**Cognome**:........................... **Nome**:........................... **Firma**:............................

*Norme per la prova:*

(a) *Scrivere cognome, nome e numero di matricola negli appositi spazi.*

(b) *Consegnare* solo *il compito svolto, in formato PDF, sulla piattaforma* elearning.

(c) *Rispondere alle domande utilizzando gli appositi spazi, se possibile.*

(d) *Tempo: 120 minuti* $\pm$ *10 minuti.*

(e) *I punti di ciascun esercizio sono indicati tra parentesi.*

(f) *I punti* bonus *valgono soltanto se le parti precedenti nell'esercizio sono state valutate con punteggio pieno.*

**(1)** Il punto stazionario (critico) della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 2y$ è

**(2)** La misura (volume) dell'insieme definito da $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1 - x - y\}$ è uguale a ...

**(3)** L'intervallo in cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$ converge puntualmente è:

**(4)** Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma xy\,\mathrm{d}y$, dove $\gamma$ è la circonferenza di raggio 2 di centro l'origine, percorsa in senso antiorario.

**(5)** (6+2 punti) Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, x + 2y \le 2\}$. Sia $f \colon X \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = xy - x - y$.

*(a)* Determinare tutti i punti critici di $f$ all'interno del dominio $X$.

*(b)* Calcolare il massimo e il minimo (globali) della funzione $f$ in $X$.

*(c)* *(bonus)* Se per ogni $t \geq 0$ poniamo $X_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (tx, ty) \in X\}$, e $M(t) = \max_{\boldsymbol{x} \in X_t} f(\boldsymbol{x})$, allora qual è $\lim_{t\to\infty} M(t)$ ? Perché?

**(6)** (2+2 punti) Si consideri, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

(*) $$\begin{cases} y'' + 4y = 4x \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

*(a)* Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata:

*(b)* Determinare, utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie, la soluzione del problema di Cauchy (*) in funzione di $y_0$

*(c)* *(bonus)* Per quali $y_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione corrispondente di (*) in $\mathbb{R}$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}$?

**(7)** (6+2 punti) Si consideri la successione di funzioni $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, da

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx) & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

*(a)* Per quali valori di $x$ la successione converge puntualmente? A quale un limite? *(Dimostrare la risposta)*

*(b)* Nell'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ la successione $f_n$ converge uniformemente al suo limite? *(Dimostrare la risposta)*

*(c)* *(bonus)* Per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha \sin(nx) & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

converge a 0 rispetto alla metrica della norma $\|-\|_1$ di $L^1([0, 1])$?