

## ■ 확률화 블록 계획법 (randomized complete block design)

- 확률화 완비(complete) 블록 계획법

- 쌍을 이룬 비교의 일반화
- 블록(block) : 요인의 처리효과 비교의 정확도를 높이기 위해 예비지식을 활용하여 나눈 동질적인 실험단위

### ○ 실험 설계

- $p$ 개의 수준(처리)과  $b$ 개의 블록이 있다고 가정
- 각 블록 안에 처리에 대해 관측값은 하나
- 각 블록 안에 처리의 배열은 확률적으로 결정

## ○ 통계적 모형

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, b.$$

- $\mu$ : 전체 평균,  $\tau_i$ : 처리효과,  $\beta_j$ : 블록 효과
- $\varepsilon_{ij} \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$
- 제약조건:  $\sum_{i=1}^p \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^b \beta_j = 0.$

## ○ 가설 검정

### ○ 처리효과의 동일성 검정

-  $H_0 : \tau_1 = \cdots = \tau_p = 0$  vs  $H_1 : \text{최소한 하나 이상의 } \tau_i \text{는 } 0 \text{이 아님}$

### ○ 변동분해: $SSTO = SSA + SSBL + SSE$

-  $SSTO = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^b (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^b Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N} : \text{자유도} = N - 1$

-  $SSA = b \sum_{i=1}^p (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^p \frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{N} : \text{자유도} = p - 1$

-  $SSBL = p \sum_{j=1}^b (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{j=1}^b \frac{Y_{.j}^2}{p} - \frac{Y_{..}^2}{N} : \text{자유도} = b - 1$

$$- SSE = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^b (Y_{ij} - \overline{Y_{i.}} - \overline{Y_{.j}} + \overline{Y_{..}})^2 :$$

$$\text{자유도} = N - (p - 1) - (b - 1) - 1 = (p - 1)(b - 1)$$

○ 블록효과의 동일성 검정

- 계획에 있어  $pb$ 개의 처리 조합은 실험 단위의 집합에 대해 확률적으로 배치된 것이 아님
- 블록은 실험단위이고 확률화는 각 단위안에서 제한되어짐
- 만약 두 개의 요인에 대해 관심이 있는 경우에는 다른 계획법을 설계

○ 분산분석표

변인	자유도	제곱합	평균제곱	F
모형(처리A)	p-1	SSA	$MSA = SSA/(p-1)$	$MSA/MSE$
블록	b-1	SSBL	$MSBL = SSBL/(b-1)$	$MSBL/MSE$
오차	$(p-1)(b-1)$	SSE	$MSE = SSE/((p-1)(b-1))$	
전체	N-1	SSTO		

## ○ 처리효과에 대한 다중비교

- $H_0 : \mu_{i.} = \mu_{k.}$  vs  $H_1 : \mu_{i.} \neq \mu_{k.}$  또는  $\mu_{i.} - \mu_{k.}$ 의 신뢰구간
- $\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{k.} \pm c \sqrt{MSE} \sqrt{2/b}$ 
  - 최소유의차:  $c = t_{\alpha/2, (p-1)(b-1)}$
  - Bonferroni:  $c = t_{\alpha/(2a), (p-1)(b-1)}$ ,  $a =$  비교검정의 경우의 수
  - Scheffe:  $c = \sqrt{(p-1)F_{\alpha, p-1, (p-1)(b-1)}}$
  - Tukey:  $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{\alpha, p, (p-1)(b-1)}$

## ■ 다원 배치법(multi-factor design)

- 관심의 요인이 3개 이상인 경우, 모든 요인의 수준조합에 대해 확률화를 적용하여 실험
- 요인의 수가 늘어나면, 실험횟수가 많아지고 이에 대해 랜덤화가 어려워짐
- 실험전체를 비슷한 관리 상태 하에서 수행하는데 여러 가지 어려움이 따름
  - ⇒ 요인에 대한 충분한 기술적 검토를 거쳐 불필요한 요인라고 판단되면 과감히 요인의 수를 줄임

## □ 반복이 없는 삼원배치법 (고정효과모형)

- 요인 A, B, C가 각각  $l, m, n$  개의 수준을 가짐
- $lmn$ 개의 모든 수준 조합에 대해 확률화를 적용하여 배치

### ○ 자료의 구조

		$A_1$	$A_2$	$\cdots$	$A_l$
$B_1$	$C_1$	$Y_{111}$	$Y_{211}$	$\cdots$	$Y_{l11}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$C_n$	$Y_{11n}$	$Y_{21n}$	$\cdots$	$Y_{l1n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B_m$	$C_1$	$Y_{1m1}$	$Y_{2m1}$	$\cdots$	$Y_{lm1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$C_n$	$Y_{1mn}$	$Y_{2mn}$	$\cdots$	$Y_{lmn}$



## ○ 모형의 구조식

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

- $\mu$ : 전체평균
- $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ : 요인의 주효과
- $(\alpha\beta)_{ij}, (\alpha\gamma)_{ik}, (\beta\gamma)_{jk}$ : 두 요인의 교호작용
- $\varepsilon_{ijk} \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$
- 3요인의 교호작용  $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ 는 오차항  $\varepsilon_{ijk}$ 에 교락되어 있어 별도로 검정할 수 없음

## ○ 변동 분해

$$\begin{aligned}
 (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}) &= (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...}) \\
 &+ (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...}) \\
 &+ (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{.jk} + \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad SSTO &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2 - CT, \quad CT = \frac{Y_{...}^2}{lmn} \\
 \circ \quad SSA &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^l Y_{i..}^2 - CT, \quad SSB = \frac{1}{ln} \sum_{j=1}^m Y_{.j.}^2 - CT, \quad SSC = \frac{1}{lm} \sum_{k=1}^n Y_{..k}^2 - CT \\
 \circ \quad SSAB &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m Y_{ij.}^2 - CT, \quad SSAC = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n Y_{i.k}^2 - CT, \\
 SSBC &= \frac{1}{l} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n Y_{.jk}^2 - CT
 \end{aligned}$$

- $SS(AB) = SSAB - SSA - SSB$ ,  $SS(AC) = SSAC - SSA - SSC$ ,  
 $SS(BC) = SSBC - SSB - SSC$
- $SSE = SSTO - (SSA + SSB + SSC + SS(AB) + SS(AC) + SS(BC))$

○ 분산분석표

변인		자유도	제곱합	평균제곱	F
주효과	A	$l - 1$	SSA	MSA	MSA/MSE
	B	$m - 1$	SSB	MSB	MSB/MSE
	C	$n - 1$	SSC	MSC	MSC/MSE
교호 작용	(AB)	$(l - 1)(m - 1)$	SS(AB)	MS(AB)	MS(AB)/MSE
	(AC)	$(l - 1)(n - 1)$	SS(AC)	MS(AC)	MS(AC)/MSE
	(BC)	$(m - 1)(n - 1)$	SS(BC)	MS(BC)	MS(BC)/MSE
오차		$(l - 1)(m - 1)(n - 1)$	SSE	MSE	
전체		$lmn - 1$	SSTO		

## ○ 분산 분석후 추정

- 일차적으로 분산분석표에 의한 F-검정이 끝나면, 유의하지 않은 교호작용은 오차항에 흡수시켜 다시 F-검정을 실시

## ● 주효과만 유의한 경우

- 각 요인수준에서의 모평균 추정

- 점추정 :  $\hat{\mu}(A_i) = \bar{Y}_{i..}$

- 구간추정 :  $\bar{Y}_{i..} \pm t_{\alpha/2, \nu} \sqrt{MSE^*} / \sqrt{mn}$

- 수준조합에 대한 모평균 추정

- 점추정 :  $\hat{\mu}(A_i B_j C_k) = \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - 2\bar{Y}_{...}$

- 구간추정 :  $\bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - 2\bar{Y}_{...} \pm t_{\alpha/2, \nu} \sqrt{MSE^*} / \sqrt{n_e}$

- $\frac{1}{n_e} = \frac{1}{mn} + \frac{1}{ln} + \frac{1}{lm} - \frac{2}{lmn} \rightarrow n_e = \frac{lmn}{l+m+n-2}$

- 주효과와 일부 교호작용만 유의한 경우

(예)  $A, B, C, (AC)$  만 유의하다면,

- 수준조합에 대한 모평균 추정

- 점추정 :  $\hat{\mu}(A_i B_j C_k) = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_k + (\widehat{\alpha\gamma})_{ik}$   
 $= \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\gamma}_k + (\widehat{\alpha\gamma})_{ik} + \hat{\beta}_j = \bar{Y}_{i.k} + \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$

- 구간추정 :  $\bar{Y}_{i.k} + \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...} \pm t_{\alpha/2, \nu} \sqrt{MSE^*} / \sqrt{n_e}$

- $\frac{1}{n_e} = \frac{1}{m} + \frac{1}{ln} - \frac{1}{lmn} \rightarrow n_e = \frac{lmn}{lm + m - 1}$

- 모든 요인이 유의한 경우

- 수준조합에 대한 모평균 추정

- 점추정 : 
$$\begin{aligned}\hat{\mu}(A_i B_j C_k) &= \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + (\widehat{\alpha\beta})_{ij} + \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\gamma}_k + (\widehat{\alpha\gamma})_{ik} \\ &\quad + \hat{\mu} + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_k + (\widehat{\beta\gamma})_{jk} - (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\mu} + \hat{\beta}_j + \hat{\mu} + \hat{\gamma}_k) + \hat{\mu} \\ &= \bar{Y}_{ij.} + \bar{Y}_{i.k} + \bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...}\end{aligned}$$

- 구간추정 : 
$$\hat{\mu}(A_i B_j C_k) \pm t_{\alpha/2, \nu} \sqrt{MSE^*} / \sqrt{n_e}$$

- $$n_e = \frac{lmn}{lm + ln + mn - l - m - n + 1}$$

## □ 반복이 있는 삼원배치법 (고정효과모형)

- 요인 A, B, C가 각각  $a, b, c$  개의 수준을 가짐
- 반복수가  $r$  일 때  $N=abcr$ 개의 모든 수준 조합에 대해 확률화를 적용하여 배치

### ○ 자료의 구조

		$A_1$	$\dots$	$A_a$
$B_1$	$C_1$	$Y_{1111} \dots Y_{111r}$	$\dots$	$Y_{a111} \dots Y_{a11r}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$C_c$	$Y_{11c1} \dots Y_{11cr}$	$\dots$	$Y_{a1c1} \dots Y_{a1cr}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B_b$	$C_1$	$Y_{1b11} \dots Y_{1b1r}$	$\dots$	$Y_{ab11} \dots Y_{ab1r}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$C_c$	$Y_{1bc1} \dots Y_{1bcr}$	$\dots$	$Y_{abc1} \dots Y_{abcr}$

## ○ 모형의 구조식

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

- $\mu$ : 전체평균
- $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ : 요인의 주효과
- $(\alpha\beta)_{ij}, (\alpha\gamma)_{ik}, (\beta\gamma)_{jk}$ : 두 요인의 교호작용
- $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ : 세 요인의 교호작용
- $\varepsilon_{ijk} \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$



## ○ 변동 분해

$$\begin{aligned}
 (Y_{ijkl} - \bar{Y}_{....}) &= (\bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{....}) + (\bar{Y}_{.j..} - \bar{Y}_{....}) + (\bar{Y}_{..k.} - \bar{Y}_{....}) + (\bar{Y}_{ij..} - \bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{.j..} + \bar{Y}_{....}) \\
 &\quad + (\bar{Y}_{i.k.} - \bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{..k.} + \bar{Y}_{....}) + (\bar{Y}_{.jk.} - \bar{Y}_{.j..} - \bar{Y}_{..k.} + \bar{Y}_{....}) \\
 &\quad + (Y_{ijk.} - \bar{Y}_{ij..} - \bar{Y}_{i.k.} - \bar{Y}_{.jk.} + \bar{Y}_{i...} + \bar{Y}_{.j..} + \bar{Y}_{..k.} - \bar{Y}_{....}) + e_{ijkl}
 \end{aligned}$$

$$\circ SSTO = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^r Y_{ijkl}^2 - CT, \quad CT = \frac{Y_{....}^2}{N}$$

$$\circ SSA = \frac{1}{bcr} \sum_{i=1}^a Y_{i...}^2 - CT, \quad SSB = \frac{1}{acr} \sum_{j=1}^b Y_{.j..}^2 - CT,$$

$$SSC = \frac{1}{abr} \sum_{k=1}^c Y_{..k.}^2 - CT$$

$$\circ SSAB = \frac{1}{cr} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b Y_{ij..}^2 - CT, \quad SSAC = \frac{1}{br} \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c Y_{i.k.}^2 - CT,$$

$$SSBC = \frac{1}{ar} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c Y_{.jk.}^2 - CT$$

$$\circ \quad SSABC = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c Y_{ijk.}^2 - CT$$

$$\circ \quad SS(AB) = SSAB - SSA - SSB, \quad SS(AC) = SSAC - SSA - SSC, \\ SS(BC) = SSBC - SSB - SSC$$

$$\circ \quad SS(ABC) = SSABC - (SSA + SSB + SSC + SS(AB) + SS(AC) + SS(BC))$$

$$\circ \quad SSE = SSTO - SSABC$$

○ 분산분석표

변인		자유도	제곱합	평균제곱	F
주효과	A	$a - 1$	SSA	MSA	MSA/MSE
	B	$b - 1$	SSB	MSB	MSB/MSE
	C	$c - 1$	SSC	MSC	MSC/MSE
교호 작용	(AB)	$(a - 1)(b - 1)$	SS(AB)	MS(AB)	MS(AB)/MSE
	(AC)	$(a - 1)(c - 1)$	SS(AC)	MS(AC)	MS(AC)/MSE
	(BC)	$(b - 1)(c - 1)$	SS(BC)	MS(BC)	MS(BC)/MSE
	(ABC)	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	SS(ABC)	MS(ABC)	MS(ABC)/MSE
오차		$abc(r - 1)$	SSE	MSE	
전체		$abcr - 1$	SSTO		

## ■ 변량효과모형과 혼합효과(mixed effect)모형

- 모든 요인이 고정수준을 가지면 고정효과모형
- 모든 요인이 변량수준을 가지면 변량효과모형
- 일부 요인은 고정수준, 나머지는 변량수준을 가지면 혼합효과모형

## □ 1요인 변량효과 모형

### ○ 두 단계 추출

#### ① 수준 추출

- 수준들의 모집단  $\Omega$  에서  $p$  개의 수준을 무작위 추출
- $\mu_i$ :  $i$  번째 추출되는 수준들의 평균반응

$$\Rightarrow \mu_i \sim \text{iid } N(\mu, \sigma_\mu^2)$$

#### ② 관측단위 추출

- 추출되는 각 수준에서  $n_i$  개의 관측단위를 무작위로 추출(배정)

- $$N = \sum_{i=1}^p n_i$$

## ○ 1요인 변량효과 분산분석 모형

- $Y_{ij}$ :  $i$  번째 추출 수준(학교)에서  $j$  번째 추출하는 관측단위(학생)의 반응변수

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n_i$$

- $\mu_i \sim \text{iid } N(\mu, \sigma_\mu^2)$ :  $i$  번째 추출수준의 수준평균
- $\varepsilon_{ij} \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$
- $\tau_i = \mu_i - \mu$ 라고 하면

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n_i$$

- $\tau_i \sim \text{iid } N(0, \sigma_\mu^2)$
- 모든  $\tau_i$ 와  $\varepsilon_{ij}$ 는 서로 독립

- 모형의 특징

- $E(Y_{ij}) = E(\mu_i + \varepsilon_{ij}) = \mu$
- $Var(Y_{ij}) = Var(\mu_i + \varepsilon_{ij}) = \sigma_\mu^2 + \sigma^2$
- $Y_{ij} \sim N(\mu, \sigma_\mu^2 + \sigma^2)$
- $Cov(Y_{ij}, Y_{ik}) = Cov(\mu_i + \varepsilon_{ij}, \mu_i + \varepsilon_{ik}) = Var(\mu_i) = \sigma_\mu^2 \geq 0$
- 분산  $\sigma_\mu^2$ 와  $\sigma^2$ 를 variance components라고 함
  - ⇒ components of variance 또는 random effects 모형이라고 부름

## ○ 관심문제

- $\sigma_\mu^2$ 의 추정
- $\mu$ 의 추정
- $\sigma^2$ 의 추정
- $\rho = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma^2}$ 의 추정
  - $\rho$ 가 크다는 것은
    - 전체분산 중 수준평균의 분산이 차지하는 비율이 높음
    - 한 수준의 두 관측값의 상관관계가 높음



## ○ 분산분석

- 가정:  $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \tau_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\tau^2), \tau_i$ 와  $\varepsilon_{ij}$ 는 독립
- $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$  VS  $H_1 : \sigma_\tau^2 > 0$ 
  - $\sigma_\tau^2 = 0$ 이라면, 모든 처리는 동일
  - $\sigma_\tau^2 > 0$ 이라면, 처리들 간에 변동이 있다는 것을 의미
- 제곱합 등식  $SSTO = SSTR + SSE$ 는 계속 사용

변인	자유도	제곱합(SS)	평균제곱(MS)	F
처리(모형)	$p - 1$	SSTR	MSTR	MSTR/MSE
오차	$N - p$	SSE	MSE	
전체	$N - 1$	SSTO		

- $E(MSTR) = \sigma^2 + n' \sigma_\mu^2, \quad n' = (N - \sum n_i^2 / N) / (p - 1)$ 
  - 모든  $n_i = n$  이면  $n' = n$
  - $n' \sigma_\mu^2 = E(MSTR) - E(MSE)$
  - $\sigma_\mu^2 = \frac{E(MSTR) - E(MSE)}{n'} \Rightarrow \hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{MSTR - MSE}{n'}$
  - $MSTR < MSE$  이면  $\hat{\sigma}_\mu^2 < 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_\mu^2 = 0$  으로 고쳐 사용

- $\mu$ 의 추정
  - $\mu = E(\mu_i)$ 
    - $\hat{\mu}_i = \bar{Y}_{i.}$
    - $\hat{\mu} = \bar{Y}_{i.}$ 의 평균  $\Rightarrow$  균형 자료이므로  $\hat{\mu} = \bar{Y}_{..}$

- $\sigma^2$ 와  $\sigma_\mu^2$ 의 추정

- $\hat{\sigma}^2 = MSE$
- $\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{MSTR - MSE}{n'}$

- $\frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma^2}$ 의 추정  $\Leftarrow \frac{\hat{\sigma}_\mu^2}{\hat{\sigma}_\mu^2 + \hat{\sigma}^2}$

## □ 2요인 변량효과 모형과 혼합효과 모형

- 2요인 변량효과 모형에서의 관심문제
  - 교호작용이 있는가?  $\Rightarrow \sigma_{(\alpha\beta)}^2 > 0$
  - A요인의 주효과가 있는가?  $\Rightarrow \sigma_{\alpha}^2 > 0$
  - B요인의 주효과가 있는가?  $\Rightarrow \sigma_{\beta}^2 > 0$
  - 분산요소  $\sigma_{\alpha}^2, \sigma_{\beta}^2, \sigma_{(\alpha\beta)}^2, \sigma^2$ 의 추정

- 2요인 혼합효과 모형에서의 관심문제
  - 교호작용이 있는가?  $\Rightarrow \sigma^2_{(\alpha\beta)} > 0$
  - A요인의 주효과가 있는가?  $\Rightarrow$  하나 이상의  $\alpha_i$ 가 0이 아니다.
  - B요인의 주효과가 있는가?  $\sigma^2_{\beta} > 0$
  - 분산요소  $\sigma^2_{\beta}, \sigma^2_{(\alpha\beta)}, \sigma^2$ 의 추정
  - 고정수준 요인의 효과 추정과 비교
  
- 분산분석표
  - 변량효과모형과 혼합효과모형의 제곱합, 자유도, 평균제곱은 고정효과모형의 경우와 같음
  - EMS는 고정수준의 경우와 다르고 이에 따라 검정통계량도 달라짐

## ① 교호작용

- $H_0 : \sigma_{(\alpha\beta)}^2 = 0$  vs  $H_1 : \sigma_{(\alpha\beta)}^2 > 0$
- $F = MS(AB) / MSE \sim F_{(a-1)(b-1), ab(n-1)}$
- 교호작용의 강약
  - $Var[(\hat{\alpha\beta})_{ij}] > \hat{\sigma}^2$  이면 강한 것으로 보고 아니면 약한 것으로 봄

## ② 주효과 검정

- 교호작용이 강한 경우 검정하지 않음
- $H_0 : \sigma_{\alpha}^2 = 0$  vs  $H_1 : \sigma_{\alpha}^2 > 0$  (변량효과모형)
- $H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_a = 0$  vs  $H_1 : \text{not } H_0$  (혼합모형)

변인	자유도	SS	EMS
A	$a - 1$	$nb \sum (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{(\alpha\beta)}^2 + nb\sigma_{\alpha}^2$
B	$b - 1$	$na \sum (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{(\alpha\beta)}^2 + na\sigma_{\beta}^2$
(AB)	$(a - 1)(b - 1)$	$n \sum \sum (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{(\alpha\beta)}^2$
오차	$ab(n - 1)$	$\sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$	$\sigma^2$

가설	검정통계량
$H_0 : \sigma_{\alpha}^2 = 0 \text{ vs } H_1 : \sigma_{\alpha}^2 > 0$	
$H_0 : \sigma_{\beta}^2 = 0 \text{ vs } H_1 : \sigma_{\beta}^2 > 0$	
$H_0 : \sigma_{(\alpha\beta)}^2 = 0 \text{ vs } H_1 : \sigma_{(\alpha\beta)}^2 > 0$	