Material de apoyo Teórica XI

Temario

Análisis de sensibilidad
Modificaciones a la solución óptima

- Cambios en los Cj
  - Rango de variación de un Cj
- Curva de oferta
- Modificaciones a los bi
  - Rango de variación de un bi
- Gráfica de valor marginal

Seguimos usando el problema de "FA CALDO" (aunque un poco modificado, por simplicidad de cálculos cambiamos la disponibilidad de almidón):

$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600$ [KG AZUCAR/MES]
$4\ X2 \leq 600$ [KG CREMA/MES]
$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800$[KG ALMID./MES]

Z(MAX) = 8 X1 + 10 X2

TABLA OPTIMA

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Solución con LINDO:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2

Solución del problema de los helados con GLPK

```
Problem:    FaCaldo
Rows:       4
Columns:    2
Non-zeros:  7
Status:     OPTIMAL
Objective:  Z = 2600 (MAXimum)

   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 Z            B           2600
     2 AZUCAR       NU           600                         600             3
     3 CREMA        B            400                         600
     4 ALMIDON      NU           800                         800             1

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 X1           B            200             0
     2 X2           B            100             0
```

Rango de variación de los cj

- ¿en qué rango de valores puede variar el coeficiente en el funcional de los helados de agua (que actualmente vale 8) para que el punto óptimo siga siéndolo?

			C1	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
C1	x_1	200	1	0	1	0	-1/2
10	x_2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	x_4	200	0	0	2	1	-2
			0	0		0	

$$\boxed{1 .\ C1 + 10\ .\ (-1/2) + 0\ .\ 2 - 0 \geq 0}$$

$$\boxed{-1/2\ .\ C1 + 10 .\ \tfrac{1}{2}\ + 0\ .\ (-2) - 0 \geq 0}$$

¿Cuánto puede valer C1 para que se cumplan ambas condiciones?

En LINDO, por ejemplo:

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                    OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE       CURRENT     ALLOWABLE     ALLOWABLE
                  COEF      INCREASE      DECREASE
   X1         8.000000      2.000000     3.000000
   X2        10.000000      6.000000     2.000000


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
              RIGHTHAND SIDE RANGES
   ROW     CURRENT    ALLOWABLE     ALLOWABLE
              RHS      INCREASE      DECREASE
    AZ   600.000000   200.000000   100.000000
    CR   600.000000    INFINITY    200.000000
    AL   800.000000   100.000000   200.000000
```

IMPORTANTE: El rango de un coeficiente Cj me dice cuánto puede variar ese coeficiente sin que la solución deje de ser óptima mientras todos los demás coeficientes y constantes del problema permanezcan sin cambios.

Que la solución siga siendo óptima implica que no cambie el valor de las variables reales y de las slacks. El valor del funcional, por supuesto no es el mismo si cambia algún Cj, los zj-cj (que dependen de los cj) tampoco serán los mismos.

Veamos marcado en la solución de LINDO qué es lo que no cambia:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2

Curva de oferta del producto X1

- ¿Cómo se hace la curva de oferta de un producto?
- La curva de oferta representa, a los distintos valores que puede tomar el coeficiente Cj de ese producto en el Z, qué cantidad de producto Xj es conveniente fabricar.
- Para empezar, en la tabla óptima, tenemos, por lo que vimos antes, que si C1 vale entre 5 y 10, la tabla sigue siendo óptima (es decir, X1 sigue valiendo 200)

Para 5 <= C1 <= 10
esta tabla es óptima

8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
		2600	0	0	3	0	1

- Para los demás valores, hay que reemplazar C1 por 10, nos dará una solución alternativa y hay que pasar a esa tabla, en la cual X1 vale 300.

Para 10 <= C1 < infinito
esta tabla es óptima

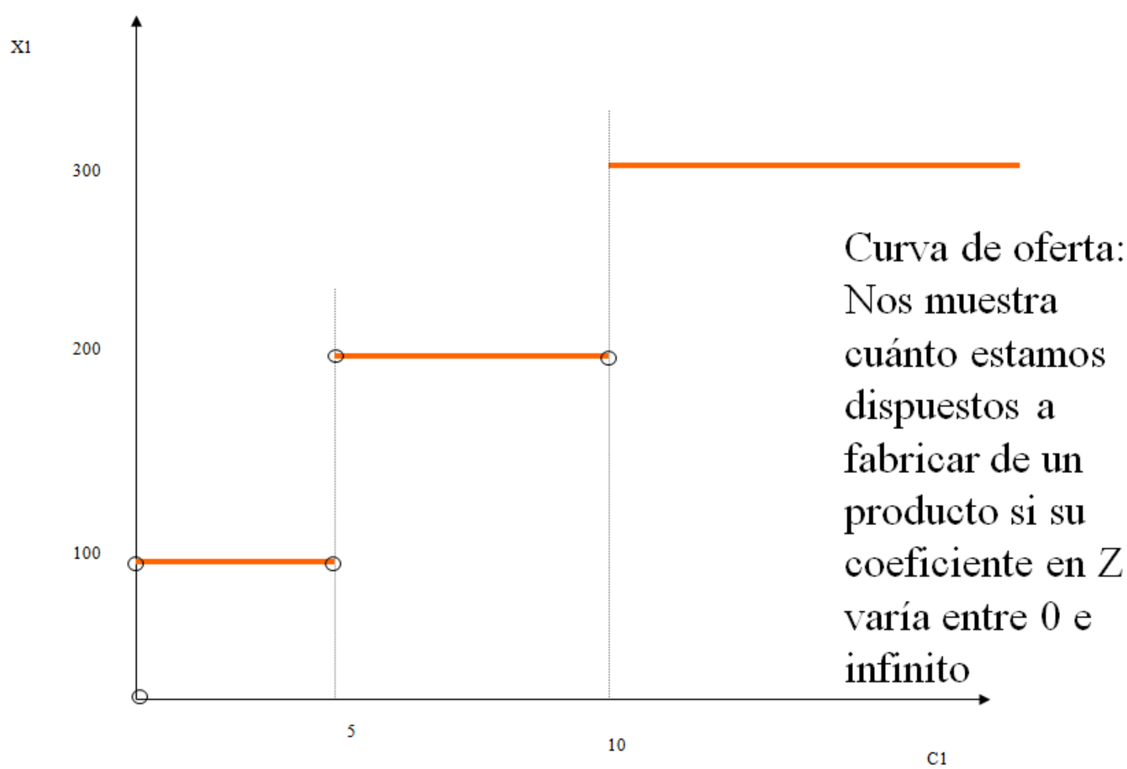
10	X1	300	1	1	1/2	0	0
0	X4	600	0	4	0	1	0
0	X5	100	0	2	-1	0	1
		3000	0	10	5	0	0

- En esa tabla hay que calcular el rango de variación de C1.
- El rango de variación de C1 será >= 10 y hay que ver el valor máximo. Si hay un valor máximo, tenemos que seguir reemplazando el valor de C1 hasta que el límite superior sea infinito.

- Cuando el límite superior llega a infinito, quiere decir que por más que aumente el C1, no puede fabricar más cantidad de X1 (no hay más recursos y no hay a quién quitárselos, porque ya no se fabrica más X2).

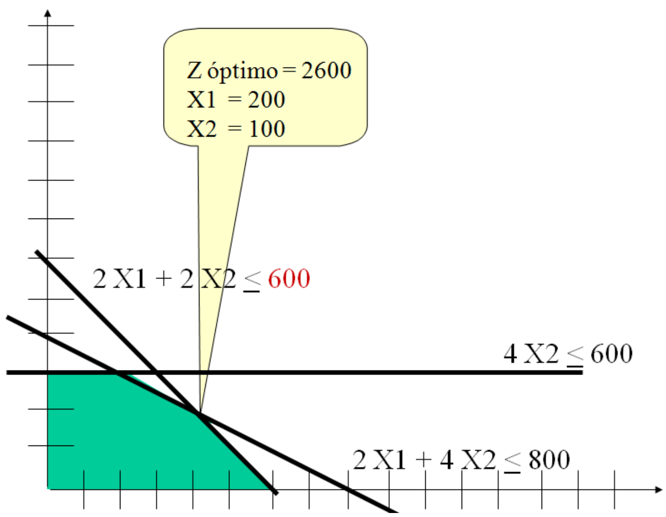
- Ahora hay que ver qué pasa si C1 vale menos que 5.
- Poniendo un valor de 5 como C1 se obtiene una tabla con soluciones alternativas (igual que lo que sucedía cuando X1 era igual a 10).
- Pasando a la tabla alternativa se obtiene un nuevo valor de X1 (100) y en esa tabla debemos obtener el rango de C1. El rango de variación de C1 será <= 5 y hay que ver el valor mínimo. Tenemos que seguir reemplazando el valor de C1 hasta que el límite inferior sea cero.

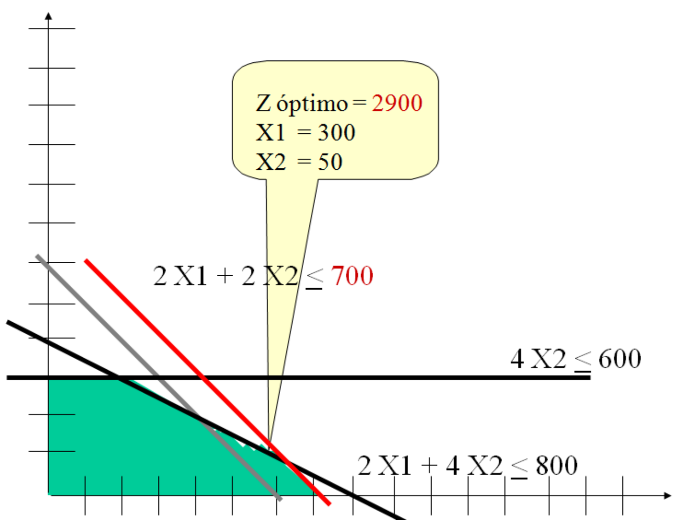
<u>Curva de oferta del producto X1</u>

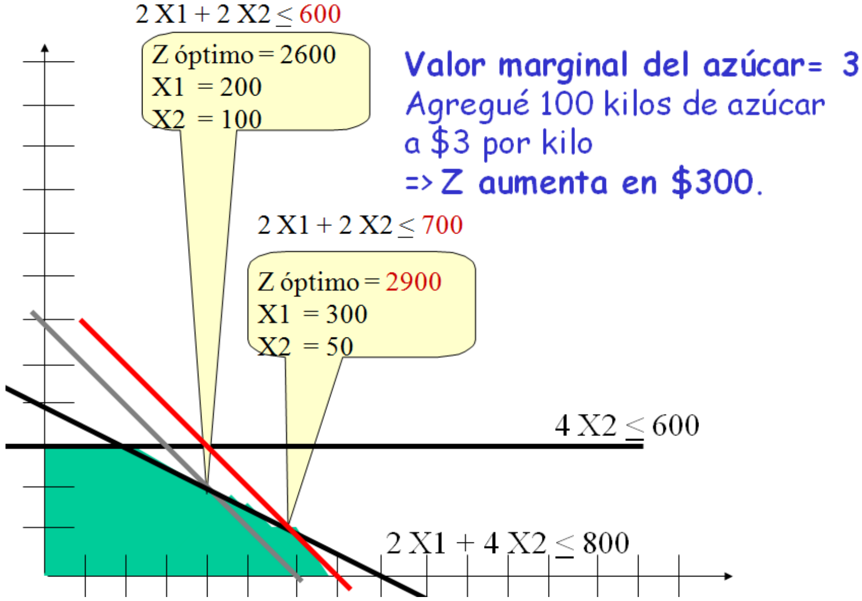


❷ Modificaciones a los b_i

Ahora vamos a ver qué pasa cuando cambia la disponibilidad de un recurso. Supongamos que conseguimos 100 kilos más de azúcar. ¿Seguirá siendo igual el valor marginal del recurso? Si conseguimos más cantidad convendría que sí, sino lo que pensamos que valía mucho, pasa a valer poco (o nada)

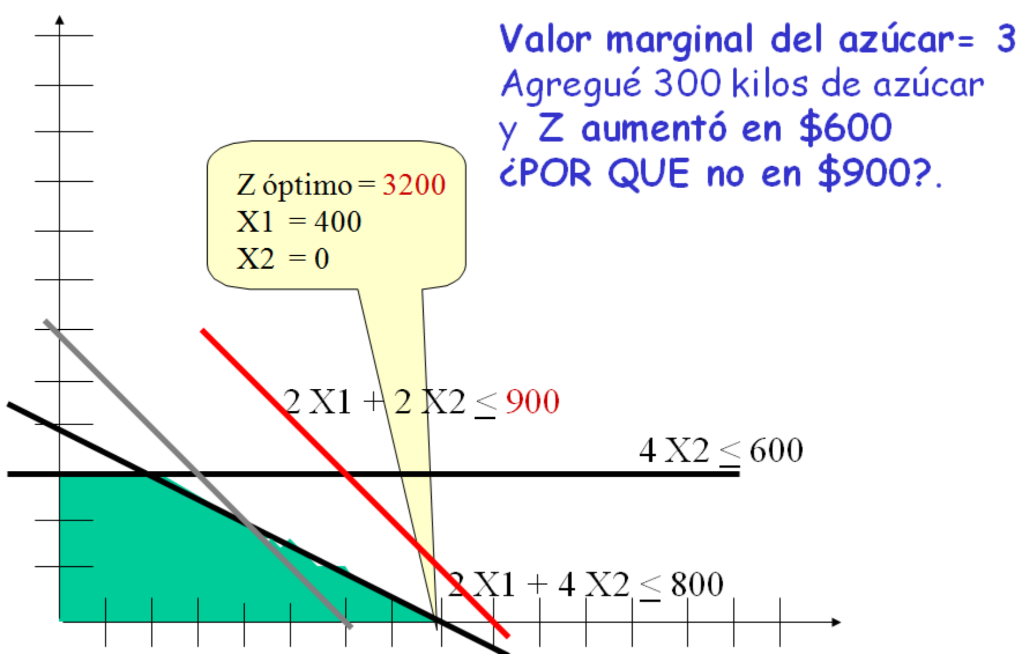






Como nos funcionó bien conseguir 100 kilos de azúcar (cada kilo nos aumentó el funcional en $3 que es el valor marginal del azúcar), vamos a intentar aumentar más la disponibilidad del azúcar.

Vamos a conseguir 300 kilos adicionales a los que teníamos en un principio (que eran 600). Lo que esperamos es que cada kilo aumente el funcional en $3, es decir que el Z pasará de valer 2600 a valer 3500



Lo que pasó fue que cuando conseguimos 200 kilos de azúcar llegamos al punto (400, 0) y al dejar de producir X2, no tenemos a quien quitarle almidón para agregarlo al azúcar que nos regalaron y no podemos hacer más producto X1
Por lo tanto, los 100 kilos restantes nos sobran (observen que la recta queda afuera del poliedro) y tienen valor marginal cero

Sería bueno que pudiéramos saber hasta cuánto conseguir para que se mantenga el valor marginal de $3 para el recurso
Para saber eso tenemos que parametrizar el coeficiente de disponibilidad de azúcar (b_1) que actualmente vale 600
Si lo pudiéramos parametrizar podríamos hacer un trabajo parecido al que hicimos la clase anterior con los c_j

El problema es que en la tabla óptima que nosotros tenemos no figura la disponibilidad de azúcar (figuraba en la primera tabla en la columna B, pero ya cambiamos la base varias veces)
Entonces tenemos que pasar de la expresión común del problema (que se llama expresión primal o directa) a otra expresión del problema, en la cual podamos parametrizar los términos independientes, que se llama PROBLEMA DUAL

Modificaciones al problema original

❷ Modificaciones a los b_i

Ahora vamos a ver qué pasa cuando cambia la disponibilidad de un recurso.
Es muy probable que no vayamos a fabricar la misma cantidad que antes.
¿Seguirá siendo igual el valor marginal del recurso? Si conseguimos más cantidad convendría que sí, sino lo que pensamos que valía mucho, pasa a valer poco (o nada)
Para analizar esto, necesitamos el DUAL

Cambios en los b_i

Se presenta la posibilidad de conseguir 100 kilos adicionales de almidón que son regalados por el dueño del restaurante “Fideo Fino”, cliente de la heladería.

¿Vale la pena considerar esta posibilidad?

			600	600	~~800~~ 900		
600	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
900 ~~800~~	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		~~2600~~	0	~~-200~~	0	~~-200~~	~~-100~~
		2700		0*		-150	-150

Vemos que, como ningún zj-cj se hace mayor que cero (recordemos que estamos en un problema de mínimo, que es óptimo cuando todos los zj-cj son menores o iguales que cero), la tabla sigue siendo óptima.

Rango de variación de un b_i

Ahora queremos saber, para un determinado bi, dentro de qué rango puede variar su valor sin que la tabla óptima del dual deje de serlo.

			b1 ~~600~~	600	800		
b1 ~~600~~	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		~~2600~~ 800 + 3 b1	0	~~-200~~	0	~~-200~~	~~-100~~

$\boxed{-2\,b1 + 1600 - 600 \le 0}$

$\boxed{-\,b1 + 400 - 0 \le 0}$

$\boxed{\tfrac{1}{2}\,b1 - 400 - 0 \le 0}$

¿Cuánto puede valer b1 para que se cumplan las 3 condiciones?

La respuesta es: $500 \le b1 \le 800$

Los software de resolución también nos permiten responder esto.

Por ejemplo, en LINDO:

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

Por supuesto el rango es válido **si lo único que cambiamos es ese bi.**

¿Y cuál es la base que no cambia?. A continuación vemos cuáles son los valores que no cambian:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2

Gráfica del VM del azúcar

- ¿Cómo se hace el gráfico de valor marginal de un recurso?

- Para empezar, en la tabla óptima, tenemos que obtener el rango de variación para el cual es válido ese valor marginal
- Así, se sigue hasta obtener los distintos rangos cuando la disponibilidad varía entre 0 e infinito

			600	600	800		
600	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		2600	0	-200	0	-200	-100

Para 500 <= b1 <= 800
esta tabla es óptima

Ahora vamos a reemplazar b1 por 800 para ver qué pasa de 800 para arriba

			800 ~~600~~	600	800		
800 ~~600~~	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		~~2600~~	0	~~-200~~	0	~~-200~~	~~-100~~
				-600		-400	0*

Entra a la base Y5 y la única que puede salir es Y1

Eso quiere decir que para una disponibilidad de Azúcar mayor a 800 el valor marginal del azúcar pasa a ser cero

Volvemos a la tabla óptima original del dual (la que era óptima para b1 entre 500 y 800) y reemplazamos b1 por 500.

			500 ~~600~~	600	800			
500 ~~600~~	y_1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	y_3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		~~2600~~	0	~~-200~~	0	~~-200~~	~~-100~~
				0*		-100	-150

Entra a la base Y2 y la única que puede salir es Y3

			500	600	800		
500	y_1	4	1	0	1	-1/2	0
600	y_2	1/2	0	1	1/2	1/4	-1/4
			0	0	0*	-150	-200

Para 300 <= b1 <= 500
esta tabla es óptima

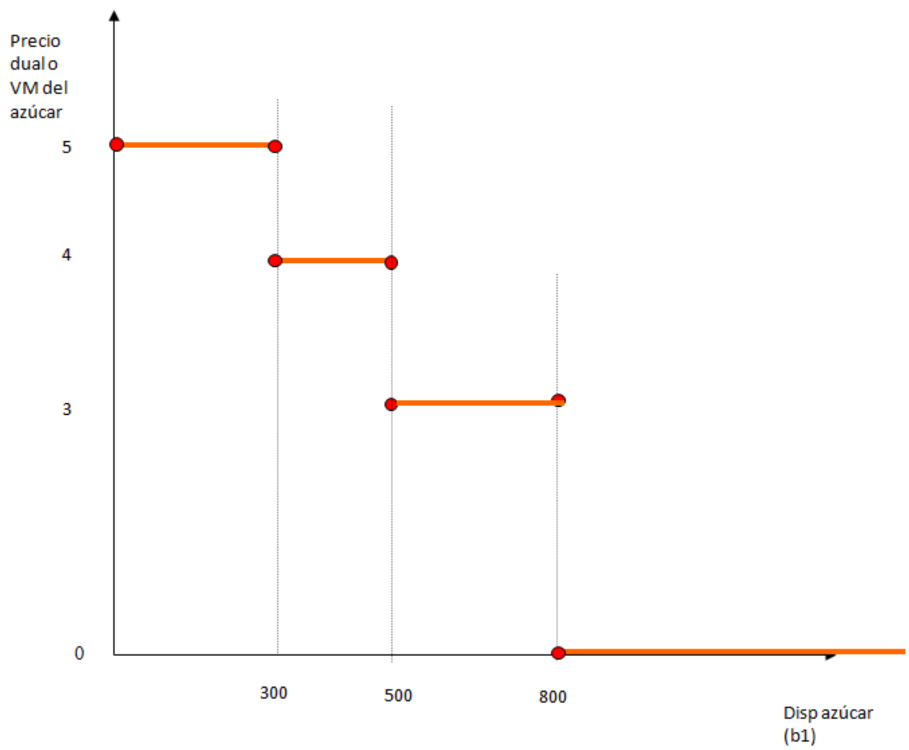
Ahora vamos a reemplazar b1 por 300 para ver qué pasa de 300 para abajo

			300 ~~500~~	600	800		
300 ~~500~~	y_1	4	1	0	1	-1/2	0
600	y_2	1/2	0	1	1/2	1/4	-1/4
			0	0	~~0~~	~~-150~~	~~-200~~
					-200	0*	-150

Entra a la base Y4 y la única que puede salir es Y2

Tenemos que hallar la nueva tabla y en esa tabla encontrar el rango de variación de b1

Y así, cuando hayamos encontrado la nueva tabla (que va a ser válida para b1 entre 0 y 300) vamos a poder graficar el valor marginal del azúcar cuando la disponibilidad del azúcar varía entre 0 e infinito, como vemos a continuación.



Con esto ya podemos resolver todos los ejercicios de la práctica 5.

¿Qué nos queda de esta clase?

- Seguimos viendo análisis de sensibilidad (Guía 5)
  - Concepto de valor marginal y costo de oportunidad
  - Modificaciones a la solución óptima
    - Cambios en un cj
    - Curva de oferta
    - Cambios en un Bi
    - Gráfica de valor marginal