概率论与数理统计

等可能概型(古典概型)

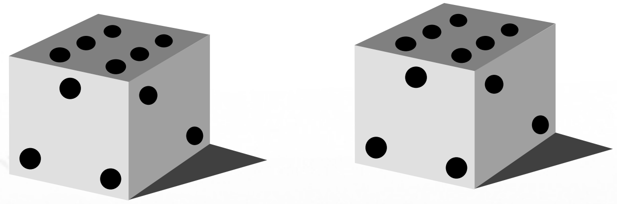
主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

一、古典概型的定义

先看一个例子： 将一颗均匀骰子连掷两次，

设 A={第二次掷出6点}，
B={第一次掷出6点}，



显然 $P(A|B)=P(A)$

这就是说，**已知事件B发生，并不影响事件A发生的概率，**

这时称事件A、B独立。

一、古典概型的定义

古典概型

我们首先引入的计算概率数学模型，是在概率论的发展过程中最早出现的研究对象。

假定某个试验有有限个可能的结果

$$e_1, e_2, \ldots, e_N,$$

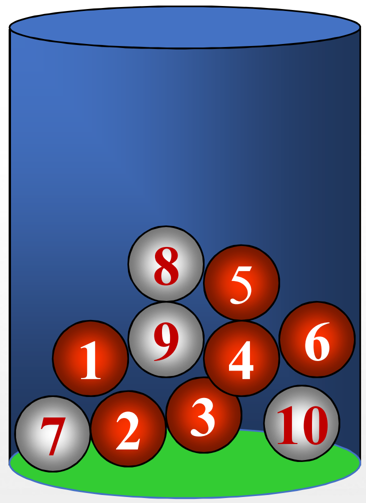
一、古典概型的定义

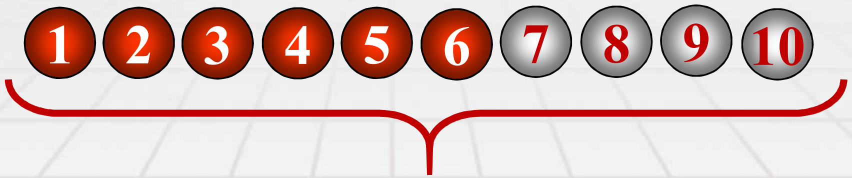
“等可能的”试验结果

假定从该试验的条件及实施方法上去分析，我们找不到任何理由认为其中某一结果例如 e_i，比任一其它结果。例如 e_j，更有优势，则我们只好认为所有结果在试验中有同等可能的出现机会，即$1/N$的出现机会。

一、古典概型的定义

例如：一个袋子中装有10 个大小、形状完全相同的球。将球编号为1 - 10。把球搅匀，蒙上眼睛，从中任取一球。





10个球中的任一个被取出的机会都是1/10

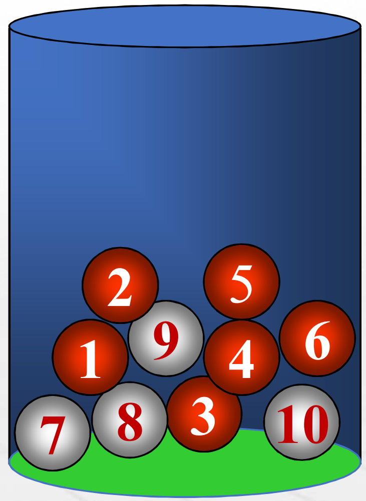
一、古典概型的定义

我们用 i 表示取到 i 号球， $i=1,2,\ldots,10$ 。

则该试验的样本空间

$$S=\{1,2,\ldots,10\},$$

如 $i=2$



且每个样本点（或者说基本事件）出现的可能性相同。称这样一类随机试验为**古典概型**。

一、古典概型的定义

定义 1

若随机试验满足下述两个条件：

1. 它的样本空间只有有限多个样本点；

2. 每个样本点出现的可能性相同。

称这种试验为**等可能随机试验**或**古典概型**。

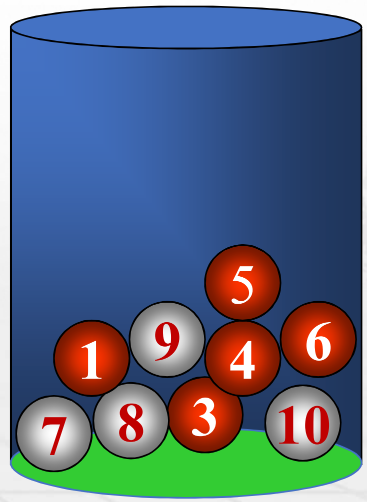
二、古典概型中事件概率的计算

记 A={摸到2号球}　$P(A)=?$

$P(A)=1/10$

记 B={摸到红球}　$P(B)=?$

$P(B)=6/10$



二、古典概型中事件概率的计算

记 B={摸到红球}，$P(B)=6/10$

这里实际上是从“比例” 静态

转化为“概率” 动态

当我们要求“摸到红球”的概率时，只要找出它在静态时相应的比例。

二、古典概型中事件概率的计算

设古典概率 E 的样本空间为 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\})$$

又由于基本事件是两两互不相容的. 于是

$$1 = P(S) = P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_n\})$$

$$= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + P(\{e_n\}) = nP(\{e_i\})$$

所以 $P(\{e_i\}) = \dfrac{1}{n}, i = 1, 2, \cdots, n$.

二、古典概型中事件概率的计算

若事件 A 包含 k 个基本事件，即

$$A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\}$$

则有 $$P(A)=P(\{e_{i_1}\})+P(\{e_{i_2}\})+\cdots+P(\{e_{i_k}\})$$

$$=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中的基本事件总数}}$$

这也是古典概型等可能性的一般表示了。

二、古典概型中事件概率的计算

例1 将一枚硬币抛掷三次.

(i) 设事件 A_1 为"恰有一次出现正面",求 $P(A_1)$.

(ii) 设事件 A_2 为"至少有一次出现正面",求 $P(A_2)$.

解题思路

静态 ⟶ **动态**

样本空间 ⟶ **基本事件**

二、古典概型中事件概率的计算

例1 将一枚硬币抛掷三次.

(i) 设事件 A_1 为"恰有一次出现正面",求 $P(A_1)$.

(ii) 设事件 A_2 为"至少有一次出现正面",求 $P(A_2)$.

解 此试验的样本空间为:

$$S=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}.$$

而 $A_1=\{HTT,THT,TTH\}$, 所以 $P(A_1)=\dfrac{3}{8}$.

$A_2=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH\}$. $P(A_2)=\dfrac{7}{8}$.

二、古典概型中事件概率的计算

古典概型

1. 有放回抽样法
2. 不放回抽样法

二、古典概型中事件概率的计算

例2 从有 9 件正品、3 件次品的箱子中任取两次，每次取一件，试分别以：

(1) 有放回抽样法：即每次抽取的产品观察后放回；

(2) 不放回抽样法：即每次抽取产品观察后不放回；

两种抽样方式求事件 $A=\{\text{取得两件正品}\}$，

$B=\{\text{第一次取得正品,第二次取得次品}\}$，

$C=\{\text{取得一件正品一件次品}\}$，

的概率.

二、古典概型中事件概率的计算

解 (1) 采取有放回抽样 .

从箱子中任取两件产品 ,每次取一件 ,取法总数为 12^2. 即样本空间中所含的基本事件数为 12^2 .

事件 A 中所含有的基本事件数为 $C_9^1C_9^1=9^2$.

所以 $$P(A)=\frac{9^2}{12^2}=\frac{9}{16}$$

二、古典概型中事件概率的计算

事件 B 中所含有的基本事件数为 $\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_3^1=9\cdot 3$.

所以 $$P(B)=\frac{9\cdot 3}{12^2}=\frac{3}{16}$$

事件 C 中所含有的基本事件数为 $\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_9^1=9\cdot 3+3\cdot 9=54$.

所以 $$P(C)=\frac{54}{12^2}=\frac{3}{8}$$

二、古典概型中事件概率的计算

(2) 采取不放回抽样 .

从箱子中任取两件产品 ,每次取一件 ,取法总数为 $12\cdot11$. 即样本空间中所含有的基本事件总数为 $12\cdot11$.

事件 A 中所含有的基本事件数为 $C_9^1C_8^1=9\cdot8$.

所以
$$P(A)=\frac{9\cdot8}{12\cdot11}=\frac{6}{11}$$

二、古典概型中事件概率的计算

事件 B 中所含有的基本事件数为 $C_9^1C_3^1=9\cdot 3$.

所以 $$P(B)=\frac{9\cdot 3}{12\cdot 11}=\frac{9}{44}.$$

事件 C 中所含有的基本事件数为 $C_9^1C_3^1+C_3^1C_9^1=9\cdot 3+3\cdot 9$.

所以 $$P(C)=\frac{9\cdot 3+3\cdot 9}{12\cdot 11}=\frac{9}{22}.$$

谢 谢 大 家