Material adicional Teórica VI

Temario

Seguimos trabajando con problemas combinatorios:

- Problemas de Cobertura de Conjuntos
  - Conjuntos a cubrir
  - Particionamiento
  - Packing

Problemas combinatorios

- Son aquellos en los cuales se desea determinar combinaciones óptimas.
- Se caracterizan por tener un número finito de soluciones factibles.
- Generalmente este número es muy grande.

Problemas de cobertura de conjuntos

- Problemas de grupos que se deben cubrir.
- Problemas de grupos que se particionan.
- Problemas de “Packing”

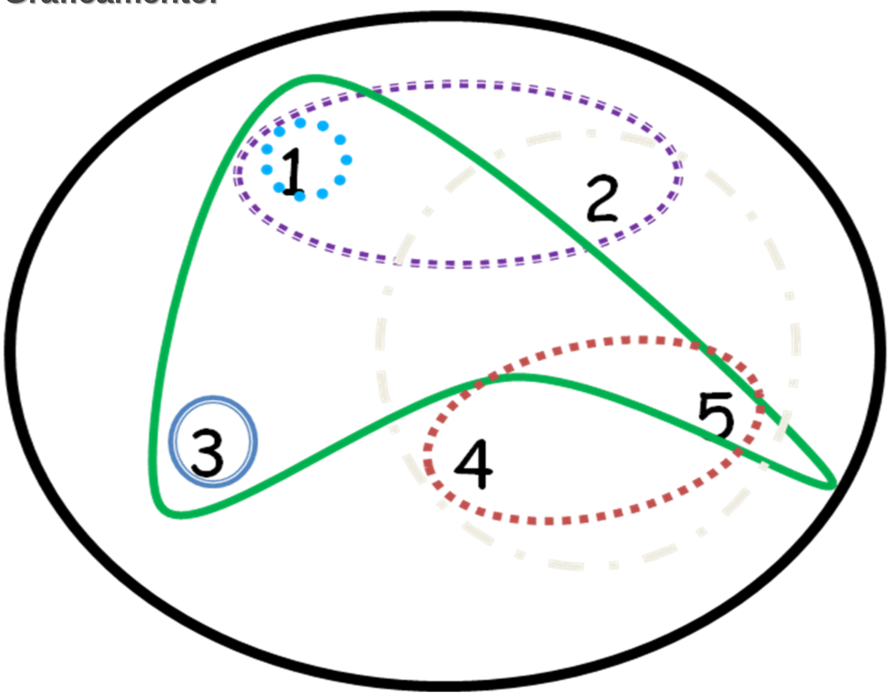
Genéricamente

- S = {1,2,3….n} conjunto de elementos a cubrir.
- L = {(1,2);(2);….} conjunto formado por sub conjuntos de S
- Elegir elementos de L tales que:
  - Cobertura: se cubran todos los elementos de S con solapamiento.
  - Partición: se cubran todos los elementos de S sin solapamiento.
  - Packing: se cubra la máxima cantidad de elementos de S que se pueda sin solapamiento

Un ejemplo:

- Una compañía aérea debe cubrir el vuelo a 5 ciudades (1,2,3,4,5) desde la ciudad cero
- Se han definido 6 posibles circuitos y para cada uno se indica qué ciudades toca: A - (1,2); B - (1,3,5); C - (2,4,5); D - (3); E - (1); F - (4,5)
- Cada tripulación está asignada a un circuito.
- Se busca minimizar la cantidad de tripulaciones.

Gráficamente:



En el conjunto S (ciudades) hemos marcado los subconjuntos (circuitos) que forman L

Esquema general

- Entre los subconjuntos que conforman L (los circuitos) tenemos que elegir algunos de manera de cubrir S, de acuerdo con los criterios del problema que estemos tratando (cobertura, particionamiento o packing)
- Para eso definimos una variable bivalente por cada circuito
- Yi: vale 1 si se realiza el circuito i,

  vale cero sino

Problemas de grupos que se deben cubrir

- ✓ Se debe determinar cuáles circuitos se realizarán, de modo tal que cada una de las cinco ciudades sea cubierta por al menos un circuito (puede haber una o más ciudades que sean cubiertas por más de un circuito, a esto se le llama solapamiento)

```
MIN     YA + YB + YC + YD + YE + YF
ST
!Deben estar cubiertas todas las ciudades al menos una vez, por lo tanto se debe
!elegir al menos un circuito de los que pasan por cada ciudad
CIUDAD1) YA + YB + YE >= 1
CIUDAD2) YA + YC >= 1
CIUDAD3) YB + YD >= 1
CIUDAD4) YC + YF >= 1
CIUDAD5) YB + YC + YF >= 1
```

- En este caso, como son pocas ciudades el problema se puede resolver a mano. Vemos que con solamente dos circuitos se cubren todas las ciudades (con el B y el C)
- Hay un solapamiento en la ciudad 5 (los dos circuitos la cubren) pero el planteo del problema lo permite
- Desde el punto de vista de conjuntos, sería elegir elementos de L tal que la unión de los subconjuntos de L elegidos me dé el conjunto S original

Problemas de grupos que se particionan

- ✓ Siguiendo el ejemplo anterior, se trata ahora de cubrir todas las ciudades utilizando los mismos 6 circuitos pero sin “solapamiento”.

```
MIN     YA + YB + YC + YD + YE + YF
ST
!Deben estar cubiertas todas las ciudades exactamente una vez, por lo tanto se
!debe elegir exactamente un circuito de los que pasan por !cada ciudad
CIUDAD1) YA + YB + YE = 1
CIUDAD2) YA + YC = 1
CIUDAD3) YB + YD = 1
CIUDAD4) YC + YF = 1
CIUDAD5) YB + YC + YF = 1
```

- En este caso, como son pocas ciudades el problema se puede resolver a mano. Vemos que en este caso se necesitan tres circuitos (el problema al tener signo de igual es más restrictivo que el de grupos a cubrir que era de mayor o igual). Una posible solución es elegir los circuitos A, D y F ¿podés encontrar otra con tres circuitos?
- Muchas veces este tipo de planteo no tiene solución, porque los datos no permiten cubrir sin solapamiento
- Desde el punto de vista de conjuntos, sería elegir elementos de L tal que la unión de los subconjuntos de L elegidos me dé el conjunto S original y que la intersección entre los subconjuntos de L elegidos sea el conjunto vacío

Este caso es el que vimos la semana pasada cuando para resolver el problema de coloreo de grafos usábamos el método de conjuntos independientes

Problemas de "Packing"

- ✓ Ahora se trata de "cubrir" la mayor cantidad de elementos que se pueda, sin solapamiento (no existe la obligación de cubrirlos todos).
- ✓ Muchas veces se plantea este problema porque el de partición no tiene solución (entonces, si no podemos cubrir todos los elementos, vamos a cubrir la máxima cantidad que podamos)

```
!En este caso hay que tener un funcional de máximo porque nos piden elegir la
!mayor cantidad posible de elementos de L
MAX     YA + YB + YC + YD + YE + YF
ST
!No es necesario que todas las ciudades estén obligatoriamente cubiertas, pero
!ninguna debe estar sobrecubierta (no hay solapamiento)
CIUDAD1) YA + YB + YE <= 1
CIUDAD2) YA + YC <= 1
CIUDAD3) YB + YD <= 1
CIUDAD4) YC + YF <= 1
CIUDAD5) YB + YC + YF <= 1
```

- En este caso, la solución es la misma que en el caso de conjuntos que se particionan (si el problema de conjuntos que se particionan tiene solución, la solución del problema de packing es la misma)
- Un ejemplo de este tipo de problema podría ser tratar de ocupar la máxima cantidad de Cocheras en un playa de estacionamiento (no se puede poner más de un auto por cochera y dependiendo de las condiciones del problema me pueden quedar algunas cocheras vacías).

Otro planteo

- Con el planteo del funcional que hicimos puede visitar muchos circuitos de pocas ciudades cada uno.
- Si queremos que visite la mayor cantidad de ciudades ahora sí tiene sentido tener una bivalente por ciudad
- Vi vale 1 si se visita la ciudad i y vale 0 sino

MAX V1 + V2 + V3 + V4 + V5
ST
!No es necesario que todas las ciudades estén obligatoriamente cubiertas, pero
!ninguna debe estar sobrecubierta (no hay solapamiento)
CIUDAD1) YA + YB + YE = V1
CIUDAD2) YA + YC = V2
CIUDAD3) YB + YD = V3
CIUDAD4) YC + YF = V4
CIUDAD5) YB + YC + YF = V5

Genéricamente:

- S = {1,2,3….n} conjunto de elementos a cubrir.
- L = {(1,2);(2);….} conjunto formado por sub conjuntos de S
- Elegir elementos de L tales que:
  - Cobertura: se cubran todos los elementos de S con solapamiento.
  - Partición: se cubran todos los elementos de S sin solapamiento.
  - Packing: se cubra la máxima cantidad de elementos de S que se pueda sin solapamiento

¿Qué nos queda de esta clase?

- Cómo modelizar problemas combinatorios de la familia de Cobertura de Conjuntos:
  - Conjuntos a cubrir
  - Partición de conjuntos
  - Packing