Material de apoyo Teórica I

Modelo Matemático de Programación Lineal Continua

Características:

1) Variables de decisión continuas

$$\boxed{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n}$$

2) Función Objetivo lineal (también llamado Z)

$$\boxed{\text{min ó max } c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n}$$

3) Restricciones lineales para

$$\boxed{i = 1, \ldots, m},$$

$$\boxed{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \text{ ó } a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i}$$

$$\boxed{\text{ó } a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i}$$

- El coeficiente de una variable en la función objetivo es llamado el Cj de la variable
- El coeficiente que acompaña a la variable Xj en la restricción i es llamado el coeficiente tecnológico aij
- El lado derecho de la restricción i se denomina bi

Primer caso de estudio

Un almacén naturista de La Falda tiene en su local 20 kilos de amaranto y 50 kilos de quinua, y sabe que tendrá pedidos que ascenderán a al menos 100 kilos de cada cereal para el lunes que viene, debido a que en los próximos días habrá un festival naturista en la zona.
Dado el poco tiempo disponible, el almacén tiene la posibilidad de solicitar el envío de hasta 40 kilos de amaranto desde su depósito en Valle Hermoso. Cada kilo que traiga desde Valle Hermoso le sale $100.
Su proveedor habitual también tiene disponibles 30 cajas de “Salud Vital”. Cada caja de “Salud Vital” contiene 2 bolsas de amaranto de 1 kilo cada una y 5 bolsas de quinua de un kilo cada una y cuesta $600.
¿Qué es lo mejor que se puede hacer con la información disponible?

Pasos para formular un modelo de Programación Lineal

- Comprender la situación problemática
- Describir el objetivo en palabras
- Describir cada una de las restricciones en palabras
- Definir las variables de decisión (controlables)
- Expresar el objetivo en función de las variables de decisión
- Expresar cada restricción en función de las variables de decisión

Comprender la situación problemática

¿Cuál es el problema?

Quieren saber cuánto conseguir de cada cereal.

¿De qué manera consiguen el cereal?

Para conseguir el amaranto hay dos maneras, traerlo de Valle Hermoso y comprar cajas de Salud Vital que contienen, cada una, cierta cantidad de amaranto. Para conseguir la quínoa solamente lo pueden sacar de las cajas de Salud Vital que contienen, cada una, cierta cantidad de quínoa.

Entonces lo que quieren saber es cuánto amaranto traer de Valle Hermoso y cuántas cajas de Salud Vital comprar de manera de gastar lo menos posible.

Pero, si queremos gastar lo menos posible, ¿no será la solución no comprar ni traer nada?

No, porque si no compramos nada de Salud Vital ni traemos nada de Valle Hermoso, no cumplimos las demandas mínimas de cereal.

¿Cuántas posibilidades hay para las cantidades a comprar y traer? DEMASIADAS

Entonces necesitamos un modelo matemático que nos diga cuánto conviene de cada cosa, en lugar de estimar cantidades de cada cosa.

¿Qué supuestos podemos hacer?

- ¿Cuánta Mano de obra, Capital, Maquinaria, cuentan para hacer el trabajo?
    - Todos los recursos no mencionados no son limitantes (se tiene más de lo que se puede llegar a usar)
- ¿Qué pasa con la composición de Salud Vital?
    - La composición de Salud Vital es exacta, todas las cajas tienen la misma cantidad de cada cereal
    - No se puede comprar solamente la parte de la caja de Salud vital que tiene quinoa y no comprar la parte que tiene amaranto (o viceversa).
- ¿Cuánto se puede vender de cada cereal?
    - Todo lo que se consigue se vende (respetando la demanda mínima, menos de eso no se puede vender)

Más supuestos que podemos agregar

- No hay inflación ni varían los precios o costos
- No hay productos fallados

- No hay desperdicio de producto al transportar
- ¿qué más?...

Describir el objetivo con palabras

Objetivo:

Determinar cuánto amaranto traer de Valle Hermoso y cuánto comprar de Salud Vital esta semana, para minimizar el costo de compra y de transporte

Describir cada una de las restricciones en palabras

DEM_AM)

Tiene que contar con al menos 100 kilos de amaranto

DEM_QU)

Tiene que contar con al menos 100 kilos de quínoa

DISP_SV)

No puede comprar más cajas de Salud Vital que las que hay disponibles en el proveedor

DISP_AM)

No se puede traer desde Valle Hermoso más cantidad de amaranto de la que hay disponible en el depósito de esa localidad

Además hay que agregar que las variables deben ser mayores o iguales que cero (condición de no negatividad)

Definir las variables de decisión (controlables)

Dado que nuestro objetivo es:

Determinar cuánto amaranto traer de Valle Hermoso y cuánto comprar de Salud Vital esta semana, para minimizar el gasto de compra y transporte

Hay que medir con variables lo que necesitamos determinar:

VH: cantidad de kilos a traer de Valle Hermoso (kg/semana)

SV: cantidad de cajas de Salud Vital a comprar (cajas/semana)

¿Necesitamos más variables?

Para saberlo, tenemos que preguntarnos ¿hay algo que no podamos medir sabiendo solamente el valor de VH y SV?

- Cantidad de amaranto y quínoa: basta con saber cuánto valen VH y SV porque supusimos que no hay desperdicio de recursos y además no hay otra forma de conseguir los cereales
- Gastos de compra y transporte: basta con saber cuánto valen VH y SV porque no se gasta dinero para comprar ni transportar otra cosa

Expresar cada restricción en función de las variables de decisión

disponible de amaranto >= demanda de amaranto

2 SV + VH + 20 $\geq$ 100

disponible de quínoa >= demanda de quínoa

5 SV + 50 $\geq$ 100

cajas de “Salud Vital” compradas <= # cajas de “Salud Vital” disponibles

SV $\leq$ 30

kilos de amaranto enviados <= # kilos de amaranto en depósito

VH $\leq$ 40

Además SV $\geq$ 0 y VH $\geq$ 0 (condiciones de no negatividad)

El modelo matemático

MIN 100 VH + 600 SV
DEM_AM) 2 SV + VH <= 80
DEM_QU) 5 SV <= 50
DISP_SV) SV <= 30
DISP_AM) VH <= 40

IMPORTANTE: Los únicos signos válidos en las restricciones son mayor o igual, igual o menor o igual. Todas las restricciones se tienen que poder convertir en igualdades para resolver el problema.

SOLUCIÓN DE UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL CONTINUA (PL Continua)

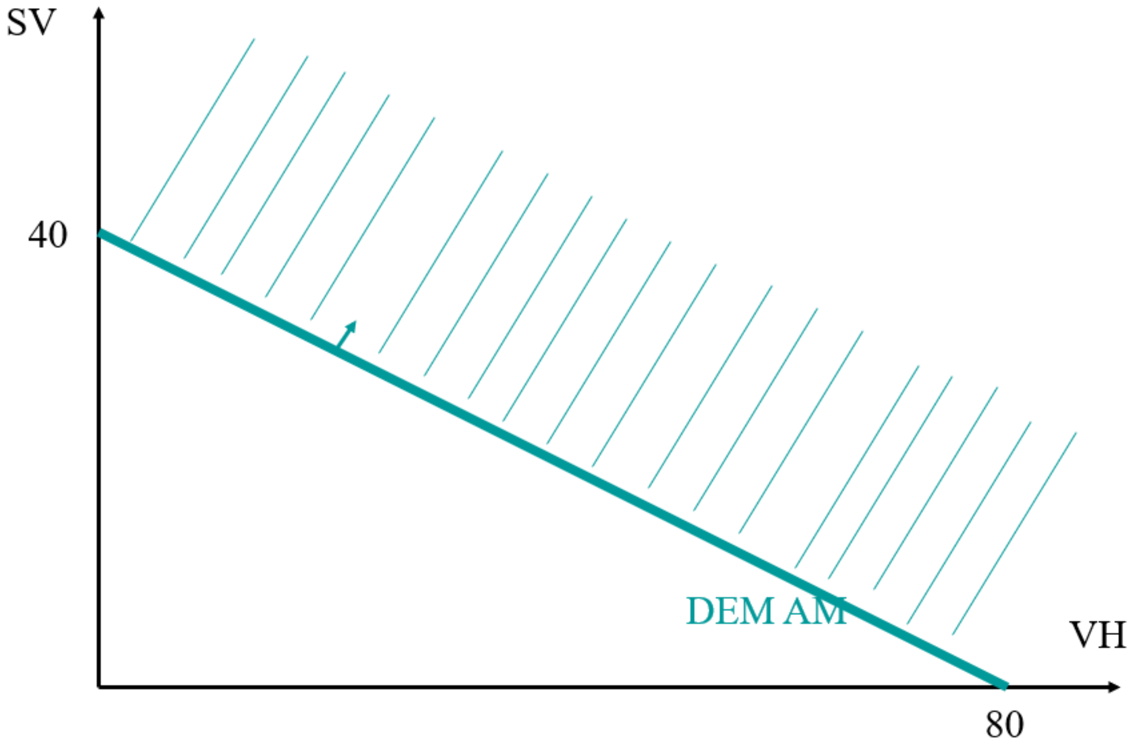
- Un punto es una especificación de los valores de cada variable de decisión
- La región factible de un PL consta de todos los puntos que satisfacen todas las restricciones del PL y las restricciones de signo, que dicen que todas las variables son no negativas
- El punto de la región factible que tiene el mejor valor de Z es el óptimo del PL

Modelo Matemático de PL Continua: SOLUCIÓN GRÁFICA

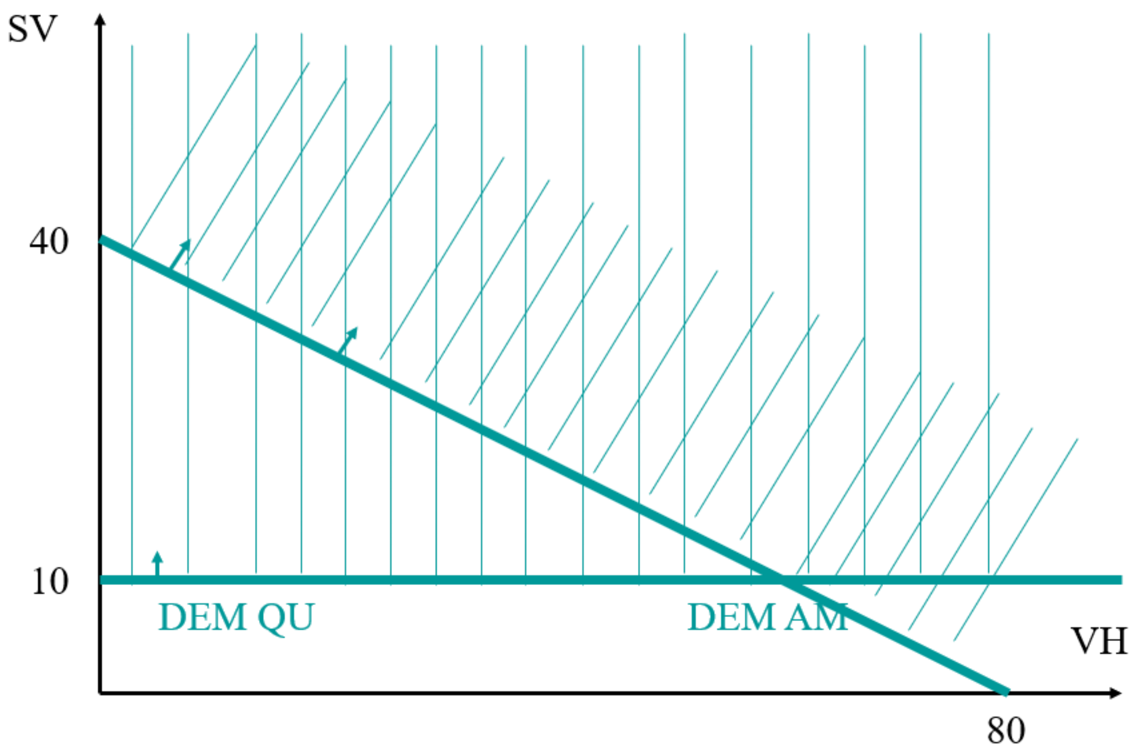
- La región factible para cualquier PL Continuo es un conjunto convexo
- El óptimo (si existe) siempre está al menos en un vértice de la la región factible. Por lo tanto, no vale la pena analizar ningún punto que no sea vértice.
- Vamos a graficar en el eje de abscisas los valores de la variable DC y en el eje de ordenadas los valores de la variable LV (considerando el primer cuadrante, porque son variables no negativas)
- Para cada restricción, graficamos el semiplano que la cumple

Resolución gráfica

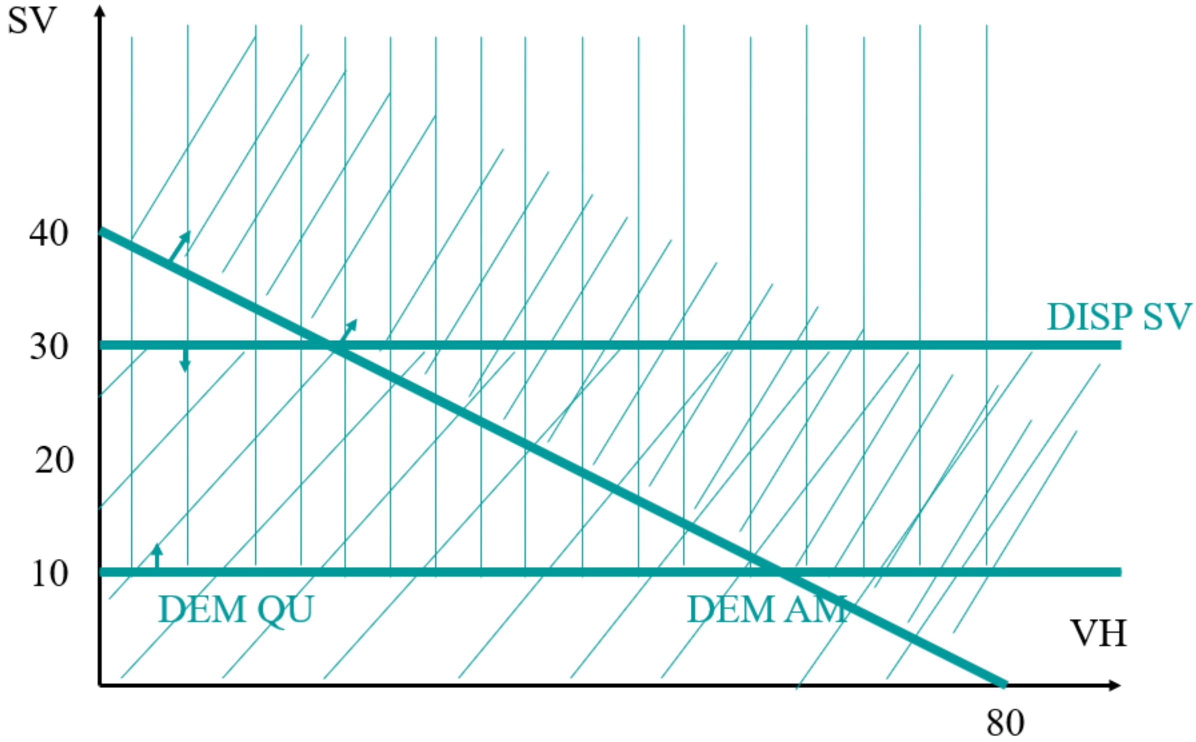
Graficamos la restricción de demanda de Amaranto



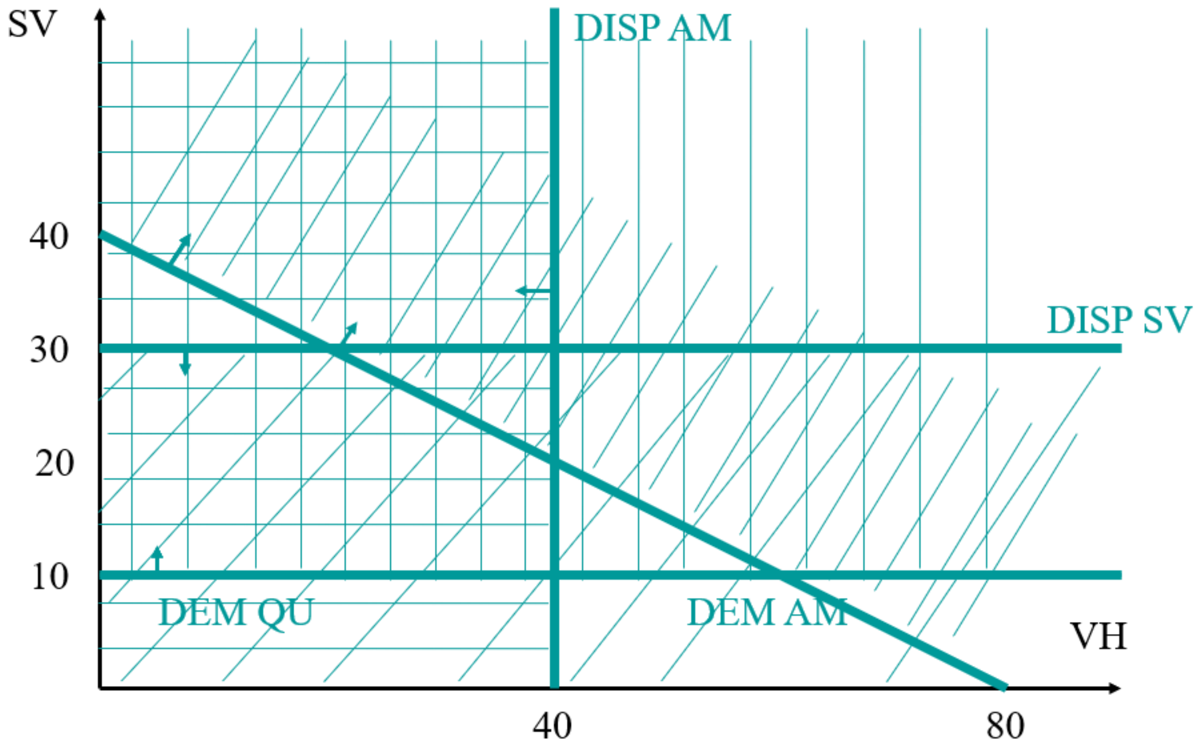
Superponemos la restricción de demanda de Quinoa



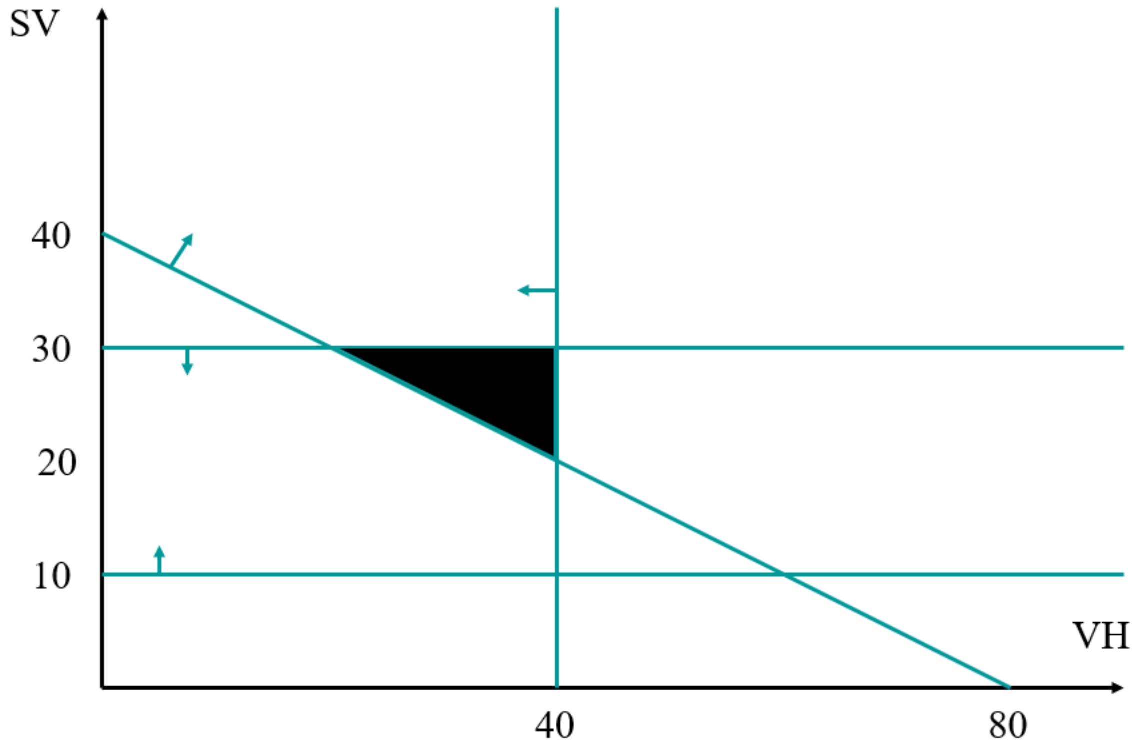
Superponemos la restricción de disponibilidad máxima de Salud Vital



Superponemos la restricción de disponibilidad de Amaranto que se pide desde Valle Hermoso



Veamos en negro la región factible donde se cumplen todas las restricciones

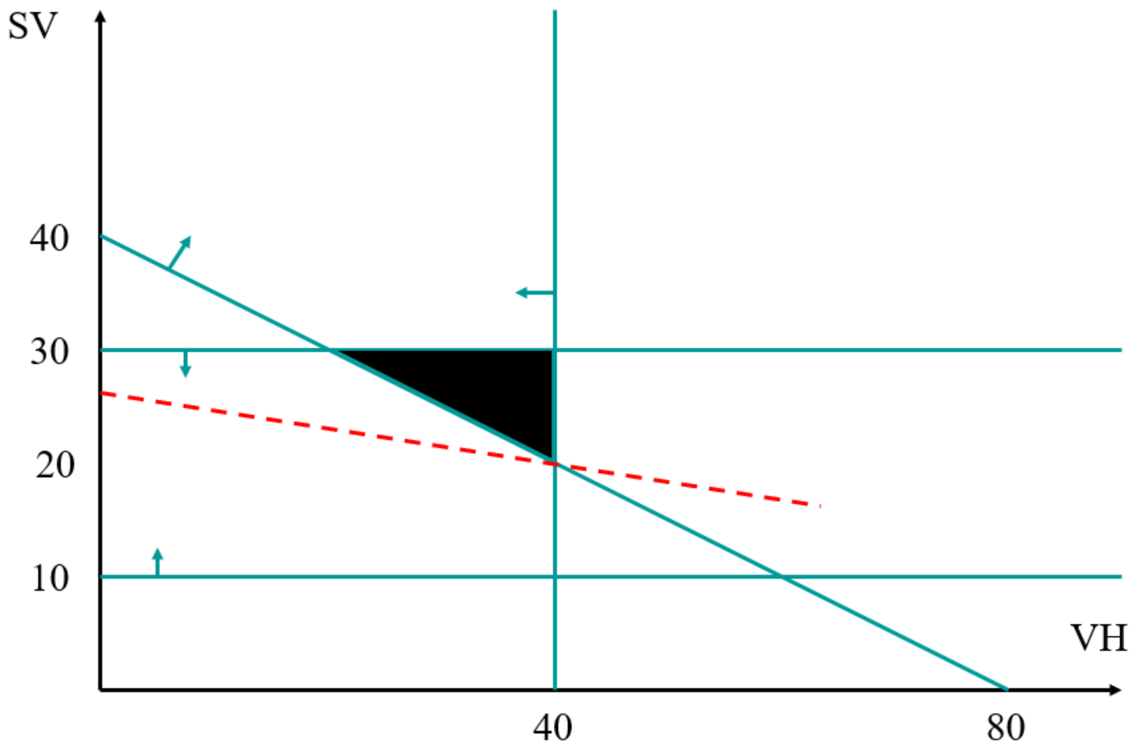


<u>IMPORTANTE: TODOS LOS MODELOS QUE TRABAJAMOS EN MODELOS Y OPTIMIZACIÓN I SON MODELOS LINEALES</u>

Modelo Matemático de PL Continua: SOLUCIÓN ÓPTIMA

- Para saber cuál es el punto óptimo podemos graficar la traza de la función objetivo (el plano 160 corta al plano de la solución factible como una recta que en el gráfico de abajo vemos como una sucesión de guiones en rojo).
- Hay que desplazar esa traza del funcional parelamente a sí misma lo más cerca del (0,0) que se pueda (porque estamos minimizando) hasta que no podamos movernos más porque “se termina el poliedro”
- Estamos en un vértice, que es el (200, 200)
- Es decir, la solución óptima es hacer 200 unidades de DC y 200 de LV

SOLUCIÓN ÓPTIMA y uso de los recursos



Además de saber que en el óptimo conviene traer 40 kilos de amaranto desde Valle Hermoso y que conviene comprar 20 unidades de Salud Vital, un informe de la solución completo implica saber cuáles recursos están agotados y cuáles tienen sobrante

De manera gráfica podemos ver que los recursos agotados son los que se cortan en el punto óptimo (demanda mínima de amaranto y disponibilidad máxima de amaranto en Valle Hermoso)

Modelo Matemático de PL Continua: SOLUCIÓN ÓPTIMA y uso de los recursos - VARIABLES SLACK

- Para saberlo con las restricciones, hay que agregar una variable en cada restricción llamada variable slack o de holgura, para convertir todas las restricciones en igualdades (esto los software de resolución lo hacen automáticamente)
- Al resolver el problema, las restricciones que tengan variable slack igual a cero indican que esa restricción es limitante (si es un recurso de disponibilidad máxima, está agotado)

Agregamos las slack en rojo:

MAX Z = 100 VH + 600 SV

DEM_AM) 2 SV + VH - SOBREDEMAM = 80

DEM_QU) 5 SV - SOBREDEMQU = 50

DISP_SV) SV + SOBRANTESV = 30

DISP_AM) VH + SOBRANTEVH = 40

Reemplazando VH por 40 y SV por 20 obtenemos:

MAX Z = 100 40 + 600 20

DEM_AM) 2 20 + 40 - SOBREDEMAM = 80

DEM_QU) 5 20 - SOBREDEMQU = 50

DISP_SV) 20 + SOBRANTESV = 30

DISP_AM) 40 + SOBRANTEVH = 40

Y queda:

MAX Z = 16000

DEM_AM) SOBREDEMAM = 0

DEM_QU) SOBREDEMQU = 50

DISP_SV) SOBRANTESV = 10

DISP_AM) SOBRANTEVH = 0

Modelo de Programación Lineal en el software LINDO

```
MIN 100 VH + 600 SV
ST
DEM_AM) 2 SV + VH >= 80
DEM_QU) 5 SV >= 50
DISP_SV)    SV <= 30
DISP_AM)   VH <= 40
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      160000.0000
         VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         VH              40.000000        0.000000
        SV               20.000000        0.000000
```

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
DEM_AM)	**0.000000**	**-3.000000**
DEM_QU)	**50.000000**	**0.000000**
DISP_SV)	**10.000000**	**0.000000**
DISP_AM)	**0.000000**	**2.000000**

Modelo de Programación Lineal en el software GLPK

```
var SV >= 0;
var VH >= 0;

maximize z: 100 * VH + 600 * SV;

s.t. DEM_AM: 2 * SV + VH >= 80;
s.t. DEM_QU: 5 * SV >= 50;
s.t. DISP_SV: SV <= 30;
s.t. DISP_AM: VH <= 40;

end;
```

```
Objective:  z = 22000 (MAXimum)

   No. Row name     St    Activity      Slack   Lower bound    Activity     Obj coef  Obj value at Limiting
                                      Marginal  Upper bound      range        range   break point variable
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- ------------- ------------- ------------- ------------
     1 z            BS   22000.00000  -22000.00000          -Inf   16000.00000      -1.00000             .  DISP_SV
                                            .               +Inf   22000.00000          +Inf          +Inf

     2 DEM_AM       BS     100.00000     -20.00000      80.00000      60.00000    -100.00000   12000.00000 DISP_AM
                                            .               +Inf     100.00000          +Inf          +Inf

     3 DEM_QU       BS     150.00000    -100.00000      50.00000     100.00000    -120.00000    4000.00000 DISP_SV
                                            .               +Inf     150.00000          +Inf          +Inf

     4 DISP_SV      NU      30.00000         .              -Inf      20.00000    -600.00000   16000.00000 DEM_AM
                                        600.00000       30.00000          +Inf          +Inf          +Inf

     5 DISP_AM      NU      40.00000         .              -Inf      20.00000    -100.00000   20000.00000 DEM_AM
                                        100.00000       40.00000          +Inf          +Inf          +Inf
```

```
   No. Column name  St    Activity      Obj coef   Lower bound    Activity     Obj coef  Obj value at Limiting
                                      Marginal  Upper bound      range        range   break point variable
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- ------------- ------------- ------------- ------------
     1 SV           BS      30.00000     600.00000             .      20.00000             .    4000.00000 DISP_SV
                                            .               +Inf      30.00000          +Inf          +Inf

     2 VH           BS      40.00000     100.00000             .      20.00000             .   18000.00000 DISP_AM
                                            .               +Inf      40.00000          +Inf          +Inf
```

Modelo Matemático de PL Continua: SOLUCIÓN ÓPTIMA

Cuando se resuelve un modelo de PL al tratar de llegar al óptimo se presenta uno de los siguientes casos:

- Tiene una solución óptima única (como nuestro caso)
- Tiene una cantidad infinita de soluciones óptimas (soluciones alternativas óptimas). Este caso se identifica de manera gráfica cuando la traza de la función objetivo coincide con un lado del poliedro óptimo
- No es factible (incompatible). No se puede formar la región de soluciones factibles

- Es no acotado. Esto se da solo en un modelo de maximización. Hay puntos con valor de Z arbitrariamente grande en la región factible

Casos Particulares

Soluciones alternativas óptimas: La traza del funcional coincide con uno de los lados del poliedro solución y además el óptimo está sobre ese lado del poliedro solución => hay infinitas soluciones óptimas

Poliedro abierto: Si la función objetivo o funcional es de máximo la solución óptima no está acotada

Incompatible: No hay poliedro solución. No hay ningún punto en el primer cuadrante en el cual se cumplan todas las restricciones del problema

Punto degenerado: Es un punto sobredefinido (se cortan más de dos restricciones en el mismo punto).

En los distintos problemas de la Guía 1 encontrarán estos casos particulares.

¿Qué nos queda de esta clase?

- ❑ Cómo resolver un problema con un modelo matemático de dos variables continuas
- ❑ Plantear el modelo
- ❑ Resolverlo gráficamente (son dos variables)