概率论与数理统计

中心极限定理例题解析

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

二、例题解析

例1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,2,\cdots n)$,设它们是相互独立的随机变量，且都在区间(0, 10)上服从均匀分布。记$V=\sum_{k=1}^{n}V_k$,求$P\{V>105\}$的近似值。

解 易知$E(V_k)=5, D(V_k)=100/12 \qquad (k=1,2,\cdots 20).$

由定理4知，$\mathrm{V}=\sum_{k=1}^{20}V_k \overset{\text{近似地}}{\sim} N(20\times 5,\frac{100}{12}\times 20)$

二、例题解析

例1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,2,\cdots n)$,设它们是相互独立的随机变量，且都在区间(0, 10)上服从均匀分布。记$V=\sum_{k=1}^{n}V_k$, 求$P\{V>105\}$的近似值。

解 易知$E(V_k)=5, D(V_k)=100/12 \qquad (k=1,2,\cdots 20).$

由定理4知，$\mathrm{V}=\sum_{k=1}^{20}V_k \overset{\text{近似地}}{\sim} N(20\times 5, \frac{100}{12}\times 20)$

于是 $$P\{V>105\}=p\left\{\frac{V-20\times 5}{\left(\sqrt{100/12}\right)\sqrt{20}}>\frac{105-20\times 5}{\left(\sqrt{100/12}\right)\sqrt{20}}\right\}$$

$$=p\left\{\frac{V-20\times 5}{\left(\sqrt{100/12}\right)\sqrt{20}}>0.387\right\}$$

$$=1-p\left\{\frac{V-20\times 5}{\left(\sqrt{100/12}\right)\sqrt{20}}\le 0.387\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(0.387)=0.348$$

即有 $$\mathrm{P}\{\mathrm{V}>105\}\approx 0.348$$

二、例题解析

例2. (供电问题)

某车间有200台车床，在生产期间由于需要检修、调换刀具、变换位置及调换工件等常需停车。设开工率为0.6，并设每台车床的工作是独立的，且在开工时需电力1千瓦。

问应供应多少瓦电力就能以99.9%的概率保证该车间不会因供电不足而影响生产?

二、例题解析

解：对每台车床的观察作为一次试验，每次试验是观察该台车床在某时刻是否工作，工作的概率0.6，共进行200次独立重复试验。

用X表示在某时刻工作着的车床数，依题意，

$$X \sim B(200,0.6),$$

设需N台车床工作，现在的问题是：

求满足 $P(X \leq N) \geq 0.999$ 的最小的N。

（由于每台车床在开工时需电力1千瓦，N台工作所需电力即N千瓦。）

二、例题解析

由德莫佛-拉普拉斯极限定理

$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$ 近似$N(0,1)$,

这里 np=120, $np(1\text{-}p)$=48

于是 $P(X\leq N)= P(0\leq X\leq N)$

$$\approx \Phi(\frac{N-120}{\sqrt{48}})-\Phi(\frac{-120}{\sqrt{48}})$$

由3σ准则，此项为0。

$$\approx \Phi(\frac{N-120}{\sqrt{48}})$$

二、例题解析

由 $\Phi(\frac{N-120}{\sqrt{48}}) \geq 0.999$ **查正态分布函数表得** $\Phi(3.1)=0.999$

故 $\frac{N-120}{\sqrt{48}} \geq 3.1$,　　**从中解得** $N \geq 141.5$,

即所求 $N=142$。

也就是说，应供应142千瓦电力就能以99.9%的概率保证该车间不会因供电不足而影响生产。

二、例题解析

例3 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05、0.8、0.15。若学校共有400名学生，设各学生参加会议的家长数相互独立，且服从同一分布。

（1）求参加会议的家长数X超过450的概率；

（2）求有1名家长来参加会议的学生数不多340的概率。

二、例题解析

解 （1）以$X_k(k=1,2\cdots,400)$记第k个学生来参加会议的家长数，则X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

易知$E(X_k)=1.1, D(X_k)=0.19 \quad k=1,2,\cdots 400.$

而$X=\sum_{k=1}^{400} X_k$.由定理4,可知随机变量

$$X \overset{\text{近似地}}{\sim} N(400\times 1.1, 400\times 0.19)$$

二、例题解析

即有 $$\frac{\sum_{k=1}^{400} X_k - 400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}} = \frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}} \overset{\text{近似地}}{\sim} \mathrm{N}（0,1）$$

于是

$$P\{X>450\} = P\left\{\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}} > \frac{450-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}} \le 1.147\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(1.147)=0.1257$$

二、例题解析

（2）以Y记有一名家长来参加会议的学生数，则$Y \sim b(400, 0.8)$，由定理6得

$$\text{随机变量} Y \overset{\text{近似地}}{\sim} N（400\times 0.8, 400\times 0.8\times 0.2）$$

$$P\{X \le 340\} = P\left\{\frac{Y-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}} \le \frac{340-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{Y-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}} \le 2.5\right\} \quad \approx \Phi(2.5) = 0.9938$$

四、归纳总结

中心极限定理

独立同分布中心极限定理

$$\begin{cases} E(X_k)=\mu,\ \ D(X_k)=\sigma^2 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似地}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2) \end{cases}$$

棣莫弗–拉普拉斯中心极限定理

$$\begin{cases} \eta_n \sim N(n,p) \\ \Rightarrow \eta_n \overset{\text{近似地}}{\sim} N(np, np(1-p)) \end{cases}$$

李雅普诺夫中心极限定理

$$\begin{cases} E(X_k)=\mu_k, D(x_k)=\sigma_k{}^2 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似地}}{\sim} N(\sum_{k=1}^{n}\mu_k, B_n{}^2) \end{cases}$$

注：随机变量 $X_1, X_2, \ldots$，是相互独立的

谢 谢 大 家