Material de apoyo Teórica V

Temario

Seguimos trabajando con variables enteras y bivalentes (binarias)

- **Aprendemos cómo trabajar con costos y/o beneficios "variables"**

Empezamos a trabajar con problemas combinatorios:

- **Problema del Viajante (TSP)**

La semana pasada planteamos un problema al cual le seguimos agregando más elementos para trabajar con variables enteras.

```
MAX 100 YAH - 200 Y1 - 150 Y2 - 120 Y3 - 140 Y4 - 90 Y5 - 115 Y6 + 15 X1 + 18 X2 + 4
X3 + 20 X4 + 3 X5 + 8 X6
ST
Y1 +Y2 +Y3 + Y4 + Y5 + Y6 >= 3
2 YAH - Y3 - Y4 <= 0
Y3 + Y4 - YAH <= 1
Y5 - Y1 <= 0
Y6 - Y1 <= 0
MP) 2 X1 + 3 X2 + 5 X3 + X4 + 2 X5 + 3 X6 <= 50
MO) 5 X1 + X2 + X3 + 4 X4 + 2 X5 + X6 <= 40
HM) 2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6 <= 150
.01 Y1 - X1 <= 0
X1 - 150 Y1 <= 0
.01 Y2 - X2 <= 0
X2 - 150 Y2 <= 0
.01 Y3 - X3 <= 0
X3 - 150 Y3 <= 0
.01 Y4 - X4 <= 0
X4 - 150 Y4 <= 0
.01 Y5 - X5 <= 0
X5 - 150 Y5 <= 0
.01 Y6 - X6 <= 0
X6 - 150 Y6 <= 0
END
INT 7
```

Ahora le vamos a agregar dos modificaciones al problema que tienen que ver con costos y precios que no son siempre constantes.

El costo de mantenimiento

- ***Se agrega un costo de mantenimiento de la máquina que se viene utilizando en la producción.***

[2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6 ≤ 150 (h/sem)]

- **Si la máquina funciona entre 1 y 30 horas, se pagará un costo de mantenimiento de $1 por hora.**
- **Si funciona más de 30 horas pero menos de 60, se pagará un costo de mantenimiento de $0,70 la hora.**
- **Si funciona 60 horas o más, el costo de mantenimiento será de $0,50 la hora.**

Este caso se conoce con el nombre de *Costo diferencial por intervalo*.

En este problema el inconveniente es que hay tres precios posibles, con lo cual el precio se convierte en una variable y si planteamos que el precio es = 1 YA + 0,7 YB + 0,5 YC, al multiplicar el precio por hora por la cantidad de horas –que es variable- estamos multiplicando variables.
Cuando parece que la única manera de resolver un problema es multiplicar una variable no binaria por una suma de varias binarias, la solución es dividir la variable principal (en nuestro caso, la cantidad de horas) en tantas variables como casos tengamos (en nuestro caso, tres casos posibles) y asociar cada variable con una bivalente, pero asociarlas sin multiplicar variables, sino con el método que vimos la semana pasada (m Yi ≤ Xi ≤ M Yi). Este método se conoce como RANGOS de una variable.

Apliquemos a nuestro problema:

HORAS = 2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6

Ahora dividimos la variable HORAS en tres rangos (los tres valores posibles):

HORAS = H1 + H2 + H3

De las tres variables (H1, H2 y H3) una sola será distinta de cero. Si la variable HORAS toma un valor entre 1 y 30, la que toma valor distinto de cero es H1, si la variable HORAS toma un valor mayor que 30 pero menor que 60, la que toma valor distinto de cero es H2 y si la variable HORAS toma un valor mayor que 60, la que será distinta de cero es la variable H3. ¿Cómo conseguimos que funcione así? Con las siguientes restricciones de RANGOS:

$$1\ YH1 \leq H1 \leq 30\ YH1$$

$$30{,}01\ YH2 \leq H2 \leq 59{,}99\ YH2$$ (recordemos que NO se pueden poner restricciones de mayor o menor estricto)

$$60\ YH3 \leq H3 \leq M\ YH3$$

YH1 + YH2 + YH3 = 1

Y el costo de mantenimiento será:

COSTO = 1 H1 + 0,7 H2 + 0,5 H3

Prueben con valores para HORAS y vean cuál es la restricción que se puede cumplir (cuál de las variables YHi puede valer 1 sin que el problema dé incompatible) para determinar cómo funciona.

Guerra de precios

- ***La recesión sigue haciendo estragos: tenemos que aumentar los precios para que nos siga conviniendo vender producto 2.***
- ***El nuevo esquema de precios es así: a las unidades de producto 2 que vendamos hasta 10 unidades, las venderemos al precio actual de $18/un, las vendidas por encima de 10 y hasta 17 las cobraremos a $20/un y las que vendamos por encima de 17 unidades las cobraremos $24/un.***
  (Por ejemplo, si vendemos 25 unidades cobraremos 10 a $18, 7 a $20 y 8 a $24)

En este problema también hay tres precios posibles, con lo cual el precio se convierte en una variable. ¿qué diferencia tiene con el caso anterior?

Este caso se conoce con el nombre de *Función cóncava seccionalmente lineal*.

La diferencia es que en el caso anterior todas las horas tenían el mismo costo, el tema era que ese costo podía ser 1 ó 0,7 ó 0,5. En este caso, las primeras 10 unidades tienen siempre el mismo precio, aunque se vendan más de 10, las siguientes 7 tienen siempre el mismo precio y las siguientes tienen el mismo precio (es como si fueran tres productos con tres precios distintos).

Podemos hacer algo parecido a lo que hicimos antes:

X2 = X2A + X2B + X2C

Siendo que X2A representa las primeras 10 unidades vendidas, X2B las siete siguientes y X2C las siguientes. Recordemos que puede ser más de una distinta de cero, si vendemos más de 10 o más de 17.

Y la ganancia por ventas del producto será:

GANANCIAX2 = 18 X2A + 20 X2B + 24 X2C

Como el precio va aumentando, el problema, si vendemos más de 10 o más de 17, es que, salvo que pongamos restricciones, todo el valor de X2 lo tomará X2C y las demás serán cero. ¿Cómo serían esas restricciones? Tenemos que crear una estructura tipo “represa” tal que cuando se llena el primer “dique” habilita al segundo y cuando se llena el segundo, se habilita al tercero.
Las restricciones de RANGOS serán:

$$10\ Y2B \leq X2A \leq 10$$

$$7\ Y2C \leq X2B \leq 7\ Y2B$$

$$X2C \leq M\ Y2C$$

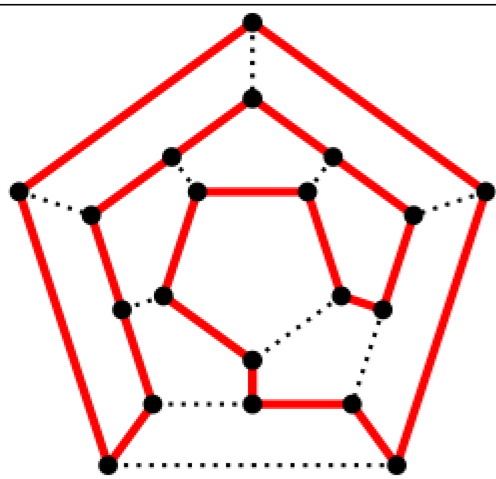
Para que X2B pueda tomar valor mayor que cero, se necesita que Y2B valga 1, pero si vale 1 en la primera restricción queda: 10 < X2A < 10, es decir, X2A es igual a 10. Por lo tanto, estas restricciones obligan a llenar el primer “dique” (el de X2A) para habilitar el segundo (el de X2B). De la misma manera podemos ver que obligan a llenar el segundo para habilitar el tercero. No hay restricciones adicionales que vinculen a Y2B con Y2C porque ambas pueden valer 1, ambas cero o solamente valer 1 Y2B, y eso está controlado por las restricciones de rango que pusimos.

Problema del viajante - TSP

El origen de los problemas del agente viajero no está claro. El problema de determinar el mejor circuito entre varias ubicaciones fue encarado por distintas profesiones desde la Prehistoria. Una guía para agentes viajeros de 1832 menciona el problema e incluye ejemplos de viajes a través de Alemania y Suiza, pero no contiene un tratamiento matemático del mismo. Hay evidencias también de recorridos de predicadores (actual EEUU, fines del Siglo XVIII), abogados (Reino Unido, mediados del Siglo XIX) y, por supuesto, viajantes (principio de Siglo XX).

Un primer acercamiento matemático es la formulación del tradicional Problema de los 7 Puentes de Königsberg como un grafo por parte de Leonhard Euler (lo que fue el puntapié inicial de la Teoría de Grafos). Posteriormente, el mismo Euler creó un problema en que pedía hallar un recorrido de un caballo de ajedrez que visitara todos los casilleros del tablero.

Los problemas de recorrido en grafos también fueron estudiados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton.

Esta imagen representa un juego inventado por Hamilton (conocido como icosian game) que consiste en hallar un ciclo hamiltoniano, que (como sabrán quienes hayan estudiado Teoría de Grafos) es un recorrido que pasa una sola vez por cada vértice del grafo (lo que requiere, por supuesto, que el grafo sea conexo).	

- Una formulación equivalente del Problema del Viajante en términos de la teoría de grafos es la de encontrar en un grafo completamente conexo y con arcos ponderados el ciclo hamiltoniano de menor costo.
- En esta formulación cada vértice del grafo representa una ciudad, cada arco representa una ruta y el peso asociado a cada arco representa la longitud de la ruta.

El problema se podría formular así:

- ***Un viajante tiene que partir de su casa y visitar una serie de clientes antes de retornar finalmente a su casa***
- ***No puede dejar de visitar ningún cliente***
- ***Se conocen las distancias entre cada par de clientes y entre cada cliente y la casa del viajante (llamamos cij a la constante que indica la distancia entre un lugar i y un lugar j)***

Tipos de problema

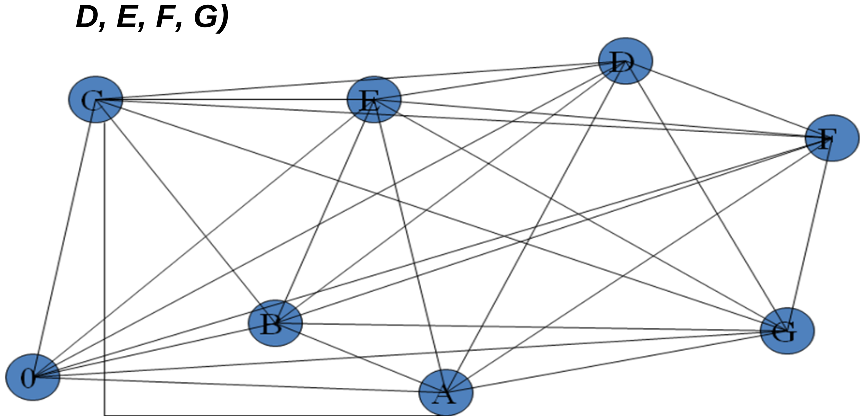
- ***Dependiendo de si la dirección en la cual se atraviesa un eje importa o no:***
- ***Viajante simétrico: No importa la dirección*** ($c_{ij} = c_{ji}$)
- ***Viajante asimétrico: Importa la dirección***

Formulación

- ***Variables: Yij : { vale 1 si el tour va directamente de la ciudad i a la ciudad j o vale cero en el caso que no va de i a j}***
- ***Exactamente una ciudad debe ser visitada después de la ciudad i***
- ***Exactamente una ciudad debe ser visitada antes de la ciudad j***

Un ejemplo de viajante

- ***Supongamos que el viajante tiene que recorrer siete ciudades (A, B, C, D, E, F, G)***



Una formulación equivalente en términos de la teoría de grafos es la de encontrar en un grafo completamente conexo y con arcos ponderados el ciclo hamiltoniano de menor costo.

En esta formulación cada vértice del grafo representa una ciudad, cada arco representa una ruta y el peso asociado a cada arco representa la longitud de la ruta.

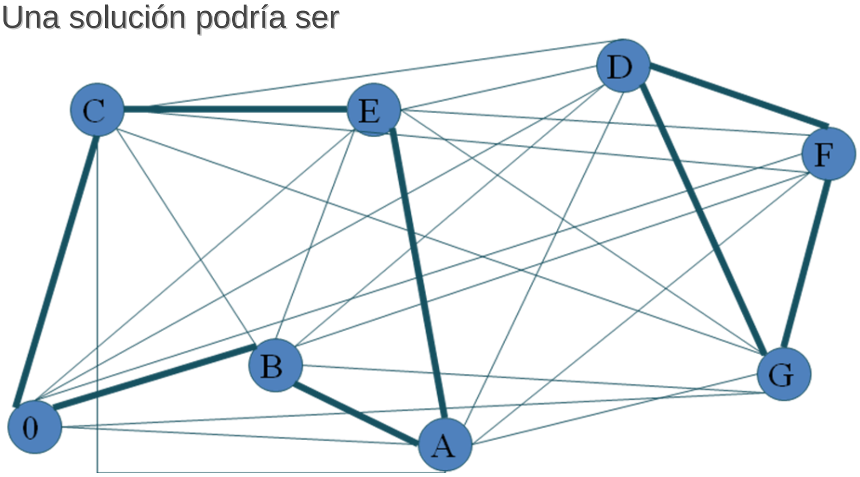
Formulación matemática

$$\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} Yij = 1 \quad \forall i = 0,1,2,\ldots\ldots n$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} Yij = 1 \quad \forall j = 0,1,2,\ldots\ldots n$$

$$Z = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0 \\ i \neq j}}^{n} C\ ij\ Yij \quad \text{(MINIMO)}$$

Una solución podría ser



(vemos resaltadas las rutas que hará el viajante, según el resultado del modelo)

Subtours

- ***Lo que sucedió es que se formaron dos tours distintos (llamados subtours) cuando debería haber un tour único.***
- ***Podemos ver el siguiente ejemplo en LINDO donde muestra un viajante de 4 ciudades (más la ciudad cero) donde toman valor = 1 las siguientes variables: y01, y12, y20, y34 e y43. Es decir, el tour va de 0 a 1, de 1 a 2 y vuelve a 0. Por otra parte va de 3 a 4 y de 4 a 3.***

```
MIN 5 Y01 + 6 Y02 + 15 Y03 + 17 Y04 + 5 Y10 + 6 Y12 + 15 Y13 + 17 Y14 + 5 Y20 + 6 Y21 + 15
     Y23 + 17 Y24 + 15 Y30 + 16 Y31 + 12 Y32 + 3 Y34 + 15 Y40 + 15 Y41 + 13 Y42 + 2 Y43
ST
!LLEGO DESDE UN SOLO LUGAR
Y10 + Y20 + Y30 + Y40 = 1
Y01 + Y21 + Y31 + Y41 = 1
Y02 + Y12 + Y32 + Y42 = 1
Y03 + Y13 + Y23 + Y43 = 1
Y04 + Y14 + Y24 + Y34 = 1
!SALGO A UN SOLO LUGAR
Y01 + Y02 + Y03 + Y04 = 1
Y10 + Y12 + Y13 + Y14 = 1
Y20 + Y21 + Y23 + Y24 = 1
Y30 + Y31 + Y32 + Y34 = 1
Y40 + Y41 + Y42 + Y43 = 1
END
INT 20
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      7
 OBJECTIVE VALUE =   21.0000000
 NEW INTEGER SOLUTION OF    21.0000000     AT BRANCH      0 PIVOT       7
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      21.00000
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       Y01        1.000000          5.000000
       Y02        0.000000          6.000000
       Y03        0.000000         15.000000
       Y04        0.000000         17.000000
       Y10        0.000000          5.000000
       Y12        1.000000          6.000000
       Y13        0.000000         15.000000
       Y14        0.000000         17.000000
       Y20        1.000000          5.000000
       Y21        0.000000          6.000000
       Y23        0.000000         15.000000
       Y24        0.000000         17.000000
       Y30        0.000000         15.000000
       Y31        0.000000         16.000000
       Y32        0.000000         12.000000
       Y34        1.000000          3.000000
```

Y40	***0.000000***	***15.000000***
Y41	***0.000000***	***15.000000***
Y42	***0.000000***	***13.000000***
Y43	*1.000000*	***2.000000***

Debemos evitar la posibilidad de "Subtours"
Para ello agregaremos las siguientes variables y vínculos (idea de Miller, Kuhn y Tucker):

Ui: Número de secuencia en la cual la ciudad i es visitada, ∀ i = 1,2,…….,n

$$U_i - U_j + n\, Y_{ij} \leq n-1$$

$$\forall\ i = 1,2,\ldots,n$$

$$\forall\ j = 1,2,\ldots,n$$

$$\forall\ i \neq j$$

MUY IMPORTANTE: **Observen que las Ui no se definen para la ciudad 0 (de origen y de partida) porque la idea de estas variables es que no se pueda ir de una ciudad que tiene un determinado número de orden (o de secuencia) a una que tenga un orden menor. A la única que se puede volver es a la ciudad cero, porque no tiene este tipo de restricciones. Sin la ciudad cero (es decir, sin una ciudad que no tenga variable Ui definida) el modelo no funciona, porque la idea de este modelo es que arme un "arco" en el cual no se puede volver para atrás, por eso necesita una ciudad cero que esté fuera del arco.**

¿Cómo funcionan las Ui?

- ***Las Ui son variables que toman valor entero aunque no se las defina como enteras***
- ***Secuencia:***
  Ui - Uj + N * Yij <= N - 1
  si Yij = 0 ⇒ Ui - Uj <= N - 1 , obliga que la diferencia de secuencia de visitas entre 2 ciudades que no son visitadas directamente sea menor igual que N -1.
  si Yij = 1 ⇒ Ui - Uj <= N - 1 - N = - 1
  Uj >= Ui + 1 , obliga que la secuencia de visita de la ciudad j que es visitada inmediatamente después que la ciudad i, debe ser por lo menos mayor o igual que 1

- ***Correlación Unitaria*: El significado de las variables Ui es el número de secuencia en el cual es visitada la ciudad i.**
  O sea si Yij = 1 ⇒ Uj = Ui + 1.

No puedo ir de la ciudad orden N a ninguna otra excepto la 0 ⇒ en particular Yij (para i con Orden N y j con Orden 1) es igual a 0.

O sea
Ui - Uj + N * Yij <= N -1 .... N - 1 <= N -1
la única forma para que dé así es que se incremente la secuencia de a 1(ya que se deben incrementar por algo >= que 1, Secuencia).

- ***Evitar subtours*: Por las ecuaciones que vimos antes, no se puede volver a una ciudad que tiene una Ui con valor superior al valor de la Ui de la ciudad en la cual estamos (a la única que se puede volver es a la cero porque no tiene Ui)***

A continuación vemos el mismo problema de las cuatro ciudades que vimos antes, pero ahora arma un único tour, gracias al uso de las Ui:

```
MIN 5 Y01 + 6 Y02 + 15 Y03 + 17 Y04 + 5 Y10 + 6 Y12 + 15 Y13 + 17 Y14 + 5 Y20 + 6 Y21 + 15
    Y23 + 17 Y24 + 15 Y30 + 16 Y31 + 12 Y32 + 3 Y34 + 15 Y40 + 15 Y41 + 13 Y42 + 2 Y43
ST
!LLEGO DESDE UN SOLO LUGAR    !Ui - Uj
Y10 + Y20 + Y30 + Y40 = 1     U1 - U2 + 4 Y12 <= 3
Y01 + Y21 + Y31 + Y41 = 1     U2 - U1 + 4 Y21 <= 3
Y02 + Y12 + Y32 + Y42 = 1     U1 - U3 + 4 Y13 <= 3
Y03 + Y13 + Y23 + Y43 = 1     U3 - U1 + 4 Y31 < =3
Y04 + Y14 + Y24 + Y34 = 1     U1 - U4 + 4 Y14 < =3
!SALGO A UN SOLO LUGAR             U4 - U1 + 4 Y41 < =3
Y01 + Y02 + Y03 + Y04 = 1     U2 - U3 + 4 Y23 < =3
Y10 + Y12 + Y13 + Y14 = 1     U3 - U2 + 4 Y32 < =3
Y20 + Y21 + Y23 + Y24 = 1     U2 - U4 + 4 Y24 < =3
Y30 + Y31 + Y32 + Y34 = 1     U4 - U2 + 4 Y42 <= 3
Y40 + Y41 + Y42 + Y43 = 1     U3 - U4 + 4 Y34 <= 3
                              U4 - U3 + 4 Y43 < =3
                                  END
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 14

RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 41.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Y01	1.000000	5.000000
Y02	0.000000	6.000000
Y03	0.000000	15.000000
Y04	0.000000	17.000000
Y10	0.000000	5.000000
Y12	0.000000	6.000000
Y13	1.000000	15.000000
Y14	0.000000	17.000000
Y20	1.000000	5.000000
Y21	0.000000	6.000000
Y23	0.000000	15.000000
Y24	0.000000	17.000000
Y30	0.000000	15.000000
Y31	0.000000	16.000000
Y32	0.000000	12.000000
Y34	1.000000	3.000000
Y40	0.000000	15.000000
Y41	0.000000	15.000000
Y42	1.000000	13.000000
Y43	0.000000	2.000000
U1	0.000000	0.000000
U2	3.000000	0.000000
U3	1.000000	0.000000
U4	2.000000	0.000000

Viajante - Modelo Matemático

$$\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} Yij = 1 \qquad \forall i = 0,1,2,\ldots\ldots n$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} Yij = 1 \qquad \forall j = 0,1,2,\ldots\ldots n$$

$$Ui - Uj + n\, Yij \leq n - 1 \qquad \forall i, \forall j, i \neq j \quad i, j=1\ldots n$$

$$Z = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=0}^{n} C\, ij\, Yij \quad \text{(MINIMO)}$$

Dimensión de la formulación

(n+1)n	Yij variables	
n	Ui variables	
n+1	Vínculos del tipo	$\sum_{j=0;\, i \neq j}^{n} Yij = 1 \quad \forall\, i = 0,1\ldots n$
n+1	Vínculos del tipo	$\sum_{i=0;\, i \neq j}^{n} Yij = 1 \quad \forall\, j = 0,1\ldots n$
n (n-1)	Vínculos del tipo	$Ui - Uj + n\, Yij \leq n-1$

Otra forma de formularlo sin las Ui con restricciones que eliminan subtours

MIN 5 X01 + 6 X02 + 15 X03 + 17 X04 + 5 X10 + 6 X12 + 15 X13 + 17 X14 + 5 X20 + 6 X21 + 15 X23 + 17 X24 + 15 X30 + 16 X31 + 12 X32 + 3 X34 + 15 X40 + 15 X41 + 13 X42 + 2 X43
ST
!LLEGO DESDE UN SOLO LUGAR
X10 + X20 + X30 + X40 = 1
X01 + X21 + X31 + X41 = 1
X02 + X12 + X32 + X42 = 1
X03 + X13 + X23 + X43 = 1
X04 + X14 + X24 + X34 = 1
!SALGO A UN SOLO LUGAR
X01 + X02 + X03 + X04 = 1
X10 + X12 + X13 + X14 = 1
X20 + X21 + X23 + X24 = 1
X30 + X31 + X32 + X34 = 1
X40 + X41 + X42 + X43 = 1

!Restringiendo los subtours...

! |M|=2
X12 + X21 <= 1

```
X13 + X31 <= 1
X14 + X41 <= 1
X23 + X32 <= 1
X24 + X42 <= 1
X34 + X43 <= 1

! |M|=3
X12 + X21 + X13 + X31 + X23 + X32 <= 2
X12 + X21 + X14 + X41 + X24 + X42 <= 2
X13 + X31 + X14 + X41 + X34 + X43 <= 2
X23 + X32 + X24 + X42 + X34 + X43 <= 2
END
INT 20
```

Dimensión de esta nueva formulación

(n+1)n ***variables Xij***

2n + 2 n ***restricciones***

El número exponencial de restricciones hace impráctico resolverlo directamente.
Una opción es agregar únicamente las restricciones para evitar subtours en los casos en los cuales arma subtour y no en todos los casos

Características del problema

Una situación se modela como problema del viajante cuando:

- ***En el problema se plantean actividades o cosas de las cuales no se conoce el orden en el cual se realizan***
- ***La función objetivo (directa o indirectamente) depende del orden que indique el modelo para esas actividades (a distinto orden, distinto resultado)***

Variaciones al problema del Viajante

- ***Variables para recorrido: Yij***
  - **Ahora hay dos medios de transporte para ir de cada ciudad i a cada ciudad j (tren y camión). Cada medio tiene un cto. distinto para ir de i a j.**

  Se debe usar por lo menos dos veces cada medio de transporte en el camino recorrido.

Agregamos en la función objetivo las variables YTij multiplicadas por el costo del tren y las variables YCij multiplicadas por el costo del camión

Pero hay que relacionarlas con las Yij originales:

Yij = YTij + YCij para todo i y para todo j (i distinto de j)

Y para usar por lo menos dos veces cada medio de transporte:

Sumatoria variando i (Sumatoria variando j (YTij)) >= 2

Sumatoria variando i (Sumatoria variando j (YCij)) >= 2

- ***Variables para orden: Ui***
  - **No se puede visitar al cliente de la ciudad D si antes no se visitó al de la ciudad G.**

$$UD \geq UG$$

  - **No se puede visitar al cliente de la ciudad F si antes no se visitó al de la ciudad E o al de la ciudad B**

$$UF \geq UE - M\ Y$$

$$UF \geq UB - M\ (1 - Y)$$

¿Qué nos queda de esta clase?

- ❑ Cómo plantear descuentos/recargos por cantidad que no cumplen con el supuesto básico de proporcionalidad
  - ❑ Costo diferencial por intervalo

  - Función cóncava seccionalmente lineal
- El problema del viajante: problema combinatorio por excelencia.
  - Cómo detectar que un problema es viajante
  - Cómo modelizarlo