일원배치법 : 한 요인의 처리효과를 알아보기 위한 실험방법

■ 반복이 없는 이원배치법

- 두 요인의 처리 효과를 알아보기 위한 실험 방법
- 교차설계(cross-over design) & 지분설계(nested design)

교차설계

		A					
		1	2	3	4	5	6
B	1	O	O	O	O	O	O
	2	O	O	O	O	O	O
	3	O	O	O	O	O	O

모든 조합에대해 실험가능

지분설계

		A					
		1	2	3	4	5	6
B	1	O	O				
	2			O	O		
	3					O	O

각각의 경우에서만 실험이 가능
ex) A의 1,2에대해서만 B의 1조건이나타남

요인이 둘 이상인 요인 실험에서 각 요인 수준간 경우
모든 실험 조건에서 실험이 가능한 경우 : cross-over design
한 요인이 다른 요인 수준에서만 실험이 가능한 경우 : nested design이라 한다.

예) 긴장(strain)을 측정하는 장비는 5종류가 있으며, 각 기계는 4개의 헤드를 가지고 있다.
측정 장비 종류(요인), 헤드 위치(요인)에 따른 측정에 차이가 있는지를 알아보고자 한다.
장비 수준과 헤드 수준의 모든 결합 조건에 따른 실험이 가능한가? 그렇지 않다. 헤드는 장비에 포함(nested)되어있으므로
이는 nested design이라 한다. 헤드는 장비에 맞춰서 사용 가능

□ 교차설계

○ 실험 설계

- 수준 수가 a인 요인 A, 수준 수가 b인 요인 B
- $a \times b$ 실험 전체를 완전 확률화

○ 자료구조

요인 B \ 요인 A	A_1	A_2	$\cdots$	A_a
B_1	Y_{11}	Y_{21}	$\cdots$	Y_{a1}
B_2	Y_{12}	Y_{22}	$\cdots$	Y_{a2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
B_b	Y_{1b}	Y_{2b}	$\cdots$	Y_{ab}

$Var(Y_{ij}) = Var(\underbrace{\mu_i}_{상수} + \varepsilon_{ij})$

$= Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$

어느 처리에 속했는지가 중요.

○ 구조식

- 1-요인설계의 구조식 (일원배치)

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} = \mu + (\mu_i - \mu) + \varepsilon_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

  - τ_i: 요인의 처리효과

- 2-요인설계의 구조식

$$\Rightarrow \boxed{Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},} \quad i = 1, \ldots, a, \; j = 1, \ldots, b$$

- μ: 전체 평균

- α_i: 요인 A의 처리효과, $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ $\quad$ $\sum \tau_i = 0$ 인것처럼

- β_j: 요인 B의 처리효과, $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$

- $\varepsilon_{ij} \sim$ iid $N(0, \sigma^2)$: 오차항

○ 변동의 분해

$$Y_{ij} - \overline{Y}_{..} = (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}) + (\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..})$$

$$TSS = SSA + SSB + SSE$$

Total Sum of Square

○ $TSS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$: 자유도 $N-1$ $\because \sum\sum(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}) = 0$

원래는 $\sum_{i}\sum_{j}^{b}(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2$

○ $SSA = b\sum_{i=1}^{a}(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{N}$: 자유도 $a-1$ $\because \sum\sum(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}) = 0$

j에 대한 아무런 제약이 없음(constant)

$\sum_{i}\sum_{j}(\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..})^2$

○ $SSB = a\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{.j}^2}{a} - \frac{Y_{..}^2}{N}$: 자유도 $b-1$ $\because \sum\sum(\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..}) = 0$

○ $SSE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..})^2$: 자유도 $(a-1)(b-1)$

TSS−SSA−SSB

- SSE 자유도: $N-1-(a-1)-(b-1) = (a-1)(b-1)$

○ 가설 검정

○ 요인 A의 처리 효과의 동일성 검정

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$$ ①

○ 요인 B의 처리 효과의 동일성 검정

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$ ②

검정통계량

○ 분산분석표

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
모형(처리A)	a-1	SSA	MSA = SSA/(a-1)	MSA/MSE ①
모형(처리B)	b-1	SSB	MSB = SSB/(b-1)	MSB/MSE ②
오차	(a-1)(b-1)	SSE	MSE = SSE/((a-1)(b-1))	
전체	N-1	TSS		

너무 크면 기각

◉ 어느 화학공장에서 제품의 생산량에 영향을 미치는 것으로 예상되는 반응온도와 원료를 요인으로 생각하여 반복이 없는 이원배치의 실험 실시

○ 반응온도(A) = 180, 190, 200, 210

○ 원료(B) = 미국 M사, 일본 Q사, 국내 P사

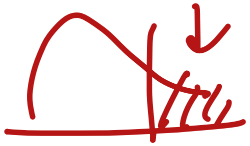
12개의 실험구를 완전 확률화하여 실험한 결과

원료 \ 온도	180	190	200	210	합계
M	97.6	98.6	99.0	98.0	393.2
Q	97.3	98.2	98.0	97.7	391.2
P	96.7	96.9	97.9	96.5	388.0
합계	291.6	293.7	294.9	292.2	1172.4

$\begin{cases} H_0: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0 \\ H_0: \beta_1=\beta_2=\beta_3=0 \end{cases}$, $H_1 =$ not H_0

- $TSS = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{12} = 97.6^2 + \cdots + 96.5^2 - \frac{1172.4^2}{12} = 6.22$
- $SSA = \frac{291.6^2 + 293.7^2 + 294.9^2 + 292.2^2}{3} - \frac{1172.4^2}{12} = 2.22$
- $SSB = \frac{393.2^2 + 391.2^2 + 388^2}{4} - \frac{1172.4^2}{12} = 3.44$
- $SSE = TSS - SSA - SSB = 6.22 - 2.22 - 3.44 = 0.56$

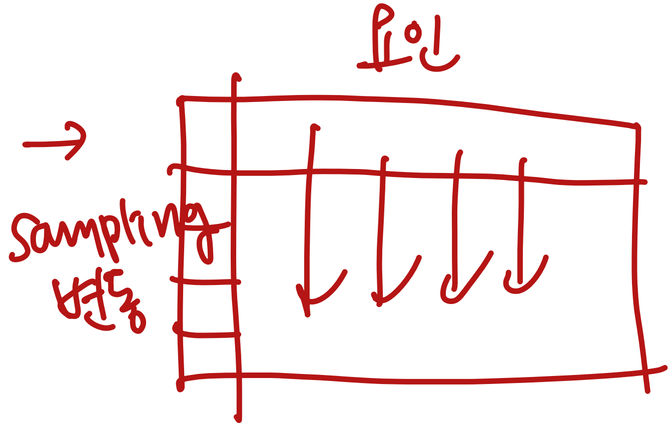
변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
모형(처리A)	3	2.22	0.74	7.96 $= 0.74/0.093$
모형(처리B)	2	3.44	1.72	18.49 $= 1.72/0.093$
오차	$11-3-2$ 6	0.56	0.093	
전체	11	6.22		



○ $F_{0.05}(3,6) = 4.76,\ F_{0.05}(2,6) = 5.14$ ⇨ 유의수준 5%에서 두 요인 모두 유의함 V →H_0 두개모두기각

⇒ 반응온도와 원료의 종류에 따라 생산량의 차이가 있다고 할 수 있음

유의한 차이가 없다고 나오는 경우
->처리를 바꿔도 같다는 뜻
종종 일원배치법으로 재구성함 →



R

의미X 문자

```
chemistry <- scan(what=list("","",1))
1 1 97.6 2 1 98.6 3 1 99.0 4 1 98.0
1 2 97.3 2 2 98.2 3 2 98.0 4 2 97.7
1 3 96.7 2 3 96.9 3 3 97.9 4 3 96.5

names(chemistry) <- c("temp","material","amount")
chemistry <- data.frame(chemistry)
```

길이가 같은 경우 : 행 observation
열 변수

linear model

```
result <- lm(amount~temp+material, data=chemistry)
anova(result)
```

y   α indicator

↳ p-value를 직접 제공

작을수록 강력한 반증 → 차이가 있다고 할 수 있음 (H_0 기각)

$Var(\overline{Y}_{i.}) = Var\left(\frac{\sum_{j}^{b} Y_{ij}}{b}\right) = \frac{b\sigma^2}{b^2} = \frac{\sigma^2}{b} \rightarrow$ MSE로 추정

○ $\mu(A_i)$와 $\mu(B_j)$의 추정

Yij는 서로 독립 → Cov = 0

추정했으므로 z가 아니라 t

- $\mu(A_i)$의 구간추정: $\overline{Y}_{i.} \pm t_{\alpha/2,(a-1)(b-1)}\sqrt{MSE/b}$
- $\mu(B_j)$의 구간추정: $\overline{Y}_{.j} \pm t_{\alpha/2,(a-1)(b-1)}\sqrt{MSE/a}$

$Var(\overline{Y}_{.j}) = Var\left(\frac{\sum_{i}^{a} Y_{ij}}{a}\right) = \frac{a\sigma^2}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a} \rightarrow$ MSE로 추정

◉ 95% 신뢰구간

- $t_{\alpha/2,(a-1)(b-1)}\sqrt{MSE/b} = 2.447\sqrt{0.093/3} = 0.43$
- $t_{\alpha/2,(a-1)(b-1)}\sqrt{MSE/a} = 2.447\sqrt{0.093/4} = 0.37$
- $\boxed{\mu(A_1)\text{의 95\% 신뢰구간}}$ = 97.2 ± 0.43 = [96.77, 97.63]
- $\boxed{\mu(B_1)\text{의 95\% 신뢰구간}}$ = 98.3 ± 0.37 = [97.93, 98.67]

$\overline{Y}_{1.} \pm t_{\alpha/2,3\times2} \times \sqrt{MSE/b}$

$\overline{Y}_{1.} = 291.6/3 = 97.2$

$t_{0.025,6} = 2.447$

$MSE = 0.093$

$\overline{Y}_{.1} \pm t_{\alpha/2,6} \times \sqrt{MSE/a}$

$\overline{Y}_{.1} = 393.2/4 = 98.3$

$t_{0.025,6} = 2.447$

$MSE = 0.093$

① 그룹 (약 / 가짜약) → 체질무시
② 사람하나 (약먹기전 / 후) → 체질고려

■ 확률화 블록설계법 (randomized complete block design)

- 확률화 완비(complete) 블록설계법

처리의개수가 2개

앞내용과 모양은 비슷한데 개념이 다르다.

- 쌍을 이룬 비교의 일반화
- 블록(block) : 요인의 처리효과 비교의 정확도를 높이기 위해 예비지식을 활용하여 나눈 동질적인 실험단위
  - (예제) 처리: 운동화의 두 상표 block: 운동화를 신은 사람
  - (예제) 처리: 옥수수 품종 block: 지역

○ 실험 설계

- a개의 수준(처리)과 b개의 블록가 있다고 가정
- 각 블록 안에 처리에 대해 관측값은 하나
- **각 블록 안에 처리의 배열은 확률적으로 결정**

필기꼼꼼이해함! 나중에 옮겨적기

◉ Weight of Chickens – Snee (1985)

- ○ 사료에 성장촉진제 추가
  - Control (추가하지 않음), Low dose, High dose
- ○ 크기가 유사한 것으로 블록
- ○ 성숙기의 평균 무게(단위: pound)

Block	Control	Low dose	High dose	합계
1	3.93	3.99	3.96	11.88
2	3.78	3.96	3.94	11.68
3	3.88	3.96	4.02	11.86
4	3.93	4.03	4.06	12.02
5	3.84	4.10	3.94	11.88
6	3.75	4.02	4.09	11.86
7	3.98	4.06	4.17	12.21
8	3.84	3.92	4.12	11.88
합계	30.93	32.04	32.30	95.27

○ 실험설계

```
trt <- 3
block <- 8
design <- NULL
for (i in 1:block)
  design <- c(design,sample(1:trt,trt))
design <- data.frame(matrix(design,block,trt,byrow=T))
Block <- 1:block
design <- cbind(Block,design)
```

○ 통계적 모형

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \qquad i = 1,...,a, \;\; j = 1,...,b.$$

- ○ Y_{ij}: 블록 j에서 처리 i를 한 반응변수
- ○ μ: 전체 평균
- ○ α_i: 처리효과, $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$
- ○ β_j: 블록 효과, $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$
- ○ $\varepsilon_{ij} \sim$ iid $N(0, \sigma^2)$

○ 가설 검정

○ 처리효과의 동일성 검정

- $H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_a = 0$ vs H_1 : 최소한 하나 이상의 α_i는 0이 아님

○ 변동분해: $TSS = SSA + SSBL + SSE$

- $TSS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$: 자유도=$N-1$

- $SSA = b\sum_{i=1}^{a}(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{N}$: 자유도=$a-1$

- $SSBL = a\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{.j}^2}{a} - \frac{Y_{..}^2}{N}$: 자유도=$b-1$

- $SSE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..})^2$:

  자유도= $N-(a-1)-(b-1)-1=(a-1)(b-1)$

○ 분산분석표

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
모형(처리A)	a-1	SSA	MSA = SSA/(a-1)	MSA/MSE
블록	b-1	SSBL	MSBL = SSBL/(b-1)	MSBL/MSE
오차	(a-1)(b-1)	SSE	MSE = SSE/((a-1)(b-1))	
전체	N-1	TSS		

- 블록효과의 동일성 검정
  - ○ 설계에 있어 ab개의 처리 조합은 실험 단위의 집합에 대해 확률적으로 배치된 것이 아님
  - ○ 블록은 실험단위이고 확률화는 각 단위안에서 제한되어짐

  - ○ 만약 두 개의 요인에 대해 관심이 있는 경우에는 다른 설계법을 설계
  - ○ 이원설계의 상대적 효율성을 평가하는데 사용
    - F_b가 1보다 크면 클수록 블록화의 효과가 좋음

      ⇨ 이원설계가 일원설계에 비해 효율적임
    - F_b가 1보다 작으면 실험을 다시 수행하는 경우 블록화에 주의 또는 블록화 포기 ⇨ 완전확률화 설계 실시

◉ Weight of Chickens

Block	Control	Low dose	High dose	합계	평균
1	3.93	3.99	3.96	11.88	3.960
2	3.78	3.96	3.94	11.68	3.893
3	3.88	3.96	4.02	11.86	3.953
4	3.93	4.03	4.06	12.02	4.007
5	3.84	4.10	3.94	11.88	3.960
6	3.75	4.02	4.09	11.86	3.953
7	3.98	4.06	4.17	12.21	4.070
8	3.84	3.92	4.12	11.88	3.960
합계	30.93	32.04	32.3	95.27	
평균	3.866	4.005	4.038		3.970

- $TSS = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{8} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{24} = 3.93^2 + \cdots + 4.12^2 - \frac{95.27^2}{24} = 0.2533$
- $SSA = \frac{30.93^2 + 32.04^2 + 32.3^2}{8} - \frac{95.27^2}{24} = 0.1324$
- $SSBL = \frac{11.88^2 + \cdots + 11.88^2}{3} - \frac{95.27^2}{24} = 0.0542$
- $SSE = TSS - SSA - SSBL = 0.2533 - 0.1324 - 0.0542 = 0.0667$

○ 분산분석표

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F	p-값
촉진제	2	0.1324	0.0662	13.889	0.0005
블록	7	0.0542	0.0077	1.626	0.2077
오차	14	0.0667	0.0048		
전체	23	0.2533			

- 5% 유의수준에서 $F_{0.05}(2,14) = 3.739$ < 13.889

⇨ 성장촉진제 양에 따라 병아리 성장에 차이가 있음

◉ 4가지 옥수수 품종(A, B, C, D)의 생산량을 비교하기 위해 4곳의 지역에서 파종하여 옥수수 생산량을 조사

지역 1	지역 2	지역 3	지역 4
D	B	C	A
C	A	B	B
A	D	A	D
B	C	D	C

○ 실험결과

품종	지역 1	지역 2	지역 3	지역 4
A	9.3	9.4	9.6	10.0
B	9.4	9.3	9.8	9.9
C	9.2	9.4	9.5	9.7
D	9.7	9.6	10.0	10.2

○ 분산분석표

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
품종	3	0.385	0.1283	14.42
블록	3	0.825	0.2750	
오차	9	0.080	0.0089	
전체	15	1.290		

- 5% 유의수준에서 $F_{0.05}(3,9) = 3.86$ < 14.42

⇨ 옥수수 품종에 따라 옥수수 생산량에 차이가 있음

○ 만약 이 실험을 완전 확률화 설계법으로 생각하고 분석을 했다면

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
품종	3	0.385	0.1283	1.70
오차	12	0.905	0.0754	
전체	15	1.290		

- 5% 유의수준에서 품종에 따라 옥수수 생산량에 차이가 있다고 할 수 없음 ⇨ 앞에서 블록에 의해 설명되는 변동이 모두 오차의 변동으로 포함됨

○ 처리효과에 대한 다중비교

- $H_0 : \mu_{i.} = \mu_{k.}$ vs $H_1 : \mu_{i.} \neq \mu_{k.}$ 또는 $\mu_{i.} - \mu_{k.}$의 신뢰구간
- $\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{k.} \pm c\sqrt{MSE}\sqrt{2/b}$
  - 최소유의차: $c = t_{\alpha/2,(a-1)(b-1)}$
  - Bonferroni: $c = t_{\alpha/(2k),(a-1)(b-1)}$, $k =$ 비교검정의 경우의 수
  - Scheffe: $c = \sqrt{(a-1)F_{\alpha,a-1,(a-1)(b-1)}}$
  - Tukey: $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{\alpha,a,(a-1)(b-1)}$