# Resultados sobre convergencia de series de Fourier

## Trabajo de Fin de Grado

David López del Pino

Universidad de Málaga

1 de julio de 2025

# Contenidos

# Contenidos

1. Preliminares
   - Espacios $L^p$
   - Series de Fourier
   - Resultados de Análisis Funcional
2. Convergencia puntual
   - Una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto
   - Una función de $L^1$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto
   - Fenómeno de Gibbs
3. Convergencia en $L^p$
   - Convergencia en $L^1$
   - El teorema de interpolación de Riesz-Thorin
   - Convergencia en $L^p$ para $1 < p < \infty$

# Contenidos

Si $1 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ medible y } 2\pi\text{-periódica}, \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt < \infty \right\},$$

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Para $p = \infty$, se define

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ medible y } 2\pi\text{-periódica}, \operatorname*{sup\,es}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty \right\},$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{sup\,es}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \qquad f \in L^\infty(\mathbb{T}).$$

Identificamos funciones iguales en casi todo punto.

Si $1 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ medible y } 2\pi\text{-periódica}, \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt < \infty \right\},$$

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Para $p = \infty$, se define

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ medible y } 2\pi\text{-periódica}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{es} \, |f(x)| < \infty \right\},$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{es} \, |f(x)|, \qquad f \in L^\infty(\mathbb{T}).$$

Identificamos funciones iguales en casi todo punto.

Si $1 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ medible y } 2\pi\text{-periódica}, \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt < \infty \right\},$$

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Para $p = \infty$, se define

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ medible y } 2\pi\text{-periódica}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{es}\, |f(x)| < \infty \right\},$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{es}\, |f(x)|, \qquad f \in L^\infty(\mathbb{T}).$$

Identificamos funciones iguales en casi todo punto.

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$.

- Se definen los *coeficientes de Fourier de f* como

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

- La *serie de Fourier de f* es la serie formal

$$Sf(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}.$$

- La suma parcial $n$-ésima esta serie es

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$.

- Se definen los *coeficientes de Fourier de f* como

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

- La *serie de Fourier de f* es la serie formal

$$Sf(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}.$$

- La suma parcial $n$-ésima esta serie es

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$.

- Se definen los *coeficientes de Fourier de f* como

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

- La *serie de Fourier de f* es la serie formal

$$Sf(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}.$$

- La suma parcial $n$-ésima esta serie es

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

Un *polinomio trigonométrico* es una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$F(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx},$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $c_k \in \mathbb{C}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $|k| \leq n$.

Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el *núcleo de Dirichlet de orden $n$* es la función $D_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n f(x) = f * D_n(x).$$

Un *polinomio trigonométrico* es una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$F(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx},$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $c_k \in \mathbb{C}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $|k| \leq n$.

Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el *núcleo de Dirichlet de orden* $n$ es la función $D_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n f(x) = f * D_n(x).$$

Un *polinomio trigonométrico* es una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$F(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx},$$

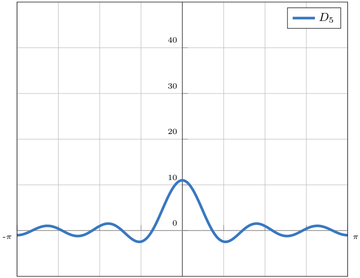
con $n \in \mathbb{N}$ y $c_k \in \mathbb{C}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $|k| \leq n$.

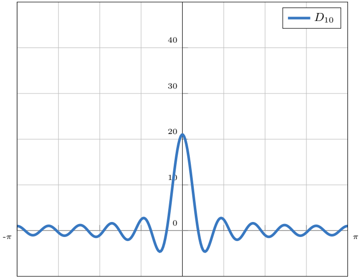
Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el *núcleo de Dirichlet de orden $n$* es la función $D_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

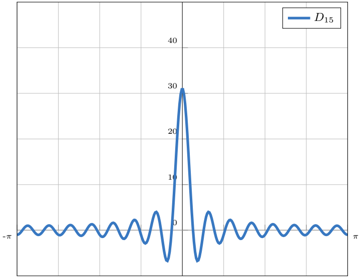
$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

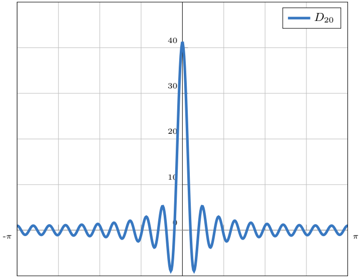
Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n f(x) = f * D_n(x).$$


$D_5$
40
30
20
10
0
$-\pi$
$\pi$


$D_{10}$
40
30
20
10
0
$-\pi$
$\pi$


$D_{15}$
40
30
20
10
0
$-\pi$
$\pi$


$D_{20}$
40
30
20
10
0
$-\pi$
$\pi$

Si $T\colon X \to Y$ es lineal y continua, se define la *norma de T* como

$$\|T\| = \text{ínf}\{C > 0\colon \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ para todo } x \in X\}.$$

Se tiene que

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|T(x)\|_Y.$$

**Teorema de la acotación uniforme**

Sea $\{T_j\}_{j\in I}$ una familia de aplicaciones lineales y continuas de $X$ en $Y$. Supongamos que

- $(X, \|\cdot\|_X)$ es de Banach.
- Para cada $x \in X$, el conjunto $\{T_j(x)\colon j \in I\}$ es acotado en $Y$.

Entonces el conjunto $\{\|T_j\|\colon j \in I\}$ es acotado en $\mathbb{R}$.

Si $T\colon X \to Y$ es lineal y continua, se define la *norma de $T$* como

$$\|T\| = \text{ínf}\{C > 0\colon \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ para todo } x \in X\}.$$

Se tiene que

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y.$$

## Teorema de la acotación uniforme

Sea $\{T_j\}_{j\in I}$ una familia de aplicaciones lineales y continuas de $X$ en $Y$. Supongamos que

- $(X, \|\cdot\|_X)$ es de Banach.
- Para cada $x \in X$, el conjunto $\{T_j(x)\colon j \in I\}$ es acotado en $Y$.

Entonces el conjunto $\{\|T_j\|\colon j \in I\}$ es acotado en $\mathbb{R}$.

## Teorema

Existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.

Consideramos la familia de aplicaciones lineales y continuas $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$\begin{aligned} T_n \colon \mathcal{C}([-\pi,\pi]) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ g &\longmapsto S_n g(0). \end{aligned}$$

Se demuestra que

$$\|T_n\| = \|D_n\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Por el teorema de la acotación uniforme, existe $g \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$ con

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(g)| = \infty.$$

## Teorema

Existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.

Consideramos la familia de aplicaciones lineales y continuas $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$\begin{aligned} T_n\colon \mathcal{C}([-\pi,\pi]) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ g &\longmapsto S_n g(0). \end{aligned}$$

Se demuestra que

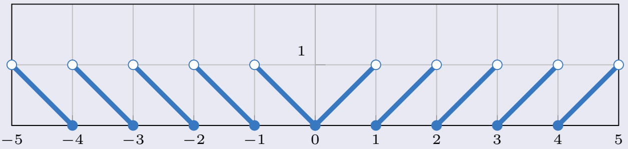
$$\|T_n\| = \|D_n\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Por el teorema de la acotación uniforme, existe $g \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$ con

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(g)| = \infty.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

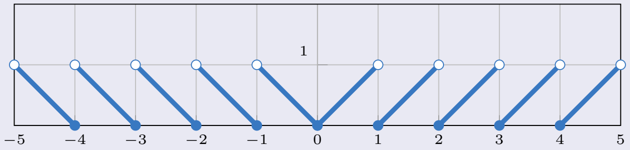
- Si $\alpha \geq 0$, se define la *parte fraccionaria de* $\alpha$ como $\langle\alpha\rangle = \alpha - E(\alpha)$.
- Si $\alpha < 0$, se define la *parte fraccionaria de* $\alpha$ como $\langle\alpha\rangle = \langle-\alpha\rangle$.




- $\langle\alpha\rangle \in [0, 1)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Si $|\alpha| < 1$, entonces $\langle\alpha\rangle = |\alpha|$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\langle\alpha + n\rangle = \langle\alpha\rangle$.
- Si $\alpha, \beta > 0$, entonces $\langle\alpha + \beta\rangle = \langle\langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle\rangle$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \geq 0$, se define la *parte fraccionaria de* $\alpha$ como $\langle \alpha \rangle = \alpha - E(\alpha)$.
- Si $\alpha < 0$, se define la *parte fraccionaria de* $\alpha$ como $\langle \alpha \rangle = \langle -\alpha \rangle$.




- $\langle \alpha \rangle \in [0, 1)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Si $|\alpha| < 1$, entonces $\langle \alpha \rangle = |\alpha|$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\langle \alpha + n \rangle = \langle \alpha \rangle$.
- Si $\alpha, \beta > 0$, entonces $\langle \alpha + \beta \rangle = \langle \langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle \rangle$.

**Lema**

Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- El conjunto $\{\langle k\alpha \rangle : k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 1)$.
- El conjunto $\{\langle k\alpha \rangle : k \in \mathbb{I}\}$ es denso en $[0, 1)$.

## Lema

Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- El conjunto $\{\langle k\alpha \rangle : k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 1)$.
- El conjunto $\{\langle k\alpha \rangle : k \in \mathbb{I}\}$ es denso en $[0, 1)$.

## Lema

Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- El conjunto $\{\langle k\alpha \rangle : k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 1)$.
- El conjunto $\{\langle k\alpha \rangle : k \in \mathbb{I}\}$ es denso en $[0, 1)$.

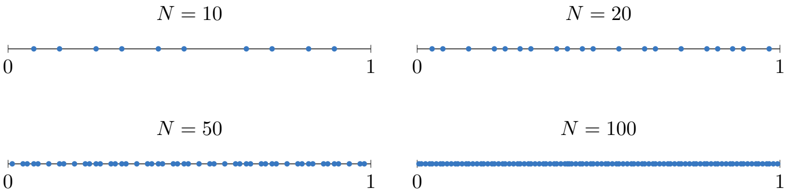



Figura: Representación de $\langle \alpha \rangle, \langle 2\alpha \rangle, \ldots, \langle N\alpha \rangle$ para $\alpha = \sqrt{2}$.

**Teorema**

Existe una función de $L^1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto.

Se define $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} F_{n_k}(x),$$

donde

- $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos con $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$.
- $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios trigonométricos no negativos.

Tomando las sucesiones adecuadas, se tiene que $f \in L^1(\mathbb{T})$ y que para todo $x \in [0, 2\pi)$, la sucesión $\{S_n f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge.

**Teorema**

Existe una función de $L^1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto.

Se define $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}} F_{n_k}(x),$$

donde

- $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos con $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$.
- $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios trigonométricos no negativos.

Tomando las sucesiones adecuadas, se tiene que $f \in L^1(\mathbb{T})$ y que para todo $x \in [0, 2\pi)$, la sucesión $\{S_n f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge.

## Teorema de Carleson-Hunt

Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$, con $1 < p \leq \infty$. Entonces $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f$ en casi todo punto.

Consideramos la función $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

La serie de Fourier de $f$ es

$$Sf(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Se tiene que

- $Sf(x) = f(x)$ para todo $x \in (-\pi,\pi) \setminus \{0\}$.
- $Sf(0) = Sf(\pi) = Sf(-\pi) = 0$.

Consideramos la función $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le \pi, \\ -1 & \text{si } -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

La serie de Fourier de $f$ es

$$Sf(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Se tiene que

- $Sf(x) = f(x)$ para todo $x \in (-\pi,\pi) \setminus \{0\}$.
- $Sf(0) = Sf(\pi) = Sf(-\pi) = 0$.

Consideramos la función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

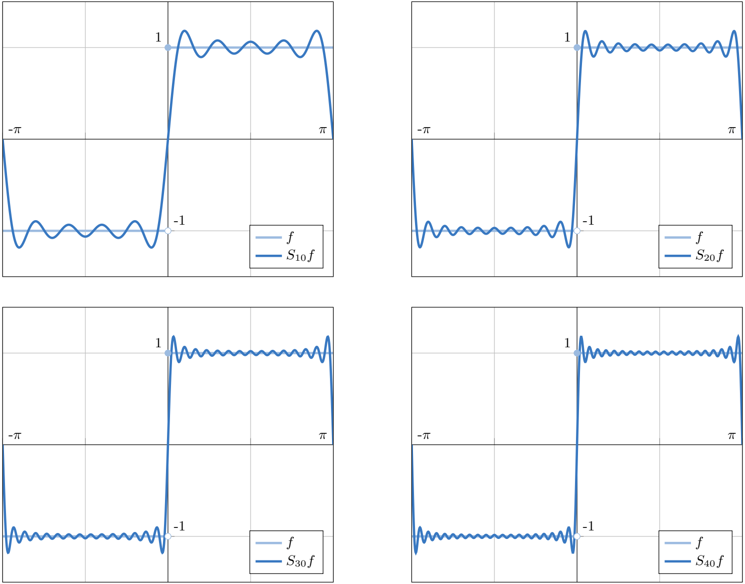
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

La serie de Fourier de $f$ es

$$Sf(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Se tiene que

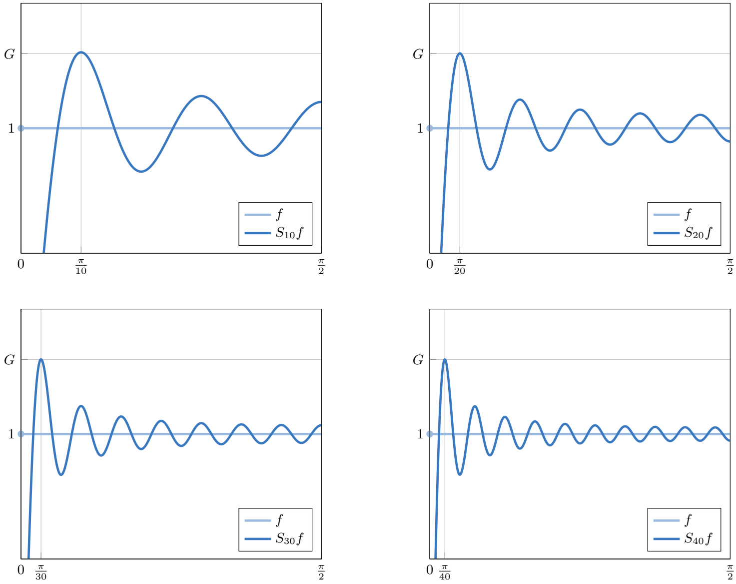
- $Sf(x) = f(x)$ para todo $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$.
- $Sf(0) = Sf(\pi) = Sf(-\pi) = 0$.


1
-π
π
-1
f
S10f
1
-π
π
-1
f
S20f
1
-π
π
-1
f
S30f
1
-π
π
-1
f
S40f

El primer máximo local de $S_n f$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ es $x_n = \frac{\pi}{2E(\frac{n+1}{2})}$, y se verifica

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(t)}{t}\, dt = G.$$

El número real $G$ se denomina *constante de Gibbs*.


G
1
0
π/10
π/2
f
S10 f
G
1
0
π/20
π/2
f
S20 f
G
1
0
π/30
π/2
f
S30 f
G
1
0
π/40
π/2
f
S40 f

Dado $p \in \overline{\mathbb{R}}$ con $1 \leq p \leq \infty$, se trata de estudiar si

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_p = 0$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

**Lema**

Si $1 \leq p < \infty$, son equivalentes

- $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.
- Existe $C_p > 0$ tal que

$$\|S_n f\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Dado $p \in \overline{\mathbb{R}}$ con $1 \leq p \leq \infty$, se trata de estudiar si

$$\lim_{n \to \infty} \|S_n f - f\|_p = 0$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

**Lema**

Si $1 \leq p < \infty$, son equivalentes

- $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.
- Existe $C_p > 0$ tal que

$$\|S_n f\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

**Teorema**

Existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f$ en $L^1(\mathbb{T})$.

Se considera la familia de aplicaciones lineales y continuas $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$T_n \colon L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow L^1(\mathbb{T}),$$
$$f \longmapsto S_n f.$$

Usando el teorema de la acotación uniforme, se demuestra que existen $n \in \mathbb{N}$ y $f \in L^1(\mathbb{T})$ tales que

$$\|T_n(f)\|_1 > C\|f\|_1$$

para todo $C > 0$.

### Teorema

Existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f$ en $L^1(\mathbb{T})$.

Se considera la familia de aplicaciones lineales y continuas $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} T_n \colon L^1(\mathbb{T}) &\longrightarrow L^1(\mathbb{T}), \\ f &\longmapsto S_n f. \end{aligned}$$

Usando el teorema de la acotación uniforme, se demuestra que existen $n \in \mathbb{N}$ y $f \in L^1(\mathbb{T})$ tales que

$$\|T_n(f)\|_1 > C\|f\|_1$$

para todo $C > 0$.

## Teorema de interpolación de Riesz-Thorin

Sean $p, q, r \in \mathbb{R}$ con $1 < p < r < q < \infty$. Sea $T\colon L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ una aplicación lineal. Supongamos que existen $M_p, M_q > 0$ tales que

- $\|T(f)\|_p \leq M_p \|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.
- $\|T(f)\|_q \leq M_q \|f\|_q$ para toda $f \in L^q(\mathbb{T})$.

Entonces existe $M_r > 0$ tal que

$$\|T(f)\|_r \leq M_r \|f\|_r$$

para toda $f \in L^r(\mathbb{T})$.

**Teorema**

Si $1 < p < \infty$, entonces $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

1. Primero se prueba para $p \in \mathbb{N}$ par y con $p > 2$.
2. Luego se prueba para $p > 2$ usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin.
3. Finalmente se prueba para $1 < p < 2$ mediante un argumento de dualidad.

**Teorema**

Si $1 < p < \infty$, entonces $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

1. Primero se prueba para $p \in \mathbb{N}$ par y con $p > 2$.
2. Luego se prueba para $p > 2$ usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin.
3. Finalmente se prueba para $1 < p < 2$ mediante un argumento de dualidad.

**Teorema**

Si $1 < p < \infty$, entonces $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

1. Primero se prueba para $p \in \mathbb{N}$ par y con $p > 2$.
2. Luego se prueba para $p > 2$ usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin.
3. Finalmente se prueba para $1 < p < 2$ mediante un argumento de dualidad.

**Teorema**

Si $1 < p < \infty$, entonces $\{S_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

1. Primero se prueba para $p \in \mathbb{N}$ par y con $p > 2$.
2. Luego se prueba para $p > 2$ usando el teorema de interpolación de Riesz-Thorin.
3. Finalmente se prueba para $1 < p < 2$ mediante un argumento de dualidad.