历届试题选（七）解答

一、求函数 $y=x-2\ln(1+x)(x>-1)$ 的极值（2017—2018）

解一：$y'=1-\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{x-1}{1+x}$，令 $y'=0$，得 $x=1$.

当 $-1<x<1$，$y'<0$，则函数 $y=x-2\ln(1+x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调减少;

当 $x>1$ 时，$y'>0$，则函数 $y=x-2\ln(1+x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增加.

由极值的第一充分条件，函数 $y=x-2\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，极小值为 $y\big|_{x=1}=1-2\ln 2$.

解二：$y'=1-\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{x-1}{1+x}$，令 $y'=0$，得 $x=1$.

又 $y''=(-\dfrac{2}{1+x})'=\dfrac{2}{(1+x)^2}$，即 $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$.

由极值的第二充分条件，函数 $y=x-2\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，极小值为 $y\big|_{x=1}=1-2\ln 2$.

二、求函数 $f(x)=5\sqrt{4+x^2}-3x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的极值和最值，并判定其图形的凹凸性.（2018—2019）

解：$f'(x)=5\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{4+x^2}}\cdot 2x-3=\dfrac{5x}{\sqrt{4+x^2}}-3$，令 $f'(x)=0$，即 $5x=3\sqrt{4+x^2}$.

两边平方，得 $25x^2=36+9x^2$，解得 $x=\pm\dfrac{3}{2}$. 因 $x\in[0,+\infty)$，所以，$x=\dfrac{3}{2}$.

$$f''(x)=(\frac{5x}{\sqrt{4+x^2}})'=\frac{5}{\sqrt{4+x^2}}+5x\cdot(-\frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}\cdot 2x=\frac{20}{\sqrt{(4+x^2)^3}}>0.$$

由于 $f''(\dfrac{3}{2})>0$，则 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{3}{2}$ 取得极小值，极小值为 $f(\dfrac{3}{2})=8$.

由 $f''(x)>0, x\in[0,+\infty)$，则 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

故当 $0\le x<\dfrac{3}{2}$ 时，$f'(x)<f'(\dfrac{3}{2})=0$，即 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{3}{2}]$ 上单调减少;

当 $x>\dfrac{3}{2}$ 时，$f'(x)>f'(\dfrac{3}{2})=0$，即 $f(x)$ 在 $[\dfrac{3}{2},+\infty)$ 上单调增加.

因此，$f(x)$ 在 $x=\dfrac{3}{2}$ 处取到最小值，最小值为 $f(\dfrac{3}{2})=5\sqrt{4+\dfrac{9}{4}}-\dfrac{9}{2}=8$.

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5\sqrt{4+x^2}-3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\sqrt{4+x^2}+3x}{(5\sqrt{4+x^2})^2-(3x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\sqrt{4+x^2}+3x}{16x^2+100}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{5\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}+3}{16+\frac{100}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{5\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}+3}{16+\frac{100}{x^2}}=0\times\frac{8}{16}=0.$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上不能取得最大值.

由于 $f''(x)>0, x\in[0,+\infty)$，则曲线 $y=f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上是凹的.

三、试求常数a,b，使得当$x\to 0$时，$f(x)=x-a\sin x-b\sin 2x$是关于x的5阶无穷小.(2018—2019)

解：由麦克劳林公式，我们有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)，\ \sin 2x=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^6).$$

于是，$$f(x)=x-a(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!})-b(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!})+o(x^6)$$

$$=(1-a-2b)x+(\frac{a}{6}+\frac{4b}{3})x^3-(\frac{a}{5!}+\frac{2^5b}{5!})x^5+o(x^6)$$

因为当$x\to 0$时，$f(x)=x-a\sin x-b\sin 2x$是关于x的5阶无穷小，则

$$\begin{cases}1-a-2b=0\\ \frac{a}{6}+\frac{4b}{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=-\frac{1}{6}\end{cases}.$$

四、求函数$y=(x-5)\cdot x^{\frac{2}{3}}$的极值，以及其图形的凹凸区间和拐点. （2019—2020）

解：$y=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$，则$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)$，$y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1)$.

令$y'=0$，得$x=2$．$x=0$为函数$y=(x-5)\cdot x^{\frac{2}{3}}$的不可导点.

令$y''=0$，得$x=-1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+		+	不存在	−	0	+
y''	−	0	+	不存在	+		+
y	增，凸	拐点	增，凹	极大值	减，凹	极小值	增，凹

函数 $y=(x-5)\cdot x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处取得极大值，极大值为 $y|_{x=0}=0$，在 $x=2$ 处取得极小值，极小值为 $y|_{x=2}=-3\sqrt[3]{4}$.

曲线 $y=(x-5)\cdot x^{\frac{2}{3}}$ 的凹区间为 $(-1,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,-1)$，拐点为 $(-1,-6)$.

五、已知标准正态分布密度函数为 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，

（1）求该函数的单调区间、极值、最值；（2）判定该函数图形的凹凸性，并求其拐点.（2020—2021）

解：$y'=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，$y''=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

令 $y'=0$，得 $x=0$；令 $y''=0$，得 $x=\pm1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	增，凹	拐点	增，凸	极小值	减，凸		减，凹

函数的单调增加区间：$(-\infty,0)$，单调减少区间：$(0,+\infty)$，极大值和最大值都是 $y(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

因为 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}>0$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=0$，因此，函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 没有最小值.

该函数图形的凹区间：$(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$，凸区间：$(-1,1)$.

拐点为 $(-1,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ 和 $(1,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$.

六、曲线 $y=\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的斜渐近线方程为_______.（2021—2022）

解：因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+\mathrm{e}^x)=0$，故曲线有水平渐近线为 $y=0$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}(\ln(1+\mathrm{e}^x)-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln(1+e^x)-\ln e^x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{1}{e^x}+1)=0.$$

所以，斜渐近线为 $y=x$.

七、反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的拐点是________.（2021—2022）

解：$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$y''=-\dfrac{-2x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}}=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

令 $y''=0$，得 $x=0$.

当 $-1<x<0$ 时，$y''<0$，即 $y=\arcsin x$ 在 $(-1,0)$ 是凸的；

当 $0<x<1$ 时，$y''>0$，即 $y=\arcsin x$ 在 $(0,1)$ 是凸的.

因此，曲线 $y=\arcsin x$ 的拐点为 $(0,0)$.

八、试求：（1）函数 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式；（2）函数极限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}$.（2021—2022）

解法一：（1）由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，故

$$\begin{aligned}
f(x)&=(1+x)(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3))^2\\
&=(1+x)x^2(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))^2\\
&=(1+x)x^2[1+\frac{1}{4}x^2+2\cdot(-\frac{1}{2}x)+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)]\\
&=(1+x)x^2[1-x+\frac{11}{12}x^2+o(x^2)]\\
&=x^2[1-x^2+\frac{11}{12}x^2(1+x)+o(x^2)]\\
&=x^2[1-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)]\\
&=x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}
e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x&=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4))\\
&=(\frac{1}{8}-\frac{1}{24})x^4+o(x^4)=\frac{1}{12}x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{\frac{1}{12}+0}{\frac{1}{12}+0}=1.$$

解法二：(1) $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)$，$f(0)=0.$

$f'(x)=\ln^2(1+x)+(1+x)\cdot2\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)$，$f'(0)=0$.

$f''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}$，$f''(0)=2$.

$f'''(x)=\frac{-2\ln(1+x)}{(1+x)^2}$，$f'''(0)=0$.

$f^{(4)}(x)=\frac{-2+4\ln(1+x)}{(1+x)^3}$，$f^{(4)}(0)=-2.$

故 $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4+o(x^4),$$

即 $$(1+x)\ln^2(1+x)=\frac{1}{2!}\cdot2x^2+\frac{1}{4!}\cdot(-2)x^4+o(x^4)$$

$$=x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4).$$

(2) $$e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)x^4+o(x^4)=\frac{1}{12}x^4+o(x^4).$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}=1.$$

九、设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有二阶导数且 $f''(x)\ge0$．现已知 $f(1)=-4$，$f'(1)=2$，证明：方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个实根. （2021—2022）

证明：由泰勒公式，$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-1)^2$，其中 ξ 介于 x 和 1 之间.

因为 $f''(x)\ge0$，则 $f(x)\ge-4+2(x-1)=2x-6$. 故 $f(3)\ge0$.

由于 $f(1)=-4<0$，由零点定理，存在 $\xi\in(1,3]$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在 $(1,3]$ 上至少有一个根.

因为 $f''(x) \geq 0$，则 $f'(x)$，在$[1,+\infty)$上单调不减，即当 $x \geq 1$时，$f'(x) \geq f'(1) = 2 > 0$，即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加.

因此，方程 $f(x) = 0$ 在$[1,+\infty)$ 存在唯一的实根.