概率论与数理统计

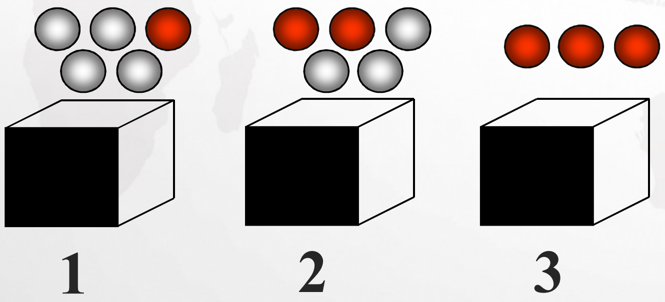
全概率公式

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

全概率公式

看一个例子：



从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，求取得红球的概率。

解：记 A_i={球取自 i 号箱}, i=1,2,3;

B ={取得红球}

其中：

A_1、A_2、A_3两两互斥

B 发生总是伴随着A_1，A_2，A_3 之一同时发生，

全概率公式

即　　$B = A_1B + A_2B + A_3B$，

且　　A_1B、A_2B、A_3B　两两互斥

运用加法公式得到

对求和中的每一项运用乘法公式得

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)$$

代入数据计算得：$P(B) = 8/15$

全概率公式

定义 设 S 为随机试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是 E 的一组事件，如果满足

$$(1)\ B_iB_j = \phi \qquad (i \neq j)$$

$$(2)\ B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$$

全概率公式

则称 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为完全事件系,或称 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为 S 的一个划分。

注意:若 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为样本空间的一个划分,则对每次试验,事件组 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 中必有且仅有一个事件发生。

可见,S 的划分是将 S 分割成若干个互斥事件。

全概率公式

定理 **1**　设试验 E 的样本空间为 S ,B_1 ,B_2 ,…,B_n为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$，则对样本空间中的任一事件 A ,恒有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

证明：因为 $A=AS$ $=A(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)$

$$=AB_1\cup AB_2\cup\ldots\cup AB_n$$

全概率公式

并且 $AB_i \cap AB_j = \phi$, $(i \neq j)$,所以

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n)$$

$$= P(B_1)P(A|B_1) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

全概率公式

全概率公式的基本思想

把一个未知的复杂事件分解为若干个已知的简单事件再求解，而这些简单事件组成一个互不相容事件组，使得某个未知事件 A 与这组互不相容事件中至少一个同时发生，故在应用此全概率公式时，关键是要找到一个合适的 S 的一个划分。

全概率公式

我们还可以从另一个角度去理解**全概率公式**

某一事件 A 的发生有各种可能的原因，如果 A 是由

原因 $B_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ 所引起，则 A 发生的概率是

$$P(AB_i)=P(B_i)P(A\,|B_i)$$

每一原因都可能导致 A 发生，故 A 发生的概率是各原因引起

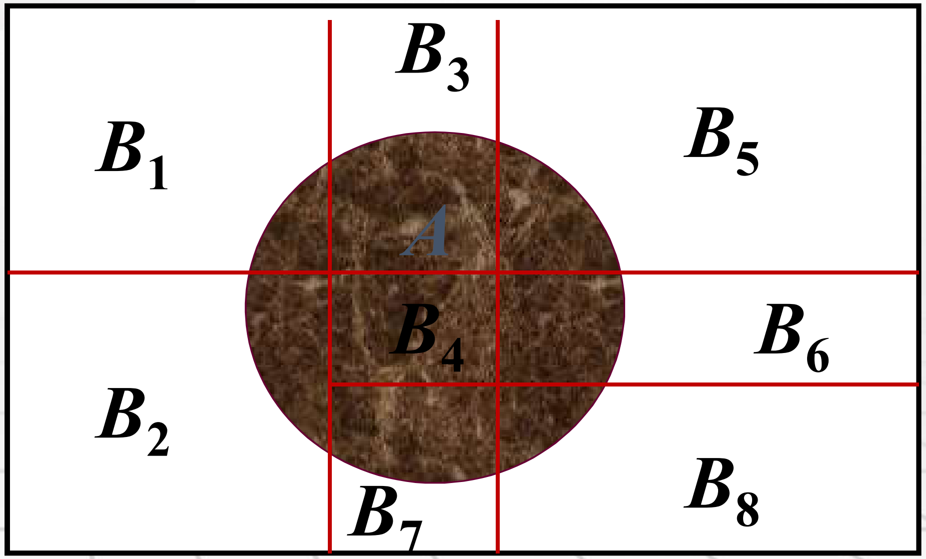
A 发生概率的总和。

全概率公式

由此可以形象地把**全概率公式**看成为“**由原因推结果**”，每个原因对结果的发生有一定的“作用”，即结果发生的可能性与各种原因的“作用”大小有关。全概率公式表达了它们之间的关系。

诸 B_i 是原因

B 是结果



全概率公式

例： 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为0.4、0.5、0.7。飞机被一人击中而击落的概率为0.2，被两人击中而击落的概率为0.6，若三人都击中，飞机必定被击落，求飞机被击落的概率。

全概率公式

解：设 A={飞机被击落}

B_i={飞机被i人击中}, i=1,2,3

则 $A=B_1A+B_2A+B_3A$

由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+$$
$$P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

依题意，

$P(A|B_1)=0.2$,

$P(A|B_2)=0.6$,

$P(A|B_3)=1$

全概率公式

为求$P(B_i)$，设 H_i={飞机被第i人击中}， i=1,2,3

可求得

$$P(B_1)=P\left(H_1\overline{H_2}\,\overline{H_3}\cup\overline{H_1}H_2\overline{H_3}\cup\overline{H_1}\,\overline{H_2}H_3\right)$$

$$P(B_2)=P\left(H_1H_2\overline{H_3}\cup\overline{H_1}H_2H_3\cup H_1\overline{H_2}H_3\right)$$

$$P(B_3)=P\left(H_1H_2H_3\right)$$

将数据代入计算得

$P(B_1)=0.36$； $P(B_2)=0.41$； $P(B_3)=0.14$.

全概率公式

于是

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$= 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1$$

$$= 0.458$$

即飞机被击落的概率为0.458。

归纳总结

全概率公式

划分

↓

条件概率

↓

乘法公式

谢 谢 大 家