厦门大学《高等数学 I-1》期中试题 A·答案

考试日期：2013.11　　信息学院自律督导部整理

一、解答题（共 76 分）

1、计算下列各题：（每题 6 分，共 30 分）

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x}{x-\sin x}}$；

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x}{x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{x}{x-\sin x}\ln(1+x^2)}$，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-\sin x}\ln(1+x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=6,$$

故　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x}{x-\sin x}}=\mathrm{e}^6$.

（2）设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，试求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$；

解　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0f(x)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-xf(x_0)}{x-x_0}$

$$=x_0\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=x_0f'(x_0)-f(x_0).$$

（3）设 $y=y(x)$ 是由方程 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$ 所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

解　方程 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$ 两边关于 x 求导，得

$$\cos(xy)(y+xy')-\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y-(x+1)y'}{y^2}=0,$$

令 $x=0$，由 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$ 解得 $y=\mathrm{e}$，则 $y'(0)=\mathrm{e}-\mathrm{e}^2$. 于是，曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为

$$y-\mathrm{e}=(\mathrm{e}-\mathrm{e}^2)x，即 y+(\mathrm{e}-\mathrm{e}^2)x=\mathrm{e}.$$

(4) 设 $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}+(1+x^2)^{\sin x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})+(1+x^2)^{\sin x}\cdot[\cos x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x\sin x}{1+x^2}]$.

(5) 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f^{(10)}(x)$；

解：$f^{(10)}(x)=x^2\cdot\dfrac{(-1)^9\cdot 9!}{(1+x)^{10}}+10\times 2x\dfrac{(-1)^8\cdot 8!}{(1+x)^9}+\dfrac{10\times 9}{2}\times 2\dfrac{(-1)^7\cdot 7!}{(1+x)^8}$

$$=-\frac{7!}{(1+x)^{10}}[72x^2-160x(1+x)+90(1+x)^2]$$

2．(8 分)求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x(x^2-4)}, & x>0\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x\le 0\end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\pi x}{x(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\pi x}{x(x^2-4)}=-\dfrac{\pi}{4}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=0$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃间断点）；

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\pi x}{x(x^2-4)}=-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(2-x)\pi}{x(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\pi}{x(x^2-4)}=\dfrac{\pi}{8}$，所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点（可去间断点）；

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$，于是，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点（可去间断点）.

3．(8 分)设函数 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$；

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t+2$，方程 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1=0$ 两边对 t 求导，得

$$\mathrm{e}^y\sin t\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^y\cos t-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}$. 于是，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^y\cos t}{2(1-\mathrm{e}^y\sin t)(t+1)}=\dfrac{\mathrm{e}^y\cos t}{2(2-y)(t+1)}$.

当 $t=0$ 时，$x=0$，$y=1$，所以，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\mathrm{e}$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^y\cos t}{2(2-y)(t+1)}$ 对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(\mathrm{e}^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos t-\mathrm{e}^y\sin t)(2-y)(t+1)-\mathrm{e}^y\cos t\cdot[2-y+(t+1)(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})]}{2(2-y)^2(t+1)^2}\cdot\frac{1}{2t+2}$$

于是，$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\cdot[2-1-\mathrm{e}]}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{4}$.

4．(8 分)设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，试求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{x^4}$；

解 利用泰勒公式，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=3x^2+o(x^2)$，

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)^2+o((1-\cos x)^2)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{x^4}{4}}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{o((1-\cos x)^2)}{(1-\cos x)^2}\cdot\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}=\frac{3}{4}.$$

5．(6 分)求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+9$ 的单调区间和极值；

解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$，则当 $x>3$ 或 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<3$ 时，$f'(x)<0$.

于是，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 及 $(3,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-1,3)$ 内单调减少．$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，极大值为 $f(-1)=14$，在 $x=3$ 处取得极小值，极小值为 $f(3)=-18$.

6．(8 分)设 $0<x_1<2$，$x_n=\frac{4(1+x_{n-1})}{4+x_{n-1}}$（$n=2,3,\cdots$），证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明：（1）**先证明：**对 $n=1,2,\cdots$，$0<x_n<2$.

当 $n=1$ 时，上式成立，假设 $n=k$ 时，有 $0<x_k<2$，则当 $n=k+1$ 时，

$$0<x_{k+1}=\frac{4(1+x_k)}{4+x_k}=4-\frac{12}{4+x_k}<4-\frac{12}{4+2}=2.$$

（2）**证明：** $x_n>x_{n-1}$，$n=2,3,\cdots$.

事实上，$x_2-x_1=\frac{4(1+x_1)}{4+x_1}-x_1=\frac{4-x_1^2}{4+x_1}>0$，假设式子对 $n=k$ 成立，即 $x_k>x_{k-1}$，于是当 $n=k+1$ 时，

$$x_{k+1}-x_k=\frac{4(1+x_k)}{4+x_k}-\frac{4(1+x_{k-1})}{4+x_{k-1}}=\frac{12(x_k-x_{k-1})}{(4+x_k)(4+x_{k-1})}>0,$$

即 $x_{k+1}>x_k$.

所以，数列$\{x_n\}$单调增加，且$x_n < 2$，因此极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，记为$a$.

对$x_n = \dfrac{4(1+x_{n-1})}{4+x_{n-1}}$两边取极限，可得$a = \dfrac{4(1+a)}{4+a}$，即$a = \pm 2$.

因为$x_n > 0$，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

7.（8 分）设$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \end{cases}$，试讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性与可导性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$，故

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0,$$

故$f(x)$在$x=0$处连续.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 0,\quad f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

故$f(x)$在$x=0$处不可导.

二、应用题（10 分）

在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$内嵌入有最大面积的四边平行于椭圆轴的矩形，求该内接矩形的最大面积。

解：由对称性，可设四个顶点坐标为$(\pm x_0, \pm b\sqrt{1-\dfrac{x_0^2}{a^2}})$ ($x_0 > 0$).

因此，所求矩形面积为$s(x_0) = 2x_0 \cdot 2b\sqrt{1-\dfrac{x_0^2}{a^2}} = \dfrac{4b}{a} x_0\sqrt{a^2 - x_0^2}$.

此问题与求函数$f(x) = x^2(a^2 - x^2)$在$[0, a]$的最大值等价. 令$f'(x) = 2a^2x - 4x^3 = 0$，得

$$x = 0 \text{（不合题意，舍去）或者 } x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

因为$f''(\dfrac{a}{\sqrt{2}}) = 2a^2 - 12x^2 = 2a^2 - 6a^2 = -4a^2 < 0$，因此$f(x)$在$x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$处取得极大值，由于只有一个驻点，所以$f(x)$在$x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$处取得最大值.

故当 $x_0=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 时，该内接矩形的面积最大，最大面积为 $s(\dfrac{a}{\sqrt{2}})=\dfrac{4b}{a}\dfrac{a^2}{2}=2ab$.

三、证明题（共 14 分）

1、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=b$， $f(b)=a$，证明：

（1）在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $f(c)=c$；

（2）至少存在互异的两点 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

解：（1）做辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，由 $f(a)=b$， $f(b)=a$，得

$$F(a)=f(a)-a=b-a,\quad F(b)=f(b)-b=a-b,$$

故 $F(a)F(b)=-(b-a)^2<0$，由零点定理，在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$.

（2）由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,c)$ 和 $\eta\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{c-b}{c-a},\quad f'(\eta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{a-c}{b-c},$$

即
$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{a-c}{b-c}=1.$$

2、（6 分）证明：当 $x>0$ 时， $\mathrm{e}^x\geq x^{\mathrm{e}}$.

证明：因为 $x^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}\ln x}$，因此，只要证明：当 $x>0$ 时， $x\geq \mathrm{e}\ln x$ 即可.

作辅助函数 $f(x)=x-\mathrm{e}\ln x$，令 $f'(x)=1-\dfrac{\mathrm{e}}{x}=0$，得 $x=\mathrm{e}$.

当 $x>\mathrm{e}$ 时， $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调增加；当 $x<\mathrm{e}$ 时， $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调减少，因此 $f(x)=x-\mathrm{e}\ln x$ 在 $x=\mathrm{e}$ 取到最小值，于是，当 $x>0$ 时， $f(x)=x-\mathrm{e}\ln x\geq f(\mathrm{e})=0$，即 $x\geq \mathrm{e}\ln x$.

故当 $x>0$ 时， $\mathrm{e}^x\geq x^{\mathrm{e}}$.