

Cognome:.....Nome:.....Firma:.....

*Norme per la prova:*

- (a) Scrivere cognome, nome e numero di matricola negli appositi spazi.
- (b) Consegnare solo il compito svolto, in formato PDF, sulla piattaforma elearning.
- (c) Rispondere alle domande utilizzando gli appositi spazi, se possibile.
- (d) Tempo: 120 minuti  $\pm$  10 minuti.
- (e) I punti di ciascun esercizio sono indicati tra parentesi.
- (f) I punti bonus valgono soltanto se le parti precedenti nell'esercizio sono state valutate con punteggio pieno.

(1) Il punto stazionario (critico) della funzione  $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 2y$  è

(2) La misura (volume) dell'insieme definito da  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$  è uguale a ...

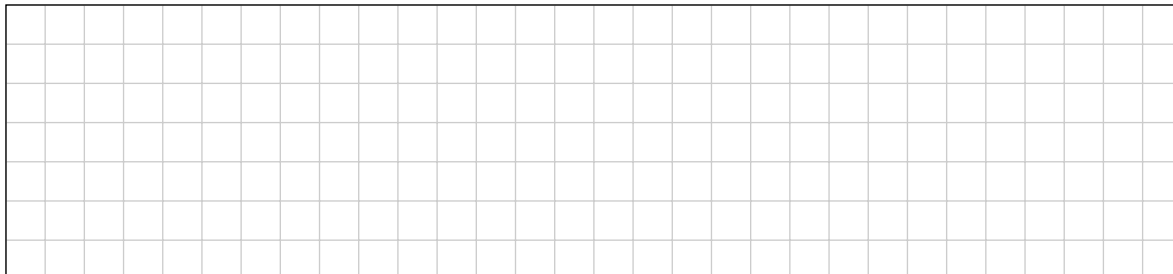
(3) L'intervallo in cui la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(n-1)}$  converge puntualmente è:

(4) Calcolare l'integrale  $\int_{\gamma} xy \, dy$ , dove  $\gamma$  è la circonferenza unitaria di centro l'origine, percorsa in senso antiorario.

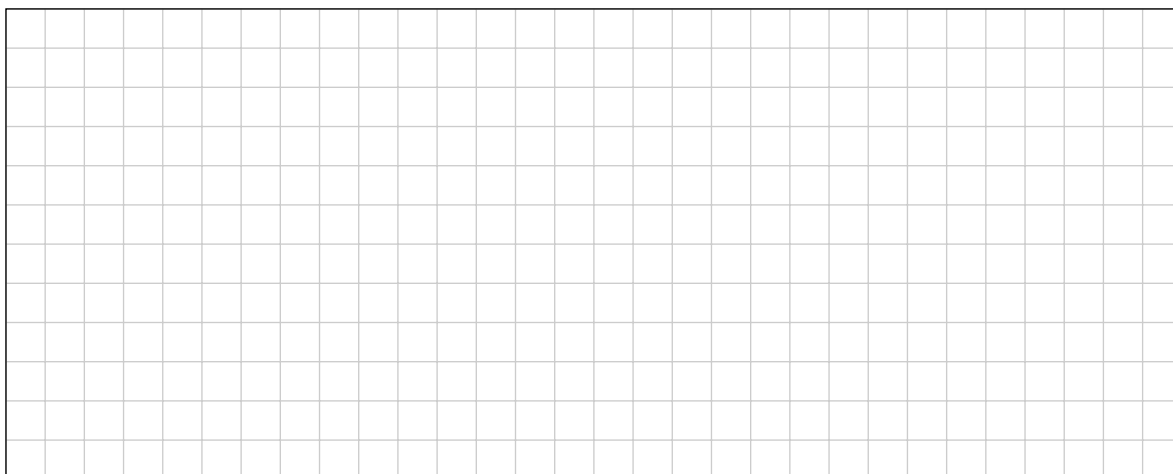


(5) (6+2 punti) Sia  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 2\}$ . Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(x, y) = xy - x - y$ .

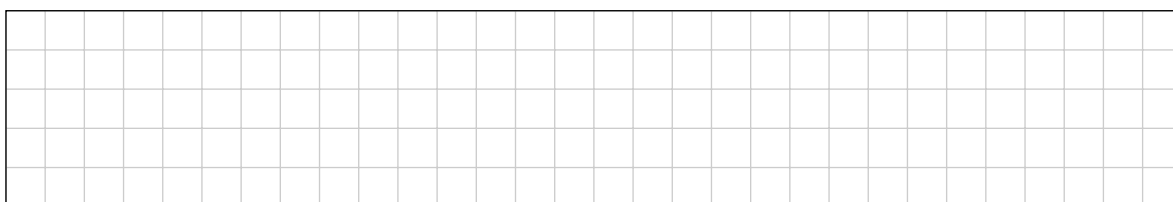
(a) Determinare tutti i punti critici di  $f$  all'interno del dominio  $X$ .



(b) Calcolare il massimo e il minimo (globali) della funzione  $f$  in  $X$ .



(c) (*bonus*) Se per ogni  $t \geq 0$  poniamo  $X_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (tx, ty) \in X\}$ , e  $M(t) = \max_{x \in X_t} f(x)$ , allora qual è  $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t)$ ? Perché?



(6) (2+2 punti) Si consideri, al variare di  $y_0 \in \mathbb{R}$ , il problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y'' + 4y = 4x \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata:

(b) Determinare, utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie, la soluzione del problema di Cauchy (\*) in funzione di  $y_0$

(c) (*bonus*) Per quali  $y_0 \in \mathbb{R}$  la soluzione corrispondente di (\*) in  $\mathbb{R}$  è un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}$ ?

(7) (6+2 punti) Si consideri la successione di funzioni  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ , da

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx) & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Per quali valori di  $x$  la successione converge puntualmente? A quale un limite? *(Dimostrare la risposta)*

(b) Nell'intervallo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  la successione  $f_n$  converge uniformemente al suo limite? *(Dimostrare la risposta)*

(c) *(bonus)* Per quali valori del parametro  $\alpha > 0$  la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha \sin(nx) & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

converge a 0 rispetto alla metrica della norma  $\|-\|_1$  di  $L^1([0, 1])$ ?