30/30

5 #5.1-3

X는 $\alpha=3,\ \theta=2$인 감마분포를 따르므로 X의 pdf는 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(3)\cdot 2^3}x^{3-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{8\cdot\Gamma(3)}x^2 e^{-\frac{x}{2}}, & 0\le x<\infty \\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$

$Y=u(X)=\sqrt{X}$ 이며 $Y=\sqrt{X}$는 X의 support 내에서 일대일대응, 단조증가한다. $Y=\sqrt{X} \Leftrightarrow X=Y^2$

따라서 Y의 cdf는 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sqrt{X}\le y)=P(X\le y^2)$

$$=\int_0^{y^2}\frac{1}{8\cdot\Gamma(3)}x^2\cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

$\Rightarrow$ Y의 pdf $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{8\cdot\Gamma(3)}(y^2)^2\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot|2y| = \frac{1}{8}\cdot y^5\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}, & 0\le y<\infty \\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$ 이다.

($\because$ n이 양의정수일때 $\Gamma(n)=(n-1)!$ 이므로 $\Gamma(3)=2!=2$)

5 #5.1-4

X의 pdf가 $f_X(x)=\begin{cases}\theta\cdot x^{\theta-1}, & 0<x<1,\ 0<\theta<\infty \\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$ 일때 $Y=-2\theta\ln X$의 분포를 구한다.

$Y=u(X)=-2\theta\ln X$ 이며 $Y=-2\theta\ln X$는 X의 support 내에서 일대일대응, 감소함수이다.

즉 $Y=-2\theta\ln X \Leftrightarrow X=e^{-\frac{Y}{2\theta}}$

따라서 Y의 cdf는 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-2\theta\ln X\le y)=P(X\ge e^{-\frac{y}{2\theta}})$ 이다.

변수변환기법을 사용해 Y의 pdf를 구하면

$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\theta\cdot(e^{-\frac{y}{2\theta}})^{\theta-1}\cdot\left|-\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y}{2\theta}}\right| = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<y<\infty \\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$

따라서 Y는 지수분포를 따른다. 지수분포는 $\mu=\theta,\ \sigma^2=\theta^2$ 이므로 평균이 2인 지수분포를 따른다고도 할 수 있다.

#5.1-7

5 (a) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 라면 X의 pdf는 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2},\ -\infty<x<\infty$ 이다.

$Y=e^X$ 는 X의 support 내에서 일대일대응, 단조증가한다. 즉 $Y=e^X \Leftrightarrow X=\ln Y$

Y의 cdf는 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le\ln y)$ 이다.

변수변환기법을 사용해 Y의 pdf를 구하면

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln y-\mu}{\sigma})^2}\cdot\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & 0<y<\infty \\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$

따라서 로그정규분포를 따르는 Y의 pdf는 문제에서 주어진것과 같음을 보인다.

3 (b) $M(t)=\exp(\mu t+\sigma^2t^2/2),\ -\infty<t<\infty$ 일때

(i) $Y=e^X$ 이므로 $E(Y)=E(e^X)=M(1)=\exp(\mu+\frac{\sigma^2}{2})$ $\because M(t)=E(e^{tX})$

(ii) $Y=e^X$ 이므로 $E(Y^2)=E(e^{2X})=M(2)=\exp(2\mu+2\sigma^2)$

(iii) $Y=e^X$ 이므로 $Var(Y)=Var(e^X)=E(e^{2X})-[E(e^X)]^2=\exp(2\mu+2\sigma^2)-\exp(2(\mu+\frac{\sigma^2}{2}))$

$$=\exp(2\mu+2\sigma^2)-\exp(2\mu+\sigma^2)$$

#5.1-8

6 (a) $X\sim N(0,1^2)$ 이면 X의 pdf는 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2},\ -\infty<x<\infty$ 에서 $\mu=0,\ \sigma^2=1$ 이다.

즉 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\ -\infty<x<\infty$

$Y=X^2$는 X의 support 내에서 일대일대응이 아니므로 범위를 나눠 분포를 구한다.

$X=\pm\sqrt{Y} \rightarrow \begin{cases}X=\sqrt{Y}, & 0\le x<\infty \\ X=-\sqrt{Y}, & -\infty<x\le 0\end{cases}$

① $X=\sqrt{Y}$ 인경우 : $0\le x<\infty$, $0\le y<\infty$ ⇒ 일대일대응

Y의 cdf는 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(X\le\sqrt{y})$ 이다.

변수변환기법을 사용해 Y의 pdf를 구하면

$$f_Y(y)^{*}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y}\cdot\left|\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & 0\le y<\infty\\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$$

② $X=-\sqrt{Y}$ 인경우 : $0\le x<\infty$, $0\le y<\infty$ ⇒ 일대일대응

Y의 cdf는 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(X\ge-\sqrt{y})$ 이다. 마찬가지로 구하면

$$f_Y(y)^{**}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y}\cdot\left|-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & 0\le y<\infty\\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$$

따라서 Y의 pdf는 위 두식의 합과 같다.

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}y}+\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}y}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2}y}, & 0\le y<\infty\\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$$

6 (b) X의 pdf가 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, & -1<x<1\\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$ 일때 $Y=X^2$의 pdf를 구하는 문제이다.

$Y=X^2$은 X의 support 내에서 일대일대응이 아니므로 범위를 나눠 분포를 구한다.

$$X=\pm\sqrt{Y}\rightarrow\begin{cases}X=\sqrt{Y}, & 0\le x<1\\ X=-\sqrt{Y}, & -1<x\le 0\end{cases}$$

① $X=\sqrt{Y}$인 경우: $0\le x<1$, $0\le y<1$ ⇒ 일대일대응

Y의 cdf는 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(X\le\sqrt{y})$이다.

변수변환기법을 사용해 Y의 pdf를 구하면

$$f_Y(y)^{*}=\begin{cases}\frac{3}{2}y\cdot\left|\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$$

② $X=-\sqrt{Y}$ 인경우 : $-1<x\le 0$, $0\le y<1$ ⇒ 일대일대응

변수변환기법을 사용해 Y의 pdf를 구하면

$$f_Y(y)^{**}=\begin{cases}\frac{3}{2}y\cdot\left|\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$$

따라서 Y의 pdf는 위 두식의 합과 같다.

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}\sqrt{y}+\frac{3}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$$