

# Material Teórica XIII

## Resolución exacta de problemas de Programación Lineal Entera

- Métodos de resolución exacta de problemas de PLE:
  - Planos de corte

### ***Resolución exacta de problemas de Programación Lineal Entera con Planos de corte***

NOTA: Agradecemos especialmente a las profesoras Isabel Méndez Díaz y Paula Zabala, del Departamento de Computación de la UBA, por su invalorable aporte para esta parte de la clase.

### **Conceptos generales**

Un problema de programación lineal entera (PLE) o mixta (MIP) se modela utilizando desigualdades de la misma forma que un problema de programación lineal continua (PLC), la diferencia radica en la inclusión de restricciones de integralidad sobre todas (PLE) o algunas (MIP) de las variables.

Al ser el mismo modelo con el agregado de restricciones de integralidad es claro que las soluciones enteras estarán contenidas en el poliedro continuo. Al poliedro más chico que contiene a las soluciones enteras lo llamaremos **cápsula convexa**, es el poliedro del problema entero.

Recordemos las restricciones originales del problema de FA CALDO (el de los helados que vimos en la clase 3):

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 600 \text{ [KG AZUCAR/MES]}$$

$$4 X_2 \leq 600 \text{ [KG CREMA/MES]}$$

$$2 X_1 + 4 X_2 \leq 801 \text{ [KG ALMID./MES]}$$

$$Z(\text{MAX}) = 8 X_1 + 10 X_2$$

Al resolverlo obtendríamos lo siguiente:

Óptimo:

$$Z = 2601$$

$$X_1 = 199,5$$

$$X_2 = 100,5$$

$$X_4 = 198$$

$$VM(X_3) = 3, VM(X_5) = 1$$

¿Y si necesitáramos que  $X_1$  y  $X_2$  fueran enteras? Esta solución no nos sirve.

Si al problema original le agregamos las variables slack nos quedaría:

$$2 X_1 + 2 X_2 + X_3 = 600 \quad (1)$$

$$4 X_2 + X_4 = 600 \quad (2)$$

$$2 X_1 + 4 X_2 + X_5 = 801 \quad (3)$$

Resolvemos mediante SIMPLEX

			8	10				
Ck	Xk	Bk	X1	X2	X3	X4	X5	$\theta$
0	X3	600	2	2	1	0	0	300
0	X4	600	0	4	0	1	0	--
0	X5	801	2	4	0	0	1	400,5
Z		0	-8	-10	0	0	0	

			8	10				
Ck	Xk	Bk	X1	X2	X3	X4	X5	$\theta$
8	X1	300	1	1	0,5	0	0	300
0	X4	600	0	4	0	1	0	140
0	X5	201	0	2	-1	0	1	100,5
Z		2400	0	-2	4	0	0	

			8	10				
Ck	Xk	Bk	X1	X2	X3	X4	X5	$\theta$
8	X1	199,5	1	0	1	0	-0,5	
0	X4	198	0	0	2	1	-2	
10	X2	100,5	0	1	-0,5	0	0,5	
Z		2601	0	0	3	0	1	

Y el vértice es óptimo

$$X1 = 199,5$$

$$X4 = 198$$

$$X2 = 100,5$$

$$Z = 2601$$

$$X3 = 0$$

$$X5 = 0$$

La transformación del modelo resulta en las siguientes restricciones

$$X1 + X3 - 0,5 X5 = 199,5$$

$$2 X3 + X4 - 2X5 = 198$$

$$X2 - 0,5 X3 + 0,5 X5 = 100,5$$

$$Z(\text{MAX}) = 2601 - 3 X3 - X5$$

Llevando las variables que valen 0 a derecha ( $X_3$  y  $X_5$ ) obtenemos

$$X_1 = 199,5 + X_5/2 - X_3$$

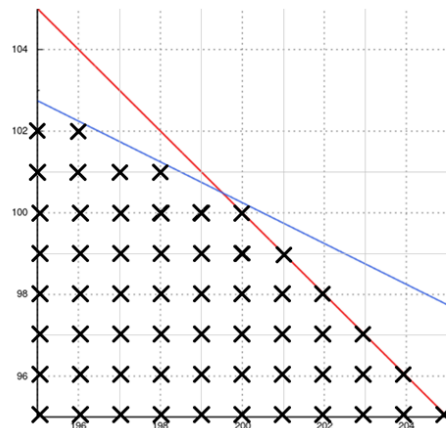
$$X_4 = 198 + 2 X_5 - 2 X_3$$

$$X_2 = 100,5 - X_5/2 + X_3/2$$

$$Z(\text{MAX}) = 2601 - X_5 - 3 X_3$$

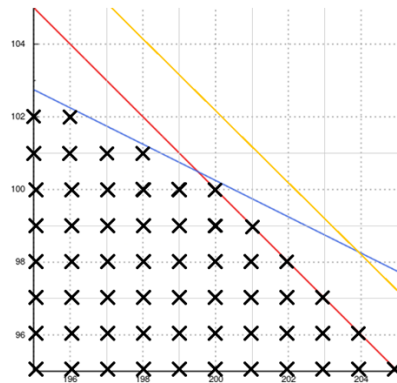
Estas restricciones delimitan exactamente el mismo recinto que el modelo original, el método simplex lo único que hace en cada tabla es despejar 3 variables y dejar 2 en cero (un vértice en 2 dimensiones) para que sea más fácil ver los valores de un vértice. En esta última representación es fácil ver el valor de  $X_1$ ,  $X_4$  y  $X_2$  en el vértice donde  $X_3$  y  $X_5$  valen 0.

¿Cómo queda el poliedro? (vemos agrandada la parte del óptimo):



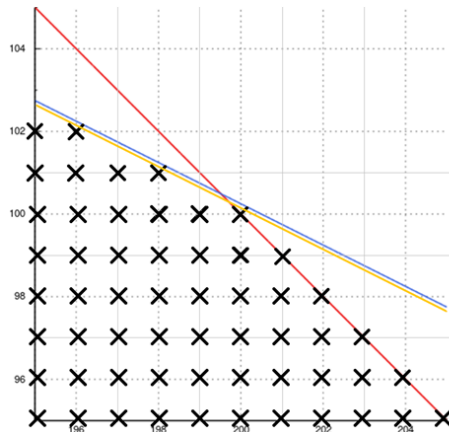
Como vemos, los puntos enteros están marcados con una cruz, pero los vértices no son enteros.

Podemos agregar una restricción (en amarillo) para tratar de llegar al óptimo entero:



Una desigualdad como ésta es válida para el PLE porque no corta puntos enteros pero no aporta a encontrar el óptimo entero ya que no corta puntos fraccionarios.

Probemos otra restricción (también en amarillo):



Esta restricción también es válida para el PLE porque no quita puntos enteros, también quita algunos puntos fraccionarios, no hemos ganado demasiado pero hemos ganado un poco.

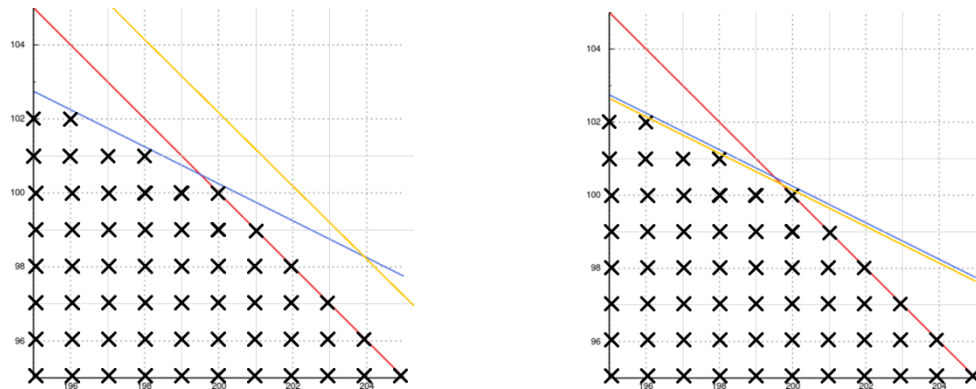
Categoricemos las restricciones que podemos agregar.

### Desigualdad válida

Es una desigualdad que cumplen todos los puntos del poliedro entero

Notar que una desigualdad podría ser válida para el problema entero pero no para el continuo, y justamente estas son las que nos interesan

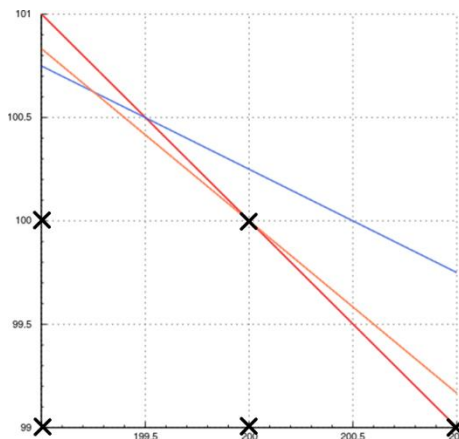
Acá vemos dos desigualdades válidas para el PLE (en amarillo), la segunda no es válida para el PLC



### Cara

Es una desigualdad válida cuya intersección con el poliedro no es vacía (contiene algún punto del poliedro)

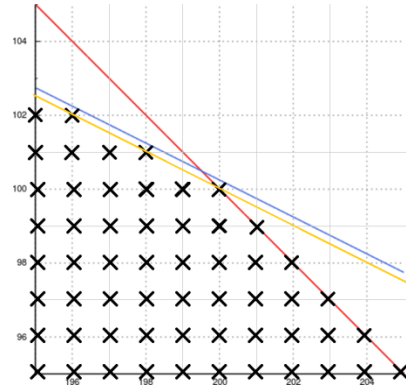
Aquí podemos ver una cara (en naranja)



## Faceta

Es una desigualdad válida cuya intersección con el poliedro tiene dimensión igual a la dimensión del poliedro menos uno

Aquí podemos ver una faceta (en amarillo)



Es una desigualdad válida y su intersección con el poliedro tiene dimensión uno, el poliedro tiene dos dimensiones por lo tanto es una faceta

## Cápsula convexa

Es el recinto más chico que contiene a todas las soluciones factibles.

Se lo puede formular utilizando solo facetas.

## Planos de corte

### Plano de corte

- Es una desigualdad válida
- No es parte de la formulación actual
- No es satisfecha por la solución óptima de la relajación lineal actual (la corta)
- Tiene un algoritmo para encontrarlo

### Planos de corte generales

- Sólo se basan en la condición de integralidad de las variables
- Pueden ser utilizados para cualquier PLE
- Suelen ser muy débiles

¿Por qué planteamos al principio esta forma de ver el problema expresando en función de  $X_3$  y  $X_5$ ?

$$X_1 = 199,5 - X_3 + 0,5 X_5$$

$$X_4 = 198 - 2 X_3 + 2 X_5$$

$$X_2 = 100,5 + 0,5 X_3 - 0,5 X_5$$

$$Z = 2601 - 3 X_3 - X_5$$

Porque es la base de los planos de corte de tipo Gomory:



Planos de corte Gomory

Son planos de corte generales.

Sea  $x^*$  la solución óptima de  $R$ ,  $x_k^*$  fraccionaria con  $k \in I$  y su correspondiente fila en el diccionario óptimo:

$$x_k = x_k^* - \sum_{j \in N} \bar{a}_{kj} x_j.$$

Entonces

■ Puro ( $C = \emptyset$ )

$$\bar{f}_k \leq \sum_{j \in N} \bar{f}_{kj} x_j$$

■ Mixto ( $C \neq \emptyset$ )

$$\bar{f}_k \leq \sum_{j \in N \cap I} \bar{f}_{kj} x_j + \sum_{j \in N \cap C, \bar{a}_{kj} > 0} \bar{a}_{kj} x_j + \sum_{j \in N \cap C, \bar{a}_{kj} < 0} \frac{\bar{f}_k}{\bar{f}_k - 1} \bar{a}_{kj} x_j$$

donde  $\bar{f}_k = \bar{b}_k - \lfloor \bar{b}_k \rfloor$  y  $\bar{f}_{kj} = \bar{a}_{kj} - \lfloor \bar{a}_{kj} \rfloor$ , son desigualdades válidas para  $S$ .

La igualdad es justamente la variable con valor despejada a izquierda ( $x_k$ ),  $x_k^*$  es su valor, luego está la sumatoria de los  $a_{kj}$  con signo invertido (por despejarlo a la derecha) en los vectores modificados que forman parte de la tabla óptima (por eso se pone  $\bar{a}_{kj}$  para indicar que no son los  $a_{kj}$  de las ecuaciones iniciales sino los de la tabla final.

$$x_k = x_k^* - \sum_{j \in N} \bar{a}_{kj} x_j.$$

Esa expresión es la que nosotros obtuvimos para nuestro problema.

$$X_1 = 199,5 - X_3 + 0,5 X_5 \quad (X_k = X_1 ; X_k^* = 199,5 ; a_{1,3} = 1 ; a_{1,5} = -0,5)$$

$$X_4 = 198 - 2 X_3 + 2 X_5$$

$$X_2 = 100,5 + 0,5 X_3 - 0,5 X_5$$

Por último está el plano de corte Gomory  $f_k \leq \sum f_{kj} x_j$ , esta desigualdad es válida solamente para el poliedro entero y siempre quita la solución óptima fraccionaria.

Ejemplo de  $f_{kj}$  : si  $a_{k,j} = 2,6$  entonces  $f_{kj} = 2,6 - \lfloor 2,6 \rfloor = 2,6 - 2 = 0,6$

Ejemplo de  $f_{kj}$  : si  $a_{k,j} = -2,6$  entonces  $f_{kj} = -2,6 - \lfloor -2,6 \rfloor = -2,6 - (-3) = 0,4$

### Algoritmo de planos de corte Gomory

1. Se resuelve la relajación lineal del problema (se resuelve como si las variables fueran continuas)
2. Si la solución es entera FIN
3. Identificar una variable fraccionaria y agregar el plano de corte Gomory
4. Volver a 1

En nuestro problema ya cumplimos el paso 1 (resolver la relajación lineal) y éste fue el resultado:

$$X_4 = 198$$

$$X_2 = 100,5$$

$$X_1 = 199,5$$

$$Z = 2601$$

Vemos que hay variables ( $X_1$  y  $X_2$ ) que debieran tomar valor entero y no lo toman.

Entonces tenemos que pasar al paso 3, por ejemplo, con  $X_2$ .

$$X_2 = 100,5 + 0,5 X_3 - 0,5 X_5$$

$$f_k = 100,5 - 100 = 0,5$$

$$f_{2,3} = -0,5 - (-1) = 0,5$$

$$f_{2,5} = 0,5 - 0 = 0,5$$

Por lo tanto:

$$0,5 \leq 0,5 X_3 + 0,5 X_5$$

$$\text{O sea } 1 \leq X_3 + X_5$$

Esta restricción se puede agregar mediante el dual y reoptimizar.

Si queremos entender esta restricción en términos de  $X_1$  y  $X_2$  podemos reemplazar  $X_3$  y  $X_5$ .

Sabemos (por las ecuaciones iniciales) que

$$X_3 = 600 - 2 X_1 - 2 X_2 \quad X_5 = 801 - 2 X_1 - 4 X_2$$

Es decir que

$$1 \leq 600 - 2 X_1 - 2 X_2 + 801 - 2 X_1 - 4 X_2$$

$$4 X_1 + 6 X_2 \leq 1401 - 1$$

$$4 X_1 + 6 X_2 \leq 1400$$

Contiene la solución válida (200;100), es una cara. No contiene otros puntos por lo tanto su la intersección con las soluciones válidas tiene dimensión es 0 y no es una faceta.

Al incorporar la restricción y reoptimizar obtenemos el óptimo (200;100).

De manera análoga, trabajando con  $X_1$  obtenemos el siguiente corte de Gomory:

$$0,5 \leq 0,5 X_5$$

$$1 \leq X_5$$

Esta restricción se puede agregar mediante el dual y reoptimizar.

Para ver más clara la restricción podemos reemplazar  $X_5$  en función de  $X_1$  y  $X_2$ .

Sabemos (por las ecuaciones iniciales) que

$$X_5 = 801 - 2 X_1 - 4 X_2$$

Es decir que

$$1 \leq 801 - 2 X_1 - 4 X_2$$

$$2 X_1 + 4 X_2 \leq 800$$

Esta restricción contiene la solución válida (200;100) y (198;101), la intersección de la restricción con el recinto es 1, por lo tanto es una faceta.

Al incorporar la restricción conseguimos la cápsula convexa (todos los vértices son enteros) por lo tanto al reoptimizar obtenemos el óptimo (200;100).

Características del algoritmo de planos de corte Gomory

- Convergencia finita dada cierta regla para la elección de la variable fraccionaria en el paso 3
- Generalmente es necesario un gran número de planos de corte
- Errores numéricos pueden generar soluciones incorrectas o que el programa falle
- Recién se obtiene una solución factible al finalizar el algoritmo

## Desigualdades válidas para problemas específicos

### Desigualdad de cubrimiento (cover)

Dada un conjunto de puntos  $S$  que cumplen una restricción tipo **mochila**

$$S = \{x \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b\}$$

con  $a_i \geq 0$  y  $C \subset \{1, \dots, n\}$  tal que

$$\sum_{i=1}^n a_i > b.$$

La desigualdad de **cubrimiento**

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

es válida para  $S$ .

Notar que  $x \in \{0, 1\}^n$ , son  $n$  variables bivalentes.  $x_i$  es 1 cuando el elemento  $i$  está en la mochila

### Desigualdad de cubrimiento extendida

#### Proposición

Sea  $C \subset \{1, \dots, n\}$  tal que  $\sum_{i \in C} a_i > b$ , entonces

$$\sum_{j \in E(C)} x_j \leq |C| - 1$$

es válida para  $S$ , con  $E(C) = C \cup \{j : a_j \geq a_i \forall i \in C\}$ .

Es decir, agregamos todos los elementos cuyo peso es mayor o igual al mayor de los pesos de los elementos del corte cover sin cambiar el término independiente.

Desigualdad de cubrimiento ajustada (lifted)**Procedimiento general:**

Sea  $j_1 \dots j_r$  un orden en  $N - C$ . Para  $t = 1, \dots, r$  supongamos que ya *lifteamos* para  $i = 1, \dots, t-1$ , entonces

$$\sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{j_i} x_{j_i} + \sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

es válida en  $S$ , y ahora queremos *ajustar* sobre  $x_{j_t}$ , es decir encontrar el mayor  $\alpha_{j_t}$  tal que

$$\alpha_{j_t} x_{j_t} + \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{j_i} x_{j_i} + \sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

sea válida en  $S$ .

Planteamos

$$\begin{aligned} \max z_t &= \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{j_i} x_{j_i} + \sum_{j \in C} x_j \\ \text{s.a. } \sum_{i=1}^{t-1} a_{j_i} x_{j_i} + \sum_{j \in C} a_j x_j &\leq b - a_{j_t} \\ x &\in \{0, 1\}^{|C|+t-1} \end{aligned}$$

y tomamos

$$\alpha_{j_t} = |C| - 1 - z_t.$$

Es decir, intentamos aumentar el coeficiente de los elementos del corte cover. El corte Cover o Cover Extendido implica que de los elementos del corte no entran más de  $|C| - 1$ , si se incorpora uno se debe sacar otro, al "Lifteam" se identifican elementos que al incorporarlos no deja de entrar un solo elemento del corte sino más de uno, si este número mínimo de elementos a quitar es "n" entonces se usa "n" de coeficiente para ese elemento en el corte cover.

Ejemplo:

Restricción tipo mochila

$$11 X_1 + 6 X_2 + 6 X_3 + 5 X_4 + 5 X_5 + 4 X_6 + X_7 \leq 19$$

Un corte cover:

$$X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 3$$

Un corte cover extendido:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 3$$

Un corte cover lifteado:

Parto de un cover:  $X_1 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 3$

Quiero ver que pasa cuando  $X_1 = 1$

Veo los coeficientes originales con  $X_1 = 1$

$6 X_3 + 5 X_4 + 5 X_5 \leq 19 - 11 = 8$

Noto que solamente entra  $X_3$ ,  $X_4$  o  $X_5$  (uno solo)

Entonces

$2 X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \leq 3$

## Desigualdades válidas para conjuntos independientes

■ Si  $C \subseteq V$  es una clique  $\Rightarrow \sum_{j \in C} x_j \leq 1$  es una desigualdad válida.

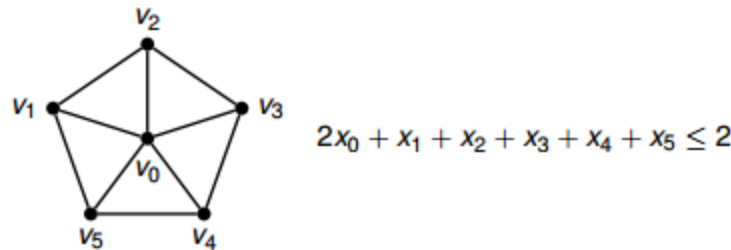
■ Si  $H$  es un agujero impar  $\Rightarrow \sum_{j \in H} x_j \leq \frac{|H|-1}{2}$  es una desigualdad válida.

■ Si  $H$  es un rueda impar con centro  $v_0 \Rightarrow$

$$\frac{|H|-1}{2} x_0 + \sum_{j \in H} x_j \leq \frac{|H|-1}{2}$$

es una desigualdad válida.

Ejemplo:



Este es un modelo típico de la literatura que surge permanentemente en aplicaciones reales donde diferentes elementos no pueden ser seleccionados simultáneamente, dos vértices con una arista que los une son incompatibles entre ellos.

Nota:

- $V$  es el conjunto de los vértices del grafo
- Clique es un conjunto de vértices que forma un completo, todo par tiene una arista
- Agujero es un conjunto de vértices con la forma " $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - \dots - v_n - v_1$ "

- Un agujero par es cuando  $n$  es par, impar si  $n$  es impar
- Una rueda es un agujero con un vértice central " $v_0$ " unido a todos los vértices del agujero dando la forma de "rueda"

Para complementar la información de esta clase recomendamos leer la "Tesis de Doctorado: Un Estudio Poliedral para un algoritmo Branch-and-Cut – Isabel Méndez Díaz." que está en nuestra página ([materias.fi.uba.ar/7114](http://materias.fi.uba.ar/7114)) en la sección de "Lecturas adicionales"

([http://digital.bl.fcen.uba.ar/download/tesis/tesis\\_n3567\\_MendezDiaz.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/download/tesis/tesis_n3567_MendezDiaz.pdf))