렴구간을 구하려면 끝점에서의 수렴여부 결정해야 함



예제 3: 멱급수의 수렴구간 구하기

$$a.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Rightarrow f(0) = 0$$

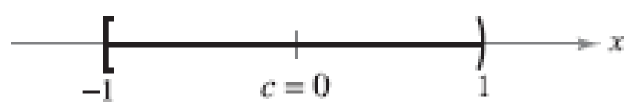
For a fixed $x \neq 0$, let $u_n \equiv \dfrac{x^n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{nx^{n+1}}{(n+1)x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| \qquad \therefore R = 1$$

$$x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad , \quad x = -1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = converge!$$

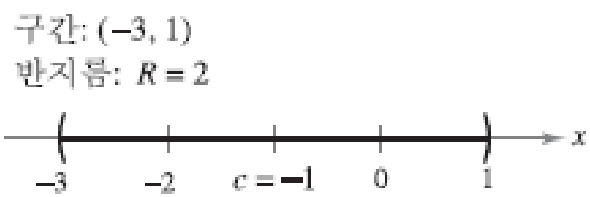
$\therefore$ interval of convergence : $[-1, 1)$

구간: $[-1, 1)$
반지름: $R = 1$



예제 3: 멱급수의 수렴구간 구하기

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$



$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}\Rightarrow f(-1)=1$$

$$\text{For a fixed } x\neq -1,\ \text{ let } u_n\equiv\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}}\right|=\left|\frac{x+1}{2}\right| \qquad \therefore R=2$$

$$x=-3:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3+1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}1=\infty$$

$$x=1:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=diverge$$

$$\therefore \text{interval of convergence}:\ (-3,1)$$

예제 3: 멱급수의 수렴구간 구하기

$$c.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\text{For a fixed } x \neq 0, \quad \text{let } u_n \equiv \frac{x^n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2 x^{n+1}}{(n+1)^2 x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x| \qquad \therefore R = 1$$

$$x = 1: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = converge! \quad , \quad x = -1: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = converge!$$

$$\therefore \text{interval of convergence} : [-1, 1]$$

멱급수로 정의되는 함수의 성질

정리 7.21 멱급수로 정의된 함수의 성질

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$
$$= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

으로 주어지는 함수가 수렴반지름 $R > 0$ 이면 f는 구간 $(c-R,\ c+R)$에서 미분가능이다(그러므로 연속이다). f의 도함수와 적분은 다음과 같다.

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$

$$= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

2. $\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$

$$= C + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + a_2\frac{(x-c)^3}{3} + \cdots$$

미분, 적분하여 얻은 급수의 수렴반지름은 원래의 멱급수의 수렴반지름과 같다. 그러나 수렴구간은 끝점에서 수렴여부에 따라 달라질 수 있다.

멱급수의 미분 및 적분

- 멱급수로 정의되는 함수는 수렴구간에서 다항식과 거의 성질이 같음
  - 수렴구간에서 연속, 미분 가능 및 적분 가능
- 수렴구간에서 멱급수의 각 항을 미분/적분하여 함수의 도함수와 적분을 구할 수 있음
  - 이 때, 구하여진 도함수와 적분도 멱급수로 정의됨
  - 도함수와 적분의 수렴반경은 원함수의 수렴반경과 같음
  - 끝점에서의 수렴여부는 다를 수 있음

예제 4: 멱급수의 도함수/적분의 수렴구간

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$$

$a.\quad \int f(x)dx = C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \Rightarrow$ interval of convergence : $[-1,1]$

$b.\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \Rightarrow$ interval of convergence : $[-1,1)$

$c.\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} \Rightarrow$ interval of convergence : $(-1,1)$

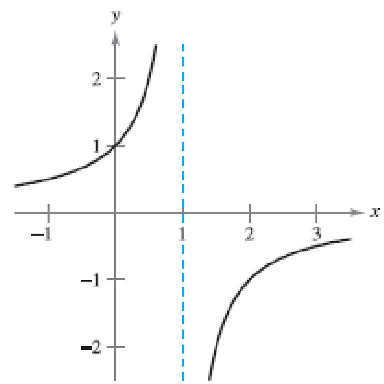
7.7 멱급수로의 함수 표현

- ✓ 함수를 나타내는 등비 멱급수 구하기
- ✓ 급수 연산으로 멱급수 만들기

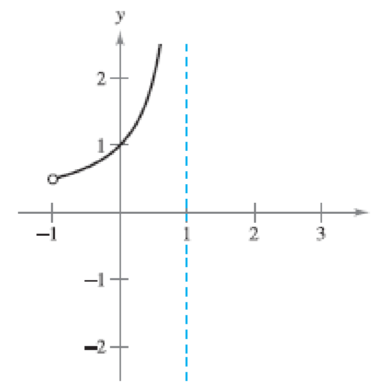
등비멱급수 (Geometric Power Series) 표현

- 예. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 는 등비급수의 합 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}, |r|<1$ 과 거의 같은 형태
  - $x \in (-1, 1)$ 에 대해서 중심이 0인 멱급수로 표현

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad if\ |x|<1$$



$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, 정의역: x는 $x \neq 1$인 모든 실수



$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, 정의역: $-1 < x < 1$

  - $x \in (-3, 1)$ 에 대해서 중심이 -1 인 멱급수로 표현

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2-(x+1)}=\frac{1/2}{1-(x+1)/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n \qquad if\ \left|\frac{x+1}{2}\right|<1$$

예제 1~2: 등비멱급수로 표현

- 예제 1: 함수 $f(x)=\dfrac{4}{x+2}$ 를 중심이 0인 등비멱급수로 나타내자

$$f(x)=\frac{4}{x+2}=\frac{2}{1-(-x)/2}=\sum_{n=0}^{\infty}2\left(-\frac{x}{2}\right)^n \qquad if\ \left|-\frac{x}{2}\right|<1 \Leftrightarrow x\in(-2,2)$$

- 예제 2: 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 를 중심이 1인 등비멱급수로 나타내자

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{1-(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n \qquad if\ |1-x|<1 \Leftrightarrow x\in(0,2)$$

멱급수의 연산

멱급수의 연산

$f(x)=\sum a_n x^n$, $g(x)=\sum b_n x^n$ 일 때 다음을 만족한다.

1. $f(kx)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$
2. $f(x^N)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$
3. $f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$

- 주의! 연산의 결과로 얻은 급수의 수렴구간은 원함수(들)의 수렴구간과 다를 수 있음

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{(-1,\ 1)} \cap \underbrace{+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n}_{(-2,\ 2)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)x^n}_{(-1,\ 1)}$$

예제 3: 멱급수 더하기로 표현

- 함수 $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$ 를 중심이 0인 멱급수로 나타내자

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x-1}{x^2-1} \\
&= \frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1} \\
&= \frac{2}{1-(-x)}+\frac{-1}{1-x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)x^n \qquad if\ |x|<1 \Leftrightarrow x\in(-1,1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[2(-1)^n-1\right]x^n = 1-3x+x^2-3x^3+\cdots \qquad if\ x\in(-1,1)
\end{aligned}
$$

예제 4: 적분으로 멱급수 표현

- 함수 $f(x)=\ln x$ 를 중심이 1인 멱급수로 나타내자

예제2로부터 $\dfrac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$

$$f(x)=\ln x=\int \frac{1}{x}dx+C$$

$$=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} \qquad if\ |x-1|<1\ \&\ x=2$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} \qquad if\ x\in(0,2] \quad (\because\ f(1)=\ln 1=0=C)$$

예제 5: 적분으로 멱급수 표현

- 함수 $g(x)=\arctan x$ 를 중심이 0인 멱급수로 나타내자

$$g'(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

$$f(x)=\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad if\ |x|<1$$

$$f(x^2)=\frac{1}{x^2+1}=g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad if\ |x|<1$$

$$g(x)=\int\frac{1}{x^2+1}dx+C$$

$$=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad if\ |x|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad if\ x\in[-1,1] \quad (\because g(0)=0=C)$$

7.8 테일러급수와 매클로린급수

- ✓ 함수의 테일러와 메클로린급수
- ✓ 이항급수
- ✓ 테일러급수를 이용하여 함수의 테일러급수 구하기

테일러 다항식을 이용한 근사값의 정확도

- 7.5절의 예제 7

$$f(x) = \ln(x+1) \approx P_4(x; c=0, \ln(x+1)) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

  - x_0에서의 근사값은 x_0가 전개 중심인 c값에 가까울수록 더 정확도가 높음

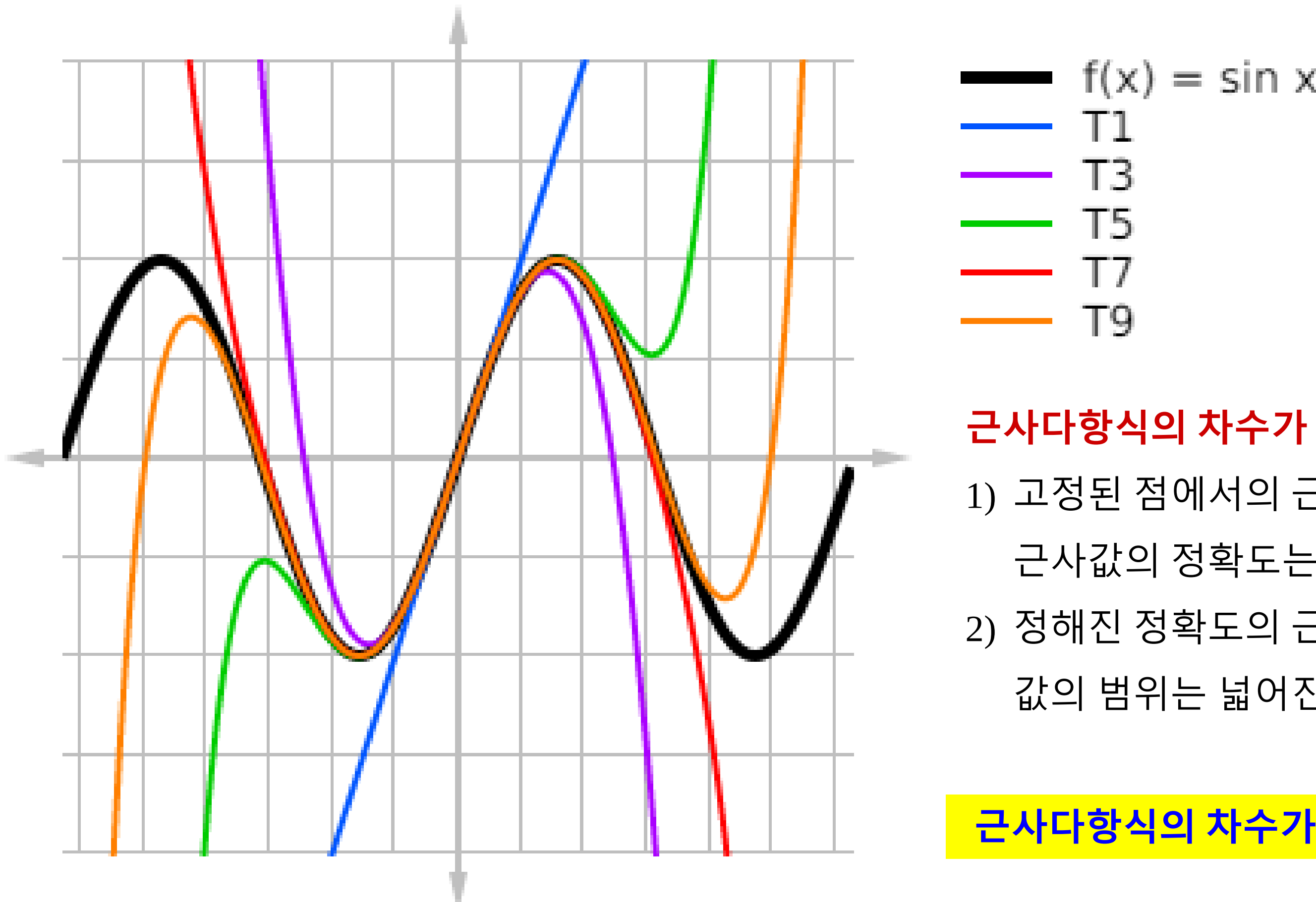
x	0	0.1	0.5	0.75	1.0
$\ln(1+x)$	0	0.0953102	0.4054651	0.5596158	0.6931472
$P_4(x)$	0	0.0953083	0.4010417	0.5302734	0.5933333

  - 테일러/매클로린 다항식의 차수가 높을 수록 더 정확도가 높음

n	$P_n(0.1)$
1	0.1000000
2	0.0950000
3	0.0953333
4	0.0953083

테일러 다항식을 이용한 근사값의 정확도

- y=sin x의 x=0에서의 다양한 차수의 근사다항식



근사다항식의 차수가 높아지면

1) 고정된 점에서의 근사다항식을 통한 근사값의 정확도는 계속 높아지고
2) 정해진 정확도의 근사값을 얻을 수 있는 값의 범위는 넓어진다.

근사다항식의 차수가 무한대가 되면???

테일러급수 (Taylor Series)

테일러급수와 매클로린급수의 정의

함수 f가 $x=c$에서 모든 계의 도함수를 가지면 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

를 c에서 $f(x)$에 대한 **테일러급수**라 한다. 특히 $c=0$일 때 급수를 f에 대한 **매클로린급수**라 한다.

테일러급수 = 무한차원 근사다항식!

함수의 테일러급수 표현

정리 7.19 테일러정리

함수 f가 c를 포함하는 구간 I에서 $n+1$계도함수까지 미분가능이면($n+1$번 미분가능이면) 모든 $x \in I$에 대하여

$$f(x) = f(c) + f'(C)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

이고

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

을 만족하는 z가 x와 c 사이에 존재한다.

f(x)를 c근방에서 중심이 c인 멱급수로 표현!

함수의 테일러 급수 표현

구간 I의 모든 x에 대하여 $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$이면 f에 대한 테일러급수는 수렴하고 다음 $f(x)$와 같다.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

예제 1: 매클로린급수 구하기

- $f(x)=\sin x$ 의 매클로린급수를 구하자

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\sin x \Rightarrow f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x \Rightarrow f'''(0)=-1$$
$$\cdots$$
$$\Rightarrow f^{(2n)}(0)=0,\ f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$$

$$\therefore \text{Maclaurin's Series}: \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

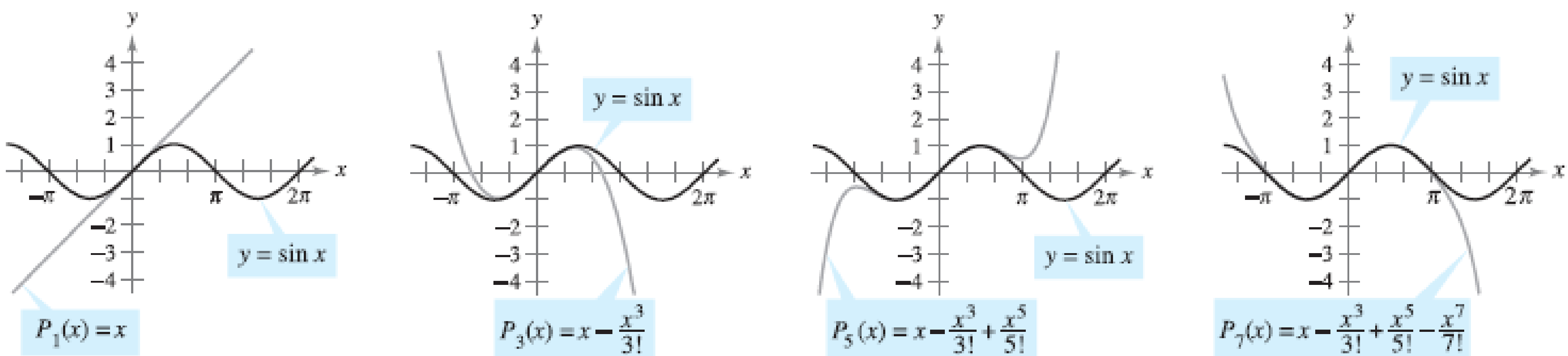
예제 2: 함수의 테일러급수 표현

- $f(x) = \sin x$ 의 매클로린급수는 모든 x에 대하여 $\sin x$ 에 수렴함을 보이자 (예제 1 이용)

$$\sin x = P_n(x; c = 0, \sin x) + R_n(x)$$

$$f^{(n+1)}(z) = \pm \sin z \quad or \quad f^{(n+1)}(z) = \pm \cos z \qquad \Rightarrow \forall z, \left| f^{(n+1)}(z) \right| \le 1$$

$$\left| R_n(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} \left| R_n(x) \right| = 0$$



함수의 테일러급수 표현의 예

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots (-\infty < x < \infty)$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots (-1 \le x < 1)$$

예제 3: 합성함수의 멱급수표현 구하기

- $f(x) = \sin x^2$ 의 멱급수 표현

$$g(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots$$

- 기본함수의 멱급수표현과 합, 차, 곱, 몫, 미분, 적분, 합성 등을 이용하여 일반적인 함수의 멱급수표현을 구할 수 있음!!

예제 4: 이항급수 (Binomial Series)

- $f(x) = (1+x)^k$ 의 매클로린급수를 구하자

$$f(x) = (1+x)^k \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = k(1+x)^{k-1} \Rightarrow f'(0) = k$$

$$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \Rightarrow f''(0) = k(k-1)$$

$$\cdots$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n}$$

$$\therefore \text{Maclaurin's Series:} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

$$cf. \quad f(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n + \cdots (-1 < x < 1)$$

예제 5: 이항급수 (Binomial Series)

- $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ 의 중심이 0인 멱급수를 구하자

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{3^2 2!} + \frac{2 \cdot 5x^3}{3^3 3!} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8x^4}{3^4 4!} + \cdots$$

NOTE 이항급수는 정수가 아닌 k에서도 성립한다. 더구나 k가 양의 정수이면 이항급수는 간단한 이항 전개로 된다.

기본함수에 대한 멱급수

함수	수렴구간
$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots + (-1)^n (x-1)^n + \cdots$	$0 < x < 2$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$-1 < x < 1$
$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \cdots$	$0 < x \le 2$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$-1 \le x \le 1$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} + \cdots$	$-1 \le x \le 1$
$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \cdots$	$-1 < x < 1$*

* $x = \pm 1$에서 수렴은 k의 값에 따라 달라진다.

예제 7: 멱급수의 곱과 나누기

- 매클로린급수를 이용하여 주어진 함수의 중심이 0인 멱급수 표현 유도

$a.\quad e^x \arctan x$

$$
\begin{aligned}
e^x \arctan x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right) + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \cdots\right) + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{10} - \cdots\right) + \cdots \\
&= x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \cdots
\end{aligned}
$$

예제 9: 정적분의 멱급수 근사값

- 멱급수를 이용하여 0.01 보다 작은 오차를 갖는 정적분 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 의 근사값을 구하자

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \cdots$$

$$\Rightarrow \int e^{-x^2}dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + \cdots$$

$$\text{근사값} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = 0.74,\quad Error < \frac{1}{216} \approx 0.005$$

테일러급수의 통계에서의 활용

- ✓ 포아송분포 (poisson distribution)
- ✓ 기하분포 (geometric distribution)
- ✓ 음이항분포 (negative binomial distribution)

포아송분포 (Poisson distribution)

- 일정한 시간 또는 공간에서 발생하는 사건의 발생빈도를 모형화할 때 사용하는 분포

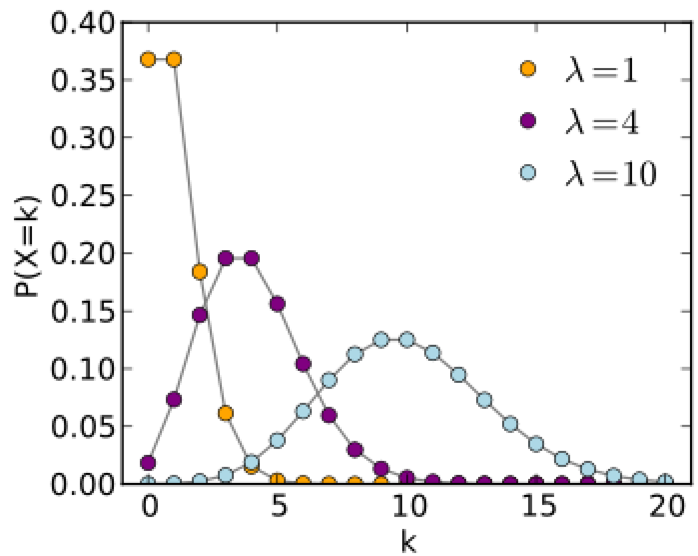
  예. 매시간 접수되는 전화요청수 / 한달 동안 발생하는 교통사고 횟수

- 정의

$$P(X=n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!},\ n=0,1,2,\ldots$$

- 성질

$$EX=\lambda,\quad VarX=\lambda$$



From the Wikepedia

포아송분포 (Poisson distribution)

- 평균과 분산의 유도

$$EX = \lambda, \quad VarX = \lambda$$

기하분포 (geometric distribution)

- 베르누이 시행
  1) 각각의 시행의 결과는 오직 두 가지의 결과뿐이어야 한다. (성공,실패)
  2) 각각의 시행에서 성공 확률은 항상 p이다.
  3) 각각의 시행은 독립적이어야 한다.

- 정의 : 베르누이 시행에서 첫번째 성공을 얻기 까지의 시행 횟수

$$P(X=n)=(1-p)^{n-1}p, n=1,2,\dots$$

- 성질

$$EX=\frac{1}{p}, \quad VarX=\frac{1-p}{p^2}$$

- 기하분포를 베르누이 시행에서 첫번째 성공을 얻기까지의 실패시행 횟수로 정의하는 경우도 있음

기하분포 (geometric distribution)

- 평균과 분산의 유도

$$EX = \frac{1}{p}, \quad VarX = \frac{1-p}{p^2}$$

음이항분포 (negative binomial distribution)

- 베르누이 시행

  1) 각각의 시행의 결과는 오직 두 가지의 결과뿐이어야 한다. (성공,실패)

  2) 각각의 시행에서 성공 확률은 항상 p이다.

  3) 각각의 시행은 독립적이어야 한다.

- 정의 : 베르누이 시행에서 r번째 성공을 얻기 까지의 시행 횟수

$$P(X=n)=\binom{n-1}{r-1}(1-p)^{n-r}p^{r}, n=r, r+1, \dots$$

- 성질

$$EX=r\frac{1}{p}, \quad VarX=r\frac{1-p}{p^2}$$

- 음이항분포를 베르누이 시행에서 r번째 성공을 얻기까지의 실패시행 횟수로 정의하는 경우도 있음