✱ Ch 6 Dynamics

Kinematics를 통해 위치와 방향 , 그리고 속도를 파악했다.

이제 가속도 / 각가속도와 힘/토크 사이의 관계를 통해 로봇의 움직임을 알아본다. -------- Eqn of motion

Hand에 가해진 외력

Actuator 토크

① $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta} \longrightarrow \tau$

② $\tau \longrightarrow \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$

- Inertia Tensor → Program이 찾아준다.

- 뉴턴 / 오일러 방정식

Link를 움직이려면 가속 / 감속해야 한다.

이를 위해 필요한 힘 = 가속도 + 질량분포

Inertia 와 COG를 찾으면 된다!

선가속도에 대한 Eqn : $\vec{F} = m\vec{a}$ ($a = \frac{d}{dt} v_c$)

각가속도에 대한 Eqn : $\vec{N} = {}^{c}I\dot{\omega} + \omega \times {}^{c}I\omega$ -------- (평면에서 : $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$)

- Eqn of motion

$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$을 만드는 f , τ를 찾아내자!

→ ① Newtonian method -------- 힘의 평형에 대해 접근

→ ② Lagrangian method -------- 에너지의 평형에 대해 접근

이 method에 집중

- Lagrangian method

i번 째 Link의 kinetic E & Potential E

① $k_i = \underbrace{\frac{1}{2} m_i \cdot v_i^T v_i}_{\text{COG 선속도 E}} + \underbrace{\frac{1}{2} I\, {}^{i}\omega_i^T\, {}^{i}\omega_i}_{\text{각속도 E}}$ ------------ Total $k = \sum_i k_i$ ⟶ if 점질량? $I = 0$

∴ $k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i$

② $V_i = -m g^{\circ} r_c$

$- \frac{1}{2} k x$

COG까지 거리

------------ Total $V = \sum_i V_i$

③ $L = K - V$ (Lagrange) -------- Lagrange Dynamics ⇒ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau$

System에 제어 입력이 없을 때 E는 일정하다!

(~ = 0 일 때)

⇒ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial k}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = \tau$

• Eqn of motion의 구조

① Joint Space

• State Space Eqn

Coriolis , Centrifugal

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta,\dot{\theta}) + G(\theta)$$ Gravity

mass matrix (n×n)

비선형 term으로 이후 Control Partitioning으로 선형화할 것!

• Configuration Eqn

Coriolis term

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + B(\theta)[\dot{\theta}\dot{\theta}] + C(\theta)[\dot{\theta}^2] + G(\theta)$$ ------------ 계수들이 모두 위치(θ)의 함수!

Centrifugal term

② Cartesian Space

$$\boxed{\begin{array}{l} ①\ \tau = J^T F \\ ②\ \dot{x} = J\dot{\theta} \\ \quad \Rightarrow \ddot{x} = \dot{J}\dot{\theta} + J\cdot\ddot{\theta} \\ \quad \Rightarrow \ddot{\theta} = J^{-1}\ddot{x} - J^{-1}\dot{J}\dot{\theta} \end{array}}$$

$$\underbrace{J^{-T}\cdot\tau}_{=F} = J^{-T}\cdot M(\theta)\ddot{\theta} + J^{-T}\cdot V(\theta,\dot{\theta}) + J^{-T}\cdot G(\theta)$$

$$\Rightarrow F = J^{-T}\cdot M(\theta)(J^{-1}\ddot{x} - J^{-1}\dot{J}\dot{\theta}) + J^{-T}\cdot V(\theta,\dot{\theta}) + J^{-T}\cdot G(\theta)$$

$$\Rightarrow M_x(\theta) = J^{-T}\cdot M(\theta)J^{-1}$$

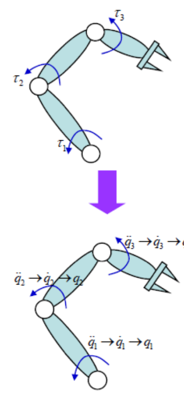
$$V_x(\theta,\dot{\theta}) = J^{-T}(V(\theta,\dot{\theta}) - M(\theta)J^{-1}\cdot\dot{J}\dot{\theta})$$

$$G_x(\theta) = J^{-T}\cdot G(\theta)$$

$\therefore F = M_x(\theta)\ddot{x} + V_x(\theta,\dot{\theta}) + G_x(\theta)$ → Cartesian State Space Eqn

• Dynamic Simulation

Robot의 Test 구동에 Eqn of motion을 이용한다. $\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta,\dot{\theta}) + G(\theta)$ 를 $\ddot{\theta}$에 대해 풀자



① Joint Space

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = M(\theta)^{-1}(V(\theta,\dot{\theta}) + G(\theta) - \tau)$$

$\left(\begin{array}{l} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{array} \right.$ 의 초기조건 + τ 를 주자

$$\longrightarrow \begin{array}{l} \dot{\theta}(t+\Delta t) = \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)\Delta t \\ \theta(t+\Delta t) = \theta(t) + \dot{\theta}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}(t)\Delta t^2 \end{array}$$

$\therefore \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$를 구해 robot을 움직여본다!

② Cartesian Space

⇒ $\ddot{\theta}$을 통해 $\theta, \dot{\theta}$을 구했다.

이제 Ter J를 써서 Hand의 위치·방향 / 속도·각속도를 구한다!

• Dynamics Parameter Estimation

→ new robot을 받았을 때, robot의 파라미터를 실험적으로 구하는 법

friction

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) + d$$

→ ex) $\tau = I\ddot{\theta} + mgr\sin\theta + I_m\dot{\theta} + F_s\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}) + F_v\dot{\theta}$ ⇒ $\tau = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} & g\sin\theta & \mathrm{sign}(\dot{\theta}) & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I+I_m \\ mr \\ F_s \\ F_v \end{bmatrix}$

찾을 값

$$\Rightarrow \tau = Y(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})\,\theta \longrightarrow \theta = Y^{-1}\cdot\tau$$ 에 τ를 여러가지 넣어보며 θ를 Get!

Regressor