Material Teórica XIII

Resolución exacta de problemas de Programación Lineal Entera

- **Métodos de resolución exacta de problemas de PLE:**
  - Descripción de los métodos
  - Desarrollo de Branch & Bound.

Resolución de modelos de PLE

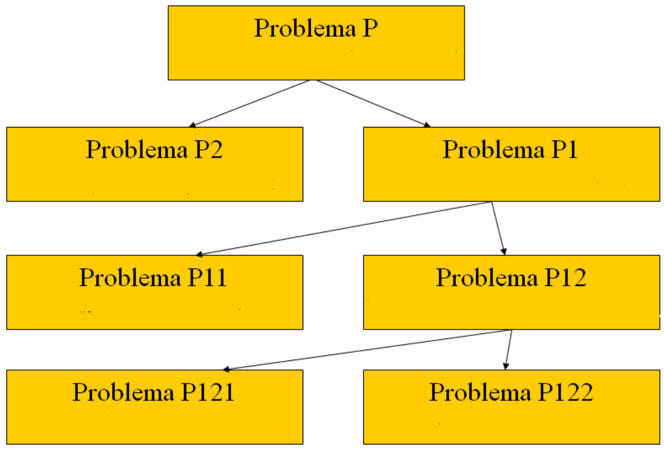
- ✓ Métodos enumerativos (para problemas cuyas variables son todas bivalentes): consisten en encontrar todas las posibles soluciones del problema, armando un árbol de decisión en el cual cada una de las hojas es un conjunto posible de valores para las variables binarias o bivalentes. Por ejemplo, en un problema que tiene tres variables bivalentes, una hoja mostrará la solución Y1= 0, Y2= 0, Y3 = 0 con su valor de funcional, otra hoja mostrará la solución Y1= 1, Y2= 0, Y3 = 0 con su valor de funcional, y así sucesivamente. La solución elegida será la que tenga mejor valor de funcional.

- ✓ Métodos pseudo-booleanos (para problemas cuyas variables son todas bivalentes): consisten en convertir el modelo en un conjunto de expresiones del álgebra de Boole y resolverlo para optimizar el valor de la función objetivo

- ✓ Métodos de planos cortantes (para cualquier tipo de variables enteras): Los métodos de planos cortantes consisten en hacer el poliedro como si las variables pudieran tomar valores continuos y luego "recortarle" los bordes (como cuando uno hace masa para empanadas) para tratar de que quede el poliedro de soluciones enteras. Por lo general ese trabajo no se hace en todo el poliedro sino en las inmediaciones de la solución óptima. En la próxima teórica nos referiremos a este tipo de métodos.

- ✓ Métodos de tipo Branch & Bound (para cualquier tipo de variables enteras): es el tipo de método con el cual vamos a trabajar en la clase de hoy.

Branch & Bound



Esquema general:

- Árbol de enumeración con la raíz correspondiente al problema original.
- A cada nodo del árbol le corresponde un subproblema.
- En cada nodo del árbol calculamos una cota del óptimo restringido a ese espacio de soluciones (el óptimo seguro que NO es mejor que esa cota).
- Si la cota es peor que la mejor solución obtenida hasta el momento, no es necesario explorar esa parte del árbol.
- Para obtener esa cota en cada nodo, resolvemos la relajación lineal de la formulación asociada a ese nodo. NOTA: Relajación lineal significa resolver el problema como si las variables fueran continuas.

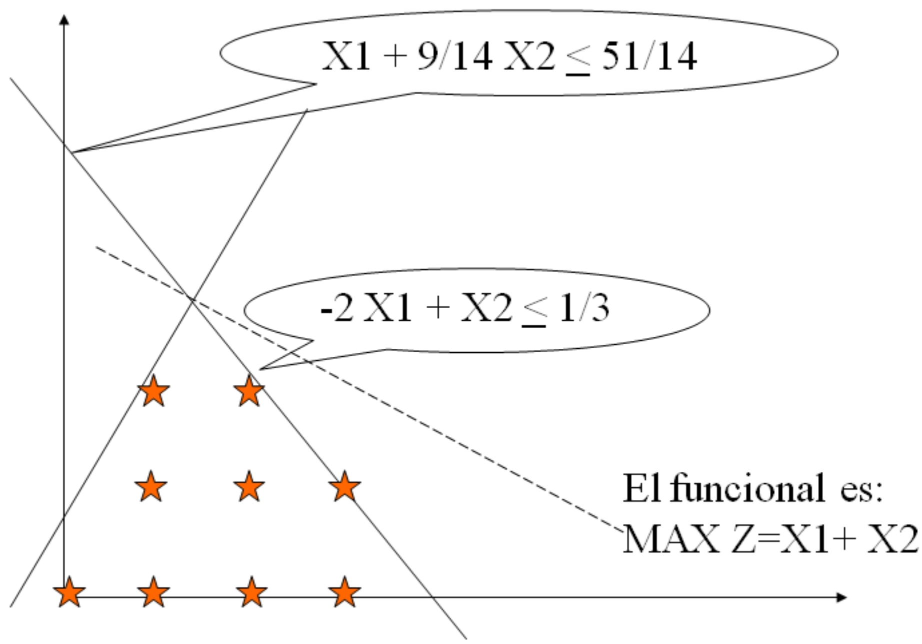
PODA: Un nodo no tiene sucesores porque:

- El subproblema no es factible
- El subproblema tiene una solución no entera pero con un valor de la función objetivo peor que el de la mejor solución: hay que descartarlo
- El subproblema tiene una solución entera (terminó la exploración de ese nodo)

Cuando el subproblema tiene una solución entera:

- Si el valor de su función objetivo es mejor que el de la mejor solución entera ya obtenida se convierte en la mejor solución.
- Si el valor de su función objetivo es peor que el de la mejor solución entera encontrada hasta el momento se descarta.

Vamos a resolver el siguiente problema:



Solución óptima continua: X1=3/2 X2=10/3 Z=29/6

Las estrellas representan las soluciones enteras válidas. El B&B empieza resolviendo el problema como si las variables fueran continuas. Luego verifica si dieron valor entero las variables que tenían que dar enteras (en este caso vemos que no) y toma la primera variable que debería ser entera y no lo es (en este caso X1) para aplicarle el paso de "branching". El branching consiste en dividir en dos el poliedro con el cual se está trabajando (en este primer paso es el poliedro completo) eliminando la parte del poliedro en la cual está el óptimo continuo. En este caso, como estamos tratando de que X1 tome valor entero y actualmente vale 1,5 vamos a dividir el poliedro en dos. El primer poliedro tendrá las restricciones originales además de X1 <= 1. El segundo poliedro tendrá las restricciones originales además de X1 >=2. Es decir, X1 no puede valer 1,5, o vale 1 o menos, o vale 2 o más (si dejáramos esa parte del poliedro volvería a obtener la solución óptima original). Es decir que ahora tenemos dos problemas (el P1 y el P2) y vamos a resolver los dos problemas como si las dos variables fueran continuas. El método siempre resuelve la **relajación lineal del problema (lo resuelve como si las variables fueran continuas)**

Programa P1

$Z = X1 + X2$ MAX

$X1 + 9/14\,X2 \leq 51/14$

$-2\,X1 + X2 \leq 1/3$

$X1 \geq 2$

Programa P2

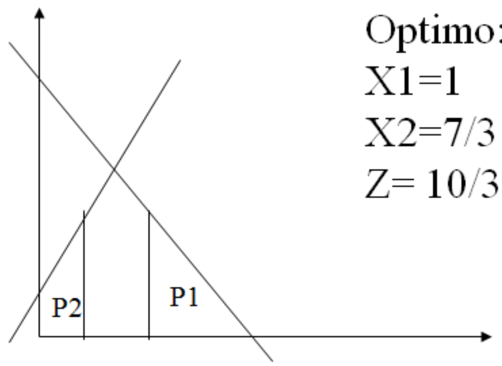
$Z = X1 + X2$ MAX

$X1 + 9/14\,X2 \leq 51/14$

$-2\,X1 + X2 \leq 1/3$

$X1 \leq 1$

Optimo:
$X1=2$
$X2=23/9$
$Z= 41/9$



Optimo:
$X1=1$
$X2=7/3$
$Z= 10/3$

Una vez que resolvimos el problema P1 y el problema P2 nos fijamos si en alguno de los dos problemas las dos variables dieron entero. Como no es así, hay que seguir dividiendo estos dos problemas. Sin embargo, para aplicar el criterio de "bounding" (cuando tengamos una solución factible con ambas variables con valor entero veremos qué es este criterio) necesitamos llegar a una solución entera. Por eso, el B&B trabaja de la siguiente manera: DE LOS DOS PROBLEMAS QUE HEMOS OBTENIDO, SI NINGUNO DE LOS DOS ES UNA SOLUCIÓN FACTIBLE CON TODAS LAS VARIABLES ENTERAS Y NINGUNO ES INCOMPATIBLE, VAMOS A ELEGIR PARA SEGUIR SUBDIVIDIENDO EL DE MAYOR FUNCIONAL y el otro lo dejamos "en suspenso" hasta que hayamos agotado la rama que vamos a explorar. Una vez que hayamos agotado esa rama, vamos a volver a los problemas que dejamos "en suspenso" para ver si vale la pena explotarlos. Por lo tanto, vamos a elegir el problema P1 para dividir. En P1 X1 es entera, pero X2 no lo es (vale 2,555 periódico). Entonces al problema P1 lo vamos a dividir en dos: uno con las restricciones de P1 agregando que X2 <=2 y el otro con las restricciones de P1 agregando que X2>=3 . Así eliminamos la parte de la solución continua de P1 en la cual X2 vale entre 2 y 3.

Programa P11

$Z = X1 + X2$ MAX

$X1 + 9/14\ X2 \leq 51/14$

$-2\ X1 + X2 \leq 1/3$

$X1 \geq 2$

$X2 \geq 3$

INCOMPATIBLE

Programa P12

$Z = X1 + X2$ MAX

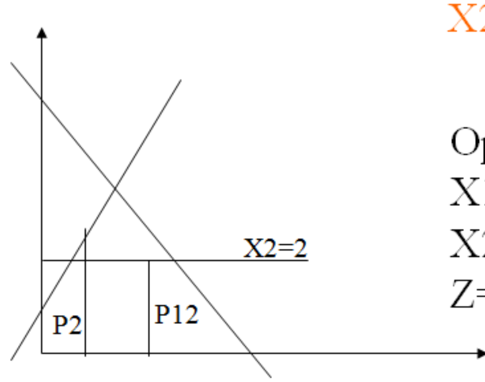
$X1 + 9/14\ X2 \leq 51/14$

$-2\ X1 + X2 \leq 1/3$

$X1 \geq 2$

$X2 \leq 2$

Optimo:
X1=33/14
X2=2
Z= 61/14



Al resolver el P11 vemos que da incompatible. Por lo tanto, si P22 no da valores enteros en X1 y X2, ése va a ser el problema elegido para dividirlo en dos.

El P12 tiene x2 con valor entero, pero X1 vale 2,3571.. Por lo tanto, para dividir P12 tenemos que generar un problema con las restricciones de P12 agregándole X1 <= 2 y otro con las restricciones de P12 agregándole X1 >= 2.

Programa P121

$Z = X1 + X2$ MAX

$X1 + 9/14\ X2 \leq 51/14$

$-2\ X1 + X2 \leq 1/3$

$X1 \geq 2$

$X2 \leq 2$

$X1 \leq 2$

Optimo:
X1=2
X2=2
Z= 4

Programa P122

$Z = X1 + X2$ MAX

$X1 + 9/14\ X2 \leq 51/14$

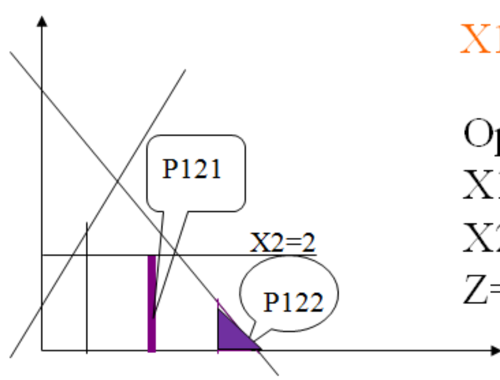
$-2\ X1 + X2 \leq 1/3$

$X1 \geq 2$

$X2 \leq 2$

$X1 \geq 3$

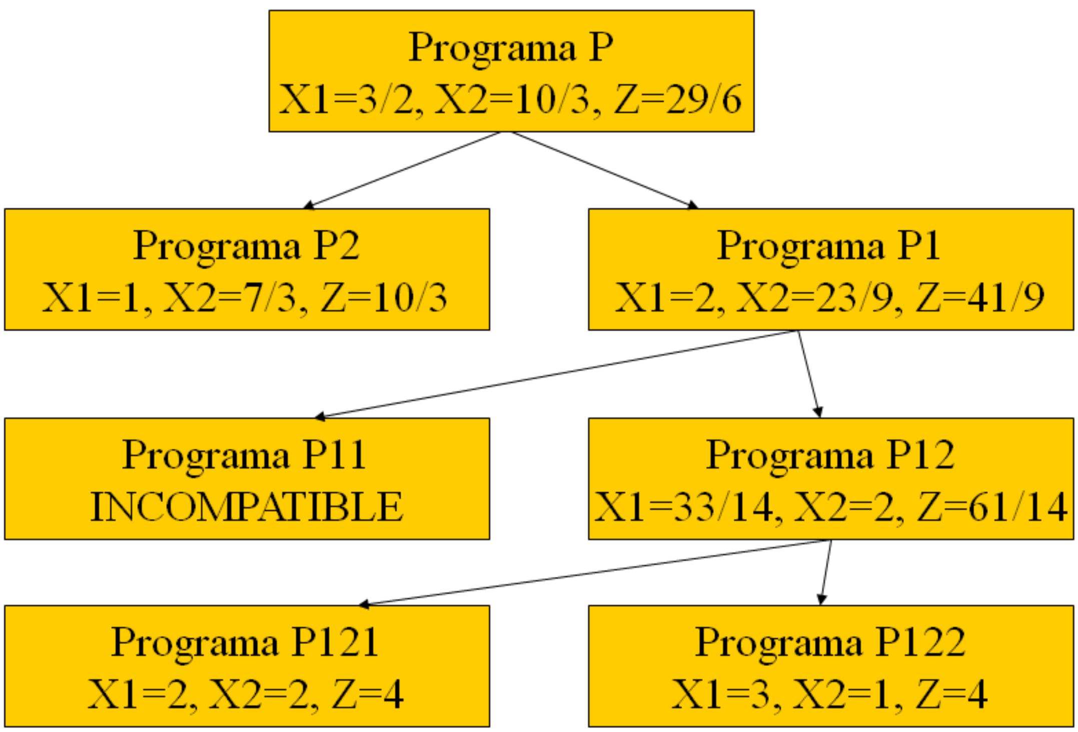
Optimo:
X1=3
X2=1
Z= 4



Tanto el P121 como el P122 dan solución factible con ambas variables con valor entero. Para usar como cota en el bounding tenemos que elegir el que tenga mayor funcional (en este caso los dos tienen igual valor de funcional). Pero eso no quiere decir que ya encontramos la mejor solución con valores enteros de X1 y X2 porque todavía nos quedan problemas pendientes de explotación. Por eso vamos a mostrar los problemas obtenidos hasta el momento, y a usar Z=4 como cota para ver cuáles conviene explotar.

Ahora que encontramos una solución entera válida (en realidad dos, porque hay soluciones alternativas óptimas) vamos a recapitular qué problemas nos quedaron pendientes, porque todavía no sabemos si la solución entera encontrada es óptima (a lo mejor el óptimo está en los problemas que aún no dividimos).

<u>Pasamos a la etapa de Bound (cota)</u>



Antes de ponernos a explotar los que quedaron pendientes (habría que empezar a explotar aquél que tiene mayor valor de funcional de los que quedaron pendientes y vale la pena explotar) vamos a aplicar el criterio de Bound con la cota de Z=4 (la mejor solución con valores enteros encontrada hasta el momento) para ver si vale la pena explotarlos.

El único que quedó pendiente es el P2, pero su Z es 3,333333, que es menor que 4. Como vemos, al explotar los problemas les agregamos restricciones y por eso su Z disminuye. Si el problema aún no fue explotado y su Z es menor que el Z de la mejor solución entera encontrada hasta el momento, no vale la pena explotarlo.

Por lo tanto, este problema tiene dos soluciones óptimas enteras (X1=2, X2=2 y X1=3, X2=1) ambas con Z=4

Y terminó el análisis.

La fase de "Bound" se hace para que, una vez que encontramos una solución entera válida, no sigamos explotando ningún problema que tenga un funcional menor que esa solución encontrada (la usamos como cota). Como al dividir un problema agregamos restricciones, el valor del funcional baja.

Como el único problema que nos faltaba analizar (P2) tiene menor funcional que la solución entera encontrada, esa solución es óptima

Problemas que se pueden presentar al resolver por B&B:

- Puede ser necesario explorar un gran número de subproblemas
- Si la búsqueda es a lo ancho, puede ser necesaria un gran cantidad de memoria
- Si la búsqueda es en profundidad, se puede gastar mucho tiempo explorando un callejón sin "salida"