概率论与数理统计

切比雪夫大数定律

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

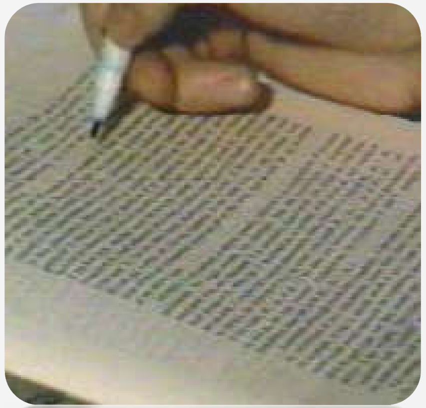
大数定律的客观背景

大量随机试验中

- 事件发生的频率稳定于某一常数
- 测量值的算数平均值具有稳定性

大量抛掷硬币正面出现频率

生产过程中的废品率



字母使用频率

一、大数定律

定理1（切比雪夫定理的特殊情况）

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，且具有相同的数学期望和方差：

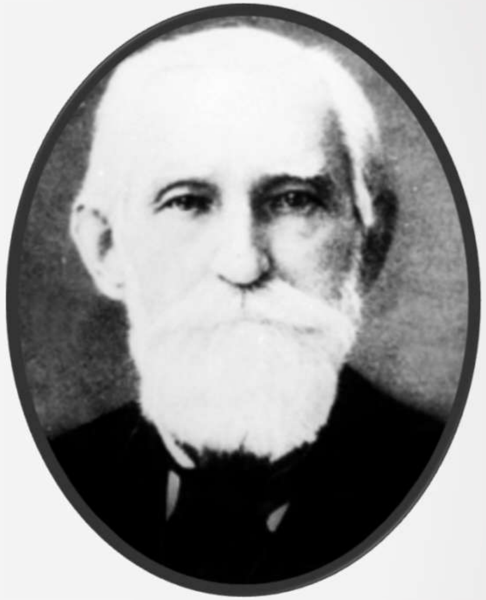
$$E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2 (k=1,2,\cdots).$$

做前 n 个随机变量的算术平均 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$

则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$$



切比雪夫

证：由于 $$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

由切比雪夫不等式

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2}$$

上式中令 $n\to\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$$

说明

1、定理中$\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}$是指一个随机事件，当$n\to\infty$时，这个事件的概率趋于1.

2、定理以数学形式证明了随机变量$X_1,\cdots X_n$的算术平均$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$接近数学期望E（$X_k$）$=\mu$（$k=1,2\cdots,n$），这种接近说明其具有的稳定性.

这种稳定性的含义说明算术平均值是依概率收敛的意义下逼近某一常数.

二、依概率收敛定义及性质

定义

设$Y_1,Y_2,\cdots Y_n,\cdots$是一个随机变量序列，$a$是一个常数。若对于任意正数$\varepsilon$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{Y}_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

则称序列$Y_1,Y_2,\cdots Y_n,\cdots$依概率收敛于$a$.记为$Y_n \xrightarrow{P} a.$

性质

设$X_n \xrightarrow{P} a$，$Y_n \xrightarrow{P} b$,又设函数$g(x,y)$在点(a,b)连续，

则$g(X_n,Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b)$。

二、依概率收敛定义及性质

请注意：

$\{X_n\}$依概率收敛于a，意味着对任意给定的$\varepsilon>0$，当n充分大时，事件$|X_n-X|<\varepsilon$的概率很大，接近于1；并不排除事件$|X_n-X|\geq\varepsilon$的发生，而只是说他发生的可能性很小。

依概率收敛比高等数学中的普通意义下的收敛弱些，它具有某种不确定性。

二、依概率收敛定义及性质

定理1的另一种叙述形式

设随机变量X_1，$X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，且具有相同的数学期望和方差：$E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 (k = 1, 2, \cdots)$，则序列$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$依概率收敛于$\mu$，即$\overline{X} \xrightarrow{P} \mu$。

谢 谢 大 家