

# Material de apoyo Teórica XII

## Temario

### Análisis de sensibilidad

Agradecemos al Lic. Diego Oitana por el desarrollo de este ejercicio especial.

#### Un ejemplo para ver entre varios negocios qué nos conviene



Una nueva alternativa analizada por el dueño de la heladería consiste en disminuir la disponibilidad máxima de crema a 400 kilos por mes. Esto hace que los beneficios por lata sean ahora de \$10 para helados de agua y \$14 para helados de crema. ¿Cuál es ahora la estructura óptima de producción?

Aquí tenemos que hacer dos cambios:

- Cambiar dos  $C_j$  (deberíamos hacerlo en el directo)
- Cambiar un  $B_i$  (deberíamos hacerlo en el dual)

¿En qué orden hacerlo? Es indistinto

De lo que analizamos hasta ahora sabemos que si bajamos la disponibilidad de crema no afecta la solución óptima del dual (porque sobran 200 kilos y estamos bajando la disponibilidad en 200 kilos). Así que conviene empezar por cambiar la disponibilidad de crema y después pasar al directo para cambiar los beneficios de los dos productos

				<del>400</del>			
			600	<del>600</del>	800		
<u>Ck</u>	<u>Xk</u>	<u>Bk</u>	<u>A1</u>	<u>A2</u>	<u>A3</u>	<u>A4</u>	<u>A5</u>
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		2600	0	<del>-200</del>	0	-200	-100
				<del>0*</del>			

Aunque no cambió la tabla óptima del dual sí cambió el valor de la variable  $X_4$  (el  $Z_2-C_2$  del dual ahora vale 0).

Para poder analizar el cambio en los beneficios de los helados, tenemos que volver al directo.

¿Cómo pasamos a la tabla óptima del directo desde la tabla óptima del dual? Haciendo el dual del dual. Cada problema es el dual del otro.

		600 400 800						
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2	X3
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2	X5
		2600	0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

		8 10						
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
	X1	200						
	X2	100						
	X4	0						

		600 400 800						
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2	X3
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2	X5
		2600	0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

		8 10						
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
8	X1	200	1	0		0		
10	X2	100	0	1		0		
0	X4	0	0	0		1		
		2600	0	0		0		

			600	400	800			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2	X3
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2	X5
2600			0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0		0	
10	X2	100	0	1		0	
0	X4	0	0	0	2	1	
2600			0	0	3	0	1

			600	400	800			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2	
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2	
2600			0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0		0	
10	X2	100	0	1		0	
0	X4	0	0	0	2	1	-2
2600			0	0	3	0	1

			600	400	800			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2	X3
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2	X5
2600			0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	
10	X2	100	0	1		0	
0	X4	0	0	0	2	1	-2
2600			0	0	3	0	1

			600	400	800			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2	X3
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2	X5
2600			0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1		0	
0	X4	0	0	0	2	1	-2
2600			0	0	3	0	1

			600	400	800			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	$\frac{1}{2}$	X3
800	Y3	1	0	2	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	X5
2600			0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
10	X2	100	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
0	X4	0	0	0	2	1	-2
2600			0	0	3	0	1

			600	400	800			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	$\frac{1}{2}$	X3
800	Y3	1	0	2	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	X5
2600			0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
10	X2	100	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	X4	0	0	0	2	1	-2
2600			0	0	3	0	1

			600	400	800			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2	X3
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2	X5
2600			0	0	0	-200	-100	
			X3	X4	X5	X1	X2	

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	0	0	0	2	1	-2
2600			0	0	3	0	1

Como obtuvimos la tabla del directo ANTES del cambio que tenemos que hacer, ahora cambiamos los Cj de los helados de agua y de crema, a ver si la tabla sigue siendo óptima.

			10	14			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
10	X1	200	1	0	1	0	-1/2
14	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	0	0	0	2	1	-2
3400			0	0	3	0	2



Con esta nueva estructura, se presentan tres oportunidades por parte de un mayorista amigo. Nos ofrece vendernos 300 kg mensuales de azúcar a \$ 650 en total, o 100 kg de crema por \$30. También tiene la posibilidad de comprarnos 150 kg. mensuales de almidón por \$500. ¿Cuál de estas tres posibilidades es más conveniente?.

Como vemos en la tabla óptima del directo que obtuvimos, el problema ahora tiene una solución que es punto degenerado (la variable  $X_4$  está en la base aunque vale cero).

Por eso, cuando pasemos al dual, obtendremos la tabla que en la próxima transparencia vemos como tabla A. Pero esa tabla tiene soluciones alternativas (si el primal es punto degenerado, el dual tiene soluciones alternativas óptimas). Entonces, podemos obtener la tabla alternativa del dual, que indicaremos como tabla B.

Ahora todos los recursos tienen dos valores marginales (uno en la tabla A y otro en la tabla B). Cuando necesitemos el VM de un recurso ¿cuál de los dos tomaremos?

### **Tablas Optimas (Alternativas) del Dual**

Tabla A:

			600	400	800		
Ck	Yk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	Y3	2	0	2	1	1/2	-1/2
	Z=	3400	0	0*	0	-200	-100

Tabla B:

			600	400	800		
Ck	Yk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	5	1	0	1	-1/2	0
400	Y2	1	0	1	1/2	1/4	-1/4
	Z=	3400	0	0	0*	-200	-100

Cada una de las tablas es válida para un rango de valores de cada uno de los  $b_i$ :

TABLA A  
 $600 \leq b_1 \leq 800$   
 $400 \leq b_2$   
 $600 \leq b_3 \leq 800$

TABLA B  
 $200 \leq b_1 \leq 600$   
 $0 \leq b_2 \leq 400$   
 $800 \leq b_3$

Entonces, de acuerdo con lo que estamos haciendo (comprando o vendiendo el recurso) nos conviene comenzar el análisis en una de las dos tablas (porque es la que corresponde a ese rango de  $b_i$ ).

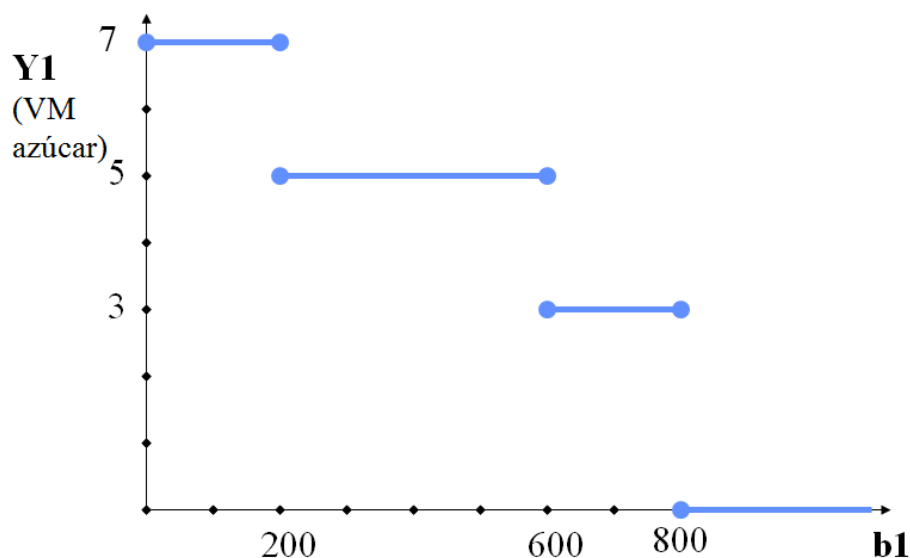
GENÉRICAMENTE:

La tabla con menor VM tiene un rango que permite comprar recurso

La tabla con mayor VM tiene un rango que permite vender recurso

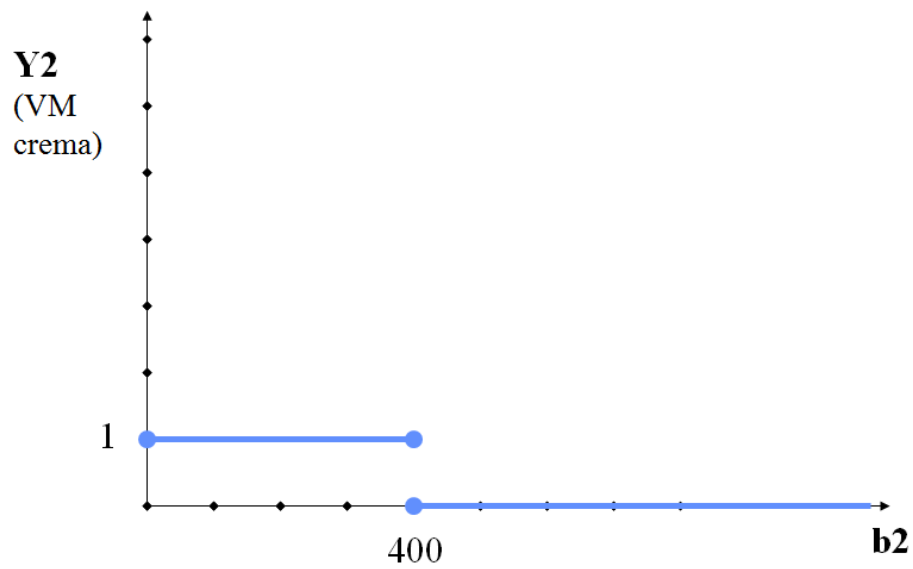
Veamos los rangos gráficamente para cada recurso (cómo varía el VM si la disponibilidad de recurso varía entre 0 e infinito)

Azúcar:

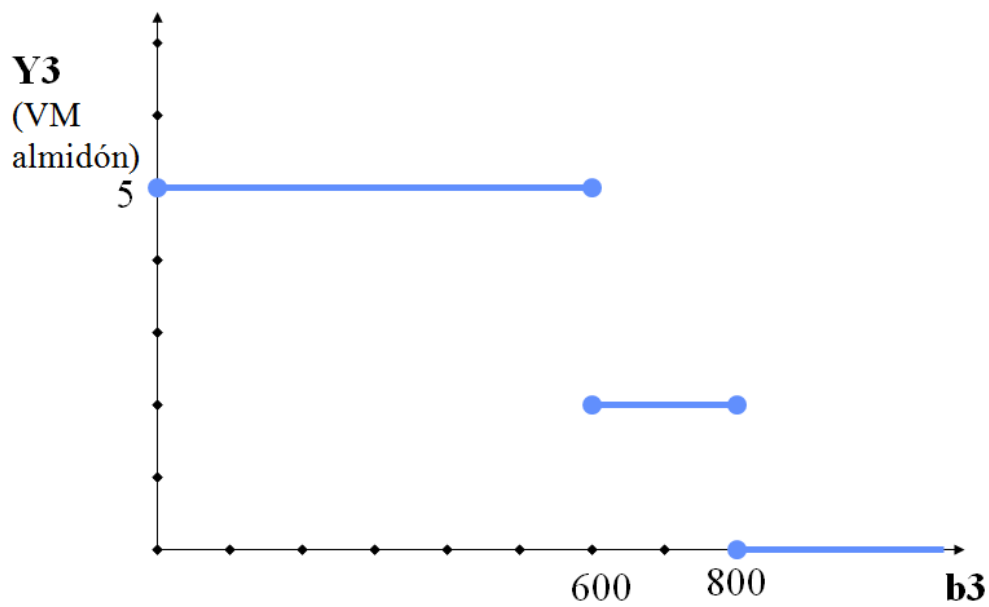




Crema:



Almidón:



**Primera Oportunidad**

Nos ofrece vendernos **300 Kg. mensuales de azúcar a \$ 650 en total.**

			900	400	800		
C k	Yk	Bk	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5
900	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	Y3	2	0	2	1	1/2	-1/2
	Z=	4300	0	-600	0	-500	50

			900	400	800		
C k	Yk	Bk	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5
0	Y5	6	2	-4	0	-2	1
800	Y3	5	1	-2	1	-1/2	0
	Z=	4000	-100	-400	0	-400	0

$$Z = 4000 - 650 = \underline{3350}$$

¡Perdemos plata!

**Segunda Oportunidad**

Nos ofrece vendernos **100 Kg. de Crema por \$ 30.**

			600	500	800		
C k	Yk	Bk	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	Y3	2	0	2	1	1/2	-1/2
	Z=	3400	0	-100	0	-200	-100

$$Z = 3400 - 30 = \underline{3370}$$

¡Perdemos plata!

**Tercera Oportunidad**

También tiene la posibilidad de comprarnos **150 Kg. mensuales de almidón por \$ 500.**

			600	400	650		
C <sub>k</sub>	Y <sub>k</sub>	B <sub>k</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
600	Y <sub>1</sub>	3	1	-2	0	-1	1/2
650	Y <sub>3</sub>	2	0	2	1	1/2	-1/2
	Z=	3100	0	-300	0	-275	-25

$$Z = 3100 + 500 = \underline{3600}$$

Ganamos \$200 más que antes (CONVIENE)

Entonces, el único negocio que nos conviene es el tercero (el de vender almidón) que es el único que no nos hace perder plata.

Para poder comparar dos soluciones que convengan y ver cómo podemos elegir la mejor si hay más de una que conviene vamos a agregar un nuevo negocio:

**Otra Oportunidad**

Una azucarera amiga, muy dulce, nos ofrece vendernos **150 Kg. de Azúcar a \$ 250 en total** por mes.

			750	400	800		
Ck	Yk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
750	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	Y3	2	0	2	1	1/2	-1/2
	Z=	3850	0	-300	0	-350	-25

$$Z = 3850 - 250 = \underline{3600}.$$

Ganamos lo mismo que con la tercera oportunidad ¿cuál elegimos?

Podríamos elegir por la mayor ganancia, eso sería válido.

Pero en este caso las dos alternativas dan la misma ganancia (\$200)

Entonces tenemos que usar algún otro método para determinar cuál es la alternativa que más conviene.

Una posibilidad es sacar la ganancia por peso invertido (como en los dos casos la inversión es diferente, hay que ver en cuál se gana más si invirtiéramos un peso solamente en esa alternativa).

**Elección de la Alternativa más conveniente**

- Analicemos el **Rendimiento / \$ invertido** de las opciones a elegir.  
**Rendimiento / \$ invertido = GANANCIA / COSTO.**
- GANANCIA.      COSTO.  

$$\begin{array}{ccc} \$X & \$Y & \\ \text{Rendimiento} & \$1 & \Rightarrow \text{Rendimiento} = X / Y \end{array}$$
- A) Comprarnos **150 Kg. mensuales de Almidón por \$ 500.**  
**Rendimiento / \$ invertido = 500 / (150 \* 2) = 1.666.....**
- B) Vendernos **150 Kg. mensuales de Azúcar por \$ 250.** **Rendimiento / \$ invertido = (150 \* 3) / 250 = 1.8**

La mejor alternativa es la de vendernos 150 kg de azúcar por \$250.

Nuestra empresa fabrica los productos X1 y X2 a partir de los recursos R1 y R2. Además, tenemos una serie de pedidos comprometidos de X2 que suman 10 unidades por mes. Aquí vemos el planteo del problema:

$$2 X1 + 2 X2 \leq 80 \text{ (kg. R1/mes);}$$

$$X1 + 2 X2 \leq 50 \text{ (kg. R2/mes);}$$

$$X2 \geq 10 \text{ (unidades/mes)}$$

$$Z = 30 X1 + 20 X2 \text{ (MAXIMO)}$$

(30 es el precio de venta de X1 y 20 es el precio de venta de X2)

**Optima Directo**      30      20      **Optima**      **Dual**  
80    50    -10

C	X	B	A1	A2	A3	A4	A5
30	X1	30	1	0	1/2	0	1
0	X4	0	0	0	-1/2	1	1
20	X2	10	0	1	0	0	-1
	Z=	1100	0	0	15	0	10

C	Y	B	A1	A2	A3	A4	A5
80	Y1	15	1	1/2	0	-1/2	0
-10	Y3	10	0	-1	1	-1	1
	Z=	1100	0	0*	0	-30	-10

Una famosa empresa amiga nos ofrece las siguientes alternativas, independientes una de la otra:

**a)** Nos vende unidades de X2 ya elaborado a \$ 20,50 cada una. Esas unidades de X2 tienen las mismas características que las nuestras (es decir, podemos dárselas a los clientes en lugar de las que fabricamos nosotros) ¿Es conveniente comprar? Si no es conveniente ¿por qué? Si es conveniente, ¿cuántas unidades conviene comprar?

**b)** Nos pide 3 unidades de X2 ya elaborado (es decir, aumenta en 3 la demanda mínima) ¿Cuál sería el precio mínimo que deberíamos cobrarle por cada unidad de X2 que nos pide para que nos convenga venderle esas 3 unidades? Recuerde que actualmente se las estamos cobrando a 20 pesos.

Analice las dos alternativas, justificando sus respuestas. No es necesario que compare una alternativa contra la otra.

Analizando el resultado, vemos que se fabrican ambos productos y que del producto X2 se está fabricando exactamente la demanda mínima (10 unidades). Si vemos el z5-c5 (el zj-cj de la restricción de demanda mínima) que es también el valor de Y3, notamos que vale 10. El significado de Y3 es "valor marginal de la restricción de demanda mínima". Quiere decir que si bajamos la restricción de demanda mínima en una unidad el valor del funcional aumentará en 10 pesos, siempre que la tabla siga siendo óptima cuando bajamos el término independiente de la restricción en el dual (como es una

restricción de mayor o igual y al pasar al dual le cambiamos el signo, ahora vale -10 y bajarlo en una unidad implicaría que valga -9). Eso nos hace pensar que sería beneficioso poder bajar la demanda mínima (por ejemplo, comprando unidades ya hechas, que nos relevan de la obligación de fabricar nosotros el producto) y que no sería beneficioso aumentar la demanda mínima (porque el valor marginal nos dice también que si aumentamos la demanda mínima el valor del funcional bajará en 10 pesos, siempre que la tabla siga siendo óptima cuando aumentamos el valor del término independiente (que sería pasar de -10 en la tabla dual a -11). Justamente, los dos puntos nos plantean estas dos situaciones, en el a) compramos unidades ya fabricadas del producto, con lo que va a bajar la demanda mínima en X unidades si compramos X unidades; en el b) nos plantean que va a aumentar la demanda mínima, porque nos piden 3 unidades más.

Como habrán notado, la tabla óptima directa del problema es un punto degenerado. Cuando hay punto degenerado en el directo, en el dual hay tablas alternativas óptimas (hay dos tablas óptimas del dual, una de las cuales está en el enunciado y la otra se obtiene haciendo entrar Y2 a la base en la tabla del enunciado). Si estamos en esa situación, una de las dos cosas no se va a poder hacer en la tabla dual óptima del enunciado y que siga siendo óptima, o deja de ser óptima cuando bajamos la demanda mínima o deja de ser óptima cuando la subimos. Una de las tablas óptimas del dual es la que nos permite subir la demanda mínima sin dejar de ser óptima y la otra tabla óptima del dual es la que nos permite bajar la demanda mínima sin dejar de ser óptima.

Veamos ahora los dos puntos pedidos:

- a) Como X2 tiene demanda mínima y el VM de la restricción de demanda mínima es 10, ganamos \$10 si nos permiten hacer una unidad menos (si compramos una ya hecha no tenemos la obligación de hacerla nosotros). Es decir que al comprarla a \$20,50 y venderla a \$20 parece que perdemos plata, pero como ganamos \$10 por el VM de la restricción de demanda mínima, terminamos ganando \$9,50. Esto es cierto siempre que cuando se hace esa modificación la tabla siga siendo óptima. Para verificarlo y de paso saber cuántas unidades nos conviene comprar hay que sacar el rango de variación del coeficiente de demanda (-10) que da  $-10 \leq b_3 \leq 0$ , es decir que podemos comprar 10 unidades a ese precio, porque podemos bajar el coeficiente de  $b_3$  hasta que sea cero e igualmente la tabla dual seguirá siendo óptima

- b) Cuando ponemos  $-13$  en el coeficiente de demanda mínima en el dual, el  $z$  baja, porque la tabla dual deja de ser óptima. Tenemos que pasar a la nueva tabla óptima del dual (que es la alternativa de la tabla óptima dual del enunciado). Vemos que, en la nueva tabla óptima el VM de la restricción ahora es  $\$40$ , es decir, debemos cobrarle  $\$40$  por encima del precio actual, es decir  $\$60$  por lo menos. Es un error común decir que le tenemos que cobrar 40 pesos cada una, pero eso es lo que perdemos considerando que la vendemos a 20 pesos (porque el modelo está calculado teniendo en cuenta que lo vendemos a 20, que es el coeficiente en el funcional, y así y todo perdemos 120 pesos por las 3 unidades extra que nos pidieron). Por eso al precio actual que cobramos por las 3 unidades (60 pesos en total) le tenemos que agregar los 120 pesos en que baja el funcional, lo cual da 180 pesos en total por las 3 unidades o 60 por cada una como mínimo.

NOTA: Es un error lamentablemente común no calcular el rango de variación y “arrojar” que el VM será de 10 para todas las unidades. Ese error es **grave**. Cada vez que se toma el VM para algún cálculo hay que verificar sí o sí con los rangos para cuántas unidades es válido.