概率论与数理统计

乘法公式

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

条件概率

由条件概率的定义：

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

若已知P(B)，P(A|B)时，可以反求P(AB)。

即　若$P(B)>0$，则 $P(AB) = P(B)\,P(A|B)$　　(2)

条件概率

将A、B的位置对调，有

若　　$P(A)>0$，则$P(BA)=P(A)P(B|A)$

而　　$P(AB)=P(BA)$

故　　$P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$　　(3)

乘法公式

例2：甲、乙两厂共同生产1000个零件，其中 300件是乙厂生产的。而在这300个零件中，有189个是标准件，现从这1000个零件中任取一个，问这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少?

设 $B=\{$零件是乙厂生产$\}$,

$A=\{$是标准件$\}$

所求为$P(AB)$.

300个
乙厂生产

189个
标准件

甲、乙共生产
1000 个

乘法公式

例2：甲、乙两厂共同生产1000个零件，其中 300件是乙厂生产的。而在这300个零件中，有189个是标准件，现从这1000个零件中任取一个，**发现它是乙厂生产，它是标准件的概率是多少?**

设 B = {零件是乙厂生产},

A = {是标准件}

求的是 P(A|B) .

300个
乙厂生产

189个
标准件

甲、乙共生产
1000 个

B 发生，
在$P(A B)$中作为结果；
在$P(A|B)$中作为条件。

乘法公式

例3：设某种动物由出生算起活到20 年以上的概率为0.8，活到25年以上的概率为0.4。问现年20岁的这种动物，它能活到25岁以上的概率是多少?

解　设 $A=\{$能活20年以上$\}$，$B=\{$能活25年以上$\}$

所求为 $P(B|A)$.

依题意，$P(A)=0.8$, $P(B)=0.4$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$$

乘法公式

条件概率P(A|B)与P(A)的区别

每一个随机试验都是在一定条件下进行的，设 A 是随机试验的一个事件，则 $P(A)$ 是在该试验条件下事件 A 发生的可能性大小。

而条件概率 $P(A|B)$ 是在原条件下又添加“B 发生”这个条件时 A 发生的可能性大小，即 $P(A|B)$ 仍是概率。

P(A) 与 P(A |B) 的区别在于两者发生的条件不同，它们是两个不同的概念，在数值上一般也不同。

乘法公式

乘法定理可以推广到多个事件的积事件的情况 .

设 A、B、C 为三个事件 ,且 $P(AB)>0$,则

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A).$$

一般地 ,设有 n 个事件 $A_1,A_2,\ \ldots,A_n$,$n\geq 2$, 并且

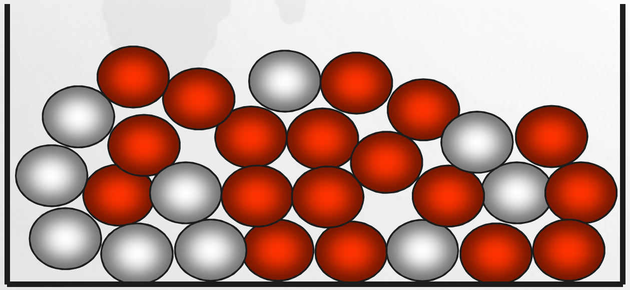
$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$,则由条件概率的定义 ,可得

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n\text{-}1})P(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n\text{-}2})\ldots$$

$$\cdot P(A_3\mid A_1A_2)P(A_2\mid A_1)P(A_1)$$

应用举例

波里亚罐子模型

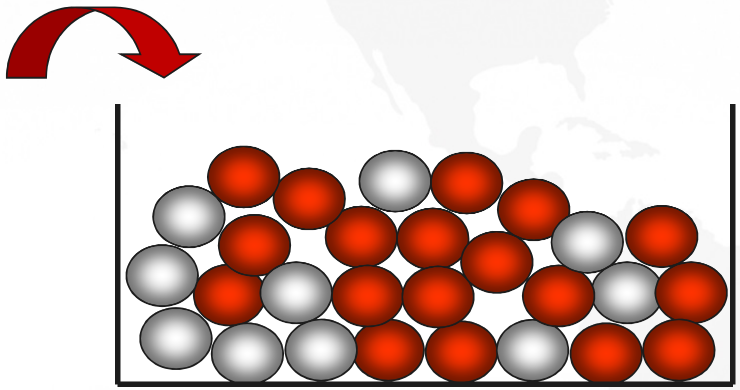


b 个白球，r 个红球

一个罐子中包含 b 个白球和 r 个红球。随机地抽取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进 c 个与所抽出的球具有相同颜色的球。这种手续进行四次。试求第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率。

应用举例

随机取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进 c 个与所抽出的球具有相同颜色的球。

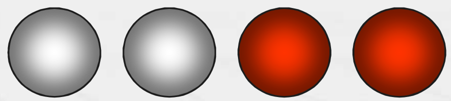


b 个白球，r 个红球

解：设 W_i={第i次取出是白球}， i=1,2,3,4

R_j={第j次取出是红球}， j=1,2,3,4

于是 $W_1\ W_2\ R_3\ R_4$ 表示事件“连续取四个球，第一、第二个是白球，第三、四个是红球“



应用举例

用乘法公式容易求出

$$P(W_1W_2R_3R_4)=P(W_1)P(W_2|W_1)P(R_3|W_1W_2)P(R_4|W_1W_2R_3)$$

$$=\frac{b}{b+r}\frac{b+c}{b+r+c}\frac{r}{b+r+2c}\frac{r+c}{b+r+3c}$$

当 $c>0$ 时，由于每次取出球后会增加下一次也取到同色球的概率。这是一个传染病模型。每次发现一个传染病患者，都会增加再传染的概率。

应用举例

一场精彩的足球赛将要举行， 5 个球迷好不容易才搞到一张入场券。大家都想去，只好用抽签的来解决。

应用举例

我们用A_i表示“第 i 个人抽到入场券” $i = 1, 2, 3, 4, 5$。

则 $\overline{A}_i$ 表示“第 i 个人未抽到入场券”

显然，$P(A_1)=1/5$，$P(\overline{A}_1) = 4/5$

也就是说，第1个人抽到入场券的概率是1/5。

由于 $A_2 = \overline{A}_1 A_2$

因为若第2个人抽到了入场券，第1个人肯定没抽到。

由乘法公式

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 | \overline{A}_1)$$

应用举例

也就是要想第2个人抽到入场券，必须第1个人未抽到，计算得： $P(A_2)=(4/5)(1/4)=1/5$

同理，第3个人要抽到“**入场券**”，必须第1、第2个人都没有抽到。因此

$$P(A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=(4/5)\,(3/4)\,(1/3)=1/5$$

继续做下去就会发现，每人抽到“**入场券**”的概率都是1/5。

应用举例

例4 设袋中有 5 个红球 ,3 个黑球 ,2 个白球 , 试按

(1) 有放回抽样 ;

(2) 不放回抽样;

两种方式摸球三次每次摸得一球 ,求第三次才摸得白球的概率。

解 设 $A=\{$第一次未摸得白球$\}$, $B=\{$第二次未摸得白球$\}$,

$C=\{$第三次摸得白球$\}$.

则事件 "第三次才摸得白球 " 可表示为 ABC .

应用举例

(1) 有放回抽样

$$P(A)=\frac{8}{10}, \quad P(B|A)=\frac{8}{10}, \quad P(C|AB)=\frac{2}{10},$$

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{16}{125}.$$

(2) 无放回抽样

$$P(A)=\frac{8}{10}, \quad P(B|A)=\frac{7}{9}, \quad P(C|AB)=\frac{2}{8},$$

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)=\frac{2}{8}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{8}{10}=\frac{7}{45}.$$

应用举例

例6 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 $\frac{1}{2}$，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率是 $\frac{7}{10}$，若前两次未打破，第三次落下打破的概率是 $\frac{9}{10}$，试求透镜落下三次未打破的概率．

应用举例

解　设 $A_i = \{透镜第\ i\ 次落下打破\}$,$i=1,2,3$,

$B=\{透镜落下三次未打破\}$,则 $B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

$$P(B)=P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2|\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{9}{10}\right)$$

$$=\frac{3}{200}.$$

应用举例

本题也可以先求 $P(\overline{B})$,再由 $P(B)=1-P(\overline{B})$ 求得 $P(B)$.

由于 $\overline{B}=A_1\cup\overline{A_1}A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, 并且 $A_1,\overline{A_1}A_2,\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 为两两不相容事件 ,故有

$$P(\overline{B})=P\left(A_1\cup\overline{A_1}A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=P(A_1)+P\left(\overline{A_1}A_2\right)+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)$$

$$=\frac{1}{2}+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2|\overline{A_1}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}|\overline{A_1}\right)P\left(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{10}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)=\frac{197}{200}.$$

所以 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{197}{200}=\frac{3}{200}$.

应用举例

例7（抓阄问题） 1995 年全国足球甲 A 联赛的最后一轮，四川全兴队与解放军八一队的比赛在成都市进行，这场比赛是关系到四川全兴队是否降级的命运之战，肯定会异常精彩，可西南交大某班30位同学仅购得一张票，大家都想去看，只好采取抓阄的办法抽签决定，每个人都争先恐后地抽取。

试问：每人抽得此票的机会是否均等?

应用举例

解 设 $A_i=\{$第 i 个人抽得球票$\}$ $,i=1,2,\ldots,30$, 则

第一个人抽得球票的概率为 $P(A_1)=\dfrac{1}{30}$

第二个人抽得球票的概率为

$$P(A_2)=P(A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)$$

$$=0+P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{29}{30}\cdot\frac{1}{29}=\frac{1}{30}$$

应用举例

同理 ,第 i 个人要抽得比赛球票 ,必须在他抽取之前的 $i-1$ 个人都没有抽到此标的事件一起出现 ,即

$$P(A_i)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{i-1}A_i)$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)\ldots P(A_i\mid\overline{A}_1\ldots\overline{A}_{i-1})$$

$$=\frac{29}{30}\cdot\frac{28}{29}\cdots\cdot\frac{1}{30-(i-1)}=\frac{1}{30}\ ,\ i=1,2,\ldots,30\ .$$

所以 ,各人抽得此票的概率都是 $\frac{1}{30}$,即机会均等。

谢 谢 大 家