통계수학1 연습문제와 풀이

* 확률변수 X의 확률밀도함수 $f_X(x) = \begin{cases} x+0.5, & 0<x<1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$로 정의되어 있다고 하자.

(a) 함수 $g(x)$를 $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$로 정의하였을 때 $g(x)$를 구하시오

(b) 새로운 확률변수 Y를 $Y = g(X)$로 정의하였을 때 Y의 cdf를 구하시오.

* 확률변수 X의 확률밀도함수 $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$로 주어져 있다.

(a) X의 분산을 구하시오.

(b) 함수 $m(t) = E(e^{tX})$ 로 정의하였을 때 $m(t)$를 구하시오.

(c) $Y = X^2$ 로 정의했을 때 Y의 cdf를 구하시오.

*확률변수 X의 확률밀도함수 $f_X(x)=\begin{cases} x+0.5, & 0<x<1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$로 정의되어 있다고 하자.

(a) 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$로 정의하였을 때 $g(x)$를 구하시오

답:

$f_X(x) = x + \frac{1}{2}$, $0<x<1$

(a) $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

$= \int_{0}^{x} (t+\frac{1}{2})dt$

$= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \right]_0^x$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, $0<x<1$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x & , 0<x<1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$$

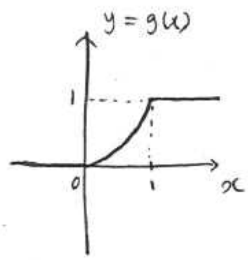
(b) 새로운 확률변수 Y를 $Y=g(X)$로 정의하였을 때 Y의 cdf를 구하시오.

답: (b)

$Y = g(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X = \frac{1}{2}(X^2+X+\frac{1}{4}) - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}(X+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8}$

$0<y<1$ 일때

$P(Y \le y) = P(\frac{1}{2}(X+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8} \le y) = P((X+\frac{1}{2})^2 \le 2y + \frac{2}{8})$



$= P(-\sqrt{2y+\frac{1}{4}} \le X + \frac{1}{2} \le \sqrt{2y+\frac{1}{4}})$

$= P(-\sqrt{2y+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \le X \le \sqrt{2y+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2})$

$= P(0 \le X \le \sqrt{2y+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2})$ $(\because f_X(x)=0,\ x \le 0)$

$= \int_{0}^{\sqrt{2y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}} (x+\frac{1}{2})dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^{\sqrt{2y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{2y+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2y+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2}(2y + \frac{1}{4} - \sqrt{2y+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}\sqrt{2y+\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$

$= y$, $0<y<1$

$$\Rightarrow P(Y \le y) = \begin{cases} 0 & , y \le 0 \\ y & , 0<y<1 \\ 1 & , y \ge 1 \end{cases}$$

*확률변수 X의 확률밀도함수 $f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty<x<\infty$로 주어져 있다.

(a) X의 분산을 구하시오.

답: 2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}xe^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}xe^{x}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}xe^{x}dx\ \ (t=-x,\ dt=-dx)$$
$$=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}(-t)e^{-t}dt+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}xe^{-x}dx=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-|x|}dx=2\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-|x|}dx=\int_{0}^{\infty}x^2e^{-|x|}dx=\int_{0}^{\infty}x^2e^{-x}dx$$
$$=-x^2e^{-x}|_0^{\infty}+\int_{0}^{\infty}2xe^{-x}dx=-2xe^{-x}|_0^{\infty}+\int_{0}^{\infty}2e^{-x}dx=-2e^{-x}|_0^{\infty}=2$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=2$$

(b) 함수 $m(t)=E(e^{tX})$ 로 정의하였을 때 $m(t)$를 구하시오.

답: $m(t)=\frac{1}{1-t^2}\ \ (|t|<1)$

$$m(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{(t+1)x}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{(t-1)x}dx$$
$$=\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{2(t-1)}=\frac{1}{2}\bullet\frac{-2}{t^2-1}=\frac{1}{1-t^2}$$
$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{(t+1)x}dx=\frac{1}{2(t+1)}e^{(t+1)x}|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{2(t+1)}\quad (t+1<0\ \text{이어야 존재})$$
$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{(t-1)x}dx=\frac{1}{2(t-1)}e^{(t-1)x}|_{0}^{\infty}=-\frac{1}{2(t-1)}(t-1<0\ \text{이어야 존재})$$

(c) $Y=X^2$ 로 정의했을 때 Y의 cdf를 구하시오.

답: $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\sqrt{y}}, & y\geq 0\\ 0 & , y<0\end{cases}$

$$P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})$$
$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}e^{-x}dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{x}|_{-\sqrt{y}}^{0}-\frac{1}{2}e^{-x}|_{0}^{\sqrt{y}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}}-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}}+\frac{1}{2}=1-e^{-\sqrt{y}}$$