概率论与数理统计

方差的计算

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

二、方差的计算

例 1：设随机变量X具有(0—1）分布，其分布率为

$$P\{X=0\}=1-p,\quad P\{X=1\}=p$$

求D(X)。

解 $$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

由公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$

因此，0-1分布

$$E(X)=p,D(X)=p(1-p)$$

二、方差的计算

例 2 设$X \sim \pi(\lambda)$，求$D(X)$。

解：X 的分布率为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$

上节已算得 $E(X)=\lambda$,而

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

二、方差的计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

因此，泊松分布

$$\boxed{E(X)=\lambda, D(X)=\lambda}$$

由此可知，泊松分布的数学期望与方差相等，等于λ。泊松分布的分布率中只含一个参数λ，只要知道λ，泊松分布就被确定了。

二、方差的计算

例 3 设$X \sim U(a,b)$，求$D(X)$。

解 X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

上节已求得$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$。方差为

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

因此，均匀分布 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}, D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

二、方差的计算

例 4：设随机变量X服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad 其中\theta>0，求E(X)，D(X)$$

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

因此$D(X)=\theta^2$

由此可知，指数分布 $E(X)=\theta，D(X)=\theta^2$

谢 谢 大 家