

# Material adicional Teórica V

## Temario

Seguimos trabajando con problemas combinatorios:

- Problema de Distribución o Transporte
  - Problema de Traspaso
- Problema de Asignación
  - Problema de Asignación Cuadrática

## **Problemas combinatorios**

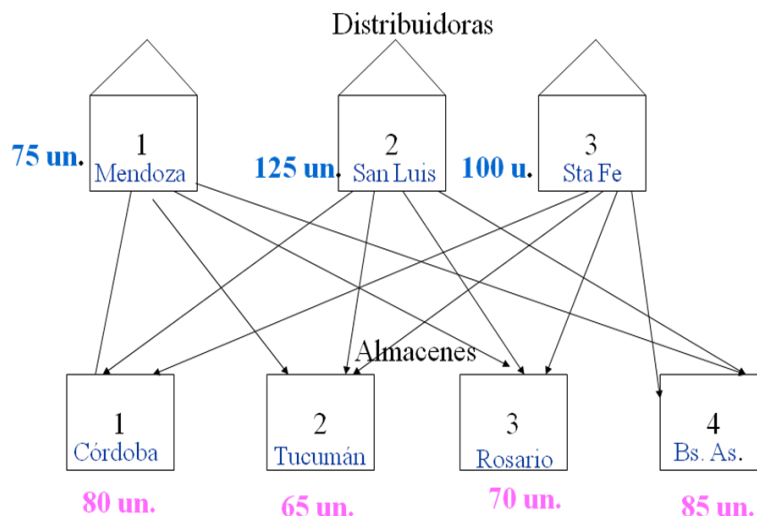
- Son aquellos en los cuales se desea determinar combinaciones óptimas.
- Se caracterizan por tener un número finito de soluciones factibles.
- Generalmente este número es muy grande.

## **Problema de Distribución o Transporte**

Tenemos:

- Un conjunto de lugares cada uno de los cuales tiene disponible una cantidad de unidades de un producto (Orígenes o Suministros)
- Un conjunto de lugares cada uno de los cuales demanda una cantidad de unidades de un producto (Destinos o Demandas)
- Se conoce el costo  $C_{ij}$  de enviar una unidad desde el Origen  $i$  hasta el destino  $j$

Veremos un ejemplo en el cual los orígenes o suministros son tres distribuidoras (Mendoza, San Luis y Santa Fe) que tienen disponible determinada cantidad de producto y los destinos son cuatro almacenes (Córdoba, Tucumán, Rosario y Buenos Aires) que demandan determinada cantidad de ese mismo producto



Los números que están a la izquierda de cada distribuidora representan la OFERTA o SUMINISTRO de esa distribuidora (las distribuidoras en nuestro problema son los ORIGENES de la mercadería)

Los números que están debajo de cada almacén representan la DEMANDA de ese almacén (los almacenes en nuestro problema son los DESTINOS de la mercadería)

Cualquier origen puede enviar producto a cualquiera de los destinos (todos se conectan con todos) como lo indican las flechas

### Costo de transporte

En la tabla se indica el costo de transportar una unidad desde el origen  $i$  hasta el destino  $j$  (esta misma tabla sirve para resumir todos los datos, incluidos los de ofertas y demandas de cada origen/destino, además de verificar que la oferta total sea igual a la demanda total):

		Almacén				Oferta
		Cba. 1	Tucumán 2	Rosario 3	Bs. As. 4	
Distribuidora	1	464	513	654	867	75
	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
Demandas		80	65	70	85	300

En nuestro ejemplo la demanda total y la oferta total suman igual (300 unidades).  
**Si no fuera así habría que agregar un origen ficticio** (en el caso en el cual la demanda supera la oferta) que tenga disponibles la cantidad de unidades que faltan **o un destino ficticio** (en el caso en el cual la oferta supera a la demanda) que demande las unidades que sobran  
**Los costos de transporte vinculados con orígenes o destinos ficticios son CERO o un número muy grande para que el modelo no los elija como primera opción.**

### Definición del problema de Distribución o Transporte

El objetivo es determinar la cantidad de unidades de producto que cada origen envía a cada destino, para minimizar los costos de transporte totales en un cierto período de tiempo

### Hipótesis principales:

- Producto homogéneo (estamos hablando del mismo producto en orígenes y destinos)
- Costos lineales.

### Modelización del problema de Distribución o Transporte

De acuerdo con el objetivo las variables serán:

$X_{ij}$ : cantidad de unidades que el origen  $i$  envía al destino  $j$

El funcional minimiza los costos totales:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & 464 X_{11} + 513 X_{12} + 654 X_{13} + 867 X_{14} + 352 X_{21} + 416 X_{22} + 690 X_{23} \\ & + 791 X_{24} + 995 X_{31} + 682 X_{32} + 388 X_{33} + 685 X_{34} \end{aligned}$$

Por cada origen hay que asegurar que se van a distribuir todas las unidades

Mendoza:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 75$$

San Luis:

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 125$$

Santa Fe:

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 100$$

Por cada destino hay que asegurar que le van a llegar todas las unidades

Córdoba:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 80$$

Tucumán:

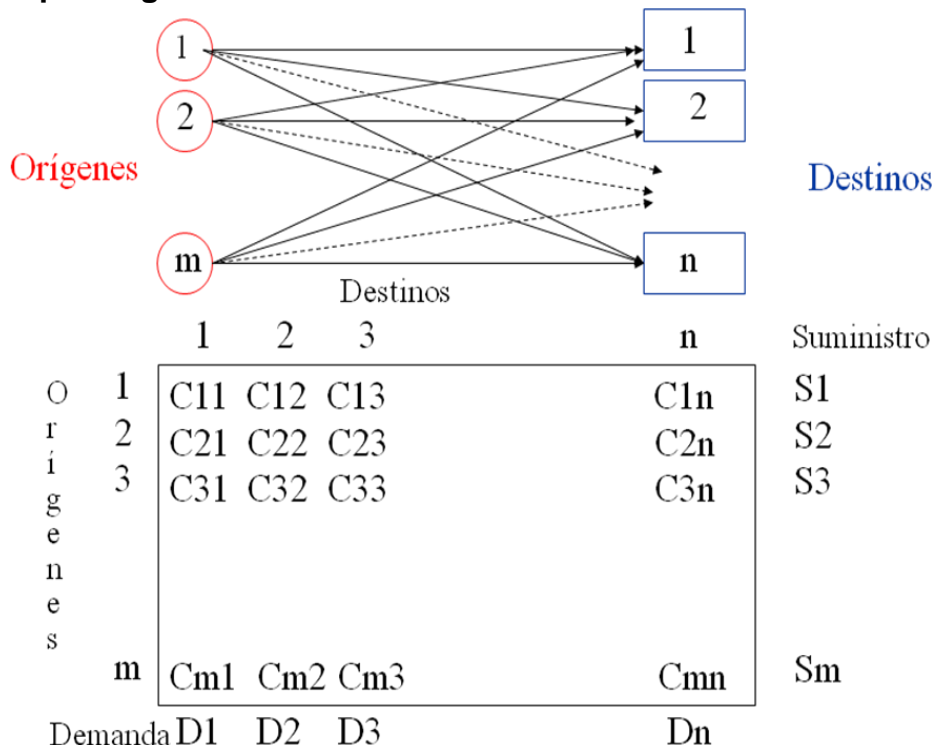
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 65$$

Rosario:

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 70$$

Buenos Aires:

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 85$$

**Esquema general****El modelo de transporte (planteo genérico)**

Asumiendo que  $\sum S_i = \sum D_j$ , el planteo matemático es:

Minimizar  $Z = \sum \sum C_{ij} X_{ij}$

Sujeto a:

$\sum X_{ij} = S_i$  para  $i=1\dots m$      $\sum X_{ij} = D_j$  para  $j=1\dots n$

$X_{ij} \geq 0$  para todo  $i$  y para todo  $j$

**MUY IMPORTANTE:**

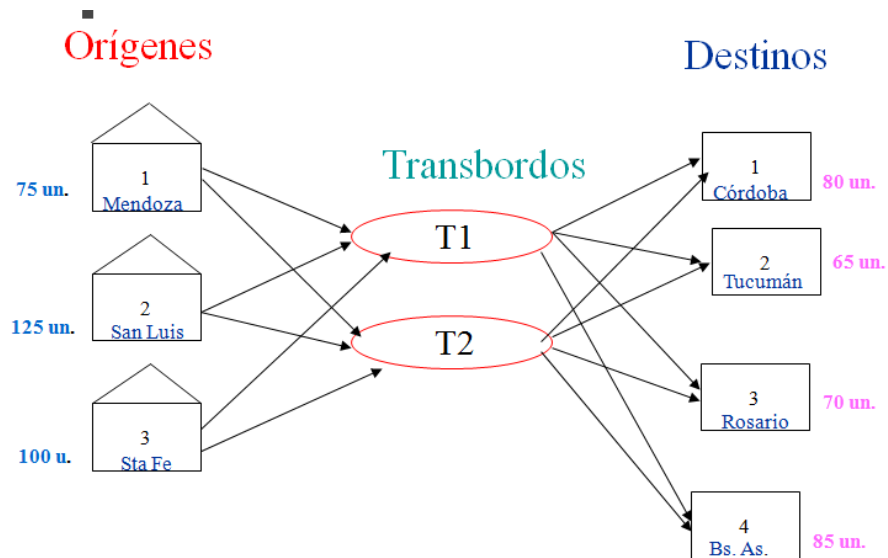
Existe un teorema que demuestra que, **si todas las ofertas son números enteros y todas las demandas son números enteros, siendo todas las restricciones IGUALDADES, el problema de distribución o transporte tendrá como resultado que todas las variables tomarán valor entero aunque no se les ponga la condición de que las variables tienen que tomar valor entero.**

Por eso es que el problema de distribución o transporte se resuelve como un problema con variables continuas. Es muy importante que la oferta total sea igual a la demanda total (aunque sea agregando un origen ficticio o un destino ficticio, según corresponda) para que se pueda verificar que resolviéndolo como continuo da resultado entero.

## El problema de Transbordo

- En este problema las unidades no son enviadas directamente desde los orígenes hacia los destinos, sino que las unidades van desde los orígenes hasta alguno de los centros de transbordo y desde éste a alguno de los destinos

Vamos a adaptar el problema de distribución que vimos antes a la estructura de transbordo.



### Costos de Transbordo

En la tabla se indica el costo de transportar una unidad desde el origen  $i$  hasta el transbordo  $j$

		Transbordos		Oferta
Distribuidora		Transbordo 1	Transbordo 2	
Mendoza	1	138	313	75
San Luis	2	321	216	125
Sta. Fe	3	356	182	100

Los transbordos comúnmente no tienen capacidad máxima (tampoco demanda)

En la tabla se indica el costo de transportar una unidad desde el transbordo  $i$  hasta el destino  $j$

		Almacén			
		Cba.	Tucumán	Rosario	Bs. As.
Transbordos		1	2	3	4
Transbordo 1		464	513	654	867
Transbordo 2		495	682	388	685
Demandas		80	65	70	85

Los transbordos no tienen una cantidad fija como oferta (lo que pueden entregar es lo que recibieron de los orígenes)

### Modelización del problema de Transbordo

Las variables serán:

$XO_{ij}$ : cantidad de unidades que el origen  $i$  envía al transbordo  $j$

$XT_{ij}$ : cantidad de unidades que el transbordo  $i$  envía al destino  $j$

El funcional minimiza los costos totales:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & 138 XO_{1T1} + 313 XO_{1T2} + 321 XO_{2T1} + 216 XO_{2T2} + 356 XO_{3T1} + 182 \\ & XO_{3T2} + 464 XT_{1D1} + 513 XT_{1D2} + 654 XT_{1D3} + 867 XT_{1D4} + 495 \\ & XT_{2D1} + 682 XT_{2D2} + 388 XT_{2D3} + 685 XT_{2D4} \end{aligned}$$

□ Para los orígenes, los transbordos son destinos

Mendoza:

$$XO_{1T1} + XO_{1T2} = 75$$

San Luis:

$$XO_{2T1} + XO_{2T2} = 125$$

Santa Fe:

$$XO_{3T1} + XO_{3T2} = 100$$

□ Para los destinos, los transbordos son orígenes

Córdoba:

$$XT_{1D1} + XT_{2D1} = 80$$

Tucumán:

$$XT_{1D2} + XT_{2D2} = 65$$

Rosario:

$$XT1D3 + XT2D3 = 70$$

Buenos Aires:

$$XT1D4 + XT2D4 = 85$$

- Se agrega al modelo una ecuación por cada transbordo: Todo lo que entró al centro de transbordo debe salir del mismo.

Transbordo 1

$$XO1T1 + XO2T1 + XO3T1 = XT1D1 + XT1D2 + XT1D3 + XT1D4$$

Transbordo 2

$$XO1T2 + XO2T2 + XO3T2 = XT2D1 + XT2D2 + XT2D3 + XT2D4$$

## El problema de Asignación

Sean los conjuntos A y B, ambos con m elementos:

El problema de asignación consiste en:

- encontrar el conjunto P donde:
  - cada elemento de P es un par (a, b),
  - a es un elemento del conjunto A,
  - b es un elemento del conjunto B,
- tal que minimice una función de costo  $\sum C(a,b)$ .

Restricciones que se deben cumplir para P:

- cada elemento de A debe aparecer en P exactamente una vez
- cada elemento de B debe aparecer en P exactamente una vez

El problema es LINEAL

La función de costo depende solamente de cada par (a, b) y es independiente de los demás pares.

## Esquema general

	1	2	3	m	Suministro
1	C11	C12	C13	C1m	1
2	C21	C22	C23	C2m	1
3	C31	C32	C33	C3m	1
m	Cm1	Cm2	Cm3	Cmm	1
Demanda	1	1	1	1	

- Suministro total = Demanda total
- Todos los suministros y demandas iguales a uno
- Función de costo lineal

### El modelo de Asignación

$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ (origen) es asignado a } j \text{ (destino)} \\ 0 & \text{si } i \text{ no es asignado a } j \end{cases}$

Minimizar/Maximizar  $Z = \sum \sum C_{ij} X_{ij}$

Sujeto a:

$\sum X_{ij} = 1 \quad \forall i=1\dots m \quad \sum X_{ij} = 1 \quad \forall j=1\dots m$

$X_{ij} \geq 0 \quad \forall i \text{ y } \forall j$

$X_{ij}$  bivalentes

Es un caso particular del problema de transporte en el cual todas las demandas y ofertas son iguales a 1. **Por lo tanto, se resuelve como un problema de variables continuas y de igual manera el resultado es que todas las variables toman valor entero (cero o uno).**

### Asignación Cuadrática

Veamos un ejemplo:

Sea A conjunto de fábricas y B conjunto de ciudades

Objetivo: ubicar una fábrica en cada ciudad minimizando los costos totales de comunicación entre las fábricas

Este costo de comunicación depende de:

- Frecuencia de comunicación entre cada par de fábricas.
- Distancias entre las dos ciudades donde las fábricas están localizadas.

$t_{ik}$  : frecuencia de comunicación entre fábricas i y k

$d_{jl}$  : costo por unidad de comunicación entre las ciudades j y l

$C_{jkl}$  se define como  $t_{ik} \cdot d_{jl}$





La definición de las  $X_{ij}$  y el planteo de restricciones es igual que en el problema de asignación.

PERO LOS COSTOS DEPENDEN DE QUE SE PRODUZCAN DOS ASIGNACIONES SIMULTANEAS

Definimos  $C_{ijkl} = t_{ik} \cdot d_{jl}$

Entonces la función objetivo es:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \cancel{X_{ij} \cdot X_{kl}} \cdot C_{ijkl} \quad \forall i \neq k, \forall j \neq l$$

¡OJO! NO ES LINEAL  
(por eso se llama  
asignación cuadrática)

Si queremos resolver el problema mediante PLE deberemos generar un cambio de variables:

$Y_{ijkl} = 1$  si  $X_{ij} = X_{kl} = 1$ ,  
 $Y_{ijkl} = 0$  en caso contrario

¿Cómo hacemos que las variables  $Y_{ijkl}$  tomen ese valor?

Tenemos que plantear un AND de  $X_{ij}$  y  $X_{kl}$

$$2 Y_{ijkl} \leq X_{ij} + X_{kl} \leq 1 + Y_{ijkl}$$

Y en el funcional ponemos las  $Y_{ijkl}$  en lugar del producto de  $X_{ij}$  por  $X_{kl}$

### **¿Qué nos queda de esta clase?**

☐ Cómo modelizar problemas combinatorios de la familia de Distribución:

☐ Problema de distribución o transporte (\*)

☐ Problema de trasbordo (\*)

☐ Problema de asignación (\*)

☐ Problema de asignación cuadrática

(\*) *Se pueden resolver por programación lineal continua*