厦门大学《微积分Ⅰ-1》期末试题·答案

考试日期：2016 年 1 月　　信息学院自律督导部

得　分	
评阅人	

一、求下列不定积分（每小题 6 分, 共 12 分）.

1. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

2. $\int \frac{1+\sqrt[3]{x+1}}{1+x}dx$

解：1. 原式 $=\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\int \frac{de^x}{(e^x)^2+1}=\arctan e^x + C$

2. 解法一：令 $u=\sqrt[3]{x+1}$，即 $x=u^3-1$，　则 $dx=3u^2du$

原式 $=3\int \frac{1+u}{u^3}u^2du=3\int \frac{1+u}{u}du=3\ln|u|+3u+C$

$=3\ln|\sqrt[3]{x+1}|+3\sqrt[3]{x+1}+C$

$=\ln|x+1|+3\sqrt[3]{x+1}+C$

解法二：原式 $=\int \frac{1}{1+x}dx+\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+x}dx=\ln|1+x|+\int (x+1)^{-\frac{2}{3}}dx=\ln|1+x|+3\sqrt[3]{x+1}+C$

得　分	
评阅人	

二、求下列函数极限（每题 8 分，共 16 分）.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\arctan\frac{1}{n}+\arctan\frac{2}{n}+\cdots+\arctan\frac{n}{n}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t\right)}{x^3}$

解：1. 原式 $=\int_0^1 \arctan x dx$

$=x\arctan x|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_0^1$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

2. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}\,t}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)^2\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)^2}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(\text{sinx})^2\sin x\cos x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(\text{sinx})^2\sin x\cos x}{x}$$

$$=\frac{1}{3}$$

注释： 也可以利用“当$x\to 0,\quad \sin(\text{sinx})^2\sim(\sin x)^2$”来进行计算。

得　分	
评阅人	

三、求下列定积分（每小题 8 分, 共 16 分）.

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x(\text{sinx}+\sqrt{1-x^2})dx$

2. $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{(\text{x}-1)(3-\text{x})}}dx$

解：1. 原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\,\text{sinx}dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xd\cos x=-x\cos x\,|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2$

2. $x=1$**是瑕点，这是无界函数的广义积分**

原式$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\dfrac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin(\text{x}-2)\,|_{1+\varepsilon}^2=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}[0-\arcsin(\varepsilon-1)]=\dfrac{\pi}{2}$

得　分	
评阅人	

四、求下列微分方程的通解（每小题 8 分, 共 16 分）.

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^4}$　　　　2. $xy''=y'\ln y'$

解：1. **原方程等价于**$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x+y^4}{y}$　　即　　$\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=y^3$

这是一阶线性非齐次微分方程，代入公式得

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}(\int y^3e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+\text{C})=y(\int y^3\frac{1}{y}\mathrm{d}\,y+C)=\frac{y^4}{3}+Cy$$

2. 注意到原方程不显含x，　令$y'=p(x)$，原方程可降阶为

$$x\frac{dp}{dx}=p\ln p$$

分离变量得 $\frac{dp}{p\ln p}=\frac{1}{x}dx$

两边积分得 $\ln|\ln p|=\ln|x|+\ln|C_1|$

整理得 $p=e^{C_1x}$

再积分一次，得到原方程的通解为 $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x}+C_2$.

得　分	
评阅人	

五、(10 分) 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，求 $\int_0^1 f(x)dx$

解：令 $c=\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+c\sqrt{1-x^2}$，故

$\int_0^1(\frac{1}{1+x^2}+c\sqrt{1-x^2})dx=c$，等式左边积分得

$$\int_0^1(\frac{1}{1+x^2}+c\sqrt{1-x^2})dx=\arctan x|_0^1+c\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}c\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}c(t+\frac{1}{2}\sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}c$$

从而可得 $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}c=c$，解得 $c=\frac{\pi}{4-\pi}$.

注释: 也可直接利用定积分的几何意义, $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ 表示圆心在原点半径为 1 的圆形的面积的四分之一,即

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

得　分	
评阅人	

六、(10 分) 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程：$y''-4y'+3y=xe^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线：$y=x^2-\frac{1}{4}x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$。

解：特征方程 $r^2-4r+3=0$，特征根 $r_1=1$，$r_2=3$，齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^x+c_2e^{3x}$

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=x(ax+b)e^x$

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$-4ax+2a-2b=x$，所以有 $-4a=1,2a-2b=0$，解得

$a=b=-\frac{1}{4}$，$\therefore$通解 $y(x)=c_1e^x+c_2e^{3x}+(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x)e^x$。

又已知有公切线，得：$y(0)=1, y'(0)=-\frac{1}{4}$，即 $c_1+c_2=1, c_1+3c_2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$，解得 $c_1=\frac{3}{2}, c_2=-\frac{1}{2}$，

所以 $y(x)=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}+(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x)e^x$。

得　分	
评阅人	

七、（10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$。证明：

1. 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

2. 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，则 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少。

证明：1. 由已知条件得 $f(-x)=f(x)$，令 $t=-u$，

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt=\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)(-du)=\int_0^{x}(x-2u)f(u)du=F(x)$$

则 $F(x)$ 也是偶函数.

2. $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$

解法一：

$$F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=f(\xi)x-xf(x)=(f(\xi)-f(x))x\le 0, \xi\in(0,x)$$

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是减函数。

解法二：

$$F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=\int_0^x [f(t)-f(x)]dt$$

因为 $t\le x$，所以 $f(t)-f(x)\le 0$，从而 $F'(x)\le 0$.

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是减函数。

得　分	
评阅人	

八、（12 分）设 $f(x), g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，$f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）。

1. 证明 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$；

2. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin^5 x|\arctan e^x dx$。

证明：1. 由已知条件得 $g(-x)=g(x)$，令 $x=-t$，

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{g}(x)dx=\int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{g}(-t)dt=\int_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{g}(x)dx$$ 从而

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)g(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)g(x)dx$$

$$=\int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]g(x)dx=A\int_{0}^{a}g(x)dx$$

2. $|\sin^5 x|$ 为偶函数，又 $(\arctan e^x+\arctan e^{-x})'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0$，当 $x=0$ 时

$\arctan e^0+\arctan e^{-0}=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\arctan e^x+\arctan e^{-x}\equiv\dfrac{\pi}{2}$

由 1。所得的公式可得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin^5 x|\arctan e^x dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin^5 x|\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x dx=\frac{\pi}{2}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{4\pi}{15}$$