厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期中试题 B

考试日期：2013.11　　信息学院自律督导部整理

一、解答题（共 76 分）

1、计算下列各题：（每题 6 分，共 30 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n})$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{e}^{-x^2}-\cos\sqrt{2}x}$

（3）求函数 $y=(2+\cos x)^x+\dfrac{1-x}{1+x}\arcsin\sqrt{1-x^2}, (0<x<1)$ 的导数。

（4）求函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 。

（5）设 $f(x)=(x^2+x+1)\cos x$，求 $f^{(10)}(0)$.

2、(8 分)求函数 $y=\dfrac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型（说明理由）。

3、(6 分)设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-y\mathrm{e}^{xy}=2$ 所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程和法线方程。

4、（8 分）设 $f(x)=\begin{cases} a+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ b, & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}, & x<0 \end{cases}$，试问

（1）a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续？（2） $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导?

5、（8 分）讨论函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 的单调性，并求出该函数在实数范围内的极值和最值。

6、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x-1}=2$，求：（1） $f'(0)$；（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\tan x-\sin x)}{x\ln(1+x^2)}$.

7、（8 分）设 $x_0=\sqrt{2}$， $x_n=\sqrt{2}+\dfrac{x_{n-1}-1}{\sqrt{2}+x_{n-1}}$ （ $n=2,3,\cdots$ ），证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

二、应用题（10 分）

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P，使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积最小。

三、证明题（每题 7 分，共 14 分）

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任意一点 x 有 $0\le f(x)\le 1$，证明在 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$.

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $4f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.