概率论与数理统计

连续型随机变量的独立性

主讲人：郑旭玲

信息科学与技术学院

01

连续型随机变量独立性的判定

连续型随机变量独立性的判定

设*X*, *Y*是两个随机变量，若对任意的*x*，*y*，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称***X*和*Y*相互独立**。

两边同时求偏导数

$$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_X(x)F_Y(y)$$

$$=\frac{\partial F_X(x)}{\partial x}\bullet\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$$

$$=f_X(x)f_Y(y)$$

连续型随机变量独立性的判定

设X, Y是两个随机变量，若对任意的x，y，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称X和Y相互独立。

若(X,Y)是连续型随机变量，则上述定义等价于：

对任意的 x, y, 有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立，则称X和Y相互独立。

其中，$f(x,y)$ 是X和Y的联合密度，$f_X(x), f_Y(y)$ 分别是 X的边缘密度和Y的边缘密度。

连续型随机变量独立性的判定

对任意的 x, y, 有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立，则称 X 和 Y 相互独立。

由条件密度的定义：$$\begin{cases} f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} \end{cases}$$

可知，当 X 与 Y 相互独立时，

$$f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y),\quad f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$$

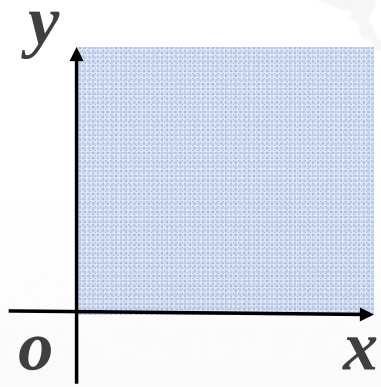
也可用此条件判别二维连续型随机变量 (X,Y) 的两个分量 X 与 Y 是否相互独立。

连续型随机变量独立性的判定

例 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

问X和Y是否独立？



解： $$f_X(x)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dy$$

$$=xe^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-y}dy$$

$$=xe^{-x}\left[-e^{-y}\right]\Big|_0^{+\infty}=xe^{-x}, x>0$$

连续型随机变量独立性的判定

$$f_Y(y)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dx$$

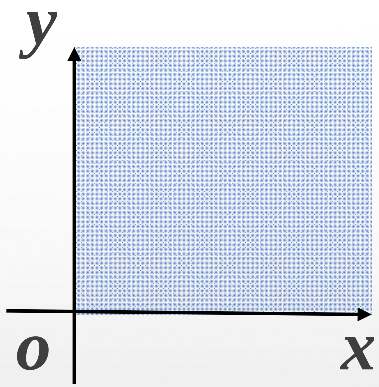
$$=e^{-y}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

$$=e^{-y}\left[(-x-1)e^{-x}+C\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=e^{-y}, y>0$$

$$\boxed{\int xe^{ax}dx=\frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}+c}$$

令a=-1



即

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对一切x, y均有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

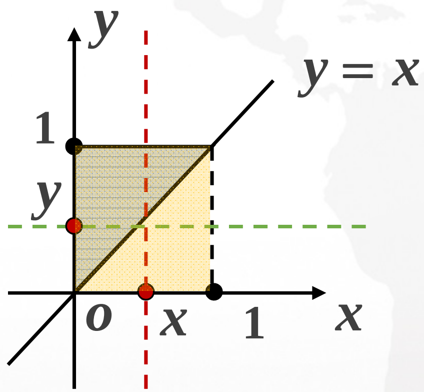
故 X, Y 独立。

连续型随机变量独立性的判定

例 若(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

情况又怎样？



解：

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^1 2dy=2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 2dx=2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当0<y<x<1时，有

$f(x,y)=0$，

但 $f_X(x)f_Y(y)>0$

故 X和 Y不独立。

连续型随机变量独立性的判定

例 甲乙两人约定中午12时30分在某地会面。如果甲来到的时间在12:15到12:45之间是均匀分布。乙独立地到达，而且到达时间在12:00到13:00之间是均匀分布。
试求先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率。又甲先到的概率是多少？

解： 设X为甲到达时刻，Y为乙到达时刻，以12时为起点，以分为单位，依题意可知：

$$X \sim U(15,45),\quad Y \sim U(0,60)$$

连续型随机变量独立性的判定

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 15<x<45\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0<y<60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由独立性

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1800}, & 15<x<45, 0<y<60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所求为$P(|X-Y|\le 5)$，$P(X<Y)$

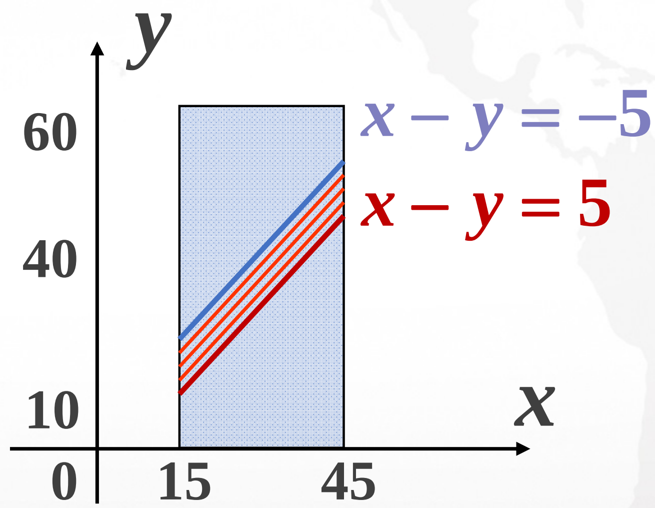
甲先到的概率

先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率

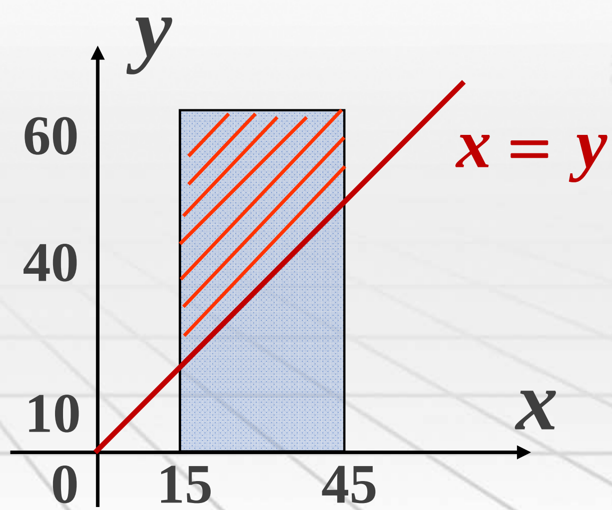
连续型随机变量独立性的判定

解一：

$$P(|X-Y|\le 5)$$
$$=P(-5\le X-Y\le 5)$$
$$=\int_{15}^{45}[\int_{x-5}^{x+5}\frac{1}{1800}dy]dx$$
$$=1/6.$$



$$P(X<Y)$$
$$=\int_{15}^{45}[\int_{x}^{60}\frac{1}{1800}dy]dx$$
$$=1/2.$$



连续型随机变量独立性的判定

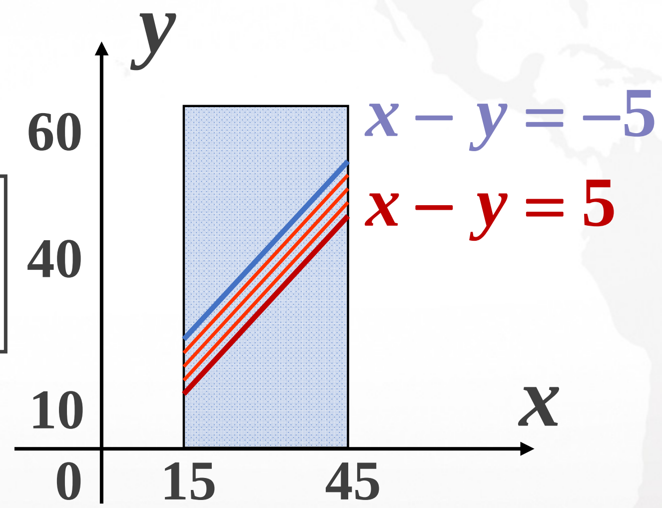
解二： $P(|X-Y|\le 5)$

$$=\iint\limits_{|x-y|\le 5}\frac{1}{1800}dxdy$$

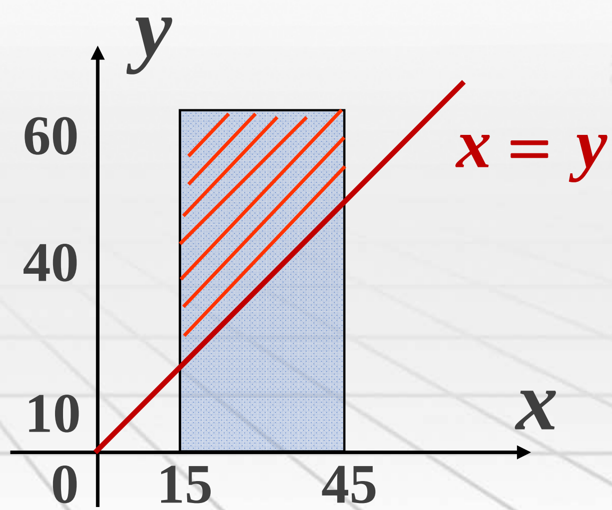
被积函数为常数，直接求面积

$$=\frac{1}{1800}[60\times 30-2(10\times 30+30\times 30/2)]$$

$$=1/6.$$



$$P(X<Y)=P(X>Y)=1/2$$



连续型随机变量独立性的判定

类似的问题

甲、乙两船同日欲靠同一码头，设两船各自独立地到达，并且每艘船在一昼夜间到达是等可能的。若甲船需停泊1小时，乙船需停泊2小时，而该码头只能停泊一艘船，试求其中一艘船要等待码头空出的概率。

连续型随机变量独立性的判定

类似的问题

在某一分钟的任何时刻，信号进入收音机是等可能的。若收到两个互相独立的这种信号的时间间隔小于0.5秒，则信号将产生互相干扰。求发生两信号互相干扰的概率。

02

n维随机变量的相互独立

n 维随机变量的相互独立

定义：n 维随机变量的分布函数

对于任意n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，n元函数：

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数。

n 维随机变量的相互独立

定义：n 维随机变量的 k 维边缘分布

设$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$的分布函数$F(x_1, x_2, \cdots x_n)$已知，

则$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$的$k(1 \le k \le n)$维边缘分布函数就随之确定。

例如：

$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$关于$X_1$的1维边缘分布函数为

$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$

$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$关于$\left(X_1, X_2\right)$的2维边缘分布函数为

$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \cdots, \infty)$

n 维随机变量的相互独立

定义：n 维随机变量相互独立

若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$,有：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的

n维随机变量的相互独立

定义：两组多维随机变量相互独立

设随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$的分布函数为$F_1(x_1,x_2,\cdots x_m)$,

$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的分布函数为$F_2(y_1,y_2,\cdots y_n)$,

$(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots x_m,y_1,y_2,\cdots y_n)$,

若对于所有的$x_1,x_2,\cdots,x_m;y_1,y_2,\cdots,y_n$,有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=F_1(x_1,x_2,\cdots x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots y_n)$$

则称$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$是相互独立。

n 维随机变量的相互独立

定理

设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立，

则$X_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和$Y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立。

又若h, g是连续函数，

则$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立。

n 维随机变量的相互独立

定义：n 维离散型随机变量的分布律

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 所有可能取值为 $(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \cdots, x_{ni_n})$, $i_j = 1, 2, \cdots$,

$$P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n}),\ j = 1, 2, \cdots n,\ i_j = 1, 2, \cdots,$$

称为 n 维离散型随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律。

定义：n 维连续型随机变量的概率密度

若存在非负可积函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

使得对于任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \cdots x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度函数。

n 维随机变量的相互独立

前面关于n维随机变量独立性的定义和定理，只需将其中的“分布函数”替换为“分布律”或“密度函数”就全部都可以适用于离散型或连续型n维随机变量。

小结

- 两个随机变量的独立性

- n 维随机变量的独立性

谢谢大家