Cognome:. . . . .**Nome**:. . . . .**Firma**:. . . . .

Norme per la prova:

(a) *Scrivere cognome, nome e numero di matricola negli appositi spazi.*

(b) *Consegnare* solo *il compito svolto, in formato PDF, sulla piattaforma* elearning.

(c) *Rispondere alle domande utilizzando gli appositi spazi, se possibile.*

(d) *Tempo: 120 minuti* $\pm$ *10 minuti.*

(e) *I punti di ciascun esercizio sono indicati tra parentesi.*

(f) *I punti* bonus *valgono soltanto se le parti precedenti nell'esercizio sono state valutate con punteggio pieno.*

(1) Il punto stazionario (critico) della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 2y$ è

(2) La misura (volume) dell'insieme definito da $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$ è uguale a ...

(3) L'intervallo in cui la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(n-1)}$ converge puntualmente è:

(4) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma xy\,\mathrm{d}y$, dove γ è la circonferenza unitaria di centro l'origine, percorsa in senso antiorario.

(5) (6+2 punti) Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 2\}$. Sia $f \colon X \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = xy - x - y$.

(a) Determinare tutti i punti critici di f all'interno del dominio X.

(b) Calcolare il massimo e il minimo (globali) della funzione f in X.

(c) *(bonus)* Se per ogni $t \geq 0$ poniamo $X_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (tx, ty) \in X\}$, e $M(t) = \max_{\boldsymbol{x} \in X_t} f(\boldsymbol{x})$, allora qual è $\lim_{t\to\infty} M(t)$? Perché?

(6) (2+2 punti) Si consideri, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

(*)
$$\begin{cases} y'' + 4y = 4x \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata:

(b) Determinare, utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie, la soluzione del problema di Cauchy (*) in funzione di y_0

(c) *(bonus)* Per quali $y_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione corrispondente di (*) in $\mathbb{R}$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}$?

(7) (6+2 punti) Si consideri la successione di funzioni $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, da

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx) & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Per quali valori di x la successione converge puntualmente? A quale un limite? *(Dimostrare la risposta)*

(b) Nell'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ la successione f_n converge uniformemente al suo limite? *(Dimostrare la risposta)*

(c) *(bonus)* Per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha \sin(nx) & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

converge a 0 rispetto alla metrica della norma $\|-\|_1$ di $L^1([0,1])$?