제9장. 이차형식 (Quadratic Form)

9.1 이차형식의 정의

$$\underset{1\times2}{(x\ y)}\underset{2\times2}{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} = (x\ y)\begin{pmatrix}x+2y\\3x+4y\end{pmatrix}$$

$$= x(x+2y)+y(3x+4y)$$

$$= \underline{x^2+5xy+4y^2} \rightarrow (x\ y)\underset{2\times2}{\begin{pmatrix}1&2.5\\2.5&4\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

◎ **이차형식 :** $y^T A y$

$\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ $\underset{\sim}{y}$에 속하는 원소들의 일차항만으로 구성한 식

$$a_1y_1+a_2y_2 \rightarrow \underset{1\times2}{(a_1\ a_2)}\underset{2\times1}{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}} = \underset{\sim}{a}^T\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}^T\underset{\sim}{a} \quad \left(\underset{\sim}{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\right)$$

$\underset{\sim}{y}$에 속하는 원소들의 이차항만으로 구성한 식

$$a_{11}y_1^2+\underline{a_{12}y_1y_2+a_{21}y_2y_1}+a_{22}y_2^2 \rightarrow (y_1\ y_2)\underline{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \underset{\sim}{y}^T a\underset{\sim}{y} \quad (y_{12}=y_{21})$$

$4y_1y_2 = 2y_1y_2+2y_2y_1$으로 분해하는것처럼 쪼개는 법이 다양

↳ 대칭행렬이 되도록한다. 유일하게 존재하도록.

$\therefore \begin{cases}\underset{\sim}{y} : n\text{차원 열벡터}\\ A : n\times n \text{ 대칭행렬}\end{cases} \rightarrow \underline{\underset{\sim}{y}^T A \underset{\sim}{y}}$

Example

1) $f(y_1,y_2) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - 2y_1y_2 = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + 3y_2^2$

$\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$= (y_1 \ y_2) \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2) $f(y_1,y_2,y_3) = 5y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + 6\underbrace{y_1y_2}_{\text{1행2열, 2행1열}} + 2y_1y_3 + 8y_2y_3$

$\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$= (y_1 \ y_2 \ y_3) \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

(+) y_1, y_2, y_3 별로 쪼개기

$$\begin{aligned} &= 5y_1^2 + 3y_1y_2 + y_1y_3 + \\ &\quad 3y_2y_1 + 3y_2^2 + 4y_2y_3 + \\ &\quad y_3y_1 + 4y_3y_2 + y_3^2 \\ &= y_1(5y_1+3y_2+y_3) + y_2(3y_1+3y_2+4y_3) \\ &\quad + y_3(y_1+4y_2+y_3) \\ &= \underset{1\times 3}{(y_1 \ y_2 \ y_3)} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 5y_1+3y_2+y_3 \\ 3y_1+3y_2+4y_3 \\ y_1+4y_2+y_3 \end{pmatrix}} \\ &= (y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition $A_{n \times n}$: 대칭행렬 "행렬의 양수, 음수 개념"

(1) 양정치행렬(Positive definite matrix) : $\underline{y}^T A \underline{y} > 0 \quad , \quad \forall \underline{y} \neq \underline{0}$

(2) 양반정치행렬(Positive semidefinite matrix) : $\underline{y}^T A \underline{y} \geq 0 \quad , \quad \forall \underline{y} \neq \underline{0}$

($\underline{y} \neq \underline{0}$ 이면서 $\underline{y}^T A \underline{y} = 0$ 이 되는 $\underline{y}$가 반드시 존재해야 함)

(3) 음정치행렬(Negative definite matrix): $\underline{y}^T A \underline{y} < 0 \quad , \quad \forall \underline{y} \neq \underline{0}$

(4) 음반정치행렬(Negative semidefinite matrix) : $\underline{y}^T A \underline{y} \leq 0 \quad , \quad \forall \underline{y} \neq \underline{0}$

($\underline{y} \neq \underline{0}$ 이면서 $\underline{y}^T A \underline{y} = 0$ 이 되는 $\underline{y}$가 반드시 존재해야 함)

이 4가지 중 어느 경우에도 속하지 않는 경우 부정치(indefinite)라고 한다.

Example

$$(y_1\ y_2)\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

1) $f(y_1,y_2)=2y_1^2+3y_2^2-2y_1y_2=\underline{y}^T A\,\underline{y}$ 에 해당하는 행렬 A

$$= 2\left(y_1^2 - y_1y_2 + \tfrac{1}{4}y_2^2 - \tfrac{1}{4}y_2^2\right) + 3y_2^2$$

$$= 2\left(y_1 - \tfrac{1}{2}y_2\right)^2 + 3y_2^2 > 0$$

등호조건주의! ★ 등호는 $y_1=\frac{1}{2}y_2$, $y_2=0$일때 성립, $y_2=0$이면 $y_1=0$이며 이때 $\underline{y}=\underline{0}$이다

$\forall\ \underline{y}=\underline{0}$ 을제외하므로 A는 양정치행렬

2) $f(y_1,y_2,\dots,y_n)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\underline{y}^T A\,\underline{y}$에 해당하는 행렬 A

편차제곱합

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 \longrightarrow \underline{y}^T\underline{y} - \frac{1}{n}(\underline{y}^T\underline{1})(\underline{1}^T\underline{y}^T)$$

행렬로 표현하기위해 순서를바꿈

모든원소가1인행렬

$$= \underline{y}^T\underline{y} - \frac{1}{n}\underline{y}^T J\,\underline{y} = \underline{y}^T\left(I - \frac{1}{n}J\right)\underline{y}$$

중심화행렬 C_n : 대각원소 $1-\frac{1}{n}$ 비대각원소 $-\frac{1}{n}$인 $n \times n$ 대칭행렬

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \underline{y}^T\underline{1} = \underline{1}^T\underline{y}$$

$$= (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$ ← 합벡터

$1\times n$ $n\times 1$

$$= y_1+y_2+\cdots+y_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \underline{y}^T\underline{y} = (y_1\ y_2\cdots\ y_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$= y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$$

$\therefore A = I - \frac{1}{n}J_n$

$\underline{y}^T A\,\underline{y} = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 \geq 0$

★ 등호조건 ① $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$

② $y_1=y_2=\cdots=y_n=\bar{y}$ ($\bar{y}\neq 0$) 이므로

A는 양반정치행렬

9.2 양정치행렬 (Positive definite matrix)

Theorem 9.2

$A_{n\times n}$가 양정치행렬인 필요충분조건은 고유값이 모두 양수인 것 이다.

Theorem 9.6 양정치행렬은 정칙행렬이다. (역은 반드시 성립하지 않음)

양정치행렬이면 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n > 0$

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \lambda_n \neq 0$ → 역행렬존재

Theorem 9.9 $A_{n\times n}$가 양정치행렬이면 A^{-1} 도 양정치행렬이다.

역행렬

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n > 0$

A^{-1}의 고유값은 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots \frac{1}{\lambda_n} > 0$ 이므로

9.3 양반정치행렬 (Positive semidefinite matrix)

Theorem 9.12

$A_{n \times n}$가 양반정치행렬인 필요충분조건은 고유값이 0과 양수 로만 구성되는 것이다.

$\rightleftarrows$

ㄴ 고유값중에 0이 반드시 있어야함

Theorem 9.17

$A_{n \times n}$가 양반정치행렬이면 $rank(A) < n$, 즉 A 는 비정칙행렬 이다.

cf) $A_{n \times n}$에서 $rank(A) = n$ → 가질수있는 최대개수계수를 갖는것

→ 최대계수행렬

$\therefore \rightleftarrows$ 정칙행렬

9.4 기타

Theorem 9.18

음정치행렬 A 의 고유값은 모두 음수 이다.

선도주소행렬식 (n×n이면 n차까지)

① 1차 $\det(1) = 1$

② 2차 $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

③ 3차 $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Theorem 9.20

행렬 $A_{n\times n}$에서

(1) A 의 선도주소행렬식이 모두 양이면 양정치이다.

(2) A 의 선도주소행렬식의 부호가 음수에서 시작하여 교대로 $(- \ , + \ , \cdots \ )$ 나타나면 음정치이다.

1차 2차 …

Theorem 9.21

대칭행렬 $A_{n\times n}$의 고유값을 λ_i , $(i=1,2,\cdots,n)$ 라 하자.

(1) 모든 i 에 대해 $\lambda_i > 0$ 이면 A 는 양정치행렬이다.

(2) 모든 i 에 대해 $\lambda_i \geq 0$ 이면 A 는 양반정치행렬이다. (0이 꼭 있어야함.)

(3) 모든 i 에 대해 $\lambda_i < 0$ 이면 A 는 음정치행렬이다.

(4) 모든 i 에 대해 $\lambda_i \leq 0$ 이면 A 는 음반정치행렬이다. (0이 꼭 있어야함.)

(5) λ_i 가 양수와 음수가 섞여 있으면 A 는 부정치행렬이다.