

# Part1: Modeling

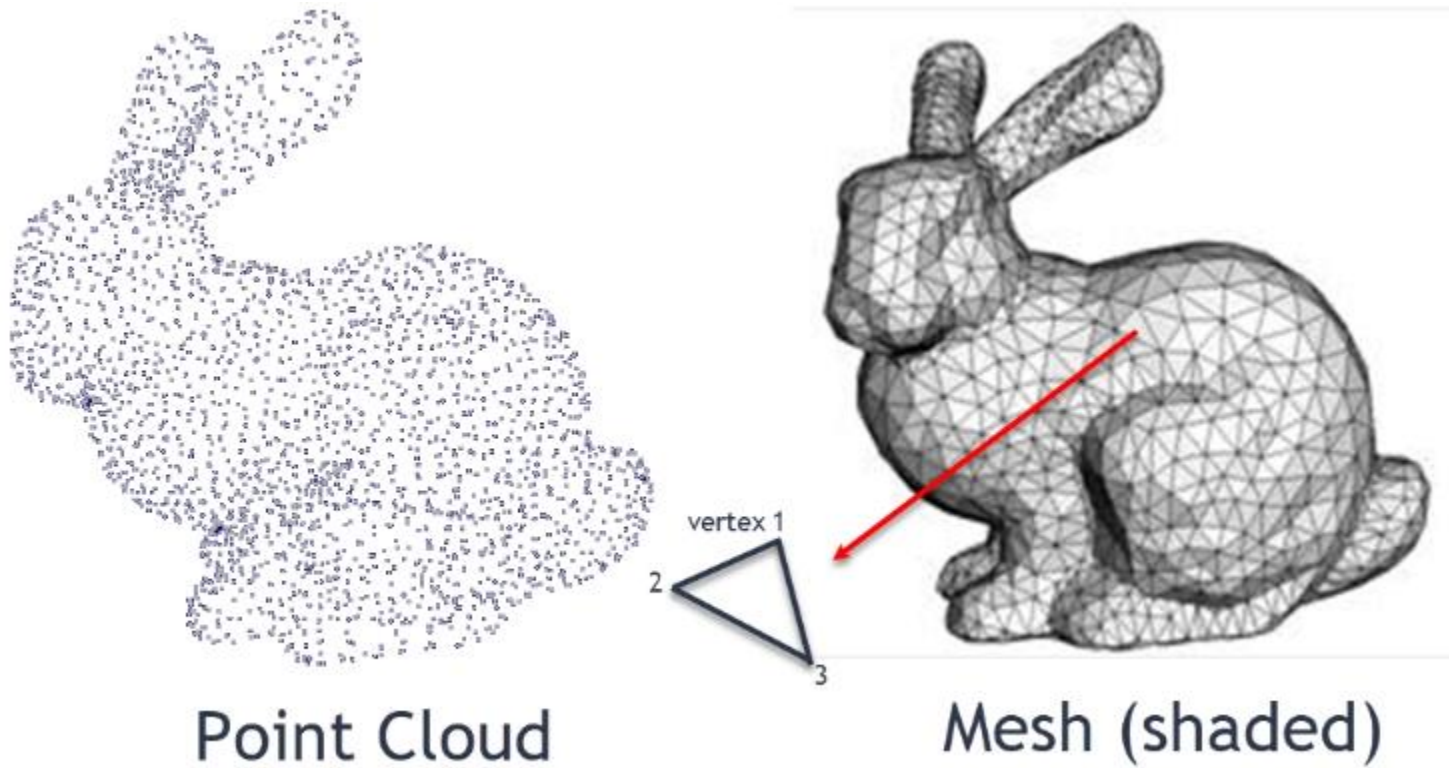
## 1. Curves and Surfaces

# Outline

- I. 3D Modeling
- II. Splines
- III. Curves
  - A. Cardinal Spline
  - B. Hermite Spline
  - c. Bezier Spline
- IV. Surfaces
- V. Quadratic Surfaces

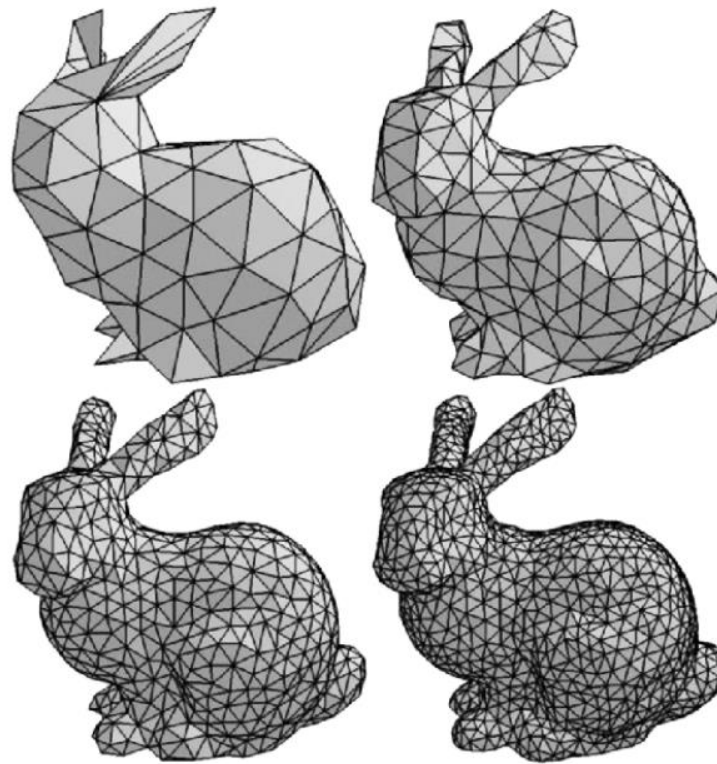
# 1. 3D Modeling

- Point Cloud, Mesh



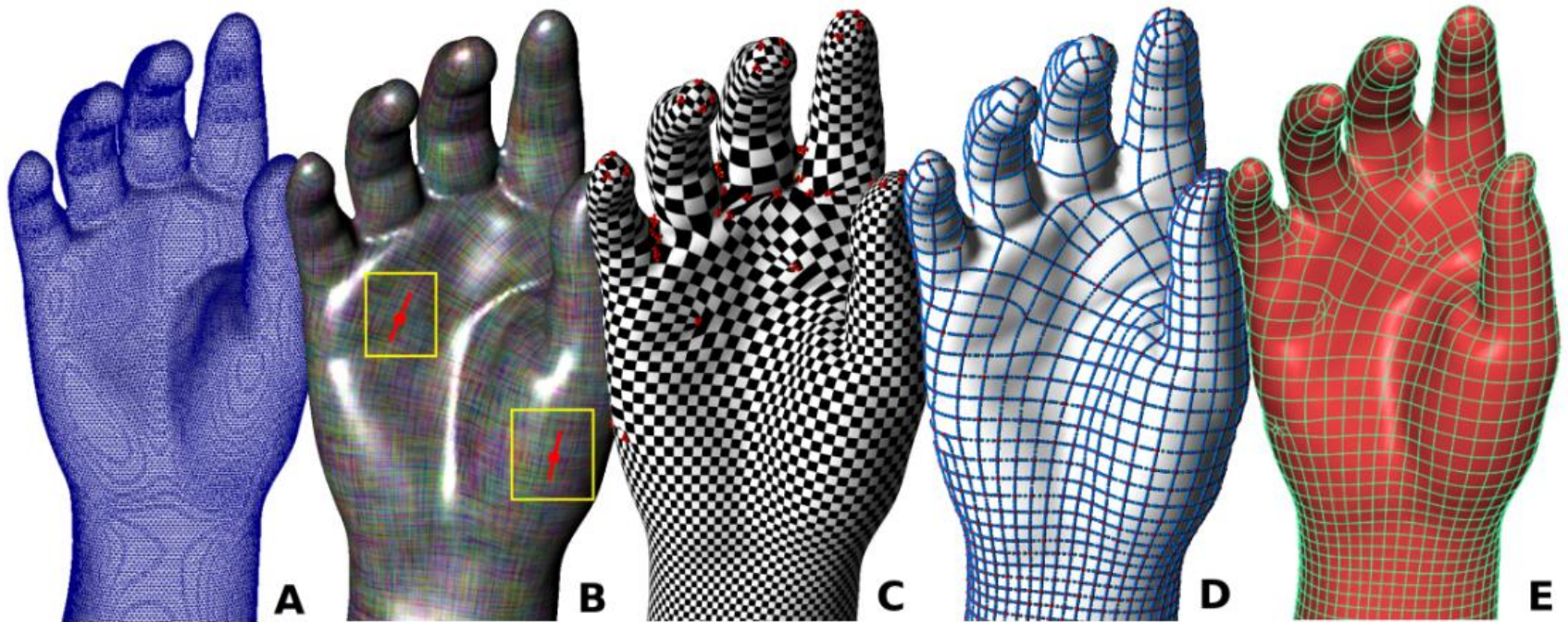
# 1.1 3D Modeling, mesh triangles

- 다른 해상도 3D mesh-triangles



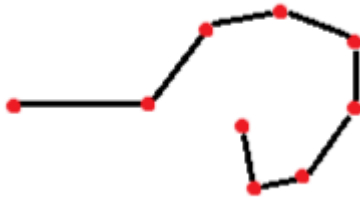
# 1.2 curves and surfaces

- Curves and surfaces



# 1.3 Modeling 1D Curves in 2D

- Polylines
  - Vertex를 직선으로 이은 형태
  - 만들기 쉽지만, 어색함
- Smooth Curves



## 2. Splines

- 2D/ 3D smooth curve 종류
- 다양하게 사용됨
  - 2D illustration
  - Fonts
  - 3D modeling
  - Animation: trajectories
- interpolation 이나 approximation 로 이루어짐
- 다항식 곡선



## 2.2 Physical Splines

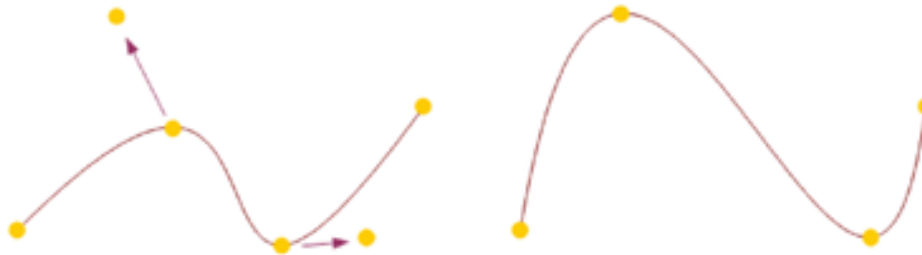
- 목수들이 부드러운 곡선을 긋기 위해 사용하던 얇은 금속 띠
  - 추의 무게에 의해 부드러운 곡선
  - 수학의 발전에 의해 다항식으로 표현





## 2.2 Control Points (제어점)

- 곡선의 모양을 제어하는 특징적인 점
  - 제어점의 추가, 삭제, 위치변경 등에 의해 곡선의 모습을 제어
  - 구간(Segment) = 한 쌍의 제어점 사이
- 스플라인 = 구간별 다항식(Piecewise Polynomials)



## 2.3 Spline 분류

- 보간 스플라인 (Interpolating Splines)
  - 제어점을 통과
- 근사 스플라인 (Approximating Splines)
  - 부드러움을 위해 제어점을 통과하지 않음
  - 제어점은 곡선을 끌어당기는 역할 (Remote Control)
  - 경우에 따라서 첫 점과 마지막 점은 통과

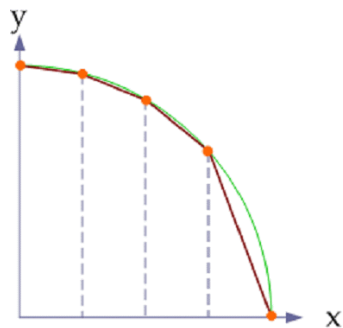


## 2.4 파라미터 표현

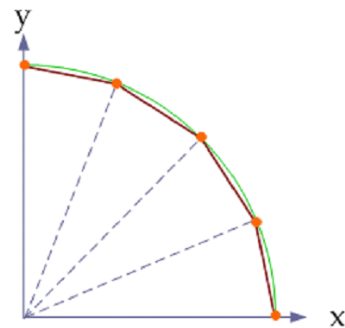
- 균등길이  $y = \sqrt{1-x^2}$ ,  $p(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$
- 기울기 표현에 용이  $\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1-x^2}$   $x = 1$  일때 미분 값 표현 불가
- 차원 확장 용이

$$y = x + 1 \quad (0 \leq x \leq 4)$$

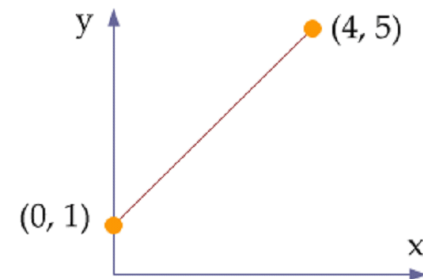
$$\rightarrow (t, t+1) \text{ or } (t^2, t^2+1) \text{ or } (3t, 3t+1)$$



(a)



(b)



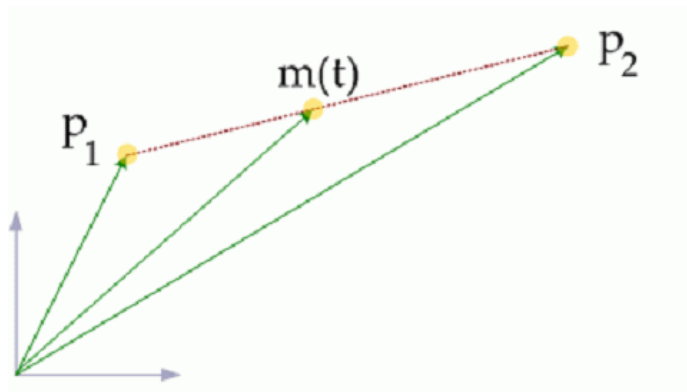
## 2.5 Blending Function (혼합 함수)

- 점을 섞어 선분의 식을 표시
- 각 점  $p_1, p_2$  를  $(1 - t), t$  로 혼합 하였으므로 선형 혼합 함수

$$m(t) = p_1 + t (p_2 - p_1) = (1 - t) p_1 + t p_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

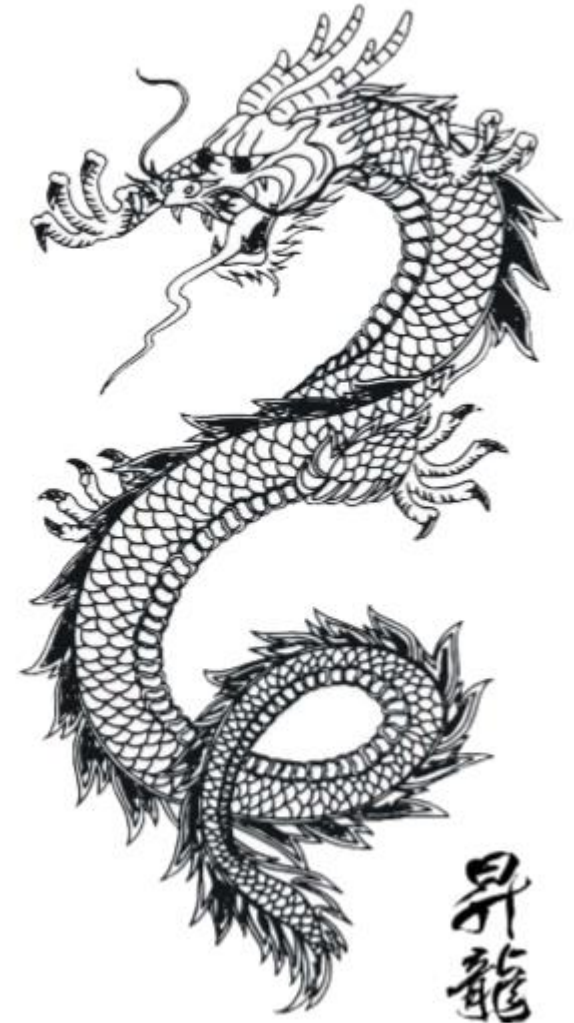
$$t = 0 \rightarrow m(t) = p_1$$

$$t = 1 \rightarrow m(t) = p_2$$



# 3 Curves

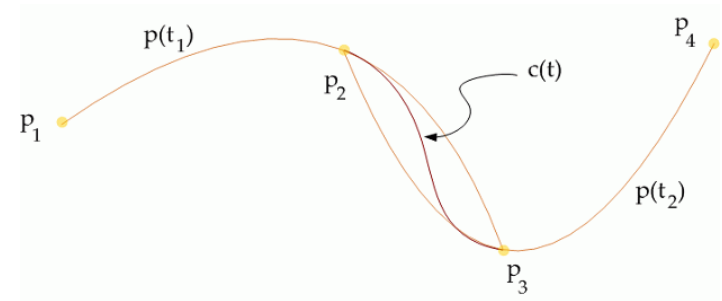
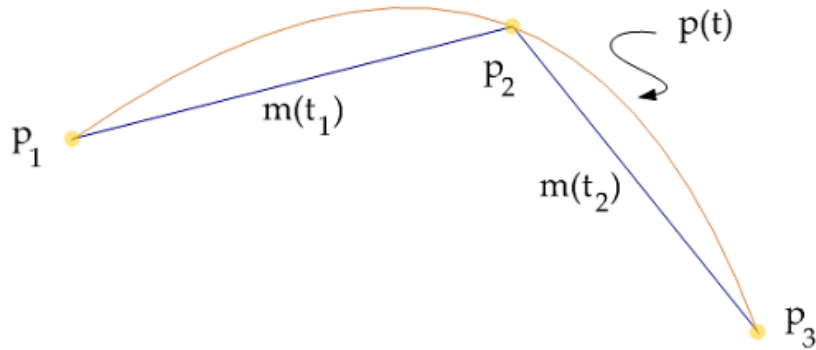
- Cardinal Spline
- Hermite Spline
- Bezier Spline



This image is in the public domain  
Source: [Wikimedia Commons](#)

# 3.1 Cardinal Splines (카디날 스플라인)

- 보간 스플라인
- $p_2 \sim p_3$ 만 사용



### 3.1.1 세점 카디날 스플라인

$$m(t_1) = (1 - t_1) p_1 + t_1 p_2$$

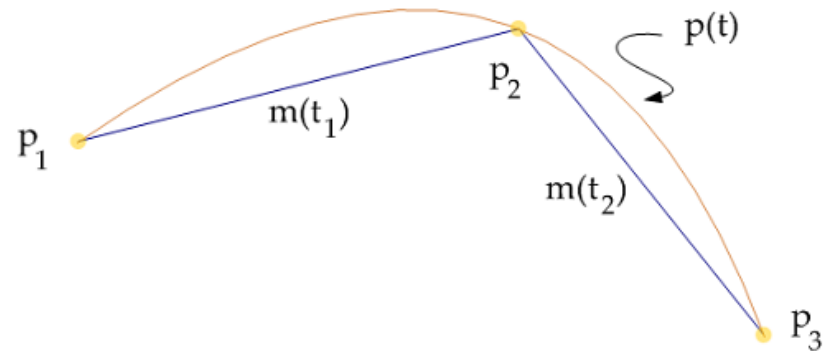
$$m(t_2) = (1 - t_2) p_2 + t_2 p_3$$

$$p(t) = (1 - t) m(t_1) + t m(t_2)$$

$$p(t) = (1 - t) [(1 - t_1) p_1 + t_1 p_2] + t [(1 - t_2) p_2 + t_2 p_3]$$

$$t_1 = 0 \text{ \& } t = 0, t_1 = 1 \text{ \& } t = \frac{1}{2} \rightarrow t_1 = 2t$$

$$t_2 = 0 \text{ \& } t = \frac{1}{2}, t_2 = 1 \text{ \& } t = 1 \rightarrow t_2 = 2t - 1$$





### 3.1.1 세점 카디날 스플라인

$$p(t) = (1 - t) [(1 - t_1) p_1 + t_1 p_2] + t [(1 - t_2) p_2 + t_2 p_3]$$

$$t_1 = 0 \text{ \& } t = 0, t_1 = 1 \text{ \& } t = 1/2 \rightarrow t_1 = 2t$$

$$t_2 = 0 \text{ \& } t = 1/2, t_2 = 1 \text{ \& } t = 1 \rightarrow t_2 = 2t - 1$$

$$\Rightarrow p(t) = (1 - t) [(1 - 2t) p_1 + 2t p_2] + t [(2 - 2t) p_2 + (2t - 1) p_3]$$

$$\Rightarrow (2p_1 - 4p_2 + 2p_3)t^2 + (-3p_1 + 4p_2 - p_3)t + p_1$$

$$p(t) = [t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$t = 0 \rightarrow p_1$$

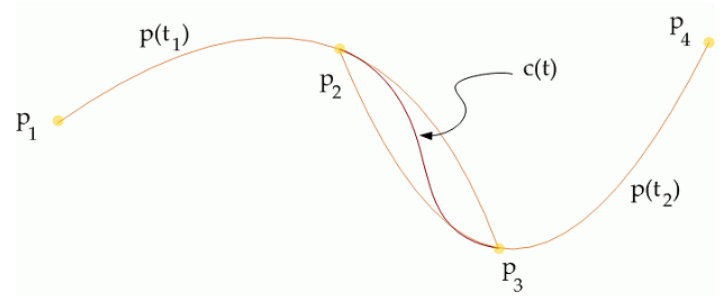
$$t = 1/2 \rightarrow p_2$$

$$t = 1 \rightarrow p_3$$

## 3.1.2 네점 카디날 스플라인

$$c(t) = (1 - t) p(t_1) + t p(t_2)$$

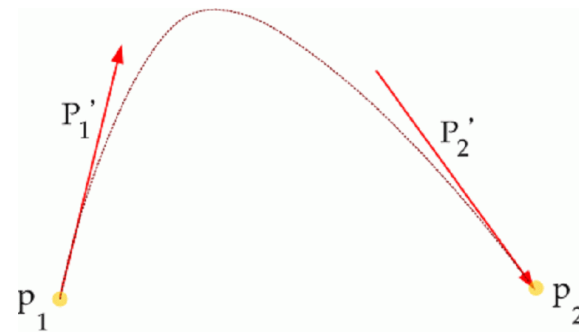
$$p(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$



## 3.2 Hermite Splines (허미트 스플라인)

- 양 끝점의 위치와 해당 점에서의 기울기에 의해 정의

$$\begin{aligned} h(t) &= T M_h P^t \\ &= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_h \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_1' & p_2' \end{bmatrix}^t \\ h'(t) &= d \frac{h(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} M_h P^t \end{aligned}$$



## 3.2 Hermite Splines (허미트 스플라인)

- 양 끝점의 위치와 해당 점에서의 기울기에 의해 정의

$$h(t)|_{t=0} = [0 \ 0 \ 0 \ 1] M_h P^t = p_1$$

$$h(t)|_{t=1} = [1 \ 1 \ 1 \ 1] M_h P^t = p_2$$

$$h'(t)|_{t=0} = [0 \ 0 \ 1 \ 0] M_h P^t = p_1'$$

$$h'(t)|_{t=1} = [3 \ 2 \ 1 \ 0] M_h P^t = p_2'$$

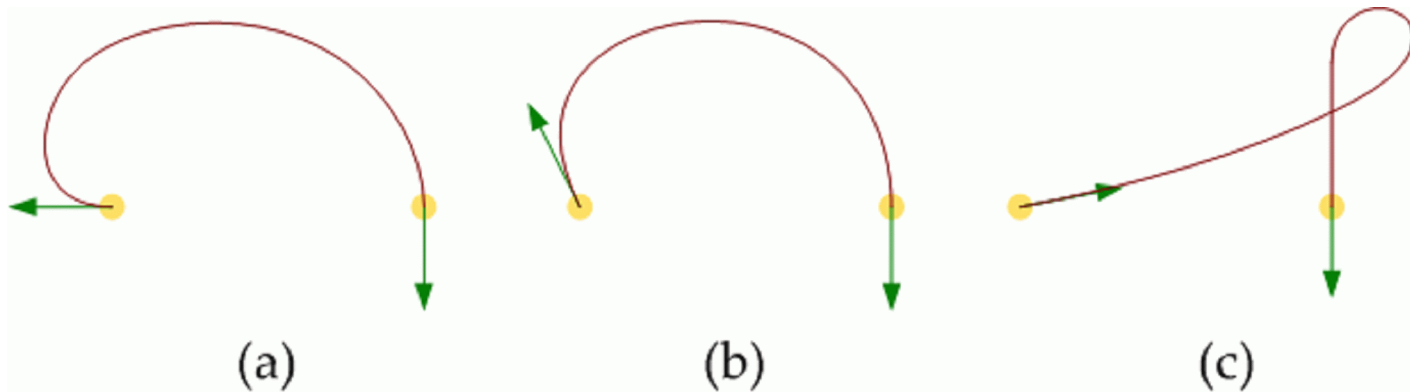
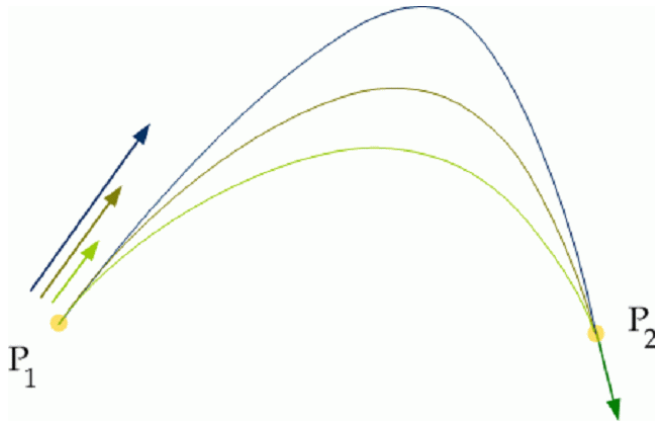
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_h P^t = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_1' \\ p_2' \end{bmatrix}$$

$$h(t) = T M_h P^t$$

$$= [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_1' \\ p_2' \end{bmatrix}$$

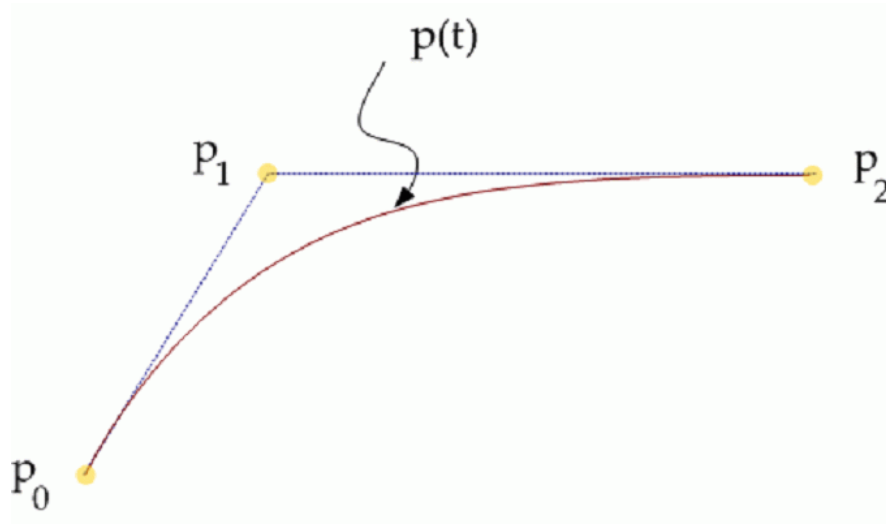
## 3.2 Hermite Splines (허미트 스플라인)

- 기울기 크기 변화, 기울기 방향 변화에 따라 곡선이 바뀜



## 3.3 Bezier Splines (베지에 스플라인)

- 근사 스플라인
- 선형 혼합에 의함



### 3.3.1 세점 베지에 스플라인

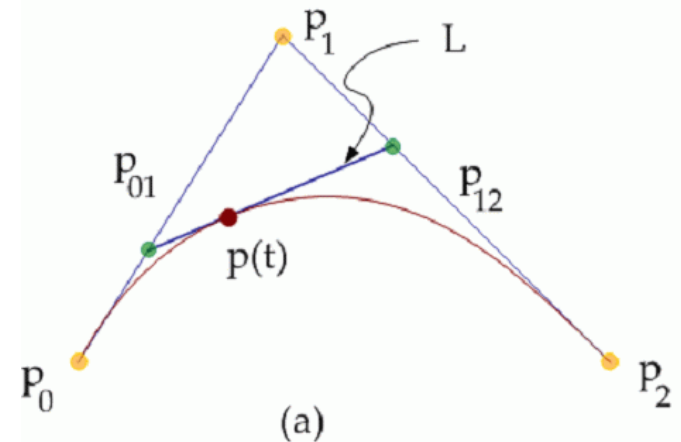
$$p_{01}(t) = (1 - t) p_0 + t p_1$$

$$p_{12}(t) = (1 - t) p_1 + t p_2$$

$$p(t) = (1 - t) p_{01}(t) + t p_{12}(t)$$

$$p(t) = (1 - t) [(1 - t) p_0 + t p_1] + t [(1 - t) p_1 + t p_2]$$

$$p(t) = [t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$





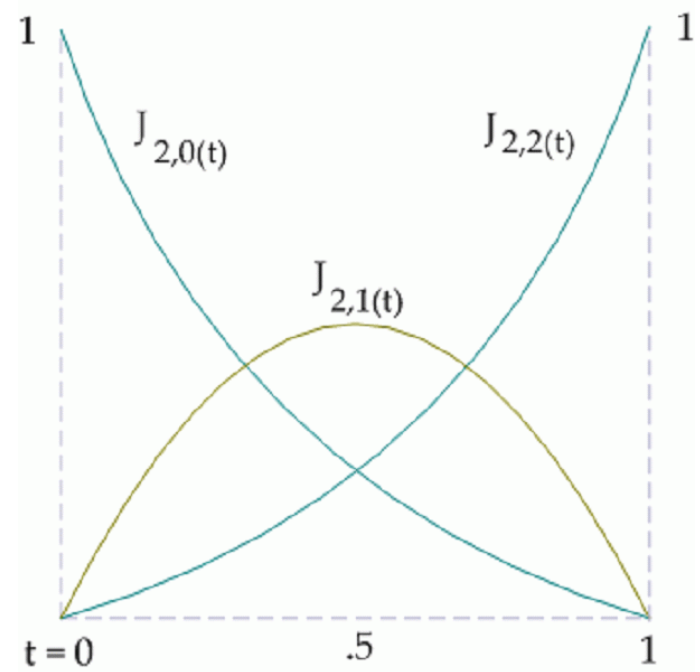
### 3.3.1 세점 베지에 스플라인

$$p(t) = [t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$J_{2,0}(t) = (1 - t)^2$$

$$J_{2,1}(t) = 2t(1 - t)$$

$$J_{2,2}(t) = t^2$$



## 3.3.2 네점 베지에 스플라인

$$p_{01}(t) = (1 - t) p_0 + t p_1$$

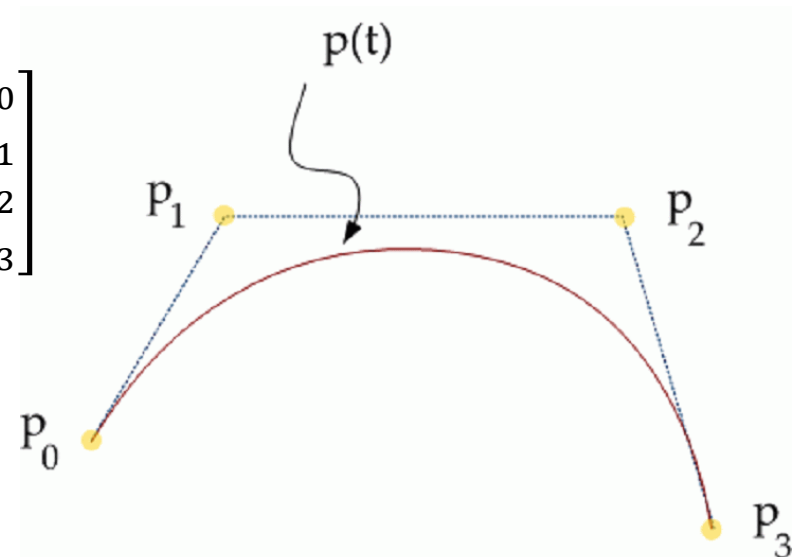
$$p_{12}(t) = (1 - t) p_1 + t p_2$$

$$p_{012}(t) = (1 - t) p_{01}(t) + t p_{12}(t)$$

$$p_{123}(t) = (1 - t) p_{12}(t) + t p_{23}(t)$$

$$p(t) = (1 - t) p_{012}(t) + t p_{123}(t)$$

$$p(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$



## 3.3.2 베지에 스플라인

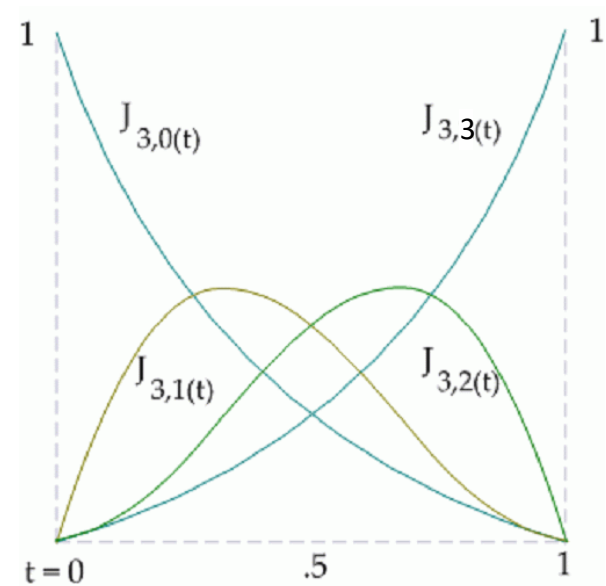
$$p(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$J_{3,0}(t) = (1 - t)^3$$

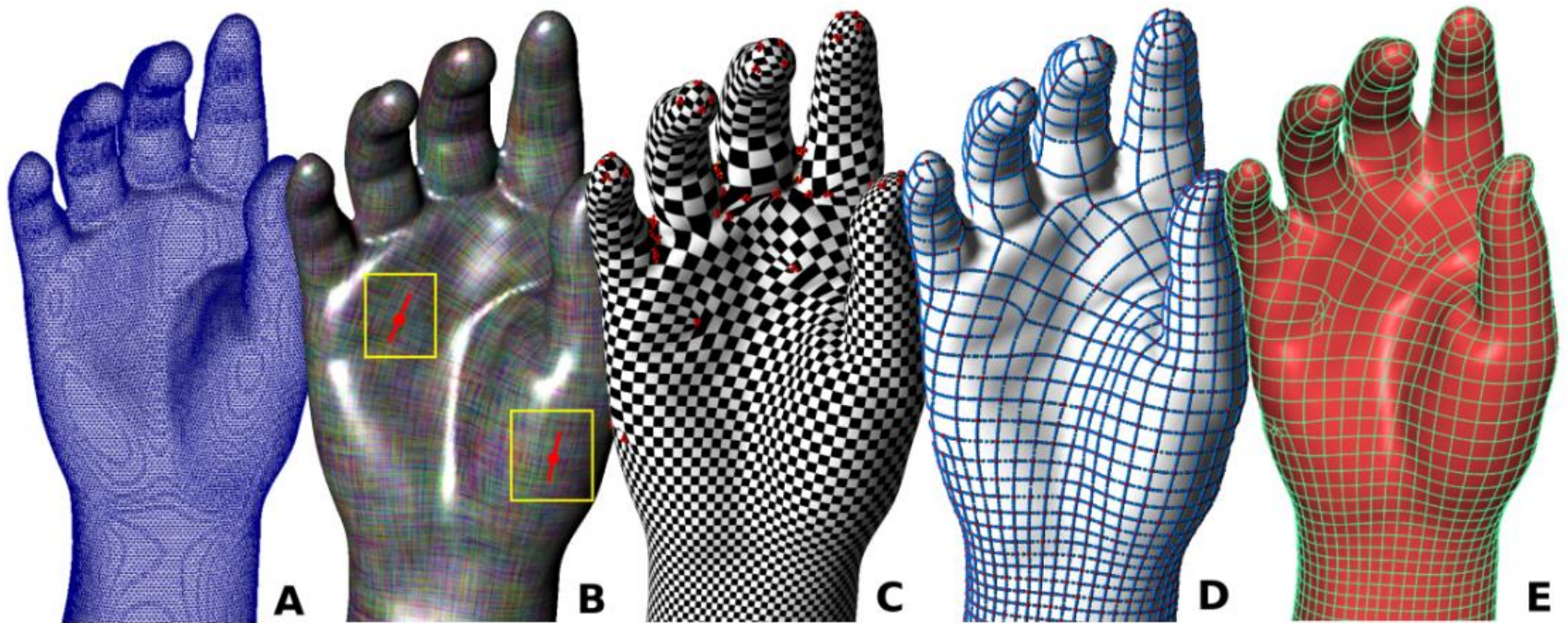
$$J_{3,1}(t) = 3t(1 - t)^2$$

$$J_{3,2}(t) = t^2(1 - t)$$

$$J_{3,3}(t) = t^3$$



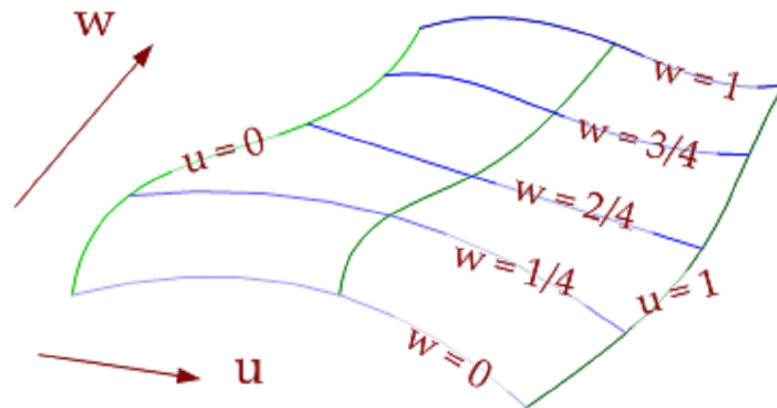
# 4 Surfaces



Wan-Chiu Li, "Automatic and Interactive Mesh to T-Spline Conversion"

## 4.1 스플라인 곡면

- 양방향 3차 곡면 (parametric Bicubic Surface)
- $u, v$  파라미터



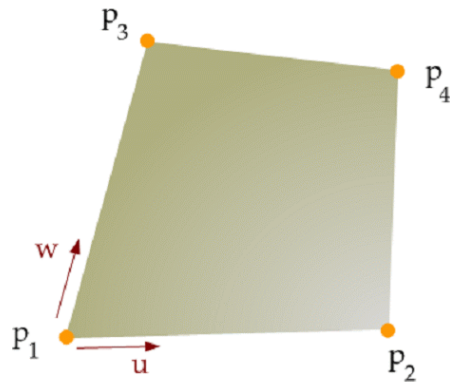
## 4.1.1 공간상 4점이 주어졌을 경우

$$p_1 p_2 = (1 - u)p_1 + up_2$$

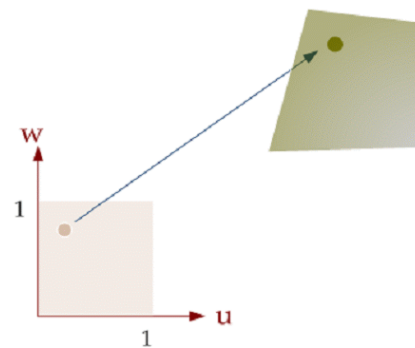
$$p_3 p_4 = (1 - u)p_3 + up_4$$

$$q(u, w) = (1 - w)p_1 p_2 + wp_3 p_4$$

$$= [1 - u \quad u] \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - w \\ w \end{bmatrix} \quad (0 \leq u, w \leq 1)$$



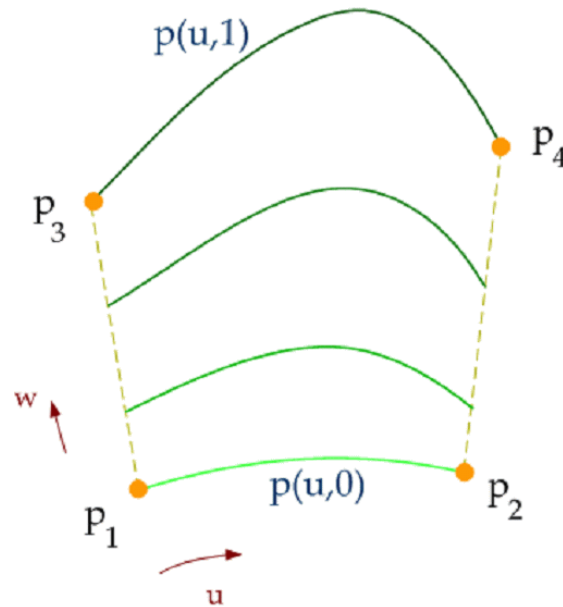
(a)



(b)

## 4.1.2 2개의 공간곡선이 주어졌을 경우

$$q(u, w) = (1 - w) p(u, 0) + w p(u, 1)$$



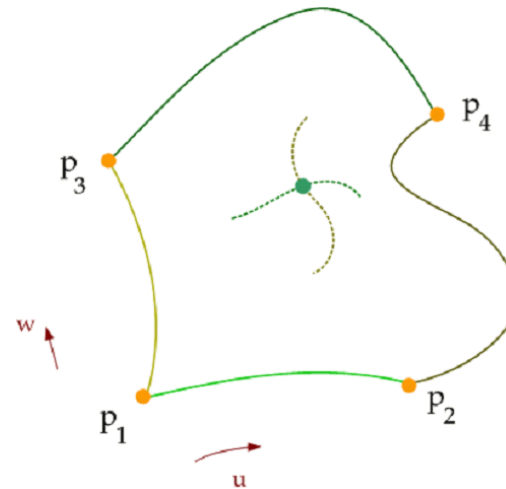


## 4.1.3 4개의 경계 곡선이 주어질 경우

$$q(u, w) = (1 - w) p(u, 0) + w p(u, 1) + (1 - u) p(0, w) + u p(1, w)$$

$$\rightarrow q(0,0) \neq p(0,0) + p(0,0)$$

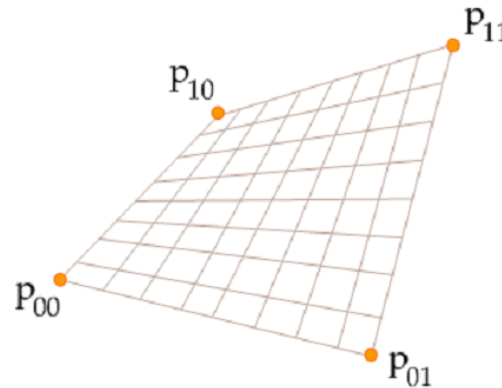
$$q(u, w) = (1 - w) p(u, 0) + w p(u, 1) + (1 - u) p(0, w) + u p(1, w) \\ - (1 - u)(1 - w) p(0,0) - (1 - u) w p(0,1) - u(1 - w) p(1,0) - u w p(1,1)$$



## 4.2 Bezier Surfaces (베지에 곡면)

- 선형 보간 1차 베지에 곡면,

$$q(u, w) = (1 - u)((1 - w)p_{00} + wp_{01}) + u((1 - w)p_{10} + wp_{11})$$



(a)

## 4.2.1 2차 베지에 곡면

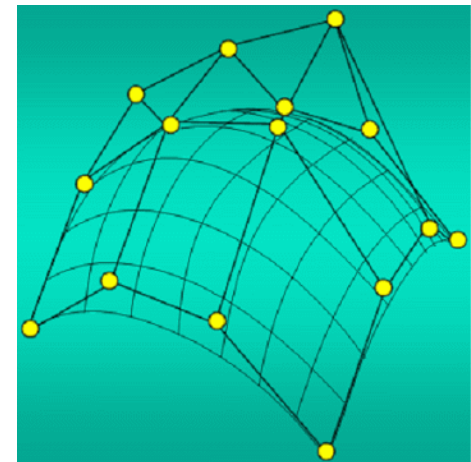
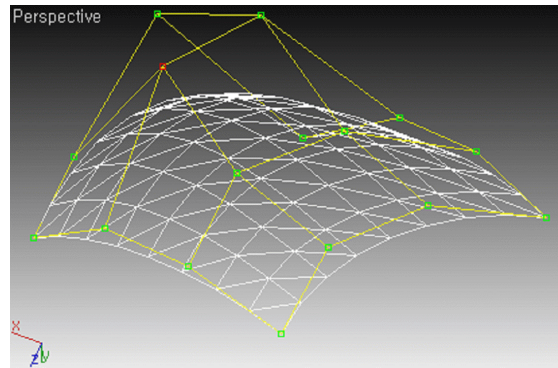
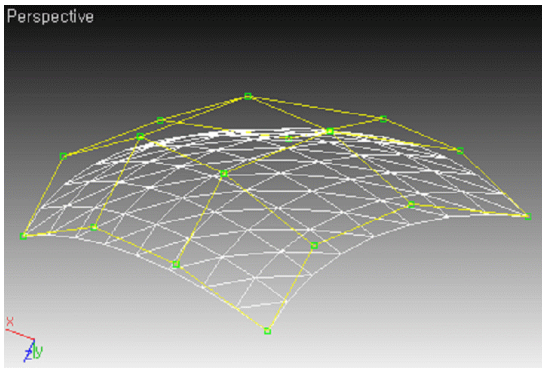
- $3 \times 3$  제어점
- $J$  는 베지에 곡선 공식
- 양방향의 스플라인을 직접 곱하는 형식

$$q(u, w) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 J_{2i}(u) J_{2j}(w) p_{ij}$$

## 4.2.2 3차 베지에 곡면

- $4 \times 4$  제어점
- $J$  는 베지에 곡선 공식
- 양방향의 스플라인을 직접 공급하는 형식

$$q(u, w) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 J_{2i}(u) J_{2j}(w) p_{ij}$$



# 5 Quadric Surfaces (2차 곡면)

- 파라미터 표현이 아닌  $x, y, z$ 에 관한 2차 함수.
- Implicit Representation (묵시적 표현) 으로 표현됨  $f(x, y, z) = 0$  의 형태
- 어떤 점이 표현 위에 존재하는지 검증하기 쉽다
- $x, y$  좌표가 주어졌을 때  $z$  좌표를 계산하기 쉽다
- 선분과의 교차점을 계산하기 쉽다
- 표면의 법선 벡터를 계산하기 쉽다

## 5.1 원구

$$s(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$s(x, y, z) = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

## 5 일반적인 2차 곡면

- 대각선을 중심으로 서로 대칭
- 평면, 원구, 원통, 원뿔, 원판, 타원면, 포물선면, 쌍곡선면등을 표현

$$s(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + 2gx + 2hy + 2jz + k = 0$$

$$s(x, y, z) = P^t C P = 0$$

$$= [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} a & d & f & g \\ d & b & e & h \\ f & e & c & j \\ g & h & j & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$