厦门大学《微积分Ⅰ-1》期末试题·答案

考试日期：2017 年 1 月　　信息学院自律督导部

一、求下列的定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int_0^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

解：令 $t=\sqrt{x}$，则 $\int_0^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}t^2}{1+t} = \int_0^2 \dfrac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^2 2\mathrm{d}t - \int_0^2 \dfrac{2}{1+t}\mathrm{d}t$

$= 4 - 2\ln|t+1|\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3$

2. $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2} + x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$

解法一：注意到 $x\ln(1+x^2)$ 在 $[-3,3]$ 为奇函数，所以 $\int_{-3}^{3} x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x = 0$，

利用定积分的几何意义，知 $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = \dfrac{9}{2}\pi$，因此

利用定积分的几何意义，知 $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = \dfrac{9}{2}\pi$，因此

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\pi + 0 = \frac{9}{2}\pi$$

解法二：$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\mathrm{d}(3\sin t) = 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \dfrac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2t\mathrm{d}t$

$$= \frac{9}{2}\pi + \frac{9}{4}\sin 2t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\pi$$

$$\int_{-3}^{3} x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} \ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2) = \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)\Big|_{-3}^{3} - \int_{-3}^{3}(1+x^2)\mathrm{d}\ln(1+x^2)$$

$$= 0 - \int_{-3}^{3} 2x\mathrm{d}x = -x^2\Big|_{-3}^{3} = 0$$

$$\therefore \int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\pi+0=\frac{9}{2}\pi$$

3. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$

解法一：$\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} x\sin x\cdot|\cos x|\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cdot\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin x\cdot\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$$

解法二：$\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\cdot|\cos x|\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cdot\cos x\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{\pi}{4}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{\pi}{8}(-\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi})$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot(2+2)=\frac{\pi}{2}$$

二、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

1. $\int\sec^4\mathrm{d}x$

解： $\int\sec^4 x\mathrm{d}x=\int(1+\tan^2 x)\mathrm{d}\tan x=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$

2. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

解：令 $x=\tan t$， $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{1+x^2}=\sec t$，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}(\tan t)}{\tan^2 t\cdot\sec t}=\int\frac{\sec t}{\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=-\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

三、（8 分）求反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\mathrm{d}x$。

解法一： $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t(t^3+1)}\mathrm{d}t^3=\int_0^{+\infty}\frac{3t}{t^3+1}\mathrm{d}t$

$$\because\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t\overset{u=\frac{1}{t}}{=}\int_{+\infty}^{0}\frac{\frac{1}{u}\cdot u^2}{u^3+1}\cdot(\frac{-1}{u^2})\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^3+1}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t$$

$$\therefore\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}+\frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t+1}{t^3+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\mathrm{d}(t-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

因此，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\mathrm{d}x=3\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$。

解法二：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t(t^3+1)}\mathrm{d}t^3=\int_0^{+\infty}\frac{3t}{t^3+1}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{3t}{t^3+1}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$=(\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}})\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\text{。}$$

四、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续，且满足：

$$f(x)=e^x+\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x\text{，试求 }f(x)\text{。}$$

解：令 $a=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$，则 $f(x)=e^x+a$，因此

$$a=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x f(x)=\int_0^{\pi} e^x\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} a\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\big|_0^{\pi}-a\cos x\big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)+2a$$

解得 $a=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$，因此，$f(x)=e^x-\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$。

五、计算下列极限：（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{d}\ln(1+x)$

$$=\ln 2-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-\int_0^1 1-\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-1+\ln(1+x)\big|_0^1=2\ln 2-1$$ 。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x (x-t)\cos t^2\mathrm{d}t}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x (x-t)\cos t^2\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\cdot e^{x^2}}{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t+x\cos x^2-x\cos x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\cdot e^{x^2}}{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{\cos x^2}=2$$

六、（9 分）求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 的通解。

解：原微分方程整理为 $y'+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1}{x}$，因此其通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}(C+\int\frac{1}{x}e^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)=\frac{1}{\ln x}(C+\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x)=\frac{1}{\ln x}[C+\frac{1}{2}(\ln x)^2]=\frac{1}{2}\ln x+\frac{C}{\ln x}$$

七、（10 分）求微分方程 $y''-y=2(e^x+\cos x)$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=2$ 的特解。

解：原微分方程的特征方程为 $r^2-1=0$，解得特征根 $r_1=-1,r_2=-1$，因此可令微分方程的一个特解为 $y^*=axe^x+b\cos x+c\sin x$，代入原微分方程求得 $a=1,b=-1,c=0$。故微分方

程的特解为 $y = xe^x - \cos x + C_1 e^{-x} + C_2 e^x$。又 $y(0)=0, y'(0)=2$，从而

$y(0) = -1 + C_1 + C_2 = 0, y'(0) = 1 - C_1 + C_2 = 2$，解得 $C_1 = 0, C_2 = 1$，因此满足初始条件微分方程的特解为 $y = xe^x - \cos x + e^x$。

八、(10 分)有一向上凹的光滑曲线在原点与 x 轴相切，且该曲线在任一点(x, y)处的曲率为 e^{-y}，求该曲线的方程 $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$。

解：令该曲线方程为 $y = y(x), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$，则由题意得 $y'' > 0$， $y(0)=0, y'(0)=0$ 且

$\frac{|y''|}{(\sqrt{1+(y')^2})^3} = e^{-y}$，因此问题转化为求解微分方程 $\frac{y''}{(\sqrt{1+(y')^2})^3} = e^{-y}, y(0)=0, y'(0)=0$。

令 $P(y) = y'$, 则 $\frac{P}{(\sqrt{1+P^2})^3}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = e^{-y}$，整理得 $\frac{P}{(\sqrt{1+P^2})^3}\mathrm{d}P = e^{-y}\mathrm{d}y$，两边不定积分，

$\int \frac{P}{(\sqrt{1+P^2})^3}\mathrm{d}P = \int e^{-y}\mathrm{d}y$，从而 $\frac{1}{\sqrt{1+P^2}} = e^{-y} + C_1$，又 $P(0)=0$，得 $C_1 = 0$, 故有

$\frac{1}{\sqrt{1+P^2}} = e^{-y}$，求得 $y' = \pm\sqrt{e^{2y}-1}$，整理得 $\frac{1}{\sqrt{e^{2y}-1}}\mathrm{d}y = \pm\mathrm{d}x$，两边不定积分得，

$-\int \frac{\mathrm{d}e^{-y}}{\sqrt{1-(e^{-y})^2}} = \pm\int \mathrm{d}x$，从而 $-\arcsin e^{-y} = \pm x + C_2$，又 $y(0)=0$，得 $C_2 = -\frac{\pi}{2}$，故有

$\frac{\pi}{2} - \arcsin e^{-y} = \pm x$，因此，该曲线方程为 $y = \ln\sec x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$。

九、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加，试证：对于任何的 $b > a > 0$，有 $b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x < 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$ 。

证明：令 $F(x) = 2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t - x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，

且对于任意的 $x \in (a,b)$，有 $F'(x) = 2xf(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - xf(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

$$\overset{\text{积分中值定理}}{=} xf(x) - xf(\xi) \quad (0 < \xi < x) = x[f(x) - f(\xi)] > 0$$

从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，因此 $F(b) > F(a) = 0$，得证。

十、（5 分）设非负函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ $(a > 0)$ 上连续，且对任意给定的 $x \in [0,a]$，均

有 $f(x) \le \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，试证： $f(x) \equiv 0$， $\forall x \in [0,a]$。

证法一：令 $F(x) = e^{-x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [0,a]$，则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上可导， $F(x) \ge 0$，且对于任意的 $x \in [0,a]$，有 $F'(x) = e^{-x}[f(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t] \le 0$，从而 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上不增，因此 $F(x) \le F(0) = 0$，故 $F(x) \equiv 0, x \in [0,a]$，即有 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \equiv 0, x \in [0,a]$，求导得 $f(x) \equiv 0$，$x \in [0,a]$。

证法二：因为非负函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ $(a > 0)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上取到最大值（令其为 M），即有 $0 \le f(x) \le M$。又因为对任意给定的 $x \in [0,a]$，均有 $f(x) \le \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，故 $f(x) \le \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \le Mx$，进一步又有 $f(x) \le \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \le \int_0^x Mt\mathrm{d}t = \frac{M}{2}x^2$，利用不等式 $f(x) \le \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 一直递推下去，可以得到对于任意的自然数 n,都成立 $f(x) \le \frac{M}{n!}x^n$，从而 $0 \le f(x) \le \frac{Ma^n}{n!}$，令 $n \to \infty$，注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$，因此 $f(x) \equiv 0$， $\forall x \in [0,a]$。