제1장. 행렬의 기초

1.1 행렬의 정의

◉ 행렬(Matrix) : 행과 열로 구분지어진 숫자들의 단순한 직사각형 배열

원소(elements) : 행렬 안의 수 또는 수를 나타내는 문자

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{ij}) \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, m \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

* A의 (i,j)성분은 a_{ij}로 표시하며 행렬 A의 i번째 행, j번째 열에 있는 원소를 나타냄.

* 일반적으로 행렬은 알파벳 대문자로, 행렬의 원소는 알파벳 소문자로 표시

행

↓

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{1열} & \text{2열} & & \text{n열} \leftarrow \text{열} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{1행} \\ \text{2행} \\ \\ \text{m행} \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} = (a_{ij})$$

$m \times n$ **행렬**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

2행 3열 (2×3행렬)

* 행렬의 표시방법

1) 원소를 일일이 보여주는 방식

ex) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

2) (i,j) 성분에 대한 식을 제시하는 방식

ex) $a_{ij} = i + j^2 - 1,\ \underline{i = 1,2,\ j = 1,2}$ 크기를 알수있음

i가 2까지, j가 2까지 따라서 A는 2×2 행렬 => $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$a_{11} = 1 + 1^2 - 1 = 1,\ a_{12} = 1 + 2^2 - 1 = 4,\ a_{21} = 2 + 1^2 - 1 = 2,\ a_{22} = 2 + 2^2 - 1 = 5$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

▨ 기본이 되는 몇 가지 행렬

– 정방행렬 or 정사각행렬 (Square matrix) : 행의 수와 열의 수가 같은 행렬

ex) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

* $n \times n$ 정사각행렬을 n차원 정사각행렬이라고도 부른다

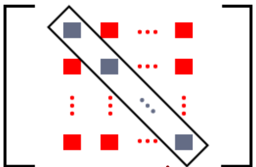
– 영행렬(Zero matrix) : 원소가 전부 0인 행렬

(알파벳 대문자 O로 표시하기도 함)

ex) $O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

– 대각행렬(Diagonal matrix) : 정방행렬에서 모든 비대각원소가 0인 행렬

대각원소 중에 0이 있어도 됨 (단 모두 0이면 영행렬이 됨)



회색– 대각원소, 빨간색– 비대각원소

대각원소 (↙ 방향은 아님)

ex) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ = diag (1, 5, 10)

3x3 정방행렬임을 알 수 있음

– 단위행렬(Unit matrix) 또는 항등행렬(Identity matrix)

(알파벳 대문자 E 또는 I 로 표시)

: 대각행렬에서 대각원소의 값이 전부 1인 행렬

ex) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

– 전치행렬(Transposed matrix)

행렬 A의 행과 열을 서로 맞바꾸어 놓은 행렬을 행렬 A 의 전치행렬이라 하고 기호로 A' 또는 A^T로 표시함

$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$

ex) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \\ 1 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

( ) 또는 [ ] 모두 사용가능

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -9 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}$$

* 전치(transpose)를 하면 i행은 i열이 되고, j열은 j행이 됨

Theorem 1.1 〈전치행렬과 연관된 성질〉 $\boxed{(A^T)^T = A}$

- 대칭행렬(Symmetric matrix)

$A = A^T$ 를 만족하는 정방행렬 (정방행렬에서 주대각원소를 중심으로 원소들이 대칭구조를 가지고 있는 경우)

ex) $A = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

A는 대칭행렬

$$\underset{3\times3}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

n×m
행 열
가로 세로

◉ 벡터(Vector) : 한 개의 열 또는 행으로 이루어진 행렬

– 열벡터(Column vector) : $n \times 1$인 행렬 ex) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$: 3×1 행렬, 3차원 열벡터

열(m)=1

– 행벡터(Row vector) : $1 \times m$인 행렬 ex) $(1\,2\,4\,5)$: 1×4 행렬, 4차원 행벡터

– 영벡터(zero vector) : 모든 원소가 0인 벡터

☆ 행벡터는 $\underline{x}^T$와 같은 기호를 주로 사용하며 열벡터는 $\underline{x}$로 주로 표시한다. (자주 사용하는 기호이니 기억할 것!)

걍?

* 벡터라고 하면 열벡터일 수도 있고 행벡터일수도 있음

(일반적으로 열벡터를 지칭함)

ex) $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

열벡터

$$\underline{x}^T = (x_1, x_2, \cdots x_n) = (x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n)$$

행벡터(열벡터의 전치).

1.2 행렬의 연산

행의수x열의수

◉ 두 행렬 A와 B 이 서로 같으려면 아래의 두 조건을 만족해야 함

☞ 1) A와 B 의 크기가 같음 (행의 수와 열의 수가 모두 동일) → 원소의 개수가 같음

☞ 2) 같은 위치에 있는 원소들이 모두 동일

(행x열) 3x2 2x2

ex) $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ 두 행렬의 크기가 서로 다르므로 두 행렬은 같지 않음

2x3

ex) $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \underline{6} \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \underline{9} \end{bmatrix}$ 두 행렬이 크기는 같으나 2행 3열의 원소가 서로 다르므로 두 행렬은 서로 같지 않음

3x3

ex) $E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 두 행렬은 같은 행렬 E=F

◉ 행렬의 덧셈, 뺄셈과 실수배

행렬의 합과 차가 정의되기 위해서는 ☞ 두 행렬이 같은 크기이어야함

(두 행렬이 같은 크기=〉 행의 수도 같고 열의 수도 같음)

행렬 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 와 행렬 $B = (b_{ij})_{m\times n}$에 대하여 → $A = (a_{ij})$ mxn 과같이 행렬을나타낼경우

i, j의 범위를나타내면됨

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
- $cA = (ca_{ij})$, 여기서 c는 실수
- $(-1)A = -A$
- $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$

ex)

3+4=7

$$\begin{bmatrix}3&8\\4&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&0\\1&-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&8\\5&-3\end{bmatrix}$$

3-4=-1

$$\begin{bmatrix}3&8\\4&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0\\1&-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&8\\3&15\end{bmatrix}$$

2x4=8

$$2\times\begin{bmatrix}4&0\\1&-9\end{bmatrix}=\underset{2B}{\begin{bmatrix}8&0\\2&-18\end{bmatrix}}$$

-(2)=-2

$$-\underset{A}{\begin{bmatrix}2&-4\\7&10\end{bmatrix}}=\underset{-A}{\begin{bmatrix}-2&4\\-7&-10\end{bmatrix}}$$

Theorem 2.2 〈행렬의 덧셈과 연관된 전치행렬의 성질〉

전치행렬: 행과열을 바꿈

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

순서는 상관X
교환법칙

◉ 행렬의 곱셈

☆ 행렬의 곱 AB 가 정의되기 위해서는 ☞ (A 의 열의 수) = (B 의 행의 수)

행렬 $A_{m\times n}$ 와 행렬 $B_{n\times p}$ 에 대하여 두 행렬의 곱을 C 라고 하면 C 는 $\boxed{m\times p}$ 행렬

행 열   행 열

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p} = (c_{ij})_{m\times p} = \left(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\right)_{m\times p}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times p}, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,p$$

ex)

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}$$

i=1, j=1인 경우

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

2 x 4   4 x 3   2 x 3

A   B   AXB

$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

내적

* AB 의 (i,j)원소는 A의 i번째 행과 B의 j번째 열의 일종의 '곱[1]'으로 계산

행벡터x열벡터

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7&8\\9&10\\11&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58&\\&\end{bmatrix}\qquad (1\,2\,3)\begin{pmatrix}7\\9\\11\end{pmatrix}=1\times7+2\times9+3\times11=58$$

– 행렬곱이 실수곱과 다른 특징 ☆

- 행렬곱 AB가 존재하더라도 BA가 반드시 존재하는 것은 아님. BA가 존재하더라도 $AB\neq BA$ 일 수 있음. 행렬은 곱하는 순서가 중요 ☆ 교환법칙성립X

- 실수의 곱과 달리 $AB=O$ 임에도 불구하고 $A\neq O$ 이고 $B\neq O$ 인 행렬 A, B가 존재

ex) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq O$ $B=\begin{pmatrix}0&0\\3&4\end{pmatrix}\neq O$ but $AB=O$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot3&1\cdot0+0\cdot4\\0\cdot0+0\cdot3&0\cdot0+0\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

앞행x뒤열의합

1) 이러한 '곱'의 연산을 내적(inner product)이라고 부름

Theorem 1.3

행렬 A, B, C 가 아래의 연산이 성립되는 크기를 가진 행렬들일 때 다음의 규칙이 성립한다.

덧셈

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A(BC) = (AB)C$

(4) $A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)C = AC + BC$

중요

순서중요

☆Theorem 1.4 $(AB)^T = B^T A^T$ $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

성립하는 이유를 구체적인 예를 통해 확인!

$$\underset{2\times3\ 3\times2}{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31} \\ a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = B^T \cdot A^T$$

+) $A \times A^T$는 언제나 성립

☆Theorem 1.5 임의의 행렬 A에서 $A^TA = O$ 또는 $AA^T = O$ 이면 $A = O$

성립하는 이유를 구체적인 예를 통해 확인!

$$\underset{2\times3}{A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \underset{3\times2}{A^T}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2 & \checkmark \\ \checkmark & a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2 \end{pmatrix}$$

행렬의 원소들은 모두 실수이다.
곱의 합이 0이 되려면 모든 원소가 0이어야만 함

+) $A\cdot A^T$에서 대각원소는 0이 아니면 양수값만 갖게됨
(제곱의 합이므로)

정방행렬이어야 (n(행)==n(열))
역행렬 존재여부를 따질수있음

역수(ex. 3의 역수 : 3×□=1 이 되도록 하는 □)

Definition 역행렬(Inverse matrix)

정방행렬 A에서 $AB = BA = I$ 가 성립되는 정방행렬 B 가 존재하면 B 를 A 의 역행렬이라 하고 $B = A^{-1}$라고 표시

정방
대각원소 1
비대각원소 0

* A^{-1}가 존재하면 유일함

행렬의 곱에서는 교환법칙이 성립하지 않지만 이 경우는 OK.

* $AB=I$ 가 성립하면 $BA=I$ 도 성립 (그 반대방향으로도 성립) => 역행렬임을 확인하기 위해 $AB=I$ 또는 $BA=I$ 중 하나만 확인하면 됨

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ex) matrix A　　matrix A^{-1}　　2 x 2 identity matrix

※ 도움이 되는 몇 가지 규칙과 정리 ☆☆

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: n차원 열벡터, $\underline{x}^T =$: n차원 행벡터

① m차원 열벡터($\underline{x}$)와 n차원 행벡터($\underline{y}^T$)의 곱의 결과 ☞ $m \times n$ 행렬

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\rightarrow \underbrace{x}_{m\times1}\underbrace{y^T}_{1\times n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}(y_1\ y_2 \cdots y_n) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix}}_{m\times n}$

↓

열벡터 * 행벡터

* 곱하는 두 벡터의 크기가 달라도 됨

② n차원 행벡터($\underline{x}^T$)와 n차원 열벡터($\underline{y}$)의 곱의 결과 ☞ 실수 (스칼라)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(1×n) (n×1) → 1×1 벡터 (실수 1개)

$$\underline{x}^T \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

행벡터×열벡터

* 곱하는 두 벡터의 크기가 같아야 함

n차원 열벡터 : n×1

행벡터×열벡터일때 곱이 성립되려면

$$(1\times \underbrace{\square) * (n}_{\text{같아야하므로}} \times 1)$$

$$\underline{x}^T \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

순서중요

* $\underline{x}^T \underline{y} = \underline{y}^T \underline{x}$가 성립 ☆ → $\underline{y}^T \underline{x} = (y_1 \cdots y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n$

* $\boxed{\underline{x} \cdot \underline{y}} = \underline{x}^T \underline{y} = \underline{y}^T \underline{x}$를 두 벡터 $\underline{x}$, $\underline{y}$의 내적(inner product or dot product)라고 정의

dot

③ 행렬 곱의 새로운 이해

☞ AB 의 (i,j)원소는 A의 i번째 행을 나타나는 벡터와 B의 j번째 열을 나타내는 벡터의 $\boxed{\text{내적}}$

ex) $\underset{2\times2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\underset{2\times3}{B} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{2\times3}{AB} \begin{pmatrix} 5+12 & 7+16 & 9+20 \\ 15+24 & 21+32 & 27+40 \end{pmatrix}$

이 과정을 행벡터, 열벡터를 이용하여 표현하면

$(\underline{a_1}^T = (1\ 2),\ \underline{a_2}^T = (3\ 4),\ \underline{b_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ \underline{b_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \underline{b_3} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix})$

$a_1^T b_1 = (1\ 2)\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
$= 1\cdot5 + 2\cdot6$

$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_1^T b_1 & a_1^T b_2 & a_1^T b_3 \\ a_2^T b_1 & a_2^T b_2 & a_2^T b_3 \end{pmatrix}$