概率论与数理统计

$X+Y$ 的分布

主讲人：郑旭玲

信息科学与技术学院

01

两个随机变量的函数的分布

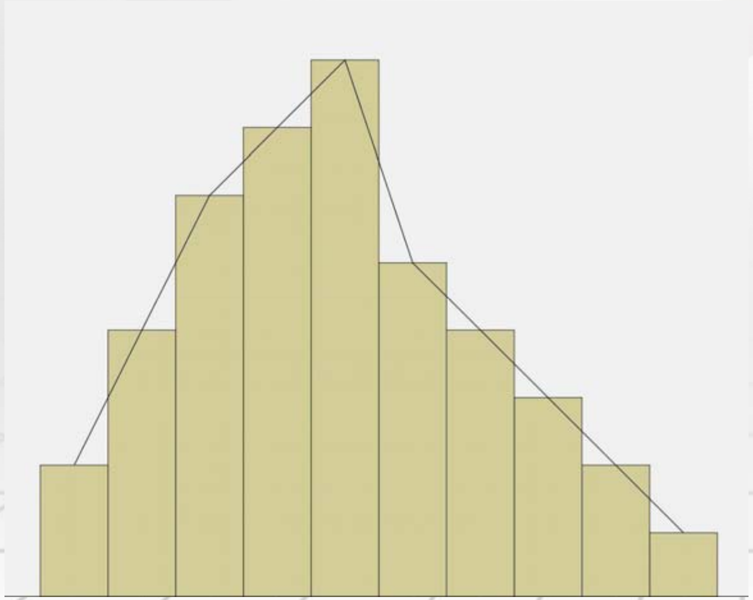
两个随机变量的函数的分布

前面我们讨论过一维随机变量函数的分布，现在我们进一步讨论:

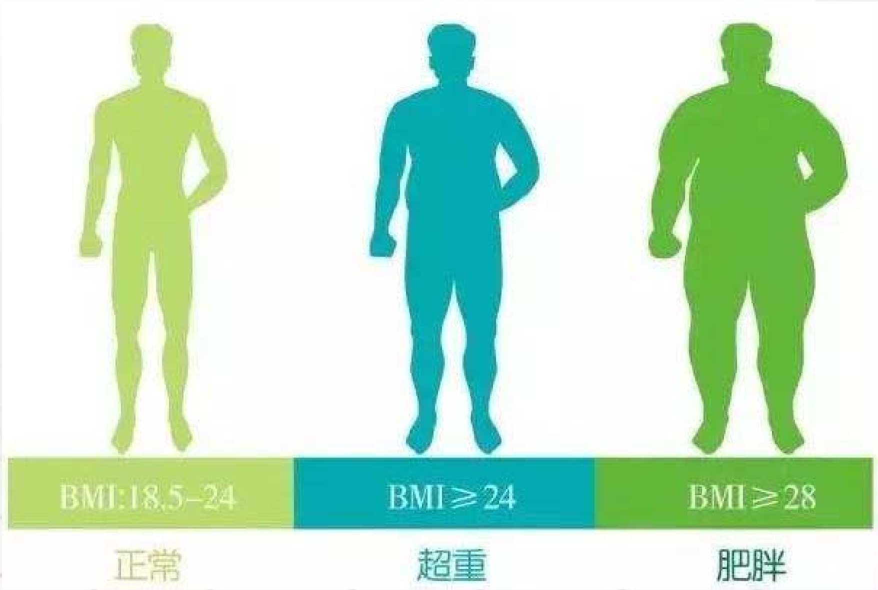
当随机变量 X, Y 的联合分布已知时，如何求出它们的函数 $Z=g(X, Y)$ 的分布？

两个随机变量的函数的分布

语文 + 数学



$$\text{BMI指数} = \frac{\text{体重（KG）}}{[\text{身高（M）}]^2}$$



两个随机变量的函数的分布

二维随机变量 (X, Y)的联合分布$F(x,y)$与X,Y的函数，如$X+Y$、$\max\{X,Y\}$、 $\min\{X,Y\}$等的分布之间有什么关系？

设二维离散型随机变量 (X, Y)的分布律为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$$

则随机变量$Z=g(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{z_k=g(x_i,y_j)}P\{X=x_i,Y=y_j\},\ k=1,2,\cdots$$

02

$Z = X + Y$ 的分布

$Z = X + Y$ 的分布

例 若 X、Y独立，$P(X=k)=a_k$，k=0,1,2,…，
$P(Y=k)=b_k$，k=0,1,2,…，
求 $Z=X+Y$的分布律。

解：

$$P(Z=r)=P(X+Y=r)$$

$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i, Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i)P(Y=r-i)$$

$$=a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \ldots + a_r b_0 \quad r=0,1,2,\ldots$$

$Z = X + Y$ 的分布

例 若X和Y相互独立，它们分别服从参数为λ_1,λ_2的泊松分布，证明 $Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布。

解： 依题意有 $P(X=i)=\dfrac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{\,i}}{i!},\ i=0,1,2,\ldots$

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{\,j}}{j!},\ j=0,1,2,\ldots$$

于是，$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$

$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$

$Z=X+Y$ 的分布

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\mathrm{r-i}}}{(\mathrm{r-i})!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{\mathrm{r}!}{\mathrm{i}!(\mathrm{r-i})!}\lambda_1^{\mathrm{i}}\lambda_2^{\mathrm{r-i}}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^r,\ r=0,1,2,\dots$$

即Z服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

$Z=X+Y$ 的分布

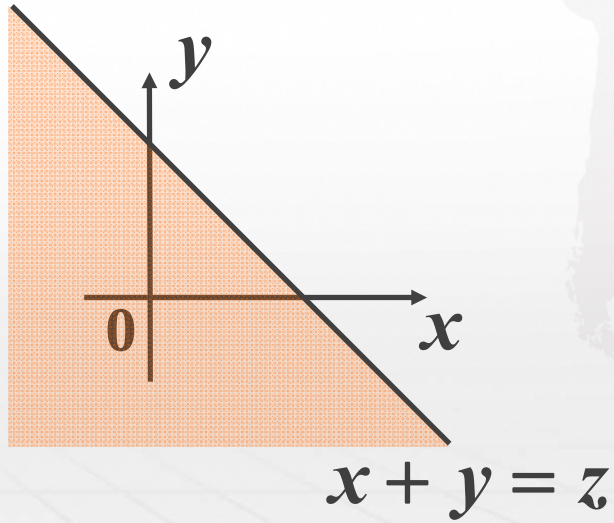
例 设X和Y的联合密度为$f(x,y)$，求 $Z=X+Y$的概率密度。

解： $Z=X+Y$的分布函数是：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$

$$=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

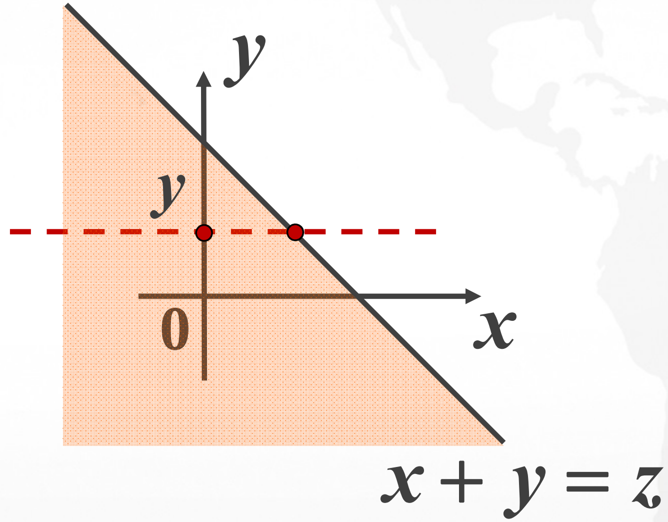


这里，积分区域 $D=\{(x,y): x+y\le z\}$

即直线 $x+y=z$ 及其左下方的半平面。

$Z = X + Y$ 的分布

$$F_Z(z) = \iint\limits_{x+y \le z} f(x, y)dxdy$$



化成累次积分，得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)dx]dy$$

固定z和y，对方括号内的积分作变量代换，令 $x=u-y$，得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{z} f(u-y, y)du]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{z} [\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y, y)dy]du$$

$Z = X + Y$ 的分布

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} [\int_{-\infty}^{\infty} f(u - y, y) dy] du$$

由概率密度与分布函数的关系,

可得 $Z = X + Y$ 的概率密度为:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy$$

由 X 和 Y 的对称性，$f_Z(z)$ 又可写成

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx$$

以上两式就是**两个随机变量和的概率密度的一般公式**。

$Z=X+Y$ 的分布

特别地，当X和Y独立时，设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为$f_X(x)$，$f_Y(y)$，则上述两式化为:

$$\begin{cases} f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \end{cases}$$

卷积公式

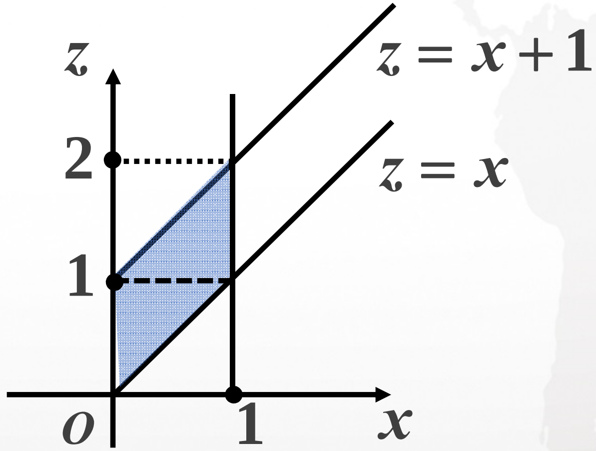
当随机变量X和Y相互独立时，可直接用卷积公式来求 $Z=X+Y$的概率密度。

$Z = X + Y$ 的分布

例 若 X 和 Y 独立，具有共同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度。



解： 由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

为确定积分限，先找出使被积函数不为 0 的区域

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}，即\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}，也即\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le z\le x+1\end{cases}$$

Z=X+Y 的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

当$z<0$或$z\geq 2$时，$f_Z(z)=0.$

当 $0\leq z<1$ 时，

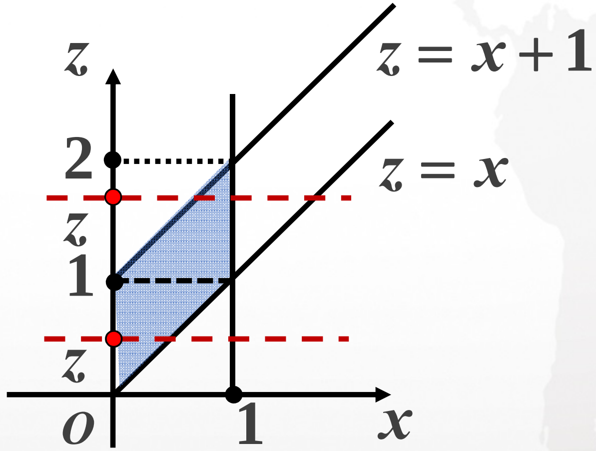
$$f_Z(z)=\int_0^z dx=z$$

当$1\leq z<2$时，

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^1 dx=2-z$$

于是

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0\leq z<1, \\ 2-z, & 1\leq z<2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$



$Z = X + Y$ 的分布

泊松分布的可加性：

设 $X \sim \pi(\lambda_1)$, $Y \sim \pi(\lambda_2)$, X和Y相互独立，

则 $X + Y \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$

二项分布的可加性：

设 $X \sim B(m, p)$, $Y \sim B(n, p)$, X和Y相互独立，

则 $X + Y \sim B(m + n, p)$

- 二项分布可看作一系列0-1分布之和。
- 泊松分布是二项分布当n趋向正无穷时的极限

$Z = X + Y$ 的分布

正态分布的可加性

若 X 和 Y 独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

则 $Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

n个独立正态变量之和服从正态分布：

若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$且相互独立,

则它们的和 $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$仍然服从正态分布

且有 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2)$

有限个独立正态变量的线性组合仍然服从正态分布