厦门大学《高等数学 I-1》期中试题·答案

考试日期：2010.11　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

1.　（24 分 每小题 6 分）求下列数列或函数的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{3}+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

解　（1）　因为 $1=\dfrac{n}{n}\le\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})\le\dfrac{n}{n}\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n}$，

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1$.

由夹逼极限准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})=1$.

（2）因为当 $x\to 0$ 时，$\ln(1-3x^3)\sim -3x^3$，$e^{2x}-1\sim 2x$，$\sin x\sim x$，因此，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x^3}{(2x)^2\cdot x}=-\frac{3}{4}.$$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{3}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-\dfrac{2}{x})^{-\frac{x}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}}=1\cdot e^{-\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}}$.

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{e}{2}。$$

另解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-\frac{e}{2}.$$

2.　（24 分 每小题 6 分）计算下列函数的导数或微分

(1) 设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$；　　(2) 设 $y=\dfrac{\tan x}{1+e^x}$，求 dy；

(3) $y=x^2\cos 2x$，求 $y^{(100)}$；

(4) 求由方程 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解 （1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{[\ln(1+t^2)]'}{(\arctan t)'}=\dfrac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}}=2t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(2t)'}{(\arctan t)'}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2)=2\mathrm{e}^y$.

（2）$\mathrm{d}y=\dfrac{(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\tan x-\tan x\cdot\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{(1+\mathrm{e}^x)\sec^2x-\tan x\cdot\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$.

（3）$y^{(100)}=x^2[\cos 2x]^{(100)}+100\cdot[\cos 2x]^{(99)}(x^2)'+\dfrac{100(100-1)}{2!}[\cos 2x]^{(98)}(x^2)''$

$=2^{100}x^2\cdot\cos 2x+100\cdot 2^{99}\cdot 2x\sin 2x-2^{98}\cdot 9900\cdot\cos 2x$

$=2^{100}(x^2\cos 2x+100x\sin 2x-2475\cos 2x)$.

（4）由 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 两边求导，得 $1-y'+\dfrac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$，解得

$$y'=\frac{2}{2-\cos y},$$

$$y''=\frac{2(-\sin y)y'}{(2-\cos y)^2}=-\frac{4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

3.（8分）求函数 $y=\dfrac{|x|-x^2}{x(|x|-x^3)}$ 的间断点及其类型。

解 函数在 $x=0$ 和 $x=1$ 处没有定义，故其间断点为 $x=0$ 和 $x=1$.

在 $x=0$ 点，由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{y}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(|x|-x^3)}{|x|-x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-x^3}{1-x}=0,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0^+}y=\infty$，故 $x=0$ 为函数 $y=\dfrac{|x|-x^2}{x(|x|-x^3)}$ 的无穷间断点，属于第二类间断点。

在 $x=1$ 点，由于 $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^2}{x(x-x^3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x(1+x)}=\dfrac{1}{2}$ 存在，于是，$x=1$ 为函数 $y=\dfrac{|x|-x^2}{x(|x|-x^3)}$ 的可去间断点，属于第一类间断点.

4.（12分）问 α 取何值时，函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在（$-\infty,+\infty$）上（1）连续；（2）可导；（3）一阶导数连续？

解 （1）因为当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，而 $\alpha\le 0$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，因此，当 $\alpha>0$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，从而函数

$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在（$-\infty,+\infty$）上连续；

（2） 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}$，因此，当 $\alpha>1$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$；

当 $x\ne0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}$，所以，函数在 $x\ne0$ 处可导，因此，当 $\alpha>1$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在（$-\infty,+\infty$）上可导；

（3）因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x})$，因此，当 $\alpha>2$ 时，

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0=f'(0)$.

函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在（$-\infty,+\infty$）上一阶导数连续.

5.（8 分） 设 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$，求证：对任意自然数 n，$f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 中存在惟一的实根。

证明 作辅助函数 $F(x)=f_n(x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-(1-\cos x)^n$，易知 $F(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，且

$$F(0)=\frac{1}{2},F(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}，即 F(0)F(\frac{\pi}{2})<0，$$

由零点定理知，存在 $\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 存在实根.

另一方面。由于

$$F'(x)=-n(1-\cos x)^{n-1}\sin x<0，\ x\in(0,\frac{\pi}{2})，$$

因此，函数 $F(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调减少，故在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上 $F(x)$ 最多一个零点，即 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 中存在惟一的实根.

6.（8 分） 证明恒等式：$2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$（$x>1$）.

证明 令 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，则当 $x>1$ 时，

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{x^2-1}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0$$

因此，$2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\equiv C$.

取 $x=\sqrt{3}$，则 $C=2\cdot\dfrac{\pi}{3}+\arcsin\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\pi$，故

$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\ (x>1).$$

7. （**12 分**）设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：在 (a,b) 内存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$。

证明 作辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{x^2/2}f(x)$，

由已知条件可知，$F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $F(a)=\mathrm{e}^{a^2/2}f(a)=0$，

$$F(b)=\mathrm{e}^{b^2/2}f(b)=0,$$

由罗尔定理可证，在 (a,b) 内存在一点 ξ，使得 $F'(\xi)=\mathrm{e}^{\xi^2/2}[f'(\xi)+\xi f(\xi)]=0$，即

$$f'(\xi)+\xi f(\xi)=0.$$

8. （**10 分**）下面两题任选一题

(1) 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$。

证明 因为 $f(a)=f(b)$，且 $f(x)$ 不恒为常数，则必存在一点 $x_1\in(a,b)$，使得 $f(x_1)\neq f(a)$.

如果 $f(x_1)>f(a)=f(b)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,x_1)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0;$$

如果 $f(x_1)<f(a)=f(b)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(x_1,b)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}>0.$$

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$，$f(a)=f(b)=\mathrm{A}$，试证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点。

证明 由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，由极限的保号性，存在 a 的一个右邻域 $(a,a+\delta_1)$，使得对于任意的 $x\in(a,a+\delta_1)$，都有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，即 $f(x)>f(a)=A$；

由 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$，由极限的保号性，存在 b 的一个左邻域 $(b-\delta_2,b)$，使得对于任意的 $x\in(b-\delta_2,b)$，都有 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$，即 $f(x)<f(b)=A$；

综上，存在 x_1,x_2 满足 $a<x_1<x_2<b$，使得 $f(x_2)<A<f(x_1)$.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，即 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，由介值定理，存在 $c\in(x_1,x_2)$，使得 $f(c)=A$ 或 $f(a)=f(c)=f(b)=A$.

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，分别在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

因此，$f'(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点.