5. Programación Dual - Introducción al Análisis Paramétrico

Temario

A- Problema Dual.

1- Planteo dual de un problema dado.

2- Resolución de un problema dual.

3- Correspondencia entre las tablas óptimas del directo y del dual.

4- Construcción de la tabla óptima del dual a partir de la tabla óptima del directo.

B- Variación de coeficientes de eficiencias.

1- Coeficientes de variables que están en la base. Cálculo de límites. Análisis gráfico.

2- Coeficientes de variables que no están en la base. Cálculo de límites. Análisis gráfico.

3- Relación entre el sentido de la variación C_i estudiada, el signo de los a_{ij} y el objetivo del problema.

4- Variación de la solución óptima al variar un coeficiente de eficiencia entre cero e infinito. Análisis analítico y gráfico.

5- Determinación de curvas de oferta. Características que presentan cuando hay restricciones de cantidad demandada máxima o de producción mínima.

C- Conceptos de análisis parámetrico. Variación de las restricciones.

1- Valores marginales. Significado. Interpretación gráfica.

2- Costos de oportunidad. Significado. Interpretación gráfica.

3- Análisis de la relación entre saturación de recursos, valores marginales y variables slacks.

4- Análisis de la relación entre producción óptima de un producto y su costo de oportunidad.

5- Variación de restricciones de recursos no saturados. Cálculo de límites. Análisis gráfico.

6- Variación de restricciones de recursos saturados. Cálculo de límites. Análisis gráfico.

7- Relación entre el sentido de la variación b_j estudiada, el signo de los a_{ji} y el objetivo del problema.

8- Variación de una restricción b_j de cero a infinito Análisis y diagrama explicativo de la variación de los siguientes elementos:

8.1 -Funcional.

8.2 -Valor marginal de la restricción que se varía.

8.3 -Uso de las otras restricciones.

8.4 -Valor marginal de las otras restricciones.

8.5 -Valor de las variables del problema directo.

9- Análisis de las diferencias de los resultados de los puntos 8.1 a 8.5 cuando la restricción estudiada es de producción mínima

Problema Tipo Nº 1

Realizar el planteo dual del Problema Tipo 4.1

Planteo original (directo)

$$\begin{array}{rcrcl} & & X_2 & \leq & 2 \\ 3\ X_1 & + & 2\ X_2 & \leq & 12 \\ 2\ X_1 & + & 4\ X_2 & \leq & 12 \\ Z = 3\ X_1 & + & 4\ X_2 & \rightarrow & \text{Máx.} \end{array}$$

Resolución del problema

1. *Matriz de correspondencia entre variables*

	X_1	X_2		
Y_1	0	1	X_3	2
Y_2	3	2	X_4	12
Y_3	2	4	X_5	12
	Y_4	Y_5		
	3	4		

X_1: Cantidad producto 1 ≡ Y_4: Costo de oportunidad producto 1
X_2: Cantidad producto 2 ≡ Y_5: Costo de oportunidad producto 2
X_3: Sobrante recurso 1 ≡ Y_1: Valor marginal recurso 1
X_4: Sobrante recurso 2 ≡ Y_2: Valor marginal recurso 2
X_5: Sobrante recurso 3 ≡ Y_3: Valor marginal recurso 3

Esta matriz es muy útil para determinar las correspondencias entre las variables de ambos planteos y así facilitar el análisis de las distintas posibilidades en cada caso.

2. *Planteo Dual*

Como el problema directo es de maximización, nosotros plantearemos uno de minimización, los coeficientes del funcional serán las disponibilidades iniciales de los recursos. El objetivo de este problema será determinar el valor de los recursos, que satisfaga los beneficios unitarios mínimos, haciendo mínimo el costo total por su uso.

- *Inecuaciones*

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 3\ Y_2 & + & 2\ Y_3 & \geq & 3 \\ Y_1 & + & 2\ Y_2 & + & 4\ Y_3 & \geq & 4 \\ Z = 2\ Y_1 & + & 12\ Y_2 & + & 12\ Y_3 & \rightarrow & \text{Mín.} \end{array}$$

- *Ecuaciones*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} & & 3\ Y_2 & + & 2\ Y_3 & - & Y_4 & & & + & m_1 & & & \geq & 3 \\ Y_1 & + & 2\ Y_2 & + & 4\ Y_3 & & & - & Y_5 & & & + & m_2 & \geq & 4 \\ Z = 2\ Y_1 & + & 12\ Y_2 & + & 12\ Y_3 & + & 0\ Y_4 & + & 0\ Y_5 & + & M m1 & + & M m_2 & \rightarrow & \text{Mín.} \end{array}$$

☞ *Nota: La variable artificial m_2 no sería necesaria, pues el segundo vector canónico ya está asociado (en este caso particular, a la variable Y_1)*

3. *Resolución del problema Dual*

			2	12	12	0	0	M	M	
C_K	Y_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	m_1	m_2	q
M	m_1	3	0	3	2	-1	0	1	0	3/2
M	m_2	4	1	2	4	0	-1	0	1	1
Z = 7M			M-2	5M-12	6M-12	-M	-M	0	0	
			X_3	X_4	X_5	X_1	X_2			

Tabla Inicial

			2	12	12	0	0	M	M	
C_K	Y_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	m_1	m_2	q
M	m_1	1	-1/2	2	0	-1	1/2	1	-1/2	1/2
12	Y_3	1	1/4	1/2	1	0	-1/4	0	1/4	2
Z = M+12			-M/2-1	2M-6	0	-M	M/2-3	0	-M/2+3	
			X_3	X_4	X_5	X_1	X_2			

			2	12	12	0	0	M	M
C_K	Y_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	m_1	m_2
12	Y_2	1/2	-1/4	1	0	-1/2	1/4	1/2	-1/4
12	Y_3	3/4	3/8	0	1	1/4	-3/8	-1/4	3/8
Z = 15			-1/2	0	0	-3	-3/2	-M+3	-M-1/2
			X_3	X_4	X_5	X_1	X_2		

Tabla Dual

Problema Tipo Nº 2

En una fábrica de medias se desea analizar la operación de un sector integrado por tres equipos E_1, E_2, E_3 donde se procesan los productos A, B, C. Los tiempos de proceso de los productos son los del siguiente cuadro, medidos en horas de equipo/docena de producto.

	A	**B**	**C**
Equipo 1	0,8	0,8	0,3
Equipo 2	0,6	1,2	—
Equipo 3	0,6	1,0	0,6

Se ha determinado además, la disponibilidad mensual de cada uno de los equipos. Esta importa respectivamente 160, 180 y 110 horas. Asimismo, se estima en 100 docenas mensuales la cantidad demandada máxima del producto A, y en 120 docenas mensuales la cantidad demandada máxima del producto B.

Por otra parte, la Dirección de la empresa desea producir como mínimo 80 docenas mensuales del producto B.

El margen de beneficio de cada producto es de 50 \$/docena de A, 40 \$/docena de B y 30 \$/docena de C.

El programa óptimo es el que hace máximo el margen total de beneficio.

Habiéndose resuelto el problema de programación lineal y disponiéndose de la tabla óptima obtenida por el Método Simplex, se pide:

1- Identificar todas las incógnitas del problema. (directo)
2- Informar sobre el significado de la solución óptima obtenida.
3- Calcular el rango de variación de cada coeficiente Cj dentro del cual no se altere la estructura de la solución óptima hallada.
4- Obtener la tabla óptima del planteo Dual.
5- Identificar todas las incógnitas del planteo Dual.
6- Informar sobre el significado de la solución óptima del planteo Dual.
7- Calcular el rango de variación de cada coeficiente b_j dentro del cual no se altere la estructura de la solución óptima hallada.
8- Analizar qué ocurriría si el margen de beneficios del producto C se elevara a 35 $/doc.
9- Analizar qué ocurriría si la disponibilidad de Equipo 1 se tornase inferior a 104 hs/mes.
10- ¿Qué ocurre si la disponibilidad de Equipo 3 disminuye en más de 30 hs.? ¿A qué precio se podrían vender 30 horas de Equipo 3? ¿Y 31 horas?
11- Graficar la curva de oferta del producto A.
12- Graficar la variación del funcional, del costo de oportunidad del producto B y del valor marginal del recurso 3 cuando la disponibilidad de Equipo 3 varía entre cero e infinito.
13- ¿Qué ocurre si la dirección decide producir un mínimo de 60 docenas mensuales de B en vez de la cifra actual de 80? ¿Cuánto pasa a valer el funcional?

<u>Tablas de Simplex (primera y óptima)</u>

			50	40	30							-M
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	μ
	X_4	160	0,8	0,8	0,3	1	0	0	0	0	0	0
	X_5	180	0,6	1,2	0	0	1	0	0	0	0	0
	X_6	110	0,6	1	0,6	0	0	1	0	0	0	0
	X_7	100	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	X_8	120	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
-M	μ	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1
Z = 0			-50	-M-40	-30	0	0	0	0	0	M	0

			50	40	30						
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
50	X_1	50	1	0	1	0	0	5/3	0	0	5/3
40	X_2	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
	X_4	56	0	0	-1/2	1	0	-4/3	0	0	-8/15
	X_5	54	0	0	-3/5	0	1	-1	0	0	1/5
	X_7	50	0	0	-1	0	0	-5/3	1	0	-5/3
	X_8	40	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Z = 5700			0	0	20	0	0	250/3	0	0	130/3

1. *Identificar todas las incógnitas del problema (directo)*

Variable	***Descripción***	***Unidad***
X_1	*Producción de medias A*	*docenas/mes*
X_2	*Producción de medias E*	*docenas/mes*
X_3	*Producción de medias C*	*docenas/mes*
X_4	*Sobrante disponibilidad Equipo 1*	*horas/mes*
X_5	*Sobrante disponibilidad Equipo 2*	*horas/mes*
X_6	*Sobrante disponibilidad Equipo 3*	*horas/mes*
X_7	*Cantidad demandada insatisfecha A*	*docenas/mes*
X_8	*Cantidad demandada insatisfecha B*	*docenas/mes*
X_9	*Producción de B adicional al mínimo impuesto*	*docenas/mes*

2. *Informar sobre el significado de la solución óptima obtenida*

- *Producción y cumplimiento de las cantidades demandadas.*

Medias (tipo)	***Producción (docenas)***	***Cantidad demandada insatisfecha***	
		Docenas	***%***
A	*50*	*50*	*50*
B	*80*	*40*	*33*
C	—	—	—

No se producirá de las medias tipo B, más del mínimo impuesto por Dirección de la Empresa.

- *Utilización de los equipos.*

Equipo	***Disponibilidad (horas)***	***Utilización***	
		Horas	***%***
1	*160*	*104*	*65*
2	*180*	*126*	*70*
3	*110*	*110*	*100*

El beneficio a obtener mensualmente es de $5700. Las restricciones que están limitando a ese valor son la disponibilidad de Equipo 3 y la condición impuesta por la Dirección de la Empresa respecto de las medias tipo B.

3. *Calcular el rango de variación de cada coeficiente C_j*

- *Coeficiente C_1*

$$\left.\begin{aligned} \Delta C_1^+ &= \infty \\ \Delta C_1^- &= \min\left(\frac{Z_3-C_3}{a_{13}};\frac{Z_6-C_6}{a_{16}};\frac{Z_9-C_9}{a_{19}}\right)\\ &=\min\left(20;50;26\right)\\ &=20\end{aligned}\right\} \begin{aligned} 50-20\le C_1\le 50+\infty\\ 30\le C_1\le\infty\end{aligned}$$

- *Coeficiente* C_2

$$\left.\begin{aligned} \Delta C_2^+ &= \frac{Z_9 - C_9}{a_{29}} \\ &= \frac{\frac{130}{3}}{-(-1)} \\ &= \frac{130}{3} \\ \Delta C_2^- &= \infty \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 40-\infty \le C_2 \le 40+\frac{130}{3} \\ -\infty \le C_2 \le \frac{250}{3} \end{aligned}$$

- *Coeficiente* C_3

$$\left.\begin{aligned} \Delta C_3^+ &= Z_3 - C_3 \\ &= 20 \\ \Delta C_3^- &= \infty \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 30-\infty \le C_3 \le 30+20 \\ -\infty \le C_3 \le 50 \end{aligned}$$

4. *Obtener la tabla óptima del planteo Dual*

			160	180	110	100	120	-80			
b_K	Y_K	C_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
110	Y_3	250/3	4/3	1	1	5/3	0	0	-5/3	0	0
-80	Y_6	130/3	8/15	-1/5	0	5/3	-1	1	-5/3	1	0
	Y_9	40	1/2	3/5	0	1	0	0	-1	0	1
Z = 5700			-56	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0
			X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_1	X_2	X_3

5. *Identificar todas las incógnitas del planteo Dual*

Variable	Descripción	Unidad
Y_1	Valor marginal de la disponibilidad Equipo 1	\$/hora mes
Y_2	Valor marginal de la disponibilidad Equipo 2	\$/hora mes
Y_3	Valor marginal de la disponibilidad Equipo 3	\$/hora mes
Y_4	Valor marginal de la demanda máxima de A	\$/docena mes
Y_5	Valor marginal de la demanda máxima de B	\$/docena mes
Y_6	Valor marginal de la producción mínima de B	\$/docena mes
Y_7	Costo de oportunidad de la producción de medias A	\$/docena mes
Y_8	Costo de oportunidad de la producción de medias B	\$/docena mes
Y_9	Costo de oportunidad de la producción de medias C	\$/docena mes

6. *Informar sobre el significado de la solución óptima del planteo Dual*

- *El valor de los recursos y restricciones que satisfacen los beneficios unitarios al mínimo costo es el siguiente:*
  - a- *Cada una de las 110 hs. mensuales de Equipo 3 tiene un valor de \$83,33 (250/3)*
  - b- *Fabricar cada una de las 80 docenas de medias B que impone la Dirección como mínimo, produce una pérdida de \$43,33 por mes. (130/3)*

c- *El costo de producir al menos una unidad de producto C provocaría una pérdida de $20 por mes.*

7. <u>Calcular el rango de variación de cada coeficiente b_j</u>

- *Coeficiente b_1*

$$\left.\begin{aligned}\Delta b_1^+ &= \infty\\ \Delta b_1^- &= -(Z_3 - b_3)\\ &= 56\end{aligned}\right\}\begin{aligned}160-56 \le b_1 &\le 160+\infty\\ 104 \le b_1 &\le \infty\end{aligned}$$

- *Coeficiente b_2*

$$\left.\begin{aligned}\Delta b_2^+ &= \infty\\ \Delta b_2^- &= -(Z_2 - b_2)\\ &= 54\end{aligned}\right\}\begin{aligned}180-54 \le b_2 &\le 180+\infty\\ 126 \le b_2 &\le \infty\end{aligned}$$

- *Coeficiente b_3*

$$\left.\begin{aligned}\Delta b_3^+ &= \min\left(\frac{Z_1-b_1}{-a_{31}};\frac{Z_2-b_2}{-a_{32}};\frac{Z_4-b_4}{-a_{34}}\right)\\ &= \min(42;54;30)\\ &= 30\\ \Delta b_3^- &= \frac{Z_7-b_7}{-a_{37}}\\ &= 30\end{aligned}\right\}\begin{aligned}110-30 \le b_3 &\le 110+30\\ 80 \le b_3 &\le 140\end{aligned}$$

- *Coeficiente b_4*

$$\left.\begin{aligned}\Delta b_4^+ &= \infty\\ \Delta b_4^- &= -(Z_4 - b_4)\\ &= 50\end{aligned}\right\}\begin{aligned}100-50 \le b_4 &\le 100+\infty\\ 50 \le b_4 &\le \infty\end{aligned}$$

- *Coeficiente b_5*

$$\left.\begin{aligned}\Delta b_5^+ &= \infty\\ \Delta b_5^- &= -(Z_5 - b_5)\\ &= 40\end{aligned}\right\}\begin{aligned}120-40 \le b_5 &\le 120+\infty\\ 80 \le b_5 &\le \infty\end{aligned}$$

- *Coeficiente b_6*

$$\left.\begin{aligned}\Delta b_6^+ &= \min\left(\frac{Z_1-b_1}{-a_{61}};\frac{Z_4-b_4}{-a_{64}};\frac{Z_8-b_8}{-a_{68}}\right)\\ &= \min(105;30;80)\\ &= 30\\ \Delta b_6^- &= \min\left(\frac{Z_2-b_2}{-a_{62}};\frac{Z_5-b_5}{-a_{65}};\frac{Z_9-b_9}{-a_{69}}\right)\\ &= \min(270;40;30)\\ &= 30\end{aligned}\right\}\begin{aligned}-80-30 \le b_6 &\le -80+30\\ -110 \le b_6 &\le -50\end{aligned}$$

8. <u>Analizar el margen de beneficios del producto C por sobre los 35 $/docena</u>

De acuerdo al rango de variación del coeficiente C_3 calculado, no habrá que hacer ninguna modificación. La única variante respecto de la solución calculada es que el costo de oportunidad del producto C se reducirá a 15 $/u mes. Para que se produzcan variaciones en el plan óptimo de producción, el margen de beneficios de C debería superar los 50 $/docena.

9. <u>Analizar la disponibilidad de Equipo 1 por debajo de 104 hs/mes</u>

			104 ~~160~~	180	110	100	120	-80			
b_K	Y_K	C_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
110	Y_3	250/3	4/3	1	1	5/3	0	0	-5/3	0	0
-80	Y_6	130/3	8/15	-1/5	0	5/3	-1	1	-5/3	1	0
	Y_9	20	1/2	3/5	0	1	0	0	-1	0	1
Z = 5700			0^*	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0
			X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_1	X_2	X_3

			104	180	110	100	120	-80			
b_K	Y_K	C_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
110	Y_3	30	0	-3/5	1	-1	0	0	1	0	-8/3
-80	Y_6	22	0	-21/25	0	3/5	-1	1	-3/5	1	-16/15
104	Y_1	40	1	6/5	0	2	0	0	-2	0	2
Z = 5700			0	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0^*
			X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_1	X_2	X_3

i- *Para una disponibilidad de Equipo 1 de 104 hs. se produce un caso de soluciones alternativas en el planteo Dual, cualquiera de las dos opciones es válida como óptima, inclusive todas las combinaciones lineales entre ellas. Pero una solución alternativa en un planteo implica solución degenerada en el otro, por lo tanto el planteo directo es degenerado, esto lo podemos comprobar, ya que el sobrante de Equipo 1, en la base del planteo Directo toma valor nulo.*

ii- *Si la disponibilidad de Equipo 1 es menor a 104 hs. mensuales:*

a- El Equipo 1 estará saturado; tendrá un valor marginal de 40 $/hora mes, valor que se mantendrá para disponibilidades mensuales comprendidas entre 79 y 104 hs. (Rango de variación de b_1 en la nueva tabla). Las demás variables en la base indican que el Equipo 3 seguirá estando saturado, pero su valor marginal será de 30 $/hora mes y también disminuirá el valor marginal de la producción mínima de B a 22 $/docena mes.

b- Observando la fila correspondiente a Y_1 en la nueva tabla, podemos deducir que desde el punto de vista productivo se deberán comenzar a fabricar medias tipo C a razón de 2 docenas por cada hora de Equipo 1 que se disminuya por debajo de 104. Además, por cada docena que se fabrique de C, habrá que dejar de fabricar una docena de A, con el lógico aumento de su demanda insatisfecha. La producción de medias B seguirá siendo de 80 docenas mensuales. El Equipo 2 aumentará su *sobrante a razón de 1,2 hs. por cada hora de Equipo 1 que se disminuya por debajo de 104.*

10. *Analizar la posibilidad de venta de 30 o más horas de Equipo 3*

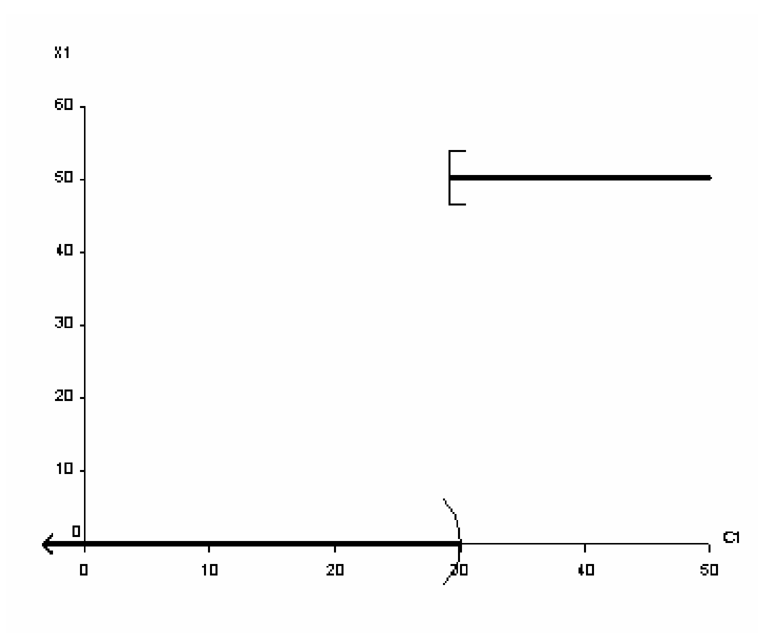
			160	180	80 ~~110~~	100	120	-80			
b_K	Y_K	C_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
80 ~~110~~	Y_3	250/3	4/3	1	1	5/3	0	0	-5/3	0	0
-80	Y_6	130/3	8/15	-1/5	0	5/3	-1	1	-5/3	1	0
	Y_9	20	1/2	3/5	0	1	0	0	-1	0	1
Z = 3200			-96	-84	0	-100	-40	0	0^*	-80	0
			X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_1	X_2	X_3

i- *En la tabla se puede observar que, si la disponibilidad de Equipo 3 disminuye hasta 80 horas, la producción de medias A se hace nula. Si b_3 fuese menor a 80, Z_7-b_7 sería positivo y la variable Y_7 (Costo Oportunidad A) entraría en la base, pero como todos los a_{i7} son negativos, el problema tendrá la particularidad "poliedro abierto, funcional infinito", por lo tanto, en el problema directo aparecerá "incompatibilidad".*

ii- *Se pueden vender 30 horas de Equipo 3 a $2500 (30 * 250/3 ó 5700 - 3200).*

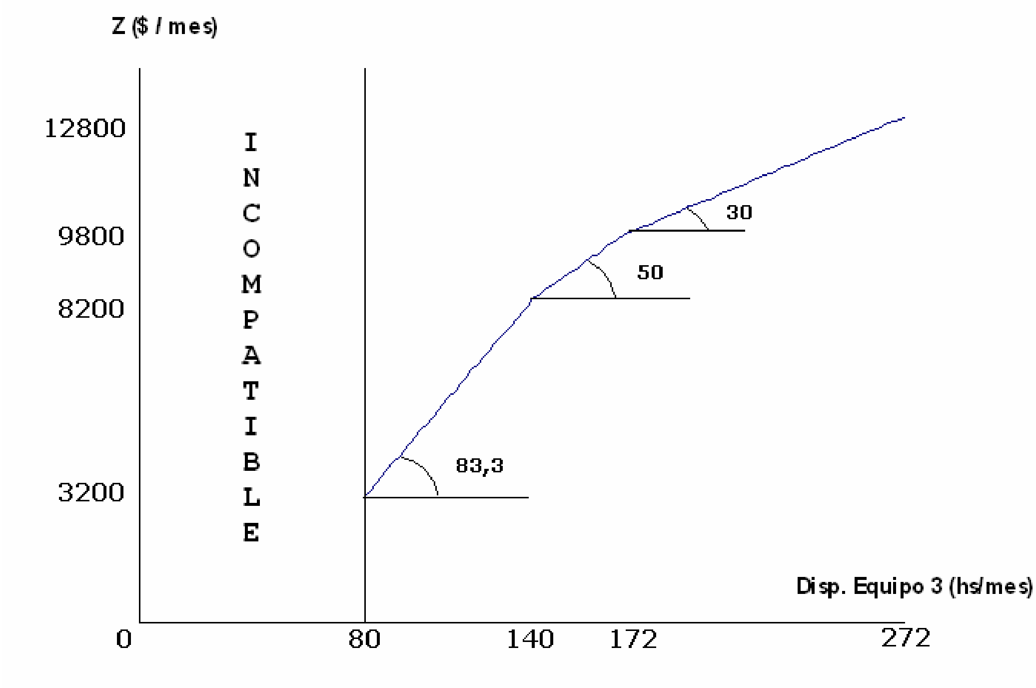
iii- *31 hs. de Equipo 3 no se pueden vender, pues como se vio en el punto i el problema sería incompatible, opcionalmente podría suponerse que las 31 hs. podrían venderse a $5700, con lo cual se recuperaría el beneficio óptimo, aunque no se cumpliría con la producción mínima impuesta por la Dirección.*

11. *Graficar la curva de oferta del producto A*

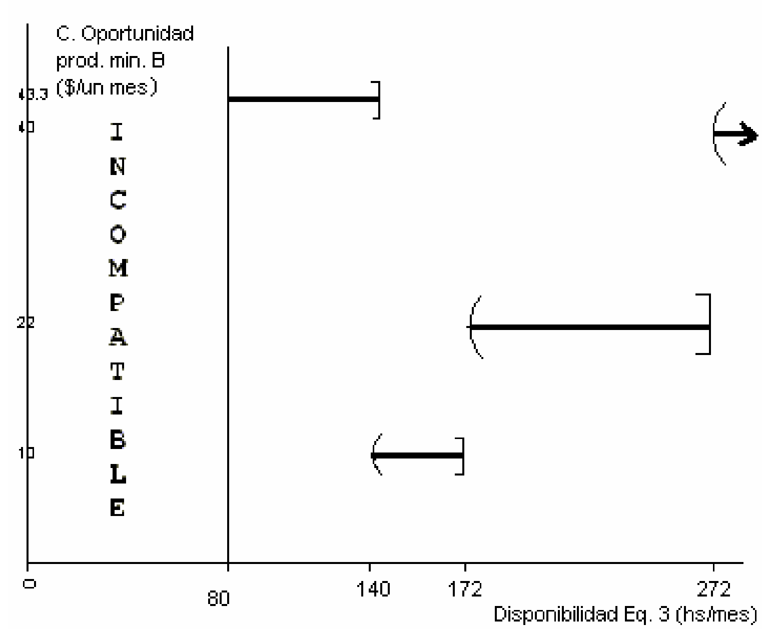


12. *Graficar cuando la disponibilidad de Equipo 3 varía entre cero e infinito.*

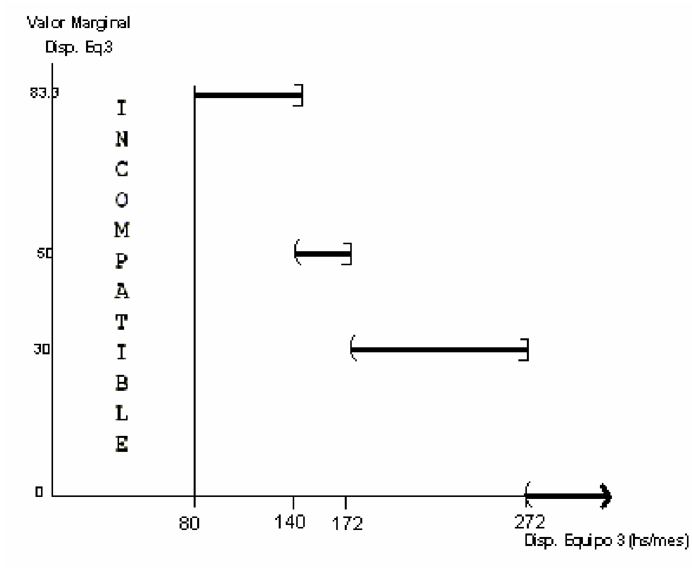
- *Funcional*



- *Costo de oportunidad del producto B*



- *Valor marginal del recurso 3*



13. *<u>¿Qué ocurre si Dirección decide disminuir la producción mínima a 60 docenas?</u>*

*En el punto 7 ya calculamos el rango de variación de la restricción de producción mínima de B, tenemos: $-110 \le b_6 \le -50$. La disminución a 60 docenas/mes no altera la estructura óptima, por lo tanto el funcional se incrementará en 20 docenas * el valor marginal de la producción mínima de B, es decir, 20 docenas * 130/3 $/docenas mes, lo que da 866,7 $/mes. El funcional pasará a ser de 6566,7 $/mes.*

De la tabla dual del punto 4 puede deducirse que dicho incremento se logra disminuyendo la producción de B en 20 docenas y aumentando la de A en 33,3 docenas.

Puede verificarse que el beneficio marginal de la producción de 33,3 docenas de A será 33,3 x 50 = 1666,7 $/mes y la pérdida marginal por las 20 docenas de B que se dejan de fabricar, será 20 x 40 = 800 $/mes. El resultado neto será 866,7 $/mes.

"(…) Trataba de fijar el momento del accidente, y le dio rabia advertir que había ahí como un hueco, un vacío que no alcanzaba a rellenar. Entre el choque y el momento en que lo habían levantado del suelo, un desmayo o lo que fuera no le dejaba ver nada. Y al mismo tiempo tenía la sensación de que ese hueco, esa nada, había durado una eternidad. No, ni siquiera tiempo, más bien como si en ese hueco él hubiera pasado a través de algo o recorrido distancias inmensas. (…)"

La Noche Boca Arriba – Julio Cortázar

Problemas a resolver

5.1.

Basándose en el ejercicio 4.2.:

a- Plantear y resolver su problema dual.

b- Obtener su tabla óptima del dual a partir de su tabla óptima directa.

c- Comparar las tablas óptimas duales obtenidas en a- y en b-.

5.2.

Basándose en el ejercicio 4.9.:

a- Plantear y resolver su problema dual.

b- Obtener su tabla óptima del dual a partir de su tabla óptima directa.

c- Comparar las tablas óptimas duales obtenidas en a- y en b-.

5.3.

Obtener la tabla óptima del planteo dual de los ejercicios 4.7, 4.8 y 4.11.

5.4.

Contestar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

a- Si el primal es incompatible, su dual es poliedro abierto.

b- Si el primal tiene soluciones alternativas, su dual tiene un óptimo degenerado.

c- Si la variable slack de un recurso no está en la base en la tabla óptima, entonces el valor marginal del recurso no puede ser cero.

d- Si un problema primal de mínimo tiene una solución finita, entonces su dual no puede tener un valor máximo infinito.

5.5.

En un problema de Programación Lineal que consta de 3 variables reales (3 productos distintos) que se fabrican a partir de 3 recursos, nos dan la tabla óptima. En ella vemos que se fabrican solamente dos productos y el valor marginal del recurso 1 es de $5.

Al encargado de producción le dan a elegir entre darle una unidad de recurso 1 y darle $ 3. El encargado elige los $ 3. En términos de análisis post-optimal, la decisión que tomó el encargado es correcta. ¿Qué características tenía el modelo de cuya tabla óptima hablamos para que lo correcto sea tomar una decisión como la del encargado?

5.6.

Para el ejercicio 2.1 se pide:

a- Definir las variables del problema (directo y dual).

b- Expresar la solución en términos de un programa de producción, indicando el porcentaje de utilización de recursos.

c- Determinar los valores marginales y los costos de oportunidad. Efectuar los cálculos tanto sobre la tabla óptima como sobre la resolución del LINDO.

d- Calcular usando la tabla el rango de variación de los coeficientes del funcional y de los valores de las restricciones, conservando la estructura óptima de 1a solución.

e- ¿Cuánto habría que aumentar el precio de los pulóveres "A" para que su fabricación sea conveniente?

Las siguientes son las tablas primera y óptima del problema 2.1 resuelto:

			10	15	15	18						-M
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	μ
	X_5	80	5	6	0	0	1	0	0	0	0	0
	X_6	80	0	0	4	4	0	1	0	0	0	0
	X_7	20	1,6	0	0	1,2	0	0	1	0	0	0
	X_8	36	0	1,8	1,8	0	0	0	0	1	0	0
-M	μ	10	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	1
Z = 0			-10	-M-15	-M-15	-18	0	0	0	0	M	0

			10	15	15	18						
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	
15	X_2	40/3	5/6	1	0	0	1/6	0	0	0	0	Y_7
15	X_3	10/3	-4/3	0	1	0	0	1/4	-5/6	0	0	Y_8
18	X_4	50/3	4/3	0	0	1	0	0	5/6	0	0	Y_9
	X_8	6	9/10	0	0	0	-3/10	-9/20	3/2	1	0	Y_4
	X_9	20/3	-1/2	0	0	0	1/6	1/4	-5/6	0	1	Y_5
Z = 550			13/2	0	0	0	5/2	15/4	5/2	0	0	

Y ésta es su resolución en el LINDO:

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      550.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         A         0.000000          6.500000
        B1        13.333333          0.000000
        B2         3.333333          0.000000
         C        16.666666          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    MAQ 1)         0.000000          2.500000
    MAQ 2)         0.000000          3.750000
 MEJORADA)         0.000000          2.500000
   NORMAL)         6.000000          0.000000
  DEMANDA)         6.666667          0.000000
```

5.7.

Para el ejercicio 2.1 se pide analizar la conveniencia de solicitar un aumento en la provisión de lana tipo "M" si se sabe que dicho aumento solo sería factible reduciendo la provisión de lana de tipo "N" a razón de 2 kg. de merma en esta última por cada 1 kg. adicional de la primera.

Por ejemplo, si el proveedor entregara 21 kg. de M, la entrega máxima de "N", sería de 34 kg.

En caso de ser conveniente dicho aumento, determinar:

a- ¿Cuál es el máximo beneficio adicional que puede obtenerse?

b- ¿Cuál sería la cantidad de lana de cada tipo a entregar semanalmente por cada proveedor?

c- ¿Cuál sería el reordenamiento de producción necesario para obtener dicho beneficio máximo? Analizar el cambio a realizar en relación a la utilización de las disponibilidades de los otros recursos.

☞ *Las tablas correspondientes a este ejercicio, las podés encontrar en el punto anterior.*

5.8.

Dados el enunciado de un problema de Programación Lineal y las tablas inicial y final de su resolución por el método Simplex, se pide:

a- Obtener el rango de variación del coeficiente C_2 sin que cambie la estructura de la solución óptima. Detallar los cálculos realizados.

b- Graficar la variación de X_2, Y_2 y del funcional al variar la disponibilidad del recurso materia prima entre 9 y 20 kilogramos. Indicar el valor de las pendientes diciendo en qué parte de la tabla se encuentran.

c- ¿A qué valor total resulta conveniente vender a una empresa interesada, disponibilidades del recurso materia prima en una cantidad de 4 kilos por semana? Detallar claramente y justificar los cálculos.

d- Graficar la curva de oferta del producto B para C_2 entre cero e infinito

<u>Enunciado</u>

Se trata de una empresa que desea establecer el plan de producción para sus tres productos A, B y C sujeto a las restricciones de producción total mínima (4 un. por semana), disponibilidad de mano de obra (24 hh. por semana) y disponibilidad de materia prima (10 kg. por semana). Los coeficientes son pesos de utilidad unitaria.

			2	8	6				-M
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	μ
-M	μ	4	1	1	1	-1	0	0	1
	X_5	24	1	4	2	0	1	0	0
	X_6	10	1	2	4	0	0	1	0
Z = -4M			-M-2	-M-8	-M-6	M	0	0	0

Tabla Inicial

			2	8	6			
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
8	X_2	5	1/2	1	2	0	0	1/2
	X_4	1	-1/2	0	1	1	0	1/2
	X_5	4	-1	0	-6	0	1	-2
Z = 40			2	0	10	0	0	4

Tabla Óptima

5.9.

Dadas las tablas inicial y final de la resolución por el método Simplex de un problema de Programación Lineal y sus datos, se requiere:

a- Graficar la variación de X_1, del valor marginal de la materia prima y del funcional, al variar la disponibilidad del recurso horas-hombre entre 0 y 12. Indicar el valor de las pendientes diciendo en qué parte de la tabla se encuentran.

b- ¿A qué valor total resulta conveniente vender 9 calorías a una fábrica interesada? Detalle todos los cálculos.

c- Graficar la curva de oferta del producto 3, para C3 entre 0 e infinito. Detallar todos los cálculos realizados.

Datos

R_1:	Horas-hombre disponibles por mes (12)
R_2:	Materia prima disponible por mes (12)
R_3:	Calorías disponibles por mes (4)
C_1, C_2, C_3	Contribución a gastos generales ($/unidad de producto)
X_1, X_2, X_3	Unidades de productos A, B y C.

			4	5	6			
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
	X_4	12	2	1	3	1	0	0
	X_5	12	1	2	3	0	1	0
	X_6	4	1	-2	3	0	0	1
Z = 0			-4	-5	-6	0	0	0

Tabla Inicial

			4	5	6			
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
4	X_1	4	1	0	1	2/3	-1/3	0
5	X_2	4	0	1	1	-1/3	2/3	0
	X_6	8	0	0	4	-4/3	5/3	1
Z = 36			0	0	3	1	2	0

Tabla Óptima

5.10.

Dadas las tablas inicial y final de la resolución por el método Simplex de un problema de Programación Lineal y sus datos, se requiere:

a- Graficar la variación de X_1, del funcional y del valor marginal de la materia prima B cuando la disponibilidad de vapor varía entre 0 y 200. Indicar el valor de las pendientes señalando en qué parte de la tabla se encuentran.

b- ¿A qué valor será conveniente vender 44 unidades del recurso materia prima a una empresa interesada? Detallar todos los cálculos realizados.

c- Graficar la curva de oferta del producto 3, para C_3 entre 0 y \$12. Detallar todos los cálculos.

Datos

R_1:	Consumo mínimo diario de materia prima A (24 kg).
R_2:	Disponibilidad máxima diaria de materia prima B (48 kg).
R_3:	Consumo máximo diario de vapor (24 kg).
C_1, C_2, C_3	Contribución a gastos generales (\$/unidad de producto)
X_1, X_2, X_3	Unidades de productos A, B y C.

Tabla Inicial

			3	4	2				-M
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	μ
-M	μ	24	2	3	7	-1	0	0	1
	X_5	48	6	2	1,4	0	1	0	0
	X_6	24	-1	2	7	0	0	1	0
Z = -24M			-2M-3	-3M-4	-7M-2	M	0	0	0

Tabla Óptima

			3	4	2			
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
3	X_1	24/7	1	0	-4/5	0	1/7	-1/7
4	X_2	96/7	0	1	31/10	0	1/14	3/7
	X_4	24	0	0	7/10	1	1/2	1
Z = 456/7			0	0	8	0	5/7	9/7

5.11.

Se tiene el siguiente problema de PLC:

$Z\ (\text{Máx}) = 5\ X_1 + 2\ X_2$

Restricciones:

Recurso1) $6\ X_1 + 4\ X_2 \leq 240$

Recurso2) $2\ X_1 + X_2 \leq 70$

Demanda) $X_2 \geq 40$

Las siguientes son las tablas inicial y óptima del problema:

Tabla Inicial

			5	2				-M
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	μ
0	X_3	240	6	4	1	0	0	0
0	X_4	70	2	1	0	1	0	0
-M	μ	40	0	1	0	0	-1	1
Z = -40M			-5	-M-2	0	0	M	0

C_K	X_K	B_K	A_1 (5)	A_2 (2)	A_3	A_4	A_5
5	X_1	40/3	1	0	1/6	0	2/3
0	X_4	10/3	0	0	-1/3	1	-1/3
2	X_2	40	0	1	0	0	-1
Z = 440/3			0	0	5/6	0	4/3

Tabla Óptima

Se pide:

a- Realizar un informe breve y completo sobre la solución óptima obtenida.

b- Realizar el planteo original del problema dual. Hallar la tabla óptima del problema dual.

c- Me ofrecen un subsidio de \$30 por bajar el precio de venta de X1 a dos pesos. Para analizar la propuesta, realizo el siguiente cálculo: Fabrico 13,33 unidades de X1. Si disminuyo el precio de venta en 3\$ por unidad, mi funcional disminuye en 13,33 x 3 = \$40. Como la pérdida es mayor que \$30, no me conviene aceptar la oferta. ¿Es correcto el cálculo realizado? ¿Por qué?

d- Se presentan tres alternativas excluyentes:

- No modificar el plan de producción actual
- Comprar 120 unidades de R1 por \$90
- Vender 120 unidades de R1 por \$90

¿Cuál de las tres conviene aceptar? ¿Cuáles serían el plan de producción y las ganancias en cada caso?

5.12.

Para el ejercicio 5.11, se pide:

a- Graficar la variación de X2, del funcional y del costo de oportunidad encubierto de X2; cuando la demanda mínima de X2 varía entre 0 y 61. Indicar el valor de las pendientes señalando en qué parte de la tabla se encuentran.

b- Graficar la curva de oferta de X1, para C1 entre 0 y 5. Detallar todos los cálculos realizados.

c- Graficar la curva de oferta de X2, para C2 entre 0 y 4. Detallar todos los cálculos realizados.

5.13.

Disponemos de un modelo matemático de programación lineal continua, el sistema en estudio consta de P_1, P_2 y P_3 (productos) que se fabrican a partir de R_1, R_2 y R_3 (recursos).

El P_1 tiene una restricción de producción mínima de 2 unidades, P_2 tiene una restricción de producción máxima de 40 unidades.

La contribución marginal (C_1, C_2 y C_3) de los tres productos fue calculada como precio de venta menos costo de fabricación.

Estos datos son conocidos para los tres productos. La solución óptima indica que se fabrican P_1, P_2 y P_3 y que sobran R_1 y R_2.

a) Si tenemos en cuenta que el consumo de recursos de P_1 y P_2 es exactamente igual recurso por recurso, ¿cuál es el motivo por el cual tenemos una solución óptima como la indicada?

b) Se dispone de X pesos y se sabe además que se pueden comprar en el mercado P_1, P_2 y P_3 y los tres recursos R_1, R_2 y R_3. Suponiendo que el costo de compra del producto P_1 fuera mayor que su precio de venta, indicar si es posible que convenga comprar alguna unidad y en caso de que sea posible qué condiciones se tendrían que cumplir.

c) Suponiendo que nos autorizaran a fabricar una unidad más de P_2, pero con la condición de venderla a un precio menor que las otras unidades de este mismo producto, ¿cuánto menor puede ser este precio y por qué?

5.14.

La siguiente es la resolución por LINDO del ejercicio 1.5 (alimentación de cabezas de ganado):

```
!VARIABLES
!
! M: CANTIDAD DE ALIMENTO M A SUMINISTRAR POR DIA A LOS ANIMALES
[KG/DIA]
! N: CANTIDAD DE ALIMENTO N A SUMINISTRAR POR DIA A LOS ANIMALES
[KG/DIA]

MIN    10 M + 4 N

SUBJECT TO

A) 0.1 M         >= 0.4
B) 0.1 N         >= 0.6
C) 0.1 M + 0.2 N >= 2
D) 0.2 M + 0.1 N >= 1.7
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      76.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         M         4.000000          0.000000
         N         9.000000          0.000000
```

```
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        A)         0.000000       -20.000000
        B)         0.300000         0.000000
        C)         0.200000         0.000000
        D)         0.000000       -40.000000

 NO. ITERATIONS=       2


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
        M       10.000000         INFINITY         2.000000
        N        4.000000         1.000000         4.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        A        0.400000         0.066667         0.400000
        B        0.600000         0.300000         INFINITY
        C        2.000000         0.200000         INFINITY
        D        1.700000         INFINITY         0.100000
```

A partir de dicha resolución, se pide:

a- Realizar un informe breve y completo de la solución óptima obtenida.

b- El precio de compra del alimento N aumentó a 5$/kg. ¿Cómo afecta esto a la solución obtenida?

c- El valor indicado de 2Kg de nutriente C por día para cada animal resulta excesivo. Con suministrarle 1,5kg de nutriente C por día es suficiente. ¿Cómo afecta esto a la solución obtenida?