Material de apoyo Teórica X

Temario

Método Simplex
Algunos conceptos:

- Valor marginal
- Costo de oportunidad

Análisis de sensibilidad
Modificaciones a la solución óptima

- Problema Dual

Seguimos usando el problema de "FA CALDO" (aunque un poco modificado, por simplicidad de cálculos cambiamos la disponibilidad de almidón):

$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600$ [KG AZUCAR/MES]
$4\ X2 \leq 600$ [KG CREMA/MES]
$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800$[KG ALMID./MES]

Z(MAX) = 8 X1 + 10 X2

TABLA OPTIMA

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Solución con LINDO:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2

Solución del problema de los helados con GLPK

```
Problem:    FaCaldo
Rows:       4
Columns:    2
Non-zeros:  7
Status:     OPTIMAL
Objective:  Z = 2600 (MAXimum)

   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 Z            B           2600
     2 AZUCAR       NU           600                         600             3
     3 CREMA        B            400                         600
     4 ALMIDON      NU           800                         800             1

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 X1           B            200             0
     2 X2           B            100             0
```

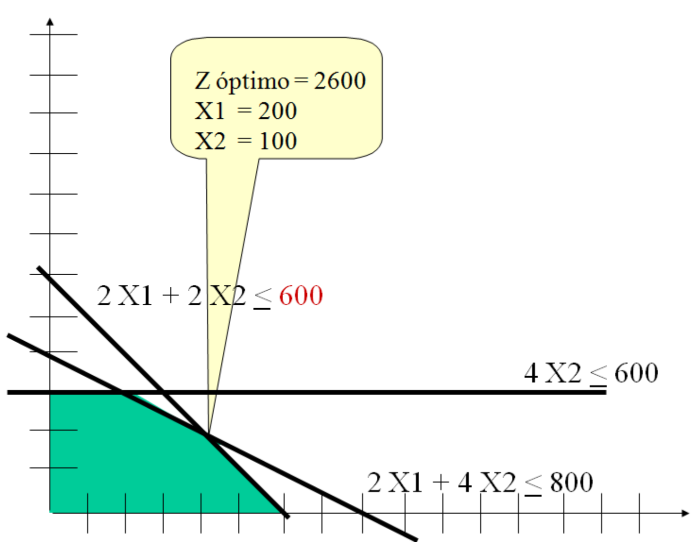
Recursos saturados y Recursos con sobrante

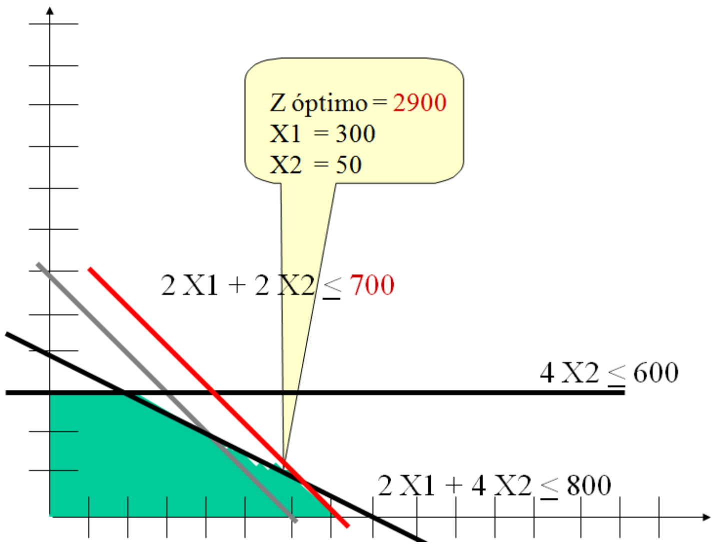
- Cuando un recurso tiene sobrante cero (la variable que indica su sobrante no está en la base o está en la base valiendo cero) se dice que el recurso está saturado.
- ¿Qué recursos están saturados en nuestro problema de los helados?
- Si consigo uno solo de los recursos saturados ¿podré ganar más dinero?

Para contestar las dos preguntas hay que ver la solución que teníamos al principio del material. Las slacks que valen cero corresponden a los recursos saturados.

- Como X4 está en la base de la tabla óptima valiendo 200 y X4 es la slack de la restricción de crema (es el sobrante de crema), significa que el recurso crema ***tiene sobrante*** igual a 200 kilos.
- Como X3 (sobrante de azúcar) y X5 (sobrante de almidón no están en la base en la tabla óptima, significa que no tienen sobrante. Entonces el azúcar y el almidón son recursos ***saturados***.

Pareciera que si consigo uno solo de los recursos saturados no me sirve para nada pero ¿se acuerdan del ejercicio de la primera guía práctica en el cual les decían si convenía conseguir 20 horas adicionales de equipo B?. Cuando conseguimos de uno solo, hay una redistribución de recursos (deshace de un producto para prestarle a otro el recurso que NO conseguimos y que está saturado) Veamos un ejemplo en el cual conseguimos 100 kilos más de azúcar (pero también está saturado el almidón y no conseguimos almidón):





Valor marginal y Costo de oportunidad

- Los zj - cj tienen significado:
  - Si el zj - cj corresponde a una variable real del problema (por lo general son productos) se llama costo de oportunidad de ese producto (CO)
  - Si el zj - cj corresponde a una variable slack del problema (por lo general son sobrantes de recursos) se llama valor marginal de ese recurso o restricción (VM)

TABLA OPTIMA

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Costos de oportunidad — Valores marginales

Solución con LINDO

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000

Costos de oportunidad

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

Valores marginales

NO. ITERATIONS= 2

<u>Costo de oportunidad</u>

- El costo de oportunidad es distinto de cero cuando la variable correspondiente al producto no está en la base (porque vale cero).
- El costo de oportunidad de un producto indica en cuánto va a desmejorar el funcional si tenemos la obligación de fabricar una unidad de ese producto.

<u>Valor marginal</u>

- El valor marginal es distinto de cero cuando la variable correspondiente al sobrante de recurso o slack de la restricción no está en la base (porque vale cero).
- El valor marginal indica en cuánto va a mejorar el funcional si esa restricción se afloja en una unidad.
  - Si la restricción es de menor o igual, aflojar la restricción implica aumentar el término independiente (por ejemplo: conseguir una unidad más de recurso)
  - Si la restricción es de mayor o igual, aflojar la restricción implica disminuir el término independiente (por ejemplo: disminuir la demanda mínima de un producto en una unidad,)

Por ejemplo: el VM del azúcar es 3 (z3-c3=3). Eso significa que si consigo un kilo más de azúcar el Z aumenta en $3. ¿por qué?

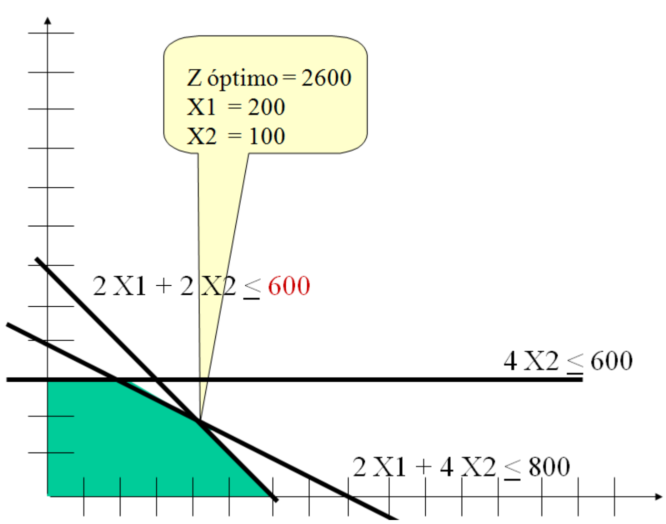
Porque si consigo un kilo más de azúcar puedo hacer una unidad más de X1 ¿de dónde saco el almidón? De X2. Como X1 consume 2 kilos de almidón por unidad y X2 consume 4 kilos de almidón por unidad, haciendo media unidad menos de X2, libera 2 kilos de almidón. Pero esa media unidad menos también libera 1 kilo de azúcar y 2 kilos de crema. Con el kilo de azúcar que conseguí más el kilo de azúcar que liberó X2 y los 2 kilos de almidón que liberó X2 hago una unidad más de X1. La crema no me sirve así que el sobrante de crema aumentará en 2 kilos.

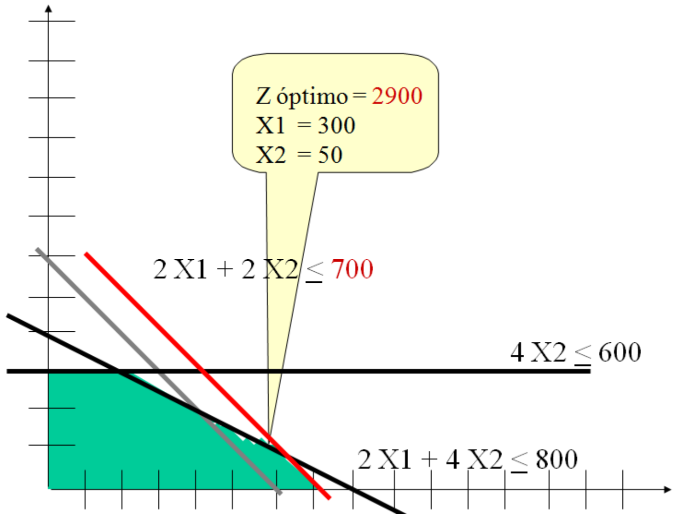
Económicamente ¿cómo terminó esta operación de conseguir 1 kilo más de azúcar?
Hago media unidad menos de X2 así que gano $5 menos que antes (porque por una unidad gano $10)
Hago una unidad más de X1 así que gano $8 más que antes
Conclusión, gano $3 más que antes.

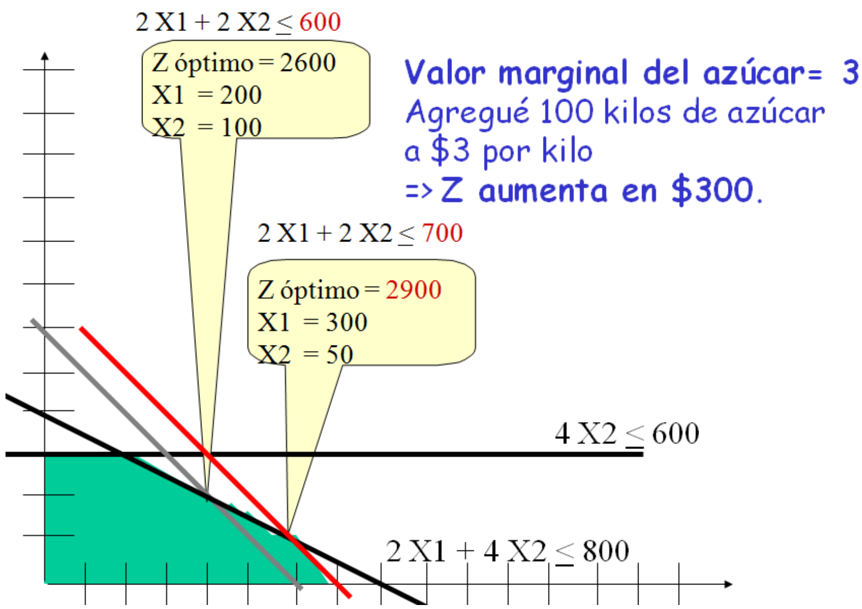
El VM del azúcar es 3, ya vimos por qué: eso quiere decir que con un kilo más de azúcar mi funcional aumenta en $3.

❷ Modificaciones a los b_i

Ahora vamos a ver qué pasa cuando cambia la disponibilidad de un recurso. Supongamos que conseguimos 100 kilos más de azúcar. ¿Seguirá siendo igual el valor marginal del recurso? Si conseguimos más cantidad convendría que sí, sino lo que pensamos que valía mucho, pasa a valer poco (o nada)

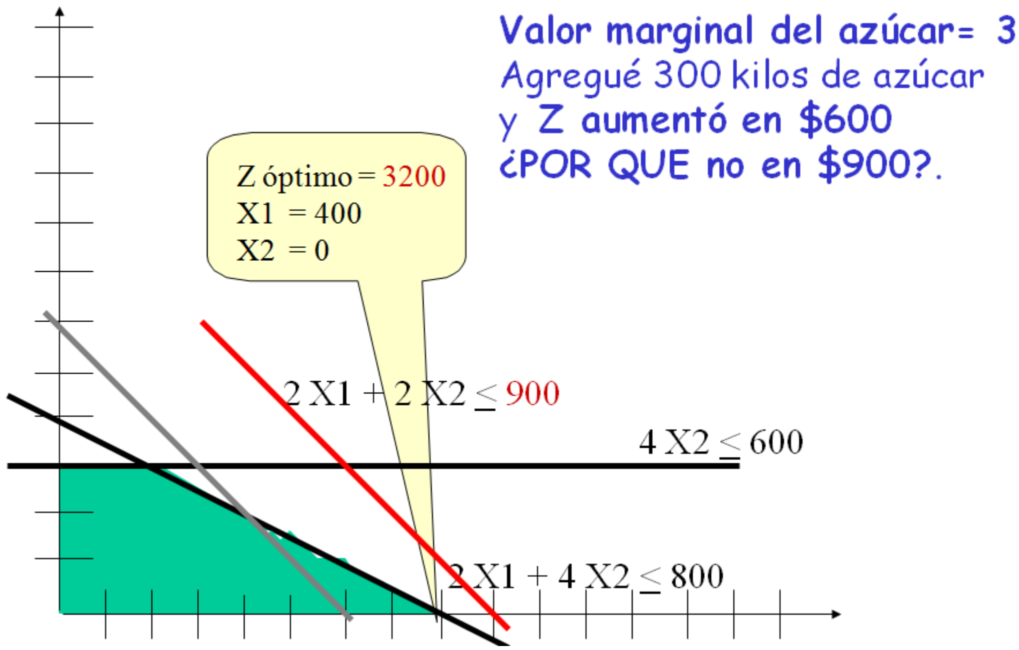






Como nos funcionó bien conseguir 100 kilos de azúcar (cada kilo nos aumentó el funcional en $3 que es el valor marginal del azúcar), vamos a intentar aumentar más la disponibilidad del azúcar.

Vamos a conseguir 300 kilos adicionales a los que teníamos en un principio (que eran 600). Lo que esperamos es que cada kilo aumente el funcional en $3, es decir que el Z pasará de valer 2600 a valer 3500



Lo que pasó fue que cuando conseguimos 200 kilos de azúcar llegamos al punto (400, 0) y al dejar de producir X2, no tenemos a quien quitarle almidón para agregarlo al azúcar que nos regalaron y no podemos hacer más producto X1
Por lo tanto, los 100 kilos restantes nos sobran (observen que la recta queda afuera del poliedro) y tienen valor marginal cero

Sería bueno que pudiéramos saber hasta cuánto conseguir para que se mantenga el valor marginal de $3 para el recurso
Para saber eso tenemos que parametrizar el coeficiente de disponibilidad de azúcar (b_1) que actualmente vale 600
Si lo pudiéramos parametrizar podríamos hacer un trabajo parecido al que hicimos la clase anterior con los c_j

El problema es que en la tabla óptima que nosotros tenemos no figura la disponibilidad de azúcar (figuraba en la primera tabla en la columna B, pero ya cambiamos la base varias veces)
Entonces tenemos que pasar de la expresión común del problema (que se llama expresión primal o directa) a otra expresión del problema, en la cual podamos parametrizar los términos independientes, que se llama PROBLEMA DUAL

El problema Dual

Dado un primal de la forma:

$$A\,X \leq B$$
$$X \geq 0$$
$$\max\ C\,X$$

donde:

A(mxn) B(mx1) 0(nx1)
X(nx1) C(1xn)

Se define como su problema Dual:

$$Y\,A \geq C$$
$$Y \geq 0$$
$$\min\ Y\,B$$

donde:

Y(1xm) 0(1xm)

Relación entre Primal y Dual:

- El dual tiene una variable real por cada restricción del problema primal.
- El dual tiene tantas restricciones como variables reales tiene el primal.
- El dual de un problema de maximización es un problema de minimización y viceversa.
- Los coeficientes del funcional (costo o beneficio) del primal, son los términos independientes de las rest. del dual.
- Los términos independientes de las rest. del primal son los coeficientes del funcional del dual.
- Toda columna de coeficientes en el primal se transforma en una fila de coeficientes en el dual.
- El sentido de las desigualdades del primal es el inverso del dual.

Hagamos el planteo inicial del dual de nuestro problema de los helados:

Directo inicial:
$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600$
$0\ X1 + 4\ X2 \leq 600$
$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800$
$MAX\ Z = 8\ X1 + 10\ X2$

Dual inicial:
$2\ Y1 + 0\ Y2 + 2\ Y3 \geq 8$
$2\ Y1 + 4\ Y2 + 4\ Y3 \geq 10$
$MIN\ Z = 600\ Y1 + 600\ Y2 + 800\ Y3$

Relación entre las variables del Directo y las del Dual:
Sobrante de azúcar X3 - Y1 Valor marginal del azúcar
Sobrante de crema X4 - Y2 Valor marginal de la crema
Sobrante de almidón X5 - Y3 Valor marginal del almidón

Latas de hel. de agua X1 - Y4 Costo de oportunidad h. de agua
Latas de hel. de crema X2 - Y5 Costo de oportunidad h. de crema

Observemos que las slack del directo se relacionan con las reales del dual y las reales del directo se relacionan con las slack del dual

Teorema fundamental de la dualidad:

Si el problema primal (o el dual) tiene una solución óptima finita, entonces el otro problema tiene una solución óptima finita y los valores de los dos funcionales son iguales.

Si cualquiera de los dos problemas tiene una solución óptima no acotada, entonces el otro problema no tiene soluciones posibles.

Teorema de la holgura complementaria.

Dados el problema primal y el dual correspondiente, siempre que en la k-ésima restricción de uno de ellos la variable de holgura o slack tome valor distinto de cero, entonces la k-ésima variable del otro problema desaparece de la base y, si la k-ésima variable de uno de los dos problemas es mayor que cero, en la k-ésima restricción del otro problema se verifica la igualdad (la variable slack o de holgura de esa restricción es igual a cero).

Consecuencia del teorema de la holgura complementaria:

Quiere decir que de cada par de variables directo-dual, una sola puede ser distinta de cero. Una sola de las dos está en la base de la tabla óptima de su problema.

0 = X3	Y1 = 3
200 = X4	Y2 = 0
0 = X5	Y3 = 1
200 = X1	Y4 = 0
100 = X2	Y5 = 0

Pero entonces, si el valor del Z del directo en el óptimo, es igual al valor del Z del dual en el óptimo y además el valor de las variables del dual es igual al valor del zj-cj de su variable relacionada en el directo, en base a la tabla óptima del directo tendríamos que poder armar la tabla óptima del dual.

Las variables que están en la base en la tabla óptima del dual son aquellas cuya variable relacionada en el directo no estaba en la base en la tabla óptima del directo. Es decir que en la base óptima del dual estarán Y1 e Y3, porque X3 y X5 no estaban en la base en la óptima del directo.

- El valor que toman las variables en la óptima del dual es igual al zj-cj de su variable relacionada del directo. Es decir que Y1 vale 3, Y3 vale 1 y las demás valen cero.
- Tenemos que verificar que el Z nos dé 2600
- Y podemos armar los vectores canónicos, que van a ser los vectores de Y1 e Y3, que son las variables que están en la base.

			600	600	800		
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3	1		0		
800	Y3	1	0		1		
		2600	0		0		

- El resto de los valores los vamos a sacar de los vectores no canónicos de la tabla óptima del directo, trasponiendo las columnas y cambiando el signo de los valores antes de pasarlos a la tabla del dual (les cambiamos el signo porque el dual opera con la identidad cambiada de signo, por ser un problema con restricciones de mayor o igual)
- Para saber dónde ubicar cada valor, colocamos en la tabla óptima del directo los nombres de las variables del dual relacionadas, debajo de cada columna y a la derecha de cada fila
- Hemos puesto un simbolito distinto en cada número para que se vea a dónde va a parar cada número de la tabla óptima del directo en la tabla óptima del dual.

TABLA OPTIMA DEL DIRECTO

			8	10				
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2	Y4
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2	Y5
0	X4	200	0	0	2	1	-2	Y2
		2600	0	0	3	0	1	
			Y4	Y5	Y1	Y2	Y3	

TABLA OPTIMA DEL DUAL

			600	600	800		
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		2600	0	-200	0	-200	-100

Aplicaciones lineales de los planteos duales.

- Análisis de sensibilidad de la solución óptima.
- Problema de transporte.
- Problema de asignación.
- Flujo en redes.
- Teoría de los juegos.
- Algoritmos de descomposición de problemas lineales de gran tamaño.

¿Qué nos queda de esta clase?

- Comenzamos a ver análisis de sensibilidad (Guía 5)
    - Concepto de valor marginal y costo de oportunidad
    - Modificaciones a la solución óptima
    - Problema Dual