概率论与数理统计

正态总体均值与方差的区间估计

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 并设 $X_1,\ldots,X_n$为来自总体的样本，

$\bar{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差。

1. 均值 μ 的置信区间

1° σ^2 为已知 $\quad \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

可得到 μ 的置信水平为 1- α 的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}) \text{ 或 } (\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2})$$

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

2° σ^2 为未知 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

此分布不依赖于任何未知参数

由 $P\{|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}| < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$

可得到 μ 的置信水平为 1- α 的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)) \text{ 或 } (\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

例1 有一大批糖果。现从中随机地取16袋，称得重量（以克计）如下：

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布，试求总体均值 μ 的置信水平0.95为的置信区间。

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

解：这里 $1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025, n-1=15$，$t_{0.025}(15)=2.1315$.

$$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=503.75, \quad s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=6.2022.$$

于是得到 μ 的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

即 $(500.4, 507.1)$

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

2. 方差 σ^2 的置信区间

由 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

可得到 σ^2的置信水平为1-α 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

由

$$P\{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \frac{(n-1)S}{\sigma} < \sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\} = 1-\alpha$$

可得到标准差 σ 的置信水平为1-α 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

例2 有一大批糖果。现从中随机地取16袋，称得重量（以克计）如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布，试求总体标准差σ的置信水平0.95为的置信区间。

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

解：这里 $\alpha/2=0.025, 1-\alpha/2=0.975, n-1=15,$

$$\chi^2_{0.025}(15)=27.488,\quad \chi^2_{0.975}(15)=6.262.$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=6.2022.$$

于是得到σ 的置信水平为0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

即（4.58，9.60）。

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

设已给定置信水平为$1-\alpha$，并设 $X_1, X_2,\ldots,X_{n1}$ 是来自第一个总体的样本，$Y_1, Y_2,\ldots, Y_{n2}$ 是来自第二个总体的样本，这两个样本相互独立.且设$\bar{X},\bar{Y}$分别为第一、二个总体的样本均值，S_1^2, S_2^2 为第一、二个总体的样本方差。

1. 两个总体均值差$\mu_1 - \mu_2$的置信区间

1° σ_1^2, σ_2^2 为已知

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

$$\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}),\ \overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

因为 X,Y 相互独立，所以 $\bar{X}, \bar{Y}$ 相互独立。

故 $$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

或 $$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

于是得到 μ_1-μ_2 的置信水平为1-α 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y} \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$2^\circ\ \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2, \sigma^2$ 为已知

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}, S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

于是得到μ_1-μ_2的置信水平为1-α 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}, S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

例3 为比较 I , II 两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取 I 型子弹 10 发，得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_1} = 500(m/s)$，标准差 $s_1^2 = 1.10(m/s)$，随机地取II型子弹 20 发，得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_2} = 496(m/s)$，标准差 $s_2^2 = 1.20(m/s)$，假设两总体都可认为近似地服从正态分布。且生产过程可认为方差相等。求两总体均值差 μ_1-μ_2 的置信水平为0.95的置信区间。

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

解：依题意，可认为分别来自两总体的样本是相互独立的。又因为由假设两总体的方差相等，但数值未知，故两总体均值差 μ_1-μ_2 的置信水平为1-α 的置信区间为

$$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $s_\omega=\sqrt{s_\omega^2}\,, s_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}.$

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

这里 $\alpha/2 = 0.025, n_1 = 10, n_2 = 20, n_1 + n_2 - 2 = 28,$

$t_{0.025}(28) = 2.048.\quad \overline{x_1} = 500, \overline{x_2} = 496, s_\omega = 1.1688.$

故两总体均值差 μ_1-μ_2 的置信水平为0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{x_1} - \overline{x_2} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)s_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = (4 \pm 0.93)$$

即 (3.07, 4.93) .

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

2. 两个总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间（μ_1,μ_2 为已知）

由
$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$$

$$P\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\} = 1-\alpha$$

即
$$P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\} = 1-\alpha$$

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

可得到 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为1-α的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

例4 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径，随机地抽取机器 A生产的钢管18只，测得样本方差$S_1^2 = 0.34(\mathrm{mm}^2)$ 。随机地取机器 B 生产的钢管13只，测得样本方$S_2^2 = 0.29(\mathrm{mm}^2)$ 。设两样本相互独立，且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径分别服从正态分布$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 这里μ_i, $\sigma_i^2 (i = 1,2)$均未知 .试求方差比σ_1^2 / σ_2^2的置信水平为 0.90 的置信区间。

二、两个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$的情况

解：这里 $\alpha = 0.10, \alpha/2 = 0.05, 1-\alpha/2 = 0.95,$

$$n_1 = 18, s_1^2 = 0.34, n_2 = 13, s_2^2 = 0.29. F_{0.05}(17,12) = 2.59,$$

$$F_{0.95}(17,12) = \frac{1}{F_{0.05}(12,17)} = \frac{1}{2.38}.$$

故两总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 **的置信水平为0.90 的置信区间为**

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

即 $(0.45 , 2.79)$.

谢 谢 大 家