# Math for Computer Graphics

Vector, Matrix, …
출처: 네이버 지식백과,
수학백과 물리학백과

# Outline

I. Scalar
II. Vector
III. Matrix
IV. Trigonometric functions

# 0. 스칼라, Scalar

- 크기만 갖는 물리량

# 1. 벡터, Vector

- 위치, 속도 힘 등과 같이 **크기**와 **방향성**을 갖는 물리량을 나타내는데 사용하는 기하학적 대상

# 1.1 벡터의 표시법

한 벡터를 부호 $a$를 사용하여 나타낼 때는, $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\tilde{a}$ 등과 같이 표기한다. 또한 $\mathbf{a}$의 크기를 나타낼 때는 $|\mathbf{a}|$, $a$ 등의 방법으로 표기한다.

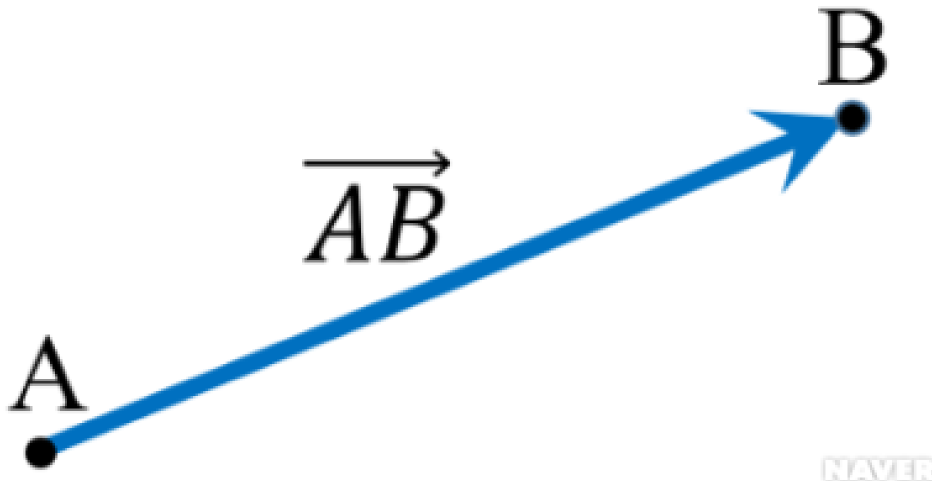



그림 1. 벡터의 도식법 (출처:한국물리학회)

# 1.2 벡터의 기본적인 성질

### 동등성

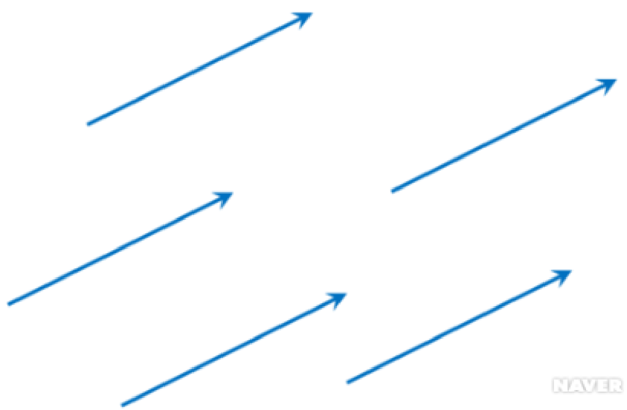


그림 3. 동등한 벡터들 (출처:한국물리학회)

벡터가 크기와 방향만을 가지므로 원점의 특정한 위치는 아무런 의미를 갖지 않는다. 즉, 원점이 일치하지 않더라도 두 화살표의 방향이 일치하고 크기가 같으면, 동일한 벡터를 의미한다.

### 영 벡터

영벡터는 크기가 영인 벡터이다.

### 음 벡터

벡터 $\mathbf{a}$ 자신에 더했을 때 결과가 영벡터가 되는 벡터를 $\mathbf{a}$의 음벡터라고 정의하고 $-\mathbf{a}$로 표시한다. 즉, 음벡터 $-\mathbf{a}$는 $\mathbf{a}$와 크기는 같으나 방향이 정반대인 벡터이다.

# 1.3 벡터의 좌표와 성분

좌표와 좌표벡터(coordinate vector)

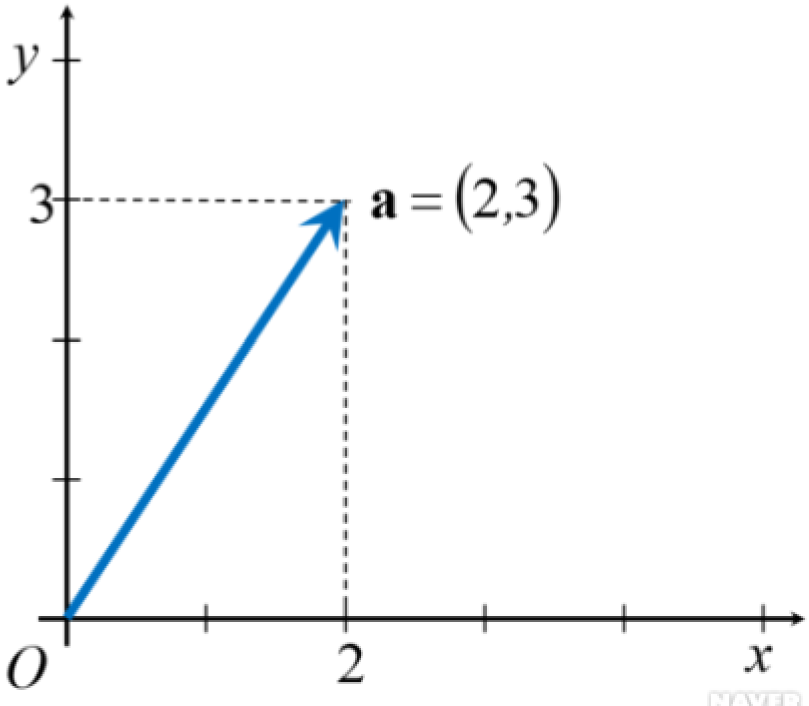



그림 4. 벡터의 좌표와 좌표벡터 (출처:한국물리학회)

# 1.3 벡터의 좌표와 성분

벡터의 성분, 벡터의 분해, 벡터의 합성

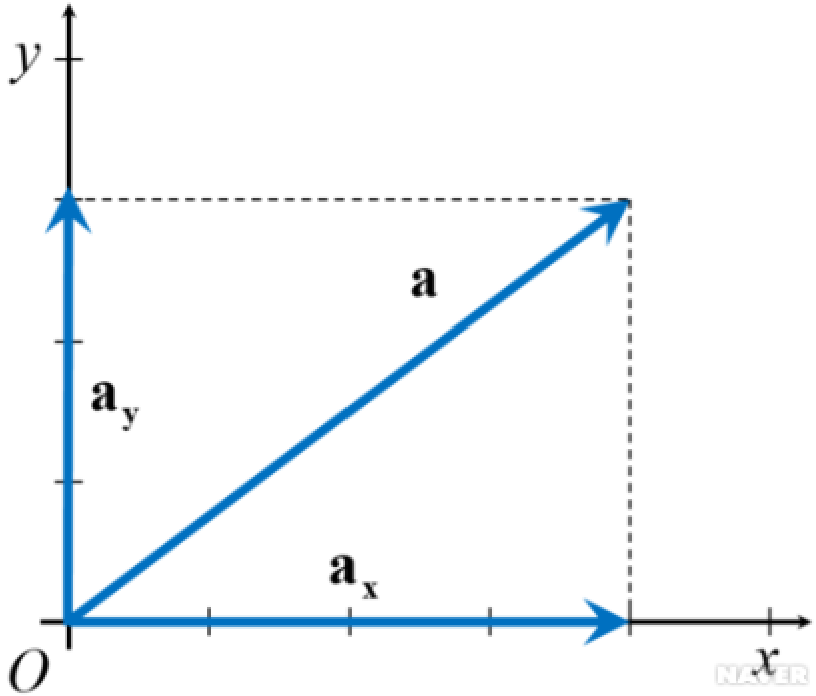
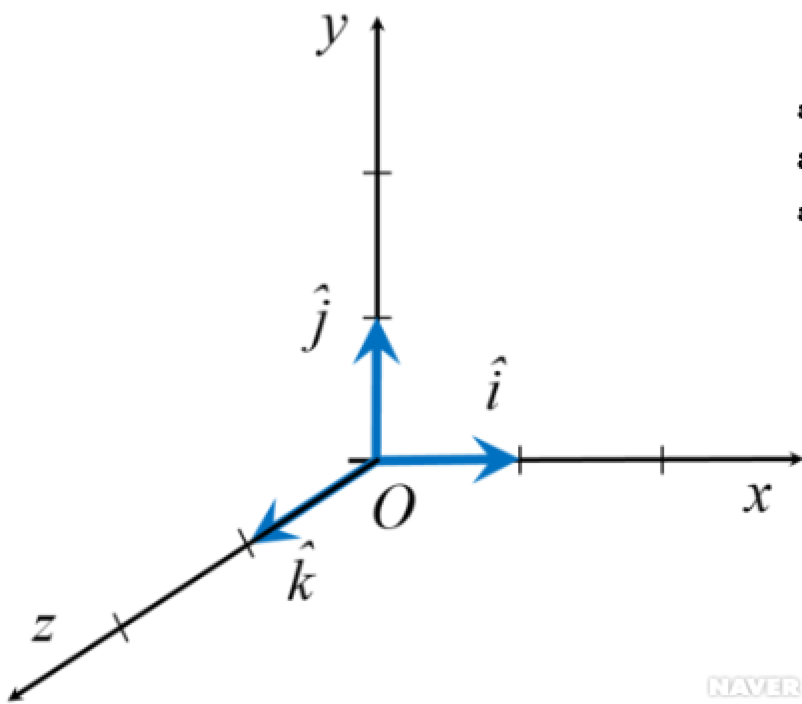



그림 5. 벡터의 성분 (출처:한국물리학회)

# 1.4 단위 벡터

### 단위벡터

벡터의 성분 표시를 편리하게 하기 위하여 추가적으로 단위벡터를 도입할 수 있다. 단위벡터는 크기가 1이며 특정한 방향을 갖는 벡터이다. 단위벡터는 벡터의 방향을 나타내기 위할 뿐이기 때문에, 차원과 단위가 없다. 3차원의 직각좌표계 $(x, y, z)$가 주어질 때, 각 좌표축에 나란한 방향을 갖는 단위벡터를 각각 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 이라고 나타낸다.




$$\mathbf{a}_x = a_x \hat{i}$$
$$\mathbf{a}_y = a_y \hat{j}$$
$$\mathbf{a}_z = a_z \hat{k}$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

그림 6. 3차원 직각좌표계의 단위벡터들 (출처:한국물리학회)

# 1.4 단위 벡터

좌표와 좌표벡터(coordinate vector)

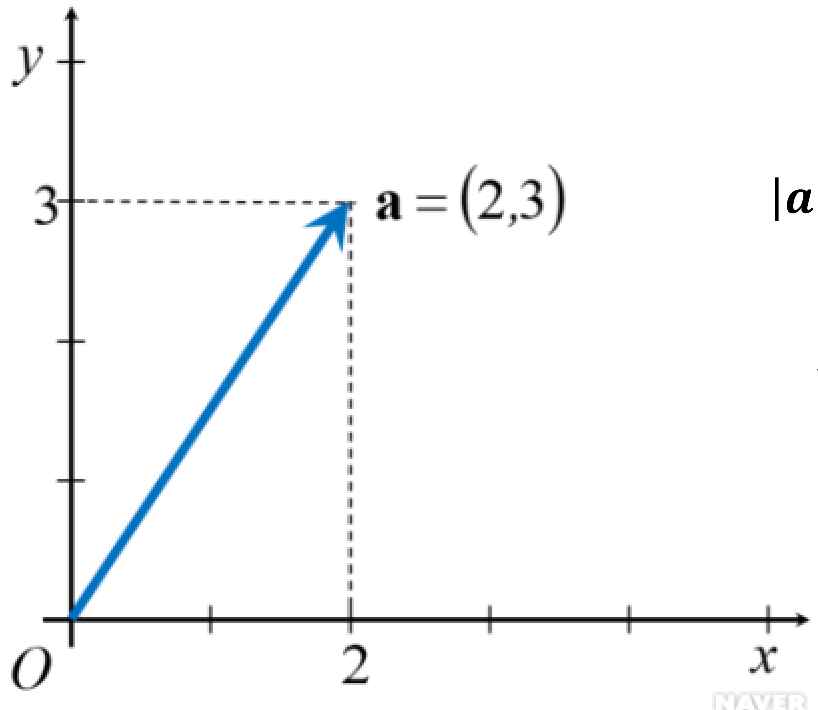



그림 4. 벡터의 좌표와 좌표벡터 (출처:한국물리학회)

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

# 1.5 벡터의 연산 - 덧셈

## 벡터의 덧셈

### 기하학적인 방법 1 – 삼각형법(tail-to-tip method)

공간 상의 위치는 벡터량이다. 따라서 위치의 변화인 변위(displacement)도 벡터량이다. 위치 $\mathbf{A}$에서 위치 $\mathbf{B}$로 이동한 후에 다시 위치 $\mathbf{C}$로 이동하는 운동을 고려해보자. 첫 번째의 변위를 벡터 $\mathbf{a}$, 두 번째의 변위를 벡터 $\mathbf{b}$라고 하자. 알짜변위는 위치 $\mathbf{A}$에서 위치 $\mathbf{C}$로 직접 이동한 것이다. 즉, 그림 7과 같이, 알짜 변위를 벡터 $\mathbf{r}$이라고 하면, $\mathbf{r}$은 $\mathbf{A}$에서 $\mathbf{C}$로 연결한 화살표로 나타낼 수 있다.

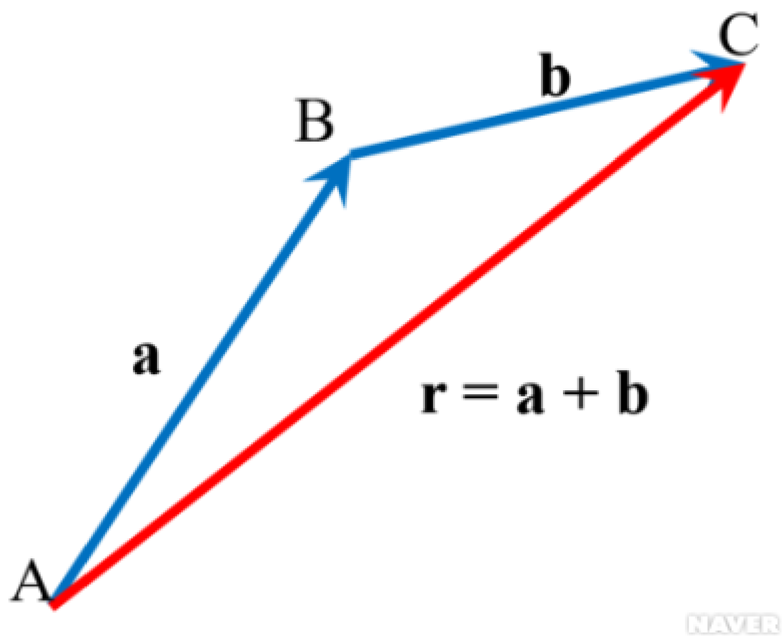



그림 7. 합벡터 - 삼각형법 (출처:한국물리학회)

# 1.5 벡터의 연산 - 덧셈

덧셈의 교환법칙

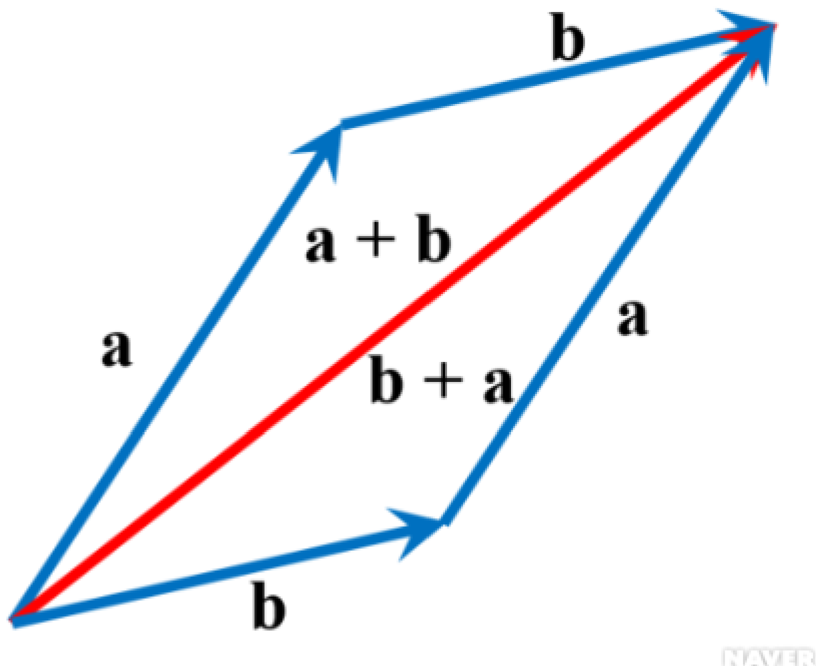



그림 8. 덧셈의 교환법칙 (출처:한국물리학회)

그림 8이 명백하게 보여주듯이, 더하는 두 벡터의 순서가 바뀌어도 결과는 마찬가지이다. 이를 벡터의 덧셈이 교환법칙을 만족시킨다고 말한다.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

# 1.5 벡터의 연산 - 덧셈

**덧셈의 결합법칙**

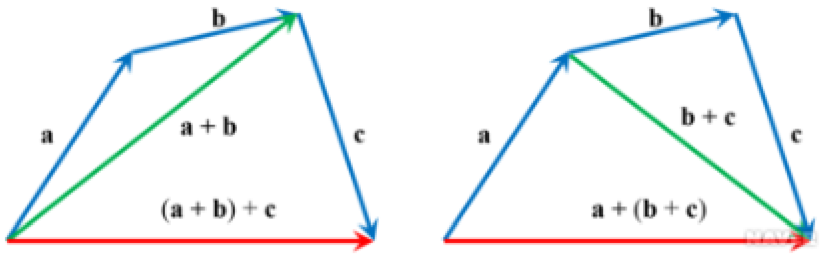



그림 9. 덧셈의 결합법칙 (출처:한국물리학회)

그림 9가 명백하게 보여주듯이, 더하는 벡터들이 두 개 이상인 경우에도, 더하는 순서에 상관없이 결과는 동일하다. 이를 벡터의 덧셈이 결합법칙을 만족시킨다고 말한다.

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

# 1.6 벡터의 연산 - 뺄셈

**벡터의 뺄셈**

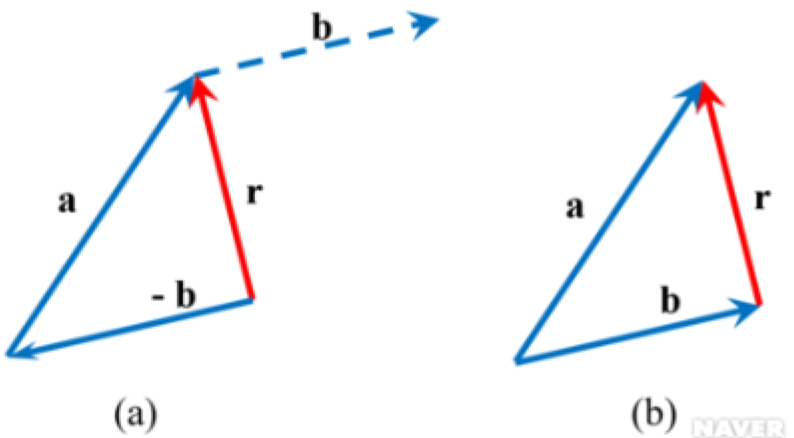



그림 12. 벡터의 뺄셈 (a) $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ (b) $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{r}$ (출처:한국물리학회)

# 1.7 벡터의 연산 - 곱셈

**스칼라배(scalar multiplication)**

벡터에 스칼라가 곱해지는 경우이다. 벡터들의 곱인 스칼라곱(scalalr product)과는 구별이 되어야 한다. 벡터 $\mathbf{a}$에 스칼라 $s$를 곱하면 새로운 벡터 $\mathbf{a}'$을 얻을 수 있다. $\mathbf{a}'$의 크기는 $\mathbf{a}$ 의 크기에 $s$의 절대값을 곱한 값이다. $\mathbf{a}'$의 방향은 $s$가 양일 때는 $\mathbf{a}$의 방향과 같고, $s$가 음일 때는 $\mathbf{a}$와 정반대 방향이다. 벡터를 $s$로 나누는 것은, 벡터에 스칼라 $1/s$를 곱하는 것과 같다.

# 1.8 벡터의 연산 – 내적

스칼라곱

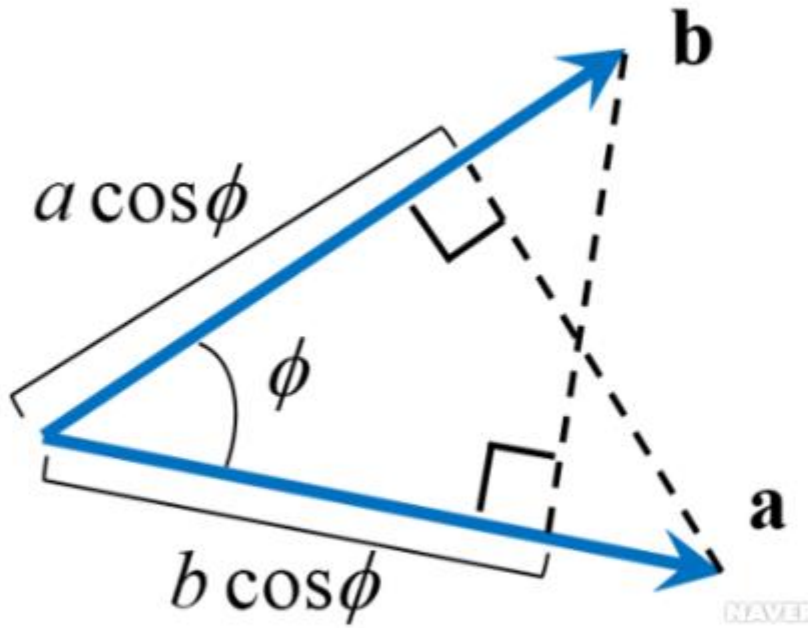



그림 13. 벡터의 스칼라곱 (출처:한국물리학회)

두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 스칼라곱은 스칼라이며, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$로 표기하며 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi$$

# 1.8 벡터의 연산 – 외적

벡터곱

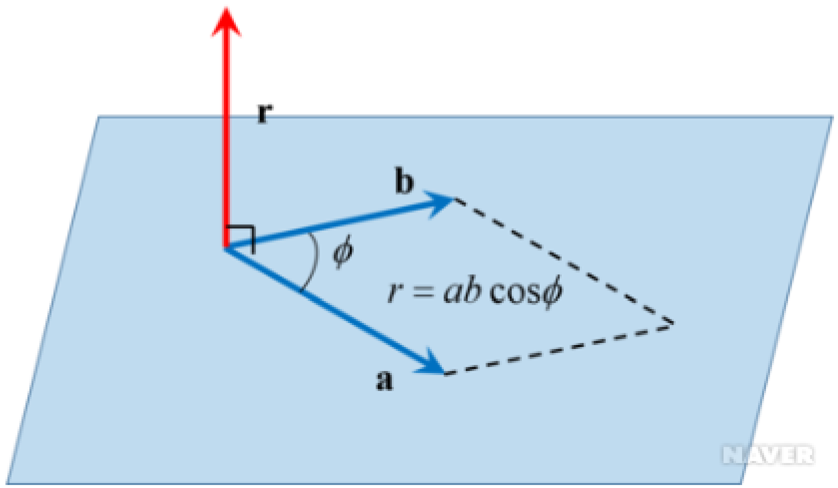



그림 14. 벡터곱의 방향 (출처:한국물리학회)

두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 벡터곱은 벡터이며, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$로 표기한다. 벡터곱의 결과벡터 $\mathbf{r}$의 크기는 다음과 같다.

$$r = ab\sin\phi$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

# 2. 행렬, Matrix

- 수나 식을 직사각형 모양으로 배열 한 것
- 가로를 행(row) 세로를 열(column) 이라고 하고 배열된 수나 식을 그 행렬의 선분(entry) 이라고 함
- 다음은 2개의 행과 3개의 열 6개의 성분을 갖고 있는 행렬 임
- 한 행, 한 열을 분리하여 하나의 행렬로 쓴 것을 각각 행벡터(row vector) 열벡터(column vector)라고 함

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 15 \\ 7 & 26 & 5 \end{bmatrix}$$

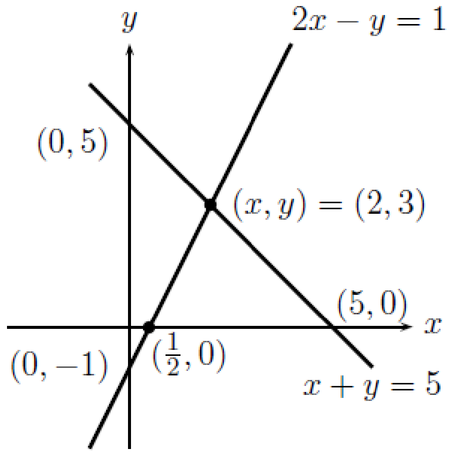
$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$는 행벡터, $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$는 열벡터

# 2.1 행렬 연립방정식

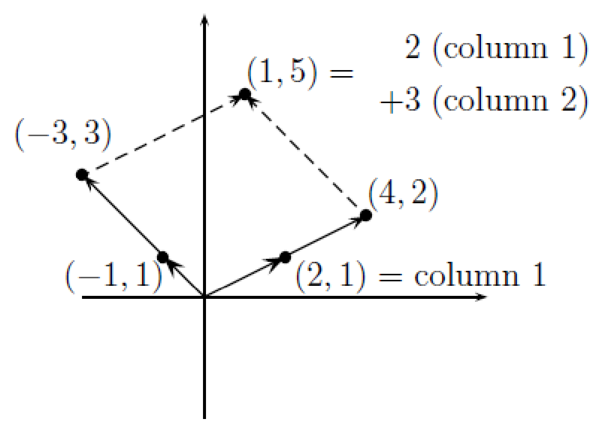
- 수학자들은 연립방정식의 해가 존재할 조건을 연구하는 과정에서 행렬식의 개념을 먼저 생각함

$$2x - y = 1$$
$$x + y = 5$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$




(a) Lines meet at $x = 2$, $y = 3$




(b) Columns combine with 2 and 3

# 2.2 행렬의 기호

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

# 2.3 행렬의 크기

행렬의 크기는 행의 수와 열의 수에 의하여 결정된다.

다음과 같이 $m$개의 행과 $n$개의 열을 갖는 행렬의 크기는 $m \times n$이다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

행렬 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$의 크기는 $2 \times 3$이다.

행벡터 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}$의 크기는 $1 \times 3$이고, 열벡터 $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$의 크기는 $2 \times 1$이다.

# 2.4 행렬의 덧셈과 뺄셈

**행렬의 덧셈과 뺄셈**

행렬의 덧셈과 뺄셈은 두 행렬의 크기가 같을 경우에만 정의된다.

1. 크기가 $m \times n$인 두 행렬 $A = [a_{ij}]$와 $B = [b_{ij}]$의 합 $A + B$는 크기가 $m \times n$인 행렬로서 그 성분은 대응되는 성분의 합으로 정의한다.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}], \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

2. 크기가 $m \times n$인 두 행렬 $A = [a_{ij}]$와 $B = [b_{ij}]$의 차 $A - B$의 성분은 대응되는 성분의 차로 정의한다.

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}], \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

**보기**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 3+0 & 5+6 \\ 1+3 & 4+5 & 3+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 11 \\ 4 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-4 & 3-0 & 5-6 \\ 1-3 & 4-5 & 3-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

# 2.5 행렬의 스칼라 배

크기가 $m \times n$인 행렬 $A = [a_{ij}]$와 실수 $k$에 대하여 행렬 $A$의 상수배(스칼라배) $kA$는 행렬 $A$의 각 성분에 실수 $k$를 곱하는 것으로 정의된다.

$$kA = [ka_{ij}]$$

**보기**

$$2\begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-5) \\ 2\cdot 3 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -10 \\ 6 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$

# 2.6 행렬의 곱셈

두 행렬 $A$와 $B$의 곱 $AB$는 앞의 행렬 $A$의 열의 개수와 뒤의 행렬 $B$의 행의 개수가 같아야만 정의된다.

행렬 $A$의 크기가 $m \times k$이고 행렬 $B$의 크기가 $k \times n$이면, 두 행렬의 곱 $AB$의 크기는 $m \times n$이고 $AB = [c_{ij}]$의 각 성분은 다음과 같이 정의한다.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}, \ \ (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

일반적으로 $AB$가 정의되어도 행렬 $BA$는 크기가 맞지 않아서 정의되지 않는 경우가 많고 정의가 되어도 일반적으로 $AB \neq BA$이다.

# 2.6 행렬의 곱셈

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$이라고 하자.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 7 + 5 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 7 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. 그러나

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 7 \cdot (-3) & 3 \cdot 5 + 7 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) & (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 23 & -21 & 22 \\ -3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이므로 $AB \neq BA$이다.

# 2.7 행렬의 성질

### 행렬의 덧셈

$A$, $B$, $C$가 $m \times n$ 행렬이라고 하자.

1. 덧셈에 대하여 결합법칙이 성립한다.

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

2.덧셈에 대한 항등원인 영행렬 $\mathbf{0}_{m,n}$ 이 존재한다.

$$A + \mathbf{0}_{m,n} = \mathbf{0}_{m,n} + A = A$$

3. 덧셈에 대한 역원이 존재한다. 이 역원을 행렬 앞에 $-$를 붙여 나타낸다.

$$A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}_{m,n}$$

4. 덧셈에 대하여 교환법칙이 성립한다.

$$A + B = B + A$$

# 2.7 행렬의 성질

**행렬의 곱셈**

1. 곱셈에 대하여 결합법칙이 성립한다. 즉, $A$가 $m \times n$ 행렬, $B$가 $n \times k$ 행렬, $C$가 $k \times l$ 행렬이라고 하면

$$(AB)C = A(BC)$$

가 성립한다.

2. 정사각행렬 $A$에 대해 $AI = IA = A$가 되는 행렬 $I$가 존재한다.

**행렬의 스칼라배**

행렬 $A$와 임의의 두 실수 $k, l$에 대하여

$$(kl)A = k(lA)$$

가 성립한다.

# 3. 삼각함수

$$\sin A = \frac{\text{대변}}{\text{빗변}} = \frac{a}{c}$$
$$\cos A = \frac{\text{인접변}}{\text{빗변}} = \frac{b}{c}$$
$$\tan A = \frac{\text{대변}}{\text{인접변}} = \frac{a}{b}$$

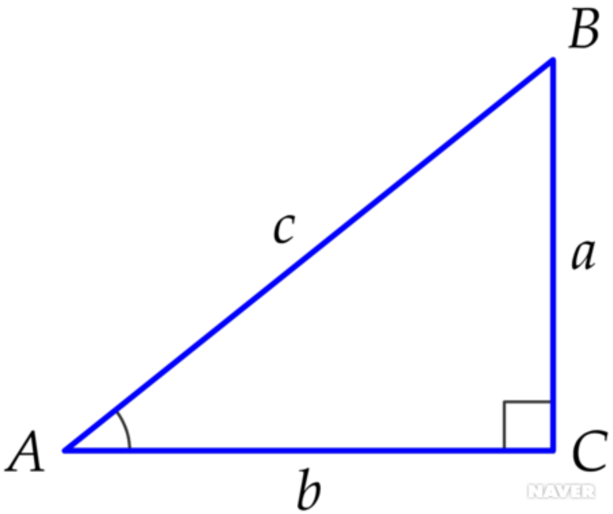



그림 1. 삼각함수

# 3.1 삼각함수 일반각

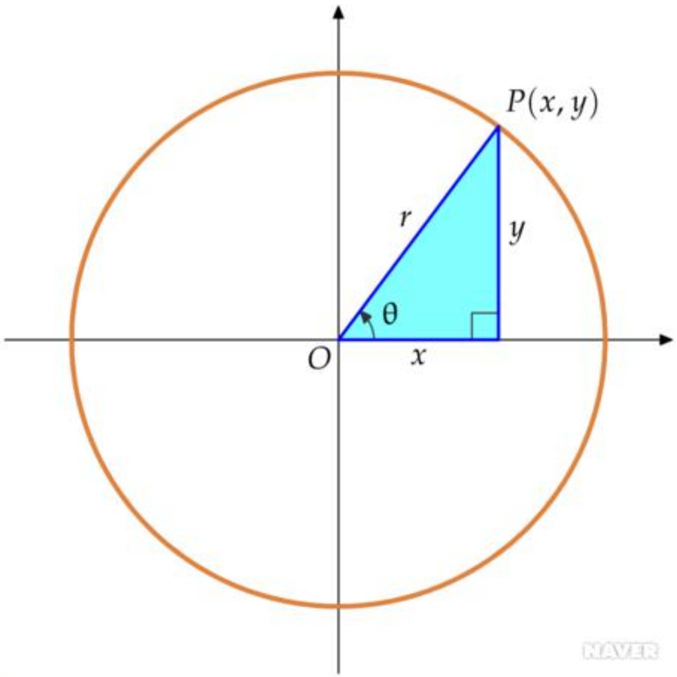
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

# 3.1 삼각함수 일반각

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$




| 그림 2. 삼각함수

# 3.2 삼각항등식

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

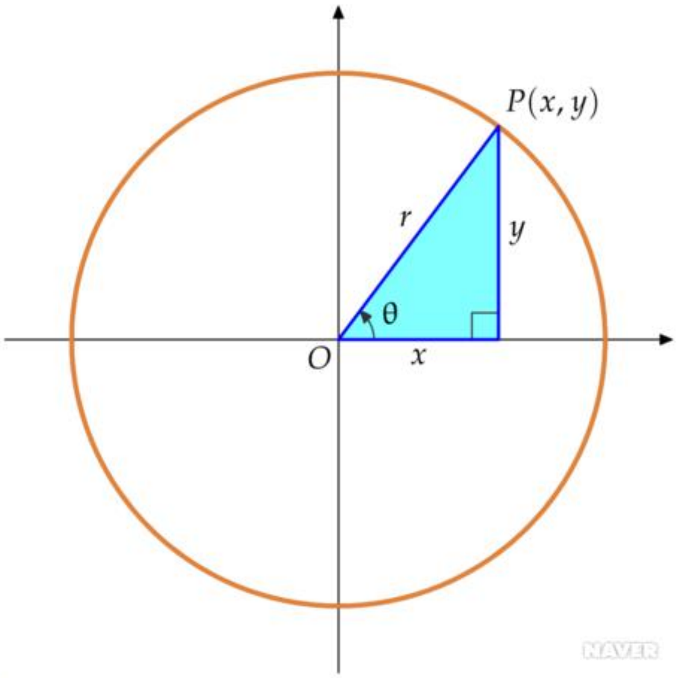


그림 2. 삼각함수

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad (1)$$