12장. 중적분 (Multiple Integration)

12장. 중적분

12.1 반복적분과 평면에서의 넓이

12.2 이중적분과 부피

12.4 질량중심과 관성모멘트

12.5 곡면의 넓이

12.6 삼중적분과 응용

12.7 원주좌표계와 구면좌표계의 삼중적분

12.8 변수변환과 야코비안

12.3 극좌표로 변수변환

12.1 반복적분과 평면에서의 넓이

- ✓ 반복적분 계산하기
- ✓ 반복적분을 이용하여 평면영역에서의 넓이 구하기

반복적분 (Iterated/Repeated Integral)

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y)\,dx = f(x, y)\Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \quad x\text{에 대한 적분}$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y)\,dy = f(x, y)\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \quad y\text{에 대한 적분}$$

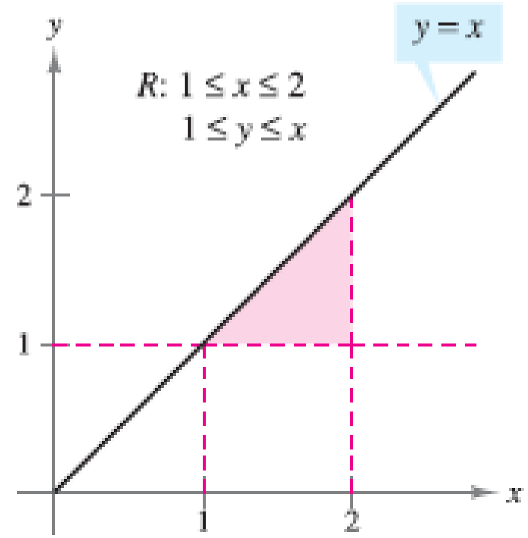
$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx, \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy$$

- **정적분**의 특별한 경우
- 반복적분의 적분영역
  - 적분의 안쪽 한계 – 적분의 안쪽 변수에 대하여 **상수** & 바깥쪽 변수에 대한 **함수**
  - 적분의 바깥쪽 한계 – 적분의 두 변수에 대하여 **상수**

예제 2: 적분의 적분

예제 2 적분의 적분

$\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2 y^{-2} + 2y)\, dy \right] dx$를 계산하여라.



평면영역의 넓이

평면에 있는 영역의 넓이

1. 구간 $[a, b]$에서 연속함수인 g_1과 g_2에 대하여 R이 구간 $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$이면 R의 넓이는

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx \qquad \text{그림 12.2}$$

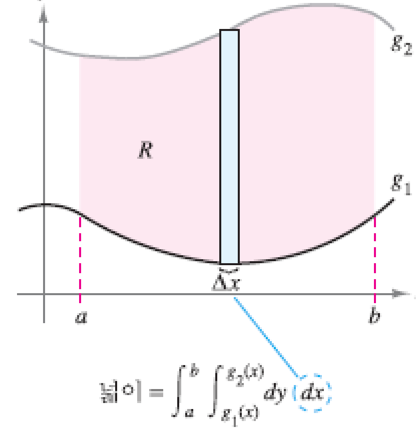
이다.

2. 구간 $[c, d]$에서 연속함수인 h_1과 h_2에 대하여 R의 구간이 $c \le y \le d$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$이면 R의 넓이는

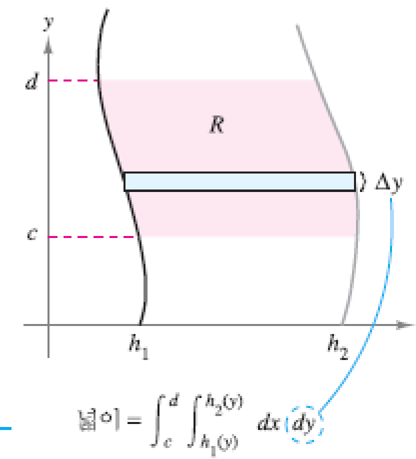
$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\,dy \qquad \text{그림 12.3}$$

이다.

$a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$인 유계영역



$c \le y \le d$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$인 유계영역



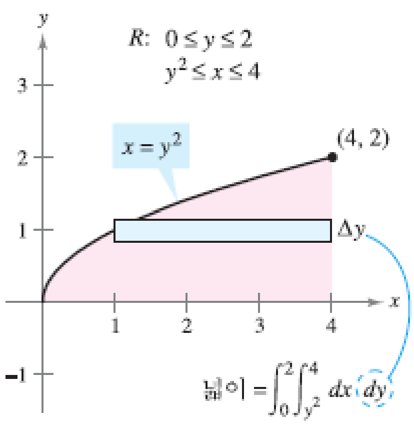
예제 5: 적분의 순서

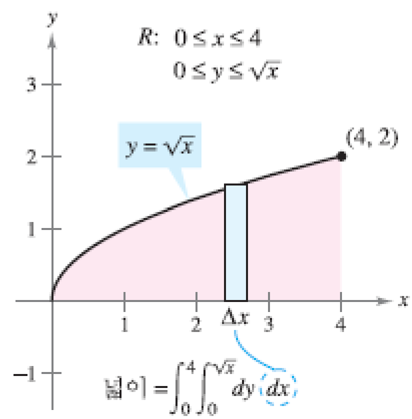
예제 5 적분순서를 비교하기

넓이가 적분

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dxdy$$

로 나타내는 영역을 그리고 순서를 $dydx$로 하여 반복적분으로 넓이를 구하여라.

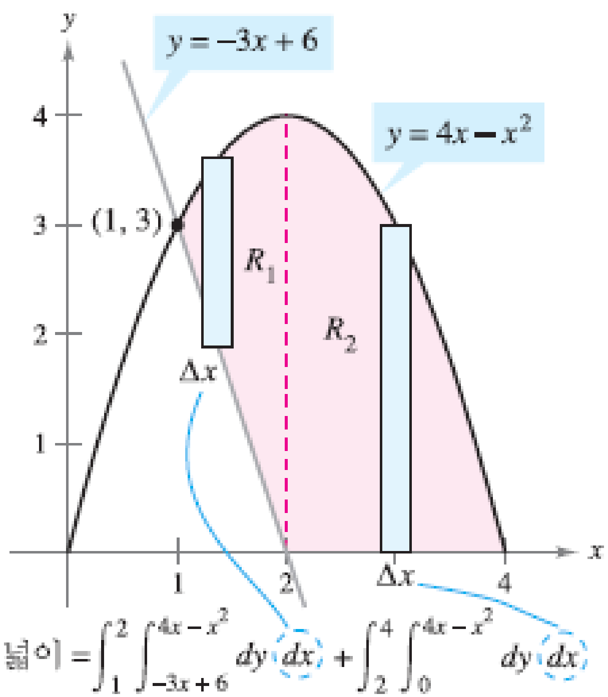




예제 6: 부분영역으로 나누어 적분하기

예제 6 두 반복적분으로 나누어 넓이 계산하기

x축, 직선 $y = -3x + 6$의 윗부분, 포물선 $y = 4x - x^2$의 아랫부분으로 둘러싸인 영역 R의 넓이를 구하여라.



12.2 이중적분과 부피

- ✓ 이중적분으로 입체영역의 부피 나타내기
- ✓ 이중적분의 성질 이용하기
- ✓ 반복적분으로 이중적분 계산하기

이중적분 (Double Integral)과 부피

- 이변수함수 $f(x, y)$ 와 xy평면이 나타내는 입체의 부피의 근사값

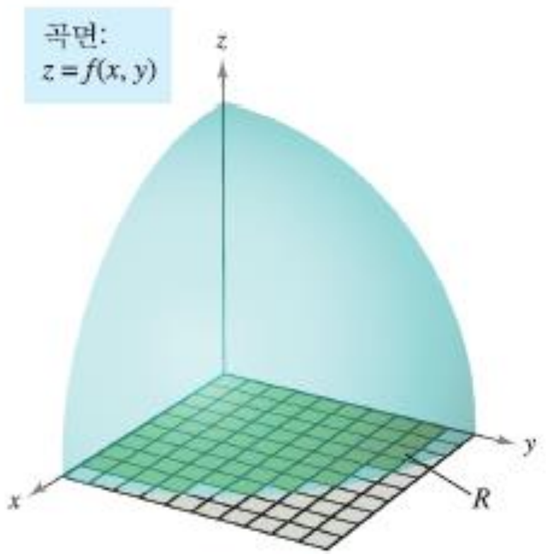


그림 12.9 직사각형은 R을 포함하는 영역에 놓여 R을 내분할한다.

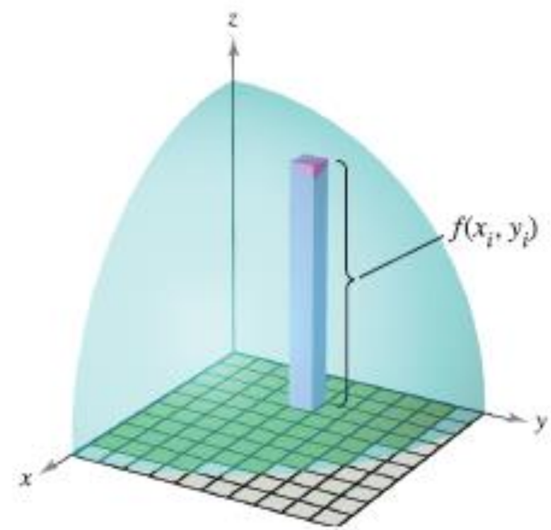


그림 12.10 밑넓이가 ΔA_i, 높이가 $f(x_i, y_i)$인 직사각기둥

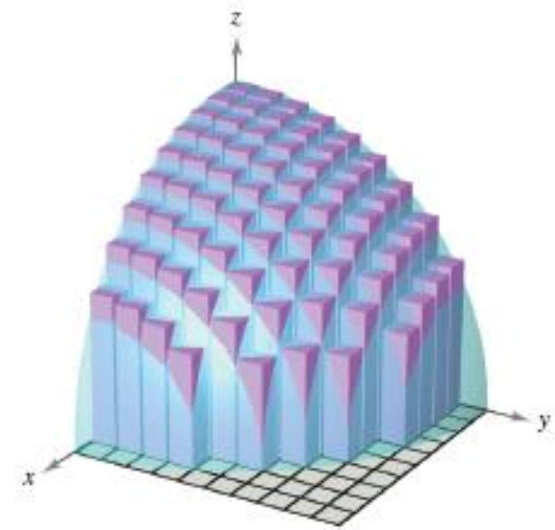


그림 12.11 부피는 직사각기둥 묶음으로 근사하여 나타낸다.

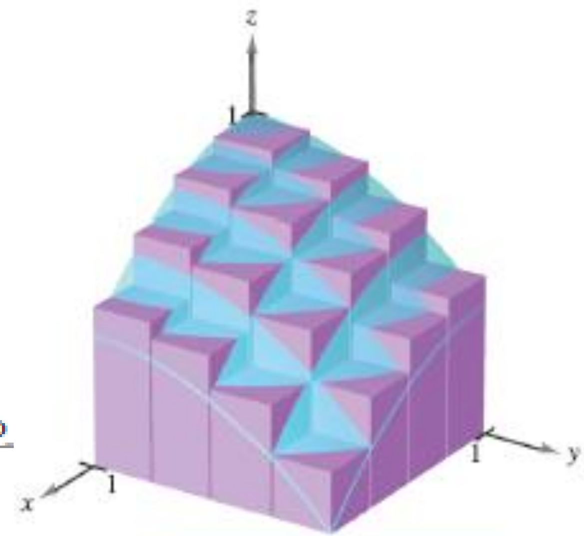
예제 1: 입체의 부피에 대한 근사

예제 1 입체의 부피에 대한 근사

$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$인 정사각형영역과 포물면

$$f(x,\ y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

으로 된 입체의 부피의 근삿값을 구하여라. 한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$인 정사각형으로 분할한다.



곡면: $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) \quad \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) \quad \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right) \quad \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

$$\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) \quad \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) \quad \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) \quad \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

$$\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right) \quad \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) \quad \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right) \quad \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

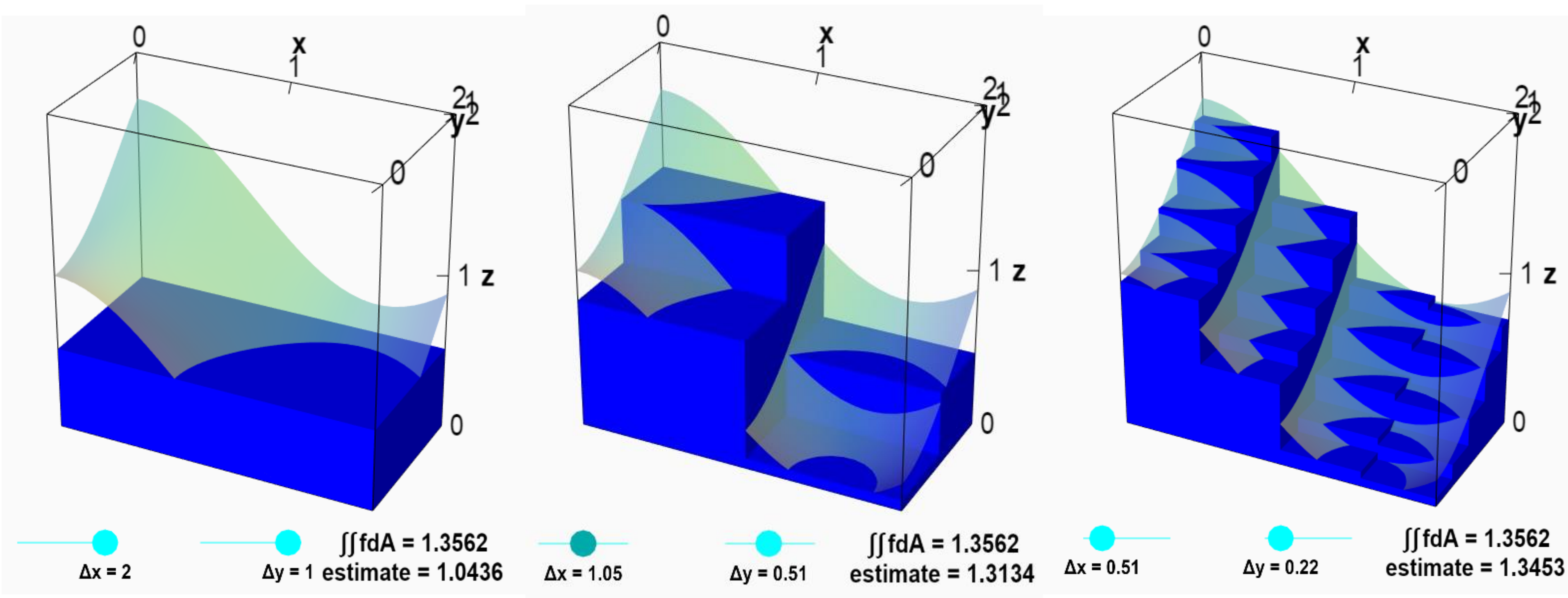
$$\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) \quad \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right) \quad \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right) \quad \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{16} f(x_i,\ y_i)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{16}\left(1 - \frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}y_i^2\right)\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$\approx 0.672$$

정확한 입체의 부피는 $\frac{2}{3}$

입체의 부피에 대한 근사에 대한 Applet



이중적분 (Double Integral) – 직사각형 영역

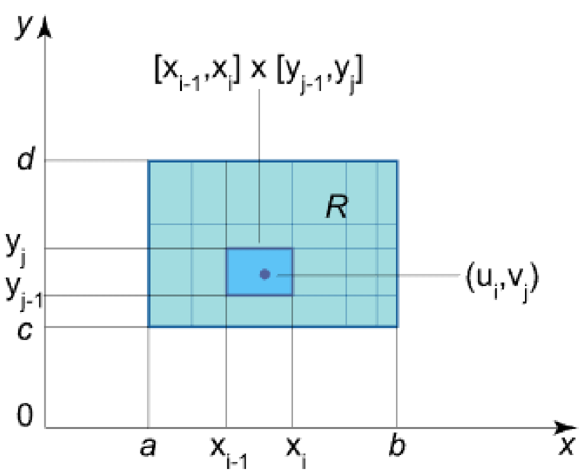


Figure 2.

If the region R is a rectangle $[a,b] \times [c,d]$ (Figure 2), we can subdivide $[a,b]$ into small intervals with a set of numbers $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ so that

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{m-1} < x_m = b.$$

Similarly, a set of numbers $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ is said to be a partition of $[c,d]$ along the y-axis, if

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_j < \ldots < y_{n-1} < y_n = d.$$

The *Riemann sum* of a function $f(x,y)$ over this partition of $[a,b] \times [c,d]$ is

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(u_i, v_j)\, \Delta x_i \Delta y_j,$$

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dA = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(u_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

이중적분 (Double Integral) – 일반적인 영역

To define the double integral over a bounded region R other than a rectangle, we choose a rectangle $[a, b] \times [c, d]$ that contains R (Figure 3), and we define the function $g\,(x, y)$ so that

$$\begin{cases} g\,(x,y) = f\,(x,y)\,, \text{ if } \ f\,(x,y) \in R \\ g\,(x,y) = 0, \text{ if } \ f\,(x,y) \notin R \end{cases}$$

Then, the double integral of the function $f\,(x, y)$ over a general region R is defined to be

$$\iint_R f\,(x,y)\,dA = \iint_{[a,b]\times[c,d]} g\,(x,y)\,dA.$$

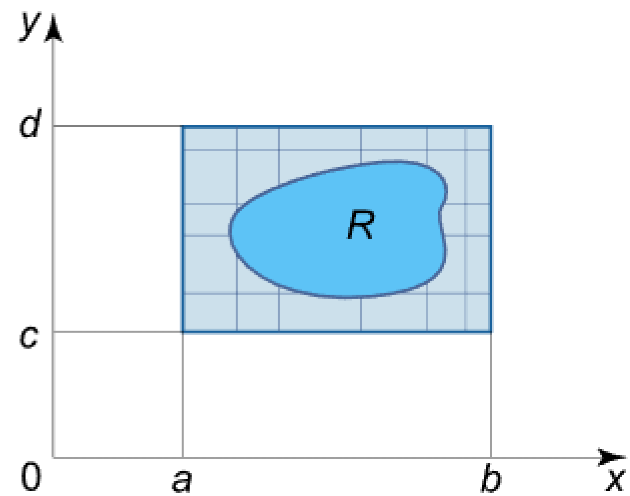


Figure 3.

이중적분을 이용한 입체영역의 부피

입체영역의 부피

f가 평면영역 R에서 적분가능이고 모든 (x, y)에 대하여 $f(x, y) \geq 0$이면 R과 f 사이(영역 R 위, f의 그래프 아래)에 있는 입체영역의 부피는

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

이다.

이중적분의 성질

정리 12.1 이중적분의 성질

f와 g가 유계이고 닫힌영역 R에서 연속이고 c는 상수일 때

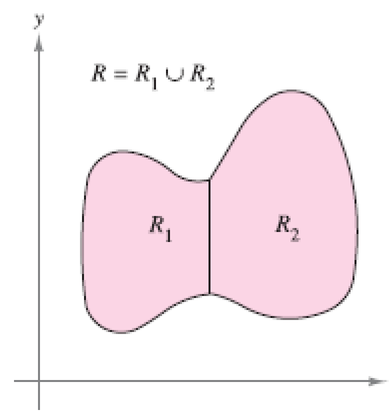
1. $\displaystyle\iint_R cf(x, y)\,dA = c\iint_R f(x, y)\,dA$

2. $\displaystyle\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\,dA = \iint_R f(x, y)\,dA \pm \iint_R g(x, y)\,dA$

3. $f(x, y) \geq 0$이면 $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA \geq 0$

4. $f(x, y) \geq g(x, y)$이면 $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA \geq \iint_R g(x, y)\,dA$

5. $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_{R_1} f(x, y)\,dA + \iint_{R_2} f(x, y)\,dA$, 여기서 부분영역 R_1과 R_2는 겹치지 않는다.



이중적분의 계산 – 반복적분의 이용

정리 12.2 푸비니의 정리

함수 f가 평면영역 R에서 연속일 때

1. R이 $a \le x \le b$와 $g_1(x) \le y \le g_2(x)$에서 정의되고 g_1, g_2는 $[a, b]$에서 연속이면

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx$$

이다.

2. R이 $c \le y \le d$와 $h_1(y) \le x \le h_2(y)$에서 정의되고 h_1, h_2는 $[c, d]$에서 연속이면

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy$$

이다.

예제 2: 이중적분의 계산 – 반복적분의 이용

예제 2　반복적분으로 이중적분 계산하기

R이 $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$일 때 다음 이중적분을 계산하여라.

$$\iint_R \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dA$$

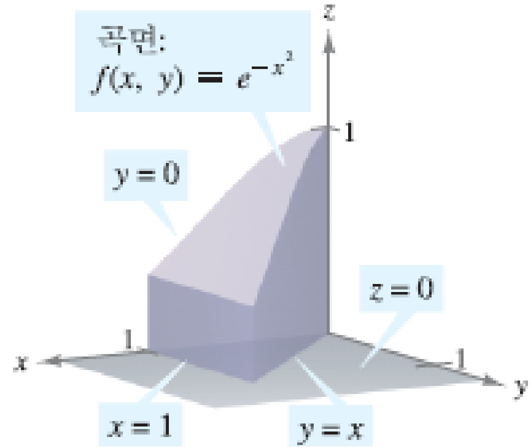
예제 4: 이중적분의 계산 – 반복적분의 이용

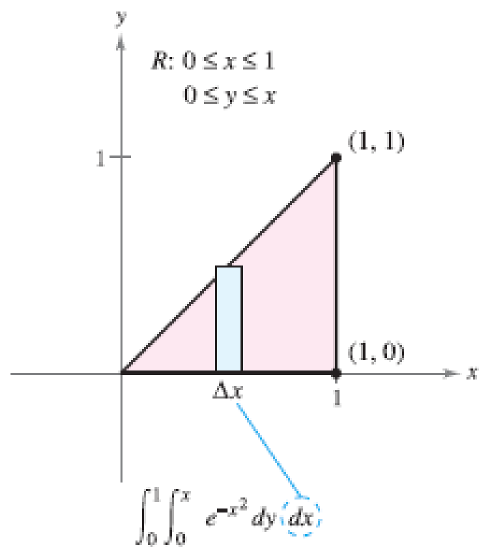
예제 4 **적분순서 비교하여 풀기**

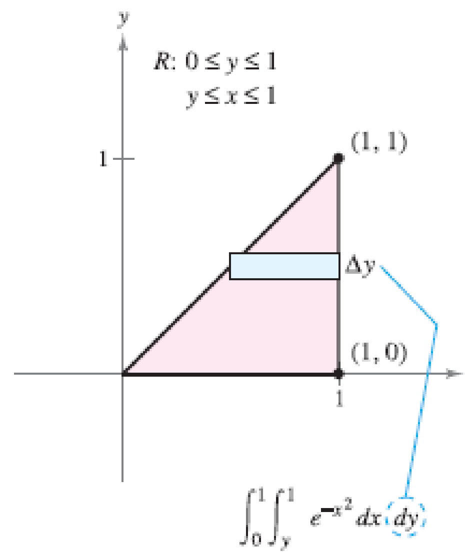
평면 $z=0,\ y=0,\ y=x,\ x=1$과 곡면

$$f(x,\ y)=e^{-x^2}$$

으로 둘러싸인 입체의 부피를 구하여라(그림 12.20).







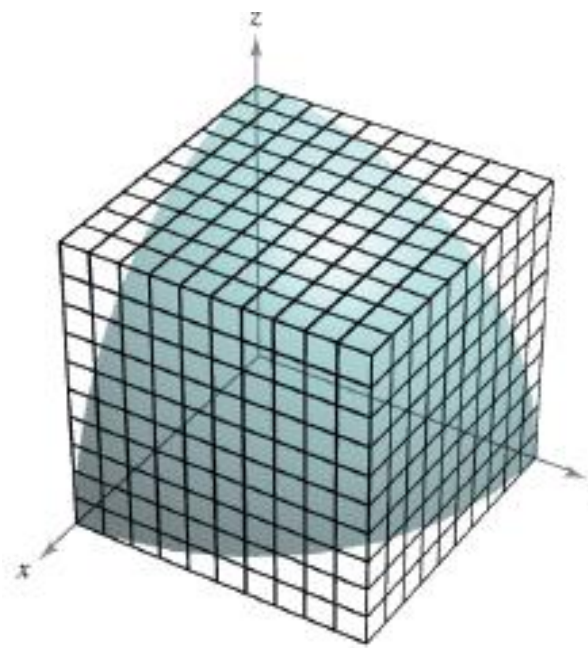
12.6 삼중적분과 응용

- ✓ 삼중적분으로 입체영역의 부피 구하기

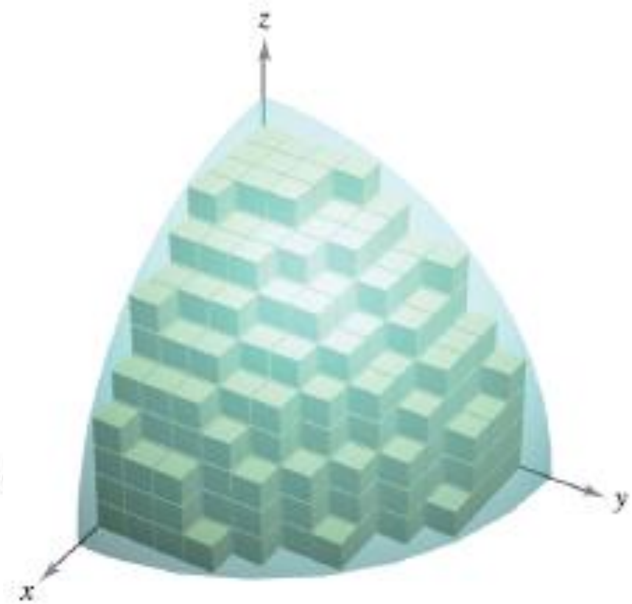
삼중적분 (Triple Integral)

- 유계인 입체영역 Q에서 정의되고 연속인 삼변수함수 $f(x, y, z)$ 로 나타내는 입체의 무게의 근사값
  - 직육면체로 내분할

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$



입체영역 Q



Q의 부피 $\approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$

삼중적분 (Triple Integral)

삼중적분의 정의

f가 유계 입체영역 Q에서 연속이면 Q에서 f의 **삼중적분**은 아래 극한이 존재할 때

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

로 정의한다. 입체영역 Q의 **부피**는 다음과 같다.

$$Q\text{의 부피} = \iiint_Q dV$$

삼중적분의 성질

1. $$\iiint_Q cf(x, y, z)\, dV = c \iiint_Q f(x, y, z)\, dV$$

2. $$\iiint_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]\, dV = \iiint_Q f(x, y, z)\, dV \pm \iiint_Q g(x, y, z)\, dV$$

3. $$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iiint_{Q_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{Q_2} f(x, y, z)\, dV$$

삼중적분의 계산 – 반복적분 이용

정리 12.4 삼중반복적분으로 계산

연속함수 h_1, h_2, g_1, g_2에 대하여

$$a \le x \le b,\ \ h_1(x) \le y \le h_2(x),\ g_1(x,\ y) \le z \le g_2(x,\ y)$$

인 입체영역 Q에서 f가 연속이면

$$\iiint_Q f(x,\ y,\ z)\,dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,\ y)}^{g_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)\,dz\,dy\,dx$$

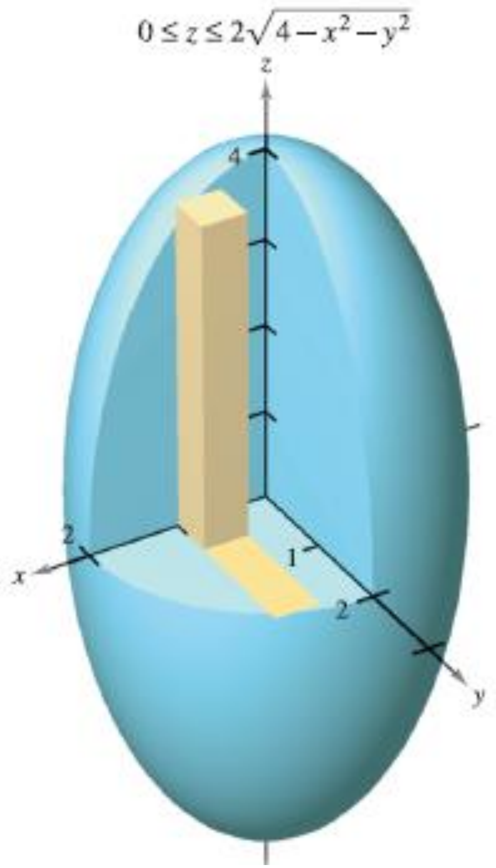
이다.

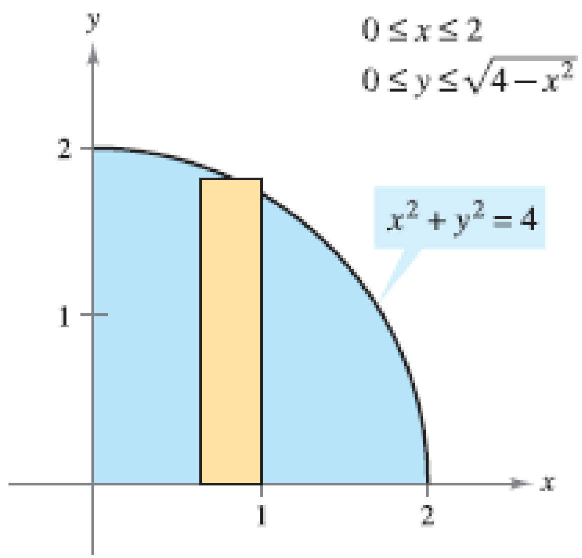
예제 1: 삼중반복적분

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y + 2z)\,dz\,dy\,dx$$

예제 2: 삼중적분으로 부피 구하기

타원체 $4x^2+4y^2+z^2=16$의 부피를 구하여라.





12.8 변수변환과 야코비안 / 12.3 극좌표변환

- ✓ 야코비안의 개념 이해하기
- ✓ 야코비안을 이용하여 이중적분에서 변수변환하기

야코비안과 변수변환

- 일변수함수 $f(x)$의 적분에서의 변수변환
  - $x = g(u) \rightarrow a = g(c)\ , b = g(d)$
  - $dx = g'(u)du$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\, du}$$

- 이변수함수 $f(x, y)$의 이중적분에서의 변수변환
  - $x = g(u, v), y = h(u, v) \rightarrow R(x, y) = S(u, v)$

$$\boxed{\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_S\int f(g(u, v), h(u, v))\underbrace{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right|}_{\text{야코비안}}du\, dv}$$

다양한 미분의 개념

- 일변수함수 $x = g(u) \Rightarrow dx/du = g'(u)$ 도함수

- 평면곡선 $X(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u) \\ h(u) \end{pmatrix} \Rightarrow X'(u) = \begin{pmatrix} dx/du \\ dy/du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'(u) \\ h'(u) \end{pmatrix}$ 속도벡터

- 다변수함수 $x = g(u,v) \Rightarrow \nabla g(u,v) = (\partial x/\partial u, \partial x/\partial v)$ 그래디언트 (gradient)

- 다변수벡터함수

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u,v) \\ h(u,v) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix}$$

야코비안 행렬 (Jacobian matrix)

야코비안 (Jacobian)의 정의

야코비안의 정의

$x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$이면 u와 v에 대한 x와 y의 **야코비안**(Jacobian)은 다음과 같이 정의한다.

$$\det\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

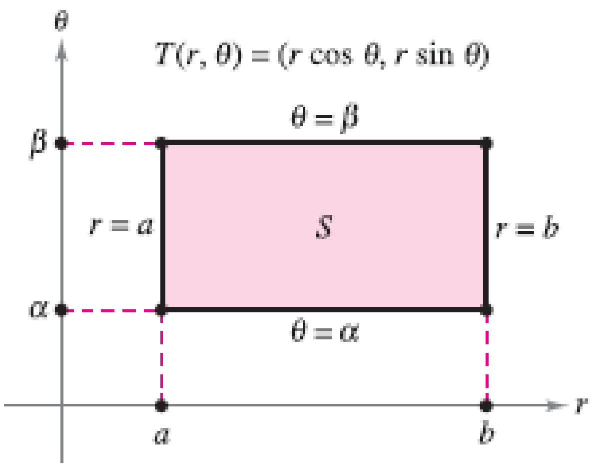
야코비안은 야코비안 행렬의 행렬식!

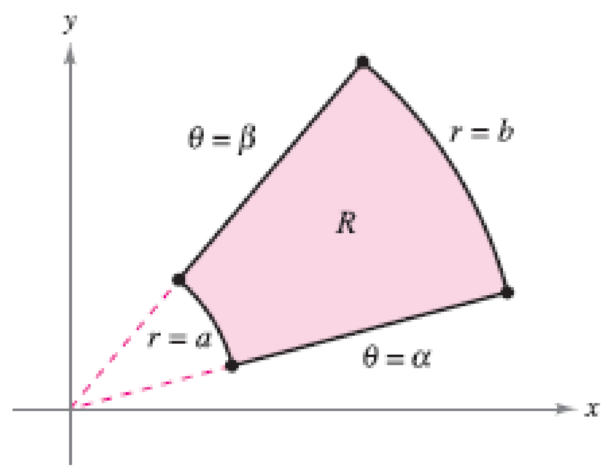
선형변환의 야코비안

변환 $X = aU+bV$, $Y = cU+dV$의 야코비안 행렬과 야코비안?

[극좌표-〉 직교좌표] 변환의 야코비안(예제1)

$x = r\cos\theta$와 $y = r\sin\theta$로 정의되는 변수변환의 야코비안을 구하여라.





이중적분의 변수변환

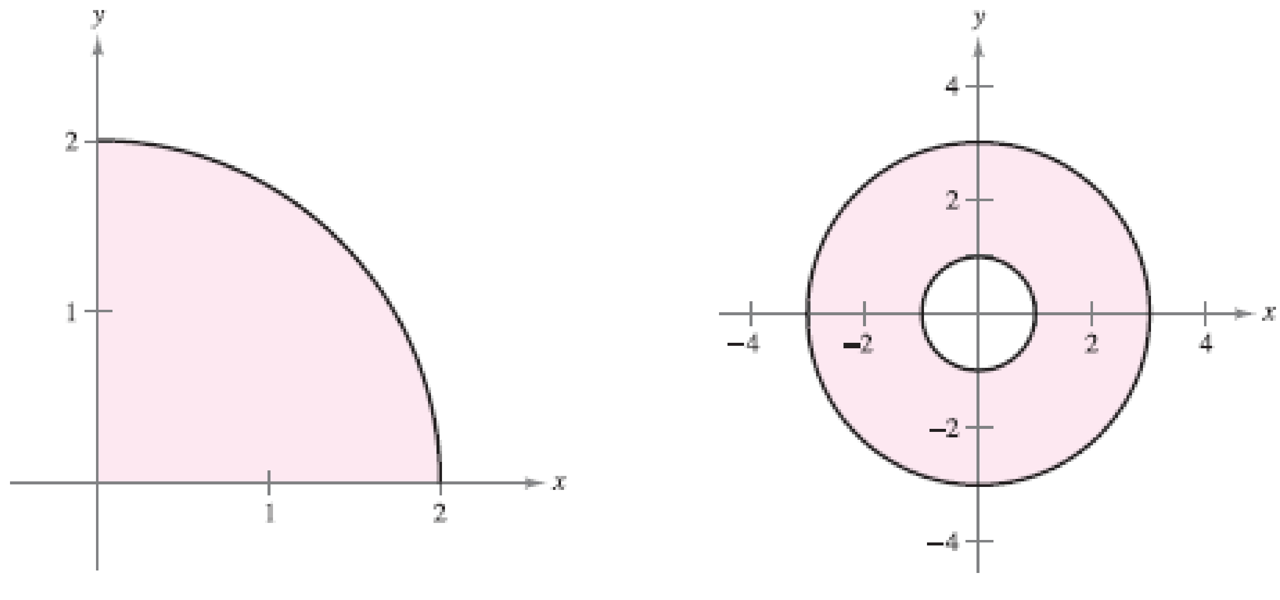
정리 12.5 이중적분의 변수변환

R과 S는 xy평면과 uv평면의 영역으로 $x=g(u,\ v)$, $y=h(u,\ v)$인 관계이며 R의 각 점은 S의 유일한 점의 상(image)이다. f가 R에서 연속이고 g와 h는 S에서 연속인 일계편도함수를 가지며 $\partial(x,\ y)/\partial(u,\ v)$가 S에서 0이 아닐 때

$$\int_R\int f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_S\int f(g(u,\ v),\ h(u,\ v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

이다.

영역을 단순화하는 변수변환 1 (극좌표변환)



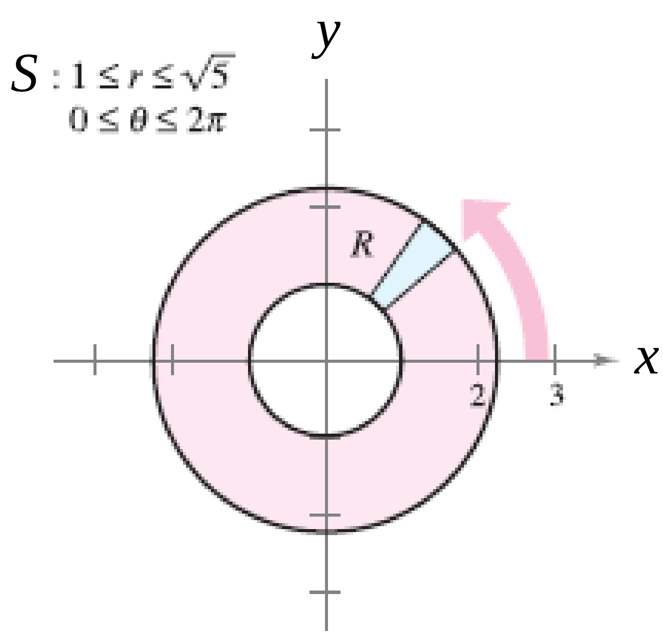
(a) (b)

$S = \{(r, \theta): 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi/2\}$

$S = \{(r, \theta): 1 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$

영역을 단순화하는 변수변환 1 (극좌표변환)

영역 R이 두 원 $x^2+y^2=1$과 $x^2+y^2=5$ 사이에 있는 고리모양의 영역일 때 $\displaystyle\iint_R (x^2+y)\,dA$를 계산하여라.

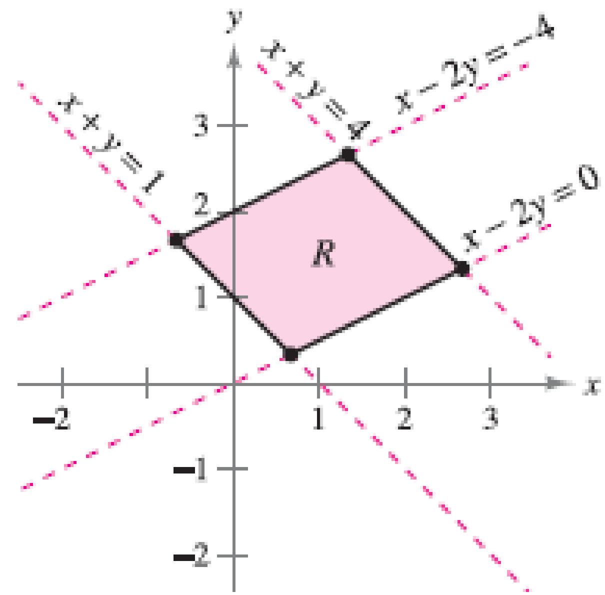


영역을 단순화하는 변수변환 2 (예제3)

R은 직선 $x-2y=0$, $x-2y=-4$, $x+y=4$, $x+y=1$로 둘러싸인 영역이다(그림 12.75). 다음 이중적분

$$\int_R\int 3xy\,dA$$

를 계산하여라.

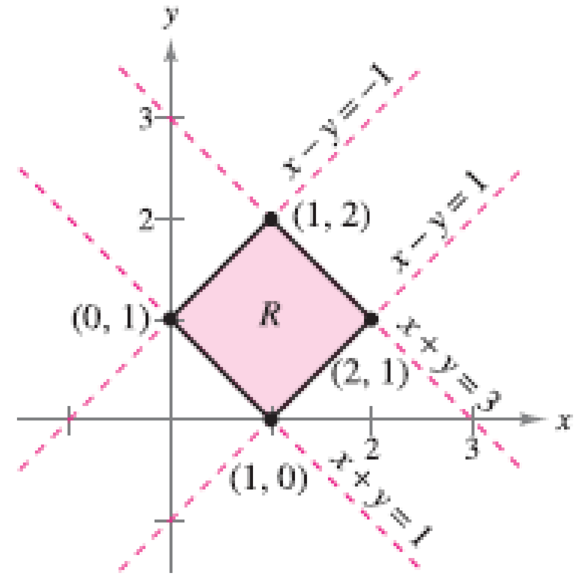


피적분함수를 단순화하는 변수변환 (예제4)

영역 R은 꼭짓점이 (0, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 0)인 정사각형 영역이다. 적분

$$\iint_R (x+y)^2 \sin^2(x-y)\, dA$$

를 계산하여라.



중적분의 통계에서의 활용

- ✓ 일변량 연속형 확률변수의 확률밀도함수
- ✓ 변환된 확률변수의 확률밀도함수
- ✓ 이변량 연속형 확률벡터의 결합 확률밀도함수
- ✓ 변환된 확률벡터의 결합 확률밀도함수

일변량 연속형 확률변수의 확률밀도함수

확률변수 X 의 확률밀도 함수 $f_X(x)$ 의 support가 R일때

- 1) 모든 $x \in R$ 에 대해 $f_X(x) > 0$
- 2) $\int_R f_X(x)dx = 1$
- 3) $P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx \geq 0$

Example) $X \sim f_X(x) = 3x^2, 0 < x < 1$

변환된 확률변수의 확률밀도함수

확률변수 X 의 확률밀도 함수 $f_X(x)$ 의 support가 R일때
변환 X=g(U)에 의해 정의된 확률변수 U의 확률밀도함수

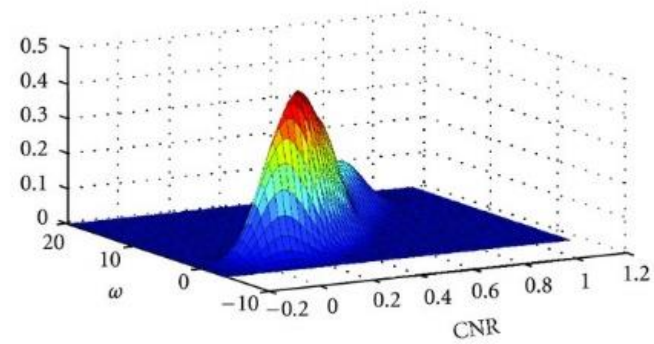
- U의 support (S) : $x = g(u) \in R$ 가 되게 하는 u의 영역
- U의 확률밀도함수 $f_X(g(u))\,|\,g'(u)\,|$
- 주의: R의 x와 S의 u는 일대일로 대응하여야 함

Example) $X \sim f_X(x) = 3x^2, 0 < x < 1$ $U = \sqrt{X}$ 의 확률밀도함수

이변량 연속형 확률벡터의 결합 확률밀도함수

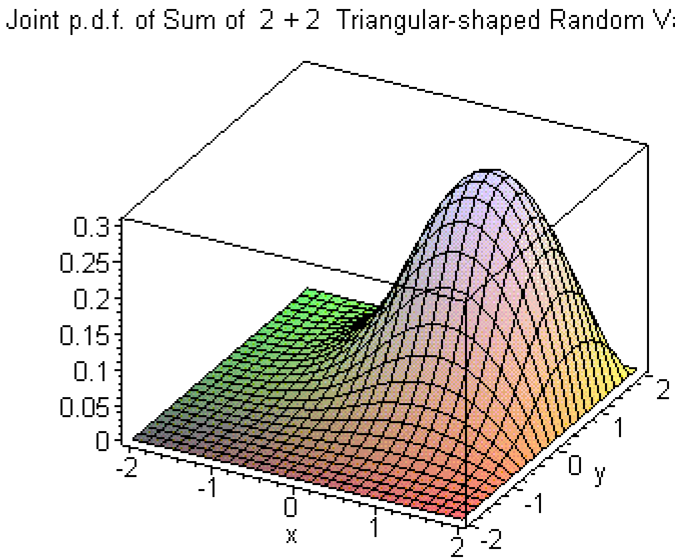
확률벡터 (X,Y) 의 결합확률밀도 함수 $f_{X,Y}(x,y)$ 의 support가 R일때

- 1) 모든 $(x,y) \in R$ 에 대해 $f_{X,Y}(x,y) > 0$
- 2) $\iint_R f_{X,Y}(x,y)\,dA = 1$
- 3) $P((X,Y) \in B) = \iint_B f_{X,Y}(x,y)dxdy \geq 0$



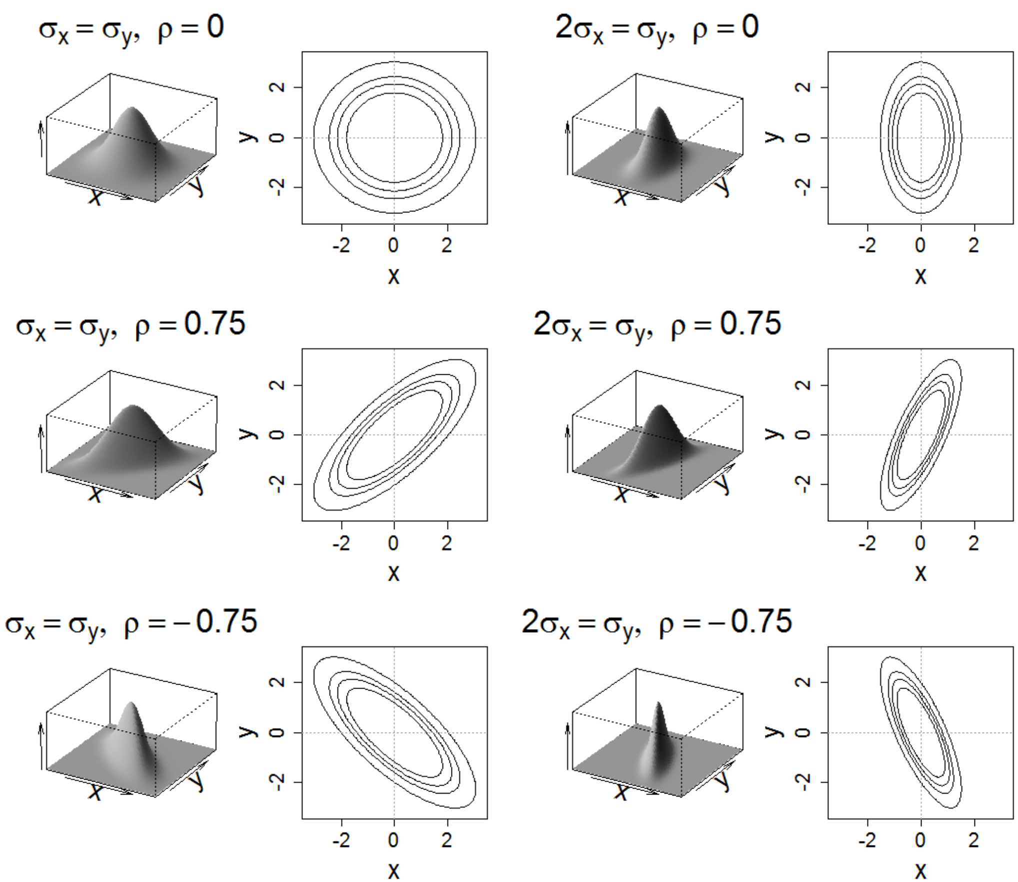
결합 확률밀도함수의 의미

확률벡터 (X,Y) 의 결합확률밀도 함수 $f_{X,Y}(x,y)$



X \ Y	0	1	2	3
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{10}$

이변량연속형 확률벡터의 결합 확률밀도함수의 예



결합 확률밀도함수를 이용한 계산

Example) $(X,Y) \sim f_{X,Y}(x,y) = (4/3)(1-xy),\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

$P(Y \le X/2) = ?$

결합 확률밀도함수를 이용한 계산

Example) $(X,Y) \sim f(x,y) = (4/3)(1-xy), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

$P(Y \le t) = ?$

$f_Y(t) = ?$

결합 확률밀도함수를 이용한 계산

Example) $(X,Y) \sim f(x,y) = (4/3)(1-xy), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

$f_Y(t) = ?$

	Y: 0	1	2	3
X: 1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{10}$

결합 확률밀도함수를 이용한 계산

Example) $(X,Y) \sim f(x,y) = 2, 0 \le x \le y \le 1 \quad P(0 \le X \le 1/2, 0 \le Y \le 1/2) = ?$

변환된 확률벡터의 결합 확률밀도함수

(X,Y) 의 결합확률밀도 함수 $f_{X,Y}(x,y)$ 의 support가 R 일때
변환 X=g(U,V),Y=h(U,V)에 의해 정의된 (U,V)의 결합 확률밀도함수

- (U,V)의 support (S) : $(x,y)=(g(u,v),h(u,v))\in R$ 가 되게 하는 (u,v) 의 영역

- (U,V)의 결합 확률밀도함수:

$$f_{X,Y}(g(u,v),h(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

- 주의: R의 (x,y)와 S의 (u,v)는 일대일로 대응하여야 함

변환된 확률벡터의 결합 확률밀도함수 계산

Example) (X,Y) 의 결합확률밀도 함수 $f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x}e^{-y}, 0 < x < y < \infty$ 로 주어져 있을 때 변환 $U = 2X, V = Y - X$ 로 정의되는 확률벡터 (U,V) 의 결합확률밀도함수 $f_{U,V}(u,v)$ 는?