厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期中试题

考试日期：2012.11　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

1．求下列函数的极限：（每小题 **4** 分，共 **16** 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right)$　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]$

（5）设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f\{\dfrac{\ln[1+f(x)]}{f(\sin x)}\}$。

2．（**10** 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n},(n=1,2,\cdots)$，证明此数列极限存在，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

3．（**10** 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1} & x<0\\ \dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}} & x\geq 0\end{cases}$ 的连续性，并对间断点判断其类型。

4、（**10** 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且周期为 **2** 的奇函数。已知 $x\in(0,1)$ 时，

$f(x)=\ln x+\cos x+e^{x+1}$，求当 $x\in[-4,-2]$ 时，$f(x)$ 的表达式。

5.（**12** 分）求下列函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

（1）$y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$　　　　（2）$y=(\tan x)^{\sin x}+x^x$

6.（**5** 分）已知 $\dfrac{dy}{dx}=(1+x)(x+\sin x)^2$, 且 $u=x+\sin x$，求 $\dfrac{dy}{du}$.

7.（**10** 分）已知 $f(x)=x^2\cos 2x$，试求 $f^{(10)}(x)$。

8.（**10** 分）已知 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x<0 \\ \ln(1+x) & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有二阶导数，试确定参数 a,b,c 的值。

9.（**10** 分）设函数 $y=f(x)$ 的极坐标式为 $\rho=a(1+\cos\theta)$，求 $\dfrac{dy}{dx},\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}$.

10．（10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $|x|e^{f(y)}=e^{y}\ln 2012$ 所确定，其中 f 具有二阶可导，且 $f'(x)\neq 1$，求当 $x\neq 0$ 时的 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$．

11．（10 分）选做题　以下两题任选其一（仅做一题）

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(x)\neq 0, x\in(a,b)$，若 $f(a)=f(b)=0$，证明对任意实数 k，存在点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=k$.

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续可导， $x_i\in(a,b),\lambda_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)=f'(\xi)$.

附加题（10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=a,\ f(b)=b,$ 试证在 (a,b) 内存在不同的 s,t，满足 $\dfrac{1}{f'(s)}+\dfrac{2}{f'(t)}=3$。