$$\nabla f(x,\ y,\ z) = f_x(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i} + f_y(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j} + f_z(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k}$$
$$= 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

따라서 점 $(2,\ -1,\ 1)$에서 최대증가의 방향은

$$\nabla f(2,\ -1,\ 1) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

이다.

연습문제 11.5

1. 다음 함수의 점 P에서 $\mathbf{v}$ 방향의 방향도함수를 구하여라.

(a) $f(x,\ y) = 3x - 4xy + 5y,\quad P(1,\ 2),\ \ \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}\right)$

(b) $g(x,\ y) = \sqrt{x^2 + y^2},\quad P(3,\ 4),\ \ \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

(c) $h(x,\ y) = e^x \sin y,\quad P\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right),\ \ \mathbf{v} = -\mathbf{i}$

(d) $f(x,\ y,\ z) = xy + yz + xz,\quad P(1,\ 1,\ 1),\ \ \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

(e) $h(x,\ y,\ z) = x \arctan yz,\quad P(4,\ 1,\ 1),\ \ \mathbf{v} = \langle 1,\ 2,\ -1\rangle$

2. 다음 함수에 대하여 $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$ 방향의 방향도함수를 구하여라.

$f(x,\ y) = x^2 + y^2,\quad \theta = \frac{\pi}{4}$

3. 다음 함수에 대하여 P에서 Q 방향의 방향도함수를 구하여라.

$f(x,\ y) = x^2 + 4y^2,\quad P(3,\ 1),\ Q(1,\ -1)$

4. 주어진 점에서 다음 함수의 그래디언트를 구하여라.

(a) $f(x,\ y) = 3x - 5y^2 + 10,\quad (2,\ 1)$

(b) $z = \cos(x^2 + y^2),\quad (3,\ -4)$

5. 그래디언트를 이용하여 다음 함수의 점 P에서 Q 방향의 방향도함수를 구하여라.

$g(x,\ y) = x^2 + y^2 + 1,\quad P(1,\ 2),\ Q(3,\ 6)$

6. 다음에서 함수의 그래디언트를 구하고 주어진 점에서 방향도함수의 최댓값을 구하여라.

(a) $h(x,\ y) = x \tan y,\quad \left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$

(b) $g(x,\ y) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2},\quad (1,\ 2)$

(c) $f(x,\ y,\ z) = x e^{yz},\quad (2,\ 0,\ -4)$

함수 $f(x,\ y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$에 대하여 다음 질문에 답하여라(7~9).

7. 제1팔분공간에 있는 f의 그래프를 그리고 곡면에 점 $(3,\ 2,\ 1)$을 나타내어라.

8. $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$일 때 $D_{\mathbf{u}} f(3,\ 2)$를 구하여라.

(a) $\mathbf{v}$는 $(1, 2)$에서 $(-2, 6)$까지의 벡터

(b) $\mathbf{v}$는 $(3, 2)$에서 $(4, 5)$까지의 벡터

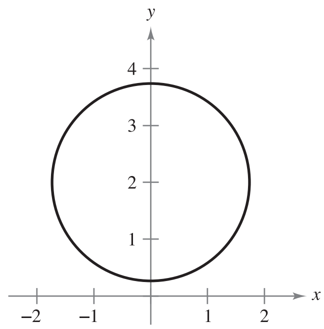
9. $(3, 2)$에서 방향도함수의 최댓값을 구하여라.

10. 그래디언트를 이용하여 주어진 점에서 방정식의 그래프의 단위법선벡터를 구하고 그 결과를 그려라.

(a) $4x^2 - y = 6,\quad (2,\ 10)$

(b) $9x^2 + 4y^2 = 40,\quad (2,\ -1)$

11. 다음 그림은 $c = 2$일 때 함수 $f(x,\ y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}$의 등위선을 나타낸다.



(a) 곡선이 원임을 해석적으로 밝혀라.

연습문제 11.7

1. 다음 주어진 함수의 형태나 완전제곱 형태에서 함수의 극점을 구하여라. 임계점에서 편도함수와 극값 판정법으로 그 결과를 확인하여라. 컴퓨터 대수시스템으로 함수의 그래프를 그리고 극점을 표시하여라.

(a) $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-3)^2$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6$

2. 다음 함수의 극값을 조사하여라.

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

(b) $f(x, y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$

(c) $z = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 13$

(d) $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2} + 3$

(e) $g(x, y) = 4 - |x| - |y|$

3. 컴퓨터 대수시스템으로 다음 곡면을 그리고 극점과 안장점을 찾아라.

(a) $z = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$

(b) $z = (x^2 + 4y^2)\, e^{1-x^2-y^2}$

4. 다음 함수의 극점과 안장점을 조사하여라.

(a) $h(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4$

(b) $h(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$

(c) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

(d) $f(x, y) = 2xy - \dfrac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$

5. 도함수 판정법을 이용하지 않고 다음 함수의 극값을 조사하고 컴퓨터 대수시스템으로 곡면을 그려라.

$$z = \frac{(x-y)^4}{x^2 + y^2}$$

6. 다음 사항이 함수 $f(x, y)$의 임계점 (x_0, y_0)에서 극솟값, 극댓값, 안장점인지 또는 함수의 성질을 결정하는 데 불충분한 정보인지 말하여라.

(a) $f_{xx}(x_0, y_0) = 9,\ \ f_{yy}(x_0, y_0) = 4,\ \ f_{xy}(x_0, y_0) = 6$

(b) $f_{xx}(x_0, y_0) = -9,\ \ f_{yy}(x_0, y_0) = 6,\ \ f_{xy}(x_0, y_0) = 10$

7. 함수 f는 점 (3, 7)에서 연속인 이계편도함수이다. 함수는 (3, 7)에서 최댓값을 갖고 이계편도함수 판정법에 대하여 $d > 0$이다. $f_{xx}(3, 7) = 2$, $f_{yy}(3, 7) = 8$일 때 $f_{xy}(3, 7)$에 대한 구간을 결정하여라.

8. 다음 함수의 극점들을 찾고 극값에 대하여 판정하여라. 이계도함수 판정법이 실패하는 점들을 찾아라.

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3$

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 9y^2 + 12x + 27y + 19$

(c) $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$

9. 함수 $f(x, y, z) = x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2$의 임계점과 극점을 구하여라. 주어진 형태로부터 각 점에서 극솟값을 갖는지, 극댓값을 갖는지 결정하여라.

10. 영역 R에서 다음 함수의 최솟값과 최댓값을 구하여라. 컴퓨터 대수시스템으로 결과를 확인하여라.

(a) $f(x, y) = 12 - 3x - 2y$

R: 꼭짓점이 (2, 0), (0, 1), (1, 2)인 xy평면의 삼각형

(b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$

R: $y = x^2$, $y = 4$로 둘러싸인 xy평면의 영역

(c) $f(x, y) = x^2 + xy$, $R = \{(x, y) : |x| \le 2,\ |y| \le 1\}$

(d) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 8\}$

(e) $f(x, y) = \dfrac{4xy}{(x^2+1)(y^2+1)}$,

$R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

11. 점 (0, 0, 0)으로부터 평면 $2x + 3y + z = 12$까지의 최소거리를 구하여라(**힌트**: 계산이 간편하도록 거리의 제곱을 최소화한다).

12. 점 (5, 5, 0)으로부터 포물면 $z = x^2 + y^2$까지의 최소거리를 구하여라.

13. 다음 주어진 조건을 만족하는 양의 수 x, y, z를 구하여라.

(a) 합이 30이고 곱이 최대

(b) 합이 30이고 제곱의 합이 최소

14. **(최대부피)** 퀵 서비스로 배달할 수 있는 물건의 길이와 수직단면의 둘레의 합이 108인치를 초과할 수 없다고 한다. 퀵 서비스로 보낼 수 있는 가장 큰 직사각형 상자의 치수를 구하여라.

15. **(최대부피)** 다음 타원체의 부피는 $4\pi abc/3$이다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

합 $a+b+c$가 일정할 때, 최대부피인 타원체는 구임을 보여라.

16. **(부피와 곡면의 넓이)** 일정한 부피를 갖고 겉넓이가 최소인 직육면체 상자는 정육면체임을 보여라.

17. **(최대수입)** 어느 소매상은 가격이 각각 p_1, p_2인 두 종류의 잔디 깎는 기계를 판다. 전체 수입

$$R=515p_1+805p_2+1.5p_1p_2-1.5p_1^2-p_2^2$$

이 최대가 되는 p_1, p_2를 구하여라.

18. **(하디-바인베르크 법칙)** 보통 혈액형은 유전자 A, B, O에 따라 유전적으로 결정된다. 혈액형이 AA, BB, OO인 사람은 동형접합자(homozygous)이고, 혈액형이 AB, AO, BO인 사람은 이형접합자(heterozygous)이다. 하디-바인베르크 법칙(Hardy-Weinberg Law)은 집단 중 이형접합자의 빈도 P가 다음과 같음을 말한다.

$$P(p,\ q,\ r)=2pq+2pr+2qr$$

여기서 p는 집단 중 유전자 A의 빈도, q는 유전자 B의 빈도, r은 유전자 O의 빈도를 나타낼 때 $p+q+r=1$임을 이용하여 어느 집단에서도 이형접합자의 최대빈도는 $\frac{2}{3}$임을 보여라.

19. **(참, 거짓)** 다음 명제가 참인지 거짓인지 판별하여라. 거짓이면 그 이유를 설명하거나 예를 들어라.

「f가 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$에서 극댓값을 가지면 $f_x(x_0,\ y_0)=f_y(x_0,\ y_0)=0$이다.」

20. **(최소제곱 회귀선)** x_i가 모두 같지 않은 n개의 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $\cdots$, $(x_n,\ y_n)$에서 직선 $y=ax+b$에 이르는 수직 거리의 제곱의 합을 최소로 하는 직선을 **최소제곱 회귀선**(least squares regression line)이라 한다. a, b가 연립방정식

$$nb+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a=\sum_{i=1}^{n}y_i$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a=\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i$$

의 유일한 해일 때

$$S(a,\ b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

이 최소임을 증명하여라.

$$T\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{91}{3} \approx 30.33$$

$$T\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{91}{3} \approx 30.33$$

그러므로 곡선에서 $T = 25$는 최소온도이고 $T = \frac{91}{3}$은 최대온도가 된다.

연습문제 11.8

1. x와 y가 양일 때 라그랑즈 승수를 이용하여 다음 극값을 구하여라.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ 최솟값, 제약조건: $x - 2y + 6 = 0$

(b) $f(x, y) = 2x + 2xy + y$ 최댓값, 제약조건: $2x + y = 100$

(c) $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ 최댓값, 제약조건: $x + y = 2$

(d) $f(x, y) = e^{xy}$ 최댓값, 제약조건: $x^2 + y^2 = 8$

2. 제약조건 $x^2 + y^2 \le 1$에서 라그랑즈 승수를 이용하여 함수 $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$의 극값을 구하여라.

3. x와 y가 양일 때, 라그랑즈 승수를 이용하여 다음 극값을 구하여라.

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 최솟값
제약조건: $x + y + z - 6 = 0$

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 최솟값
제약조건: $x + y + z = 1$

4. 라그랑즈 승수를 이용하여 두 제약조건에서 주어진 함수 f의 극값을 구하여라. 각 경우에서 x, y, z는 모두 음이 아니다.

(a) $f(x, y, z) = xyz$ 최댓값
제약조건: $x + y + z = 32$, $x - y + z = 0$

(b) $f(x, y, z) = xy + yz$ 최댓값
제약조건: $x + 2y = 6$, $x - 3z = 0$

5. 라그랑즈 승수를 이용하여 주어진 점과 주어진 곡선 또는 곡면까지의 거리의 최솟값을 구하여라.

(a) 직선: $2x + 3y = -1$, $(0, 0)$

(b) 평면: $x + y + z = 1$, $(2, 1, 1)$

6. 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 36$과 평면 $2x + y - z = 2$의 교선에 있는 가장 높은 점을 구하여라.

7. **(최대부피)** 라그랑즈 승수를 이용하여 길이와 수직단면의 둘레의 합이 108인치를 초과하지 않는 가장 큰 부피의 직사각형 상자의 치수를 구하여라. 11.7절 연습문제 14의 답과 비교하여라.

8. **(최소겉넓이)** 라그랑즈 승수를 이용하여 부피가 V_0이고 겉넓이가 최소인 직원주의 크기를 구하여라.

9. **(빛의 굴절)** 투명한 매질 속을 진행하는 빛이 두 번째 매질의 경계면에서 부딪칠 때 최소시간의 경로를 찾기 위하여 빛이 굽는다. 이러한 경향을 굴절이라 하는데 다음과 같은 스넬의 굴절법칙(Snell's Law of Refraction)으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

여기서 θ_1, θ_2는 각각 각의 크기이고, v_1, v_2는 각각 두 매질에서의 빛의 속도이다. $x + y = a$와 라그랑즈 승수를 이용하여 이 법칙을 유도하여라.