Material de apoyo Teórica III

Temario

- Programación de metas
- Otros problemas de programación lineal continua

Elementos de un modelo

Condiciones de vínculo

Son las que relacionan las actividades entre sí o con el contexto.

- Fuertes: deben ser cumplidas siempre.
- Débiles: pueden no cumplirse a un cierto costo (se resuelven con programación de metas).
- Conflictivas o contradictorias: dos o más condiciones no pueden cumplirse simultáneamente.

Programación de Metas

- ❑ Siguiendo con el ejemplo de hace dos semanas...

MIN 100 VH + 600 SV

DEM_AM) 2 SV + VH <= 80

DEM_QU) 5 SV <= 50

DISP_SV) SV <= 30

DISP_AM) VH <= 40

MAXLV) LV <= 280

Ahora aparece algo nuevo:

- ❑ Siguiendo con el ejemplo de hace dos semanas... Nos dicen que se rompió la camioneta que traía el amaranto desde Valle Hermoso.
- ❑ Tenemos la posibilidad de contratar un flete de La Falda que nos cobra $2 por kilo pero a ese precio solamente nos transporta hasta 20 kilos.

- Si queremos transportar más de 20 kilos nos saldrá $4 por cada kilo que deseemos transportar por encima de los 20 kilos (hay que contratar otro flete de Valle Hermoso)

- ¿Cómo hacemos para poner una restricción que nos detecte cuánto transportamos por encima de 20 kilos y cuánto por debajo de 20 kilos?

- Puede transportar más o menos de 20 kg. (restricción débil que puede no cumplirse a cierto costo)

Si ponemos una variable para medir la diferencia entre lo que transporta y 20 kilos

DIFERENCIA = VH – 20

¿Qué valores podría tomar la variable DIFERENCIA?

¡Pero no puede haber variables negativas! Entonces ¿cómo hacemos para representar un valor negativo?

- Podría ser positiva (si VH es mayor que 20)
- Podría ser negativa (si VH es menor que 20)
- Podría valer cero (si VH = 20)

Para eso se comparan los kilos transportados con la meta (20)

VH - 20 = EXCESO – DEFECTO

Si VH es igual a 40

VH - 20 = EXCESO – DEFECTO

40 - 20 = 20 - 0

Si VH es igual a 15

VH - 20 = EXCESO – DEFECTO

15 - 20 = 0 - 5

Se comparan los kilos transportados con la meta (20)

VH - 20 = EXCESO - DEFECTO

Es decir, EXCESO y DEFECTO son variables mayores o iguales que cero y, sin embargo, con las metas podemos representar diferencias negativas

y así quedaría el Z

MIN Z = 2 (VH - EXCESO) + 4 EXCESO + 6 SV

Ahora ¿por qué aseguramos que cuando EXCESO es distinta de cero, DEFECTO vale cero (y también que cuando DEFECTO es distinta de cero, EXCESO vale cero)?
¡Porque le conviene a la función objetivo!

Si al Z le conviniera que tomaran valor simultáneamente EXCESO y DEFECTO el esquema de metas no funcionaría bien.

En programación lineal continua no tenemos manera de hacer que cuando una variable es distinta de cero haya otra variable que esté obligada a valer cero. Para eso vamos a tener que definir variables enteras binarias (que tomen valor cero o uno solamente), pero eso lo vamos a ver en la clase de variables enteras.

Problemas con varios períodos:

Un fabricante debe cumplir un contrato a cuatro meses durante los cuales varían los costos de producción. El costo de almacenamiento de unidades producidas en un mes determinado y no vendidas en ese mes es de 10 pesos por unidad y por mes. Se dispone de la siguiente información:

Mes	Contrato de venta en unidades	Capacidad de producción en unidades	Costo unitario de producción en pesos
1	20	40	140
2	30	50	160
3	50	30	150
4	40	50	170

Este es un problema dinámico (ver clasificación de la primera clase) en el cual cada período está relacionado con el anterior y con el siguiente.

Dado que en cada mes se tiene una capacidad de producción diferente, un costo unitario de producción diferente y un contrato de venta diferente, podría ser útil no poner la hipótesis que siempre usamos cuando hay un solo período (todo lo que se produce se vende) porque podemos aprovechar la capacidad productiva de un mes para fabricar cosas que podamos vender el mes siguiente. Inclusive hay situaciones en las cuales esto es imprescindible, por ejemplo si en el mes 3 no tenemos unidades fabricadas con antelación, no podremos cumplir con el contrato de venta, porque el contrato es de 50 unidades y la capacidad productiva de ese mes es de 30 unidades. Si suponemos que el producto no se echa a perder a lo largo de los meses y que tenemos lugar para almacenar, podremos decir que:

Ventas de un determinado mes i + Unidades que quedan en stock al final del mes i =

Producción del mes i + Unidades que quedaban en stock al principio del mes i

Es decir que para cada mes i tendremos que hacer el siguiente balance de unidades:

$V(i) + SF(i) = P(i) + SF(i - 1)$

Si suponemos que no hay stock inicial (el enunciado no nos dice nada al respecto) diremos que SF(0) vale cero o no existe la variable.

Si suponemos que no es necesario dejar stock al final de los cuatro meses (el enunciado no nos dice nada al respecto) diremos que SF(4) vale cero o no existe la variable.

Además tenemos que controlar que se cumpla con el contrato de venta. Si suponemos que podemos vender más unidades de las que nos indica el contrato, cada variable V(i) será mayor o igual que el contrato para ese mes. Si supusiéramos que solamente se vende la cantidad indicada en el contrato, el modelo sería muy limitado, casi al borde de una cuenta, porque lo que quedaría es encontrar la mejor manera de distribuir la producción de las unidades comprometidas.

Nótese que es muy importante que se indique para cada mes la cantidad de unidades de las que se dispone. No basta con decir que en los cuatro meses se necesita contar con (20 + 30 + 50 + 40) unidades para vender, porque podríamos tener cero unidades en el mes 1 y 50, 50 y 40 en los tres restantes, con lo que el primer mes no estaríamos cumpliendo con el contrato y el modelo diría que sí, que "globalmente" cumplimos.

Tal como la semana pasada decíamos que la única manera de controlar las restricciones de armado es poner una restricción para cada componente del armado, para controlar que cada mes proporcione unidades suficientes a la venta como para cumplir el contrato de ese mes, necesitamos hacer un balance de unidades mes a mes.

Definición de variables

Pi = Cantidad de unidades producidas en el mes i

Vi = Cantidad de unidades vendidas en el mes i.

SFi = Stock de unidades al final del mes i.

Restricciones

P1 = SF1 + V1

V1 >= 20

P1 <= 40

P2 + SF1 = V2 + SF2

V2 >= 30

P2 <= 50

P3 + SF2 = V3 + SF3

V3 >= 50

P3 <= 30

P4 + SF3 = V4

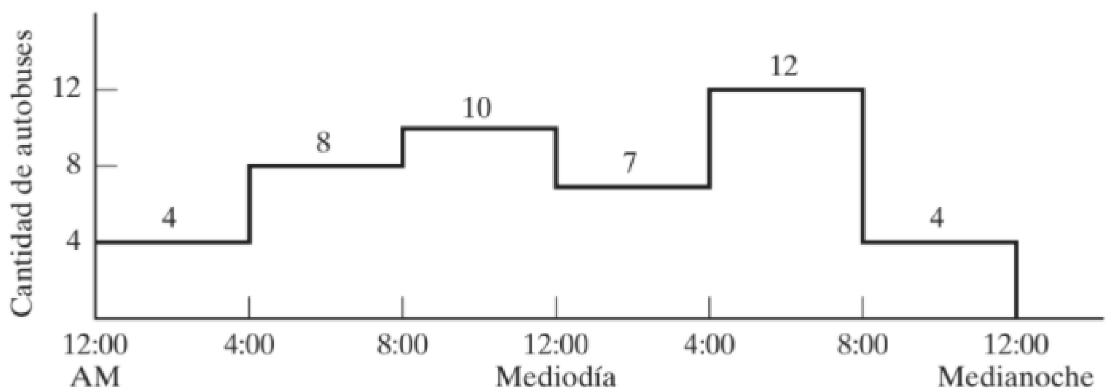
V4 >= 40

P4 <= 50

Z min = 140 P1 + 160 P2 + 150 P3 + 170 P4 + 10 SF1 + 10 SF2 + 10 SF3

Programación de tareas:

Una pequeña ciudad quiere introducir un sistema de autobuses eléctricos. Este tipo de autobuses solamente pueden operar hasta 8 horas por día. Después de recopilar la información, observaron que el número de autobuses que se necesitaban fluctuaba según las horas del día, en intervalos sucesivos de cuatro horas.



Como los autobuses pueden operar hasta 8 horas por día, podemos definir variables que midan la cantidad de autobuses que comienzan a trabajar en un determinado horario y que trabajarán 8 horas seguidas.

Dado que la demanda cambia cada 4 horas, lo que conviene es que esos “turnos” comiencen cada 8 horas

x_1 = cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 A.M.

x_2 = cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 A.M.

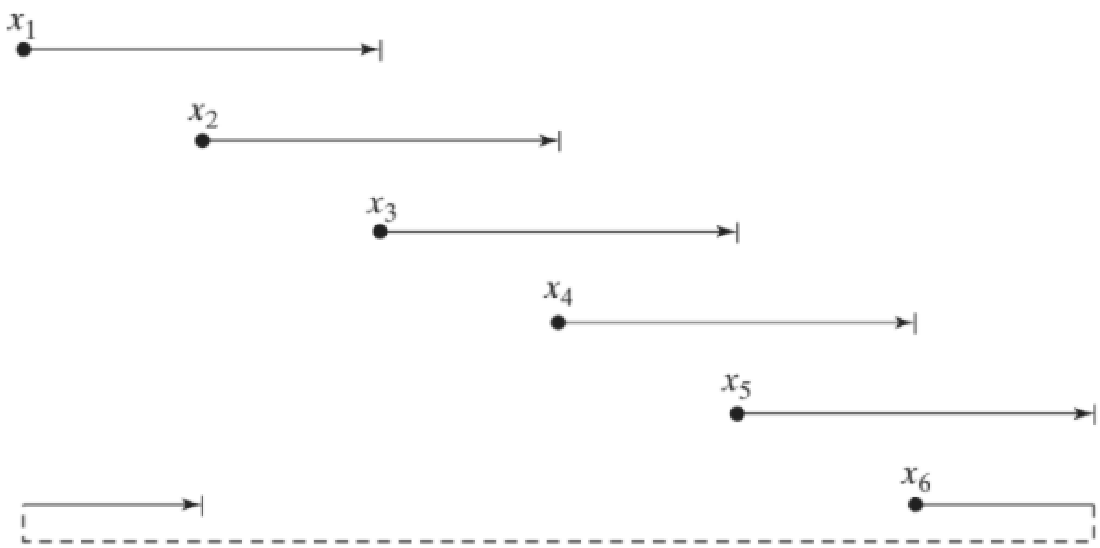
x_3 = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 A.M.

x_4 = cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 P.M.

x_5 = cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 P.M.

x_6 = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 P.M.

Los turnos hacen que dos turnos cubran el mismo período de 8 horas



$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$
\begin{array}{llll}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 & \geq & 4 & \text{(12:01 A.M.-4:00 A.M.)} \\
x_1 + x_2 & \geq & 8 & \text{(4:01 A.M.-8:00 A.M.)} \\
\quad x_2 + x_3 + & \geq & 10 & \text{(8:01 A.M.-12:00 del día)} \\
\qquad x_3 + x_4 + & \geq & 7 & \text{(12:01 P.M.-4:00 P.M.)} \\
\qquad\quad x_4 + x_5 & \geq & 12 & \text{(4:01 P.M.-8:00 P.M.)} \\
\qquad\qquad x_5 + x_6 & \geq & 4 & \text{(8:01 P.M.-12:00 P.M.)} \\
x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, 6 & & &
\end{array}
$$

Rotación de tareas:

Un hospital tiene que programar las tareas de su personal de enfermería el fin de semana. Tiene 25 personas en su personal y cada una de ellas puede realizar una de estas tres tareas: guardias nocturnas, preparado de medicación o asistencia a personal médico.

El sábado se necesitan A personas para guardia nocturna. El domingo se necesitan B personas.

En cuanto a asistencia de personal médico, el sábado se necesitan C personas y el domingo, D personas.

Cada persona puede preparar X dosis de medicación por día. El sábado se necesitan E dosis de medicación y el domingo se necesitan F dosis.

Se sabe por experiencia que si una persona trabaja en la misma tarea el sábado y el domingo, su rendimiento baja un 25%, porque se aburre.

Cada persona que trabaje efectivamente algún día cobra Y pesos por día

¿Qué es lo mejor que puede hacer el hospital?

NOTA: A, B, C, D, E, F, X e Y son constantes conocidas

Variables

Eij: Cantidad de personas que el día i hacen la tarea j

i: S, D

j: G, P, A, N (guardias, preparado de medicación, asistencia, nada)

Restricciones del Sábado

<u>División de personal</u>

ESG + ESP + ESA + ESN = 25

<u>Necesidades de guardias</u>

ESG >= A

<u>Necesidades de asistencias a personal médico</u>

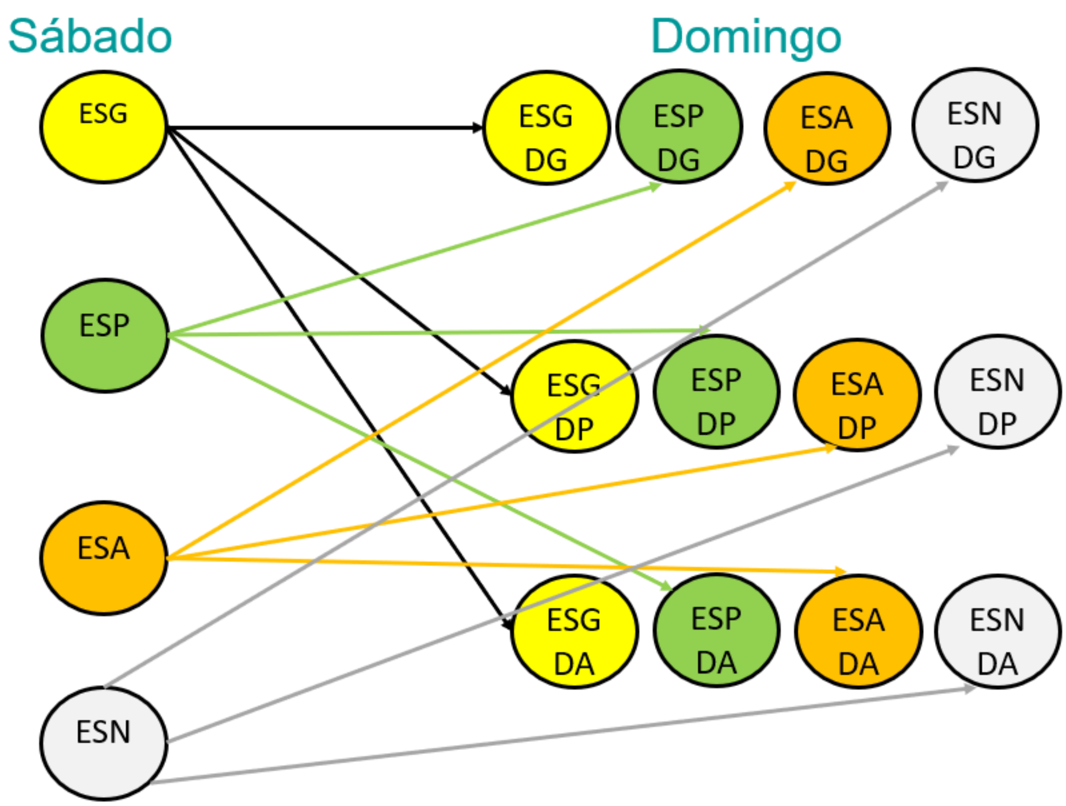
ESA >= C

<u>Necesidades de preparado de medicación</u>

X . ESP >= E

Para el domingo, la cosa no es igual, porque para saber si hizo la misma tarea que el día anterior o no, debemos tener variables que midan lo que hicieron el sábado y lo que hacen el domingo

ESjDk: Cantidad de personas que el sábado hacen la tarea j y el domingo la tarea k
j, k: G, P, A, N (guardias, preparado de medicación, asistencia, nada)



Es importante detector quiénes el sábado no hicieron ninguna tarea para que el domingo puedan “cambiar de tarea” (considerando el no hacer nada como una tarea más), sino esos empleados “se perderían”. Cuando dividimos los empleados que trabajaron el sábado en las distintas actividades que hacen el domingo, si no hay una variable que mida los que no hacen nada, no podrán “cambiar de tarea”. Si no ponemos la variable de los que no hacen nada el sábado, esas persona tampoco podrán trabajar el domingo.

Relación entre el Sábado y el Domingo

<u>El sábado hicieron guardias</u>

ESG >= ESGDG + ESGDA + ESGDP

<u>El sábado hicieron asistencias</u>

ESA >= ESADG + ESADA + ESADP

<u>El sábado hicieron preparados</u>

ESP >= ESPDG + ESPDA + ESPDP

<u>El sábado no hicieron nada</u>

ESN >= ESNDG + ESNDA + ESNDP

Domingo

<u>Necesidades de guardias</u>

0,75 ESGDG + ESADG + ESPDG + ESNDG >= B

<u>Necesidades de asistencias a personal médico</u>

ESGDA + 0,75 ESADA + ESPDA + ESNDA >= D

<u>Necesidades de preparado de medicación</u>

X ESGDP + X ESADP + 0,75 X ESPDP + X ESNDP >= F

Función objetivo

MIN Y (ESG + ESA + ESP + ESGDG + ESADG + ESPDG + ESNDG + ESGDA + ESADA + ESPDA + ESNDA + ESGDP + ESADP + ESPDP + ESNDP)

¿Qué nos queda de esta clase?

- Programación de metas
- Problemas con varios períodos
- Programación de tareas
- Rotación de tareas

No olvidar…
Leer el material adicional a esta clase.
Abarca los temas de: Estrategia modular de modelización, aplicación de Programación de metas en una ecuación de caja.