概率论与数理统计

估计量的评选标准

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

前言 Introduction

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- 样本均值是否是 μ 的一个好的估计量?
- 样本方差是否是 σ^2 的一个好的估计量?

前言 Introduction

估计量的评选标准

评价一个估计量的好坏，不能仅仅依据一次试验的结果，而必须由多次试验结果来衡量。

前言 Introduction

常用的标准：

1．无偏性

2．有效性

3．相合性

01

无偏性

一、无偏性

估计量是随机变量，对于不同的样本值会得到不同的估计值。我们希望估计值在未知参数真值附近摆动，而它的期望值等于未知参数的真值。这就导致无偏性这个标准。

设 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta})=\theta$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计。

一、无偏性

- 无偏性是对估计量的一个常见而重要的要求。
- 无偏性的实际意义是指没有系统性的偏差。

一、无偏性

例1 设总体 X 服从参数为θ 的指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中$\theta>0$ 为未知, $X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体的一个样本，

试证 $\bar{X}$ 和 $Z=\min(X_1,\ldots,X_n)$ 都是参数 θ 的无偏估计量。

一、无偏性

证 $E(X)=\theta, E(\overline{X})=\theta$ 所以$\overline{X}$是参数 θ 的无偏估计量。

而 $Z=\min(X_1,\ldots,X_n)$ 具有概率密度

$$f_{\min}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-nx/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

故知 $E(Z)=\dfrac{\theta}{n}, E(nZ)=\theta$

即 nZ 也是参数 θ 的无偏估计量。

02

有 效 性

二、有效性

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$

都是参数 θ 的无偏估计量，若对任意 $\theta\in\Theta$，

$$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$$

且至少对于某个 $\theta\in\Theta$ 上式中的不等号成立，

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效。

二、有效性

例2 (续例1) 试证：

当 $n>1$ 时 θ 的无偏估计量 $\bar{X}$ 较 $Z=\min(X_1,\ldots,X_n)$ 有效。

证： $D(X)=\theta^2$，故有 $D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\theta^2}{n}$

而 $D(Z)=\frac{\theta^2}{n^2}$，故有 $D(nZ)=\theta^2$.

当 $n>1$ 时，$D(nZ)>D(\overline{X})$，故 $\bar{X}$ 较 nZ 有效。

03

相 合 性

三、相合行

设 $\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ 是参数 θ 的估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，当 $n\to\infty$ 时 $\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量。

$\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量。

$\Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1, \theta\in\Theta$

三、相合行

由辛钦定理

若总体 X 的数学期望$E(X)=\mu$ 有限，

则有 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)=\mu_k \; (k=1,2,\cdots)$

$$g(A_1,A_2,\cdots,A_k)\xrightarrow{P} g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$$

其中 g 为连续函数。

三、相合行

故

$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 为$E(X^k) = \mu_k\ (k=1,2,\ldots)$ 的相合估计量。

若 g 为连续函数，则有$g(A_1, A_2, \ldots, A_k)$为 $g(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$

的相合估计量。

04

归纳总结

四、归纳总结

对于一个未知参数可以提出不同的估计量，因此自然提出比较估计量的好坏的问题，这就需要给出评定估计量好坏的标准。

谢 谢 大 家