历届试题选（曲线积分）

一、设 Γ 是螺线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ 的一段，起点为 $(a,0,0)$，终点 $(a,0,4\pi b)$，则 $\int_\Gamma\left(yz-x^2\right)\mathrm{d}x+(zx-y)\mathrm{d}y+(xy-1)\mathrm{d}z=$____________。 (2005—2006)

二、设曲线 Γ：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$，则 $\int_\Gamma(x+y^2)\,\mathrm{d}s=$________________。 (2008—2009)

三、设 L 为上半圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}\quad(a>0)$ 及 x 轴所围成的区域的整个边界，沿逆时针方向，则 $\oint_L y^2\,\mathrm{d}x=$____________________。 (2008—2009)

四、设曲线 Γ 是菱形之边界，方向为逆时针方向，其顶点分别为 $(2,0),(0,3),(-2,0),(0,-3)$，求曲线积分 $\oint_\Gamma\dfrac{5y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3|x|+2|y|}$ 之值。 (2005—2006)

五、计算 $\int_L\dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 分别为：（1）圆周 $(x-2)^2+y^2=2$，沿逆时针方向；（2）圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，沿逆时针方向。 (2008—2009)

六、计算 $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\,\mathrm{d}y$，其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2(y\ge 0)$，沿逆时针方向。（常数 $a>0$） (2008—2009)

七、计算 $\oint_L(|x|+2|y|)\,\mathrm{d}s$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$。 (2010—2011)

八、计算 $\oint_L\dfrac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 为曲线 $|x|+|y|=2$，方向为逆时针。 (2010—2011)

九、设 L 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ y=x\end{cases}$，计算 $\int_L\sqrt{z^2+2y^2}\mathrm{d}s$. (2011—2012)

十、计算曲线积分 $\oint_L\dfrac{1}{x}\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\dfrac{2}{y}\arctan\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y$，式中 L 是由 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$，$y=x$ 及 $y=\sqrt{3}x$ 在第一象限所围成区域 D 的正向边界。 (2011—2012)

十一、计算 $\int_L\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为上半圆周 $x^2+y^2=4,\ y\ge 0$ 与 x 轴围成的闭曲线. (2014—2015)

十二、计算$\int_L xy\mathrm{d}x$， L为曲线$y^2=x$上由$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧. (2014—2015)

十三、计算$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$为圆周$(x-1)^2+y^2=2$，取逆时针方向. (2014—2015)

十四、(1) 证明：在整个xOy平面内，$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$为某个二元函数$u(x,y)$的全微分；

(2)求解全微分方程$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=0$；

(3)求$\int_L (x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$，其中曲线$L$： $(x-1)^2+y^2=4, y\geq 0$， L的方向为逆时针方向.

(2014—2015)

十五、计算$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中$L$为$x^2+y^2=4$上半圆周与$x$轴围成的封闭曲线. (2015—2016)

十六、计算$\int_L xy\mathrm{d}x$，其中L为抛物线$y^2=x$由$(1,-1)$到$(1,1)$. (2015—2016)

十七、计算曲线积分$\int_\Gamma \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Gamma$为曲线$x=e^t\cos t$， $y=e^t\sin t$， $z=e^t$上对应于t从 0 到 2 的一段弧. (2016—2017)

十八、计算$\oint_L (2|x|+y)\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=4$. (2016—2017)

十九、计算曲线积分$I=\oint_L x\mathrm{d}s$，其中L是由直线$y=x$与抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$所围区域的整个边界;

(2017—2018)

二十、计算曲线积分$I=\int_L (x^2+2xy)\mathrm{d}x$，其中$L$为上半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (y\geq 0)$从$(a,0)$到$(-a,0)$那一段弧. (2017—2018)

二十一、利用 Green 公式计算曲线积分$I=\int_L [\cos(x+y^2)+2y]\mathrm{d}x+[2y\cos(x+y^2)+3x]\mathrm{d}y$，其中$L$为曲线$y=\sin x$自$x=\pi$到$x=0$的一段. (2017—2018)

二十二、计算第一类曲线积分$I=\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中$L$是圆周$(x-1)^2+y^2=4$. (2018—2019)

二十三、计算第二类曲线积分$I=\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$是椭圆$x^2+\frac{(y-1)^2}{4}=1$，取逆时针方向.

(2018—2019)

二十四、计算第一类曲线积分 $I=\oint_L y\mathrm{d}s$ ，其中 L 为摆线的一拱 $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi.$ (2019—2020)

二十五、计算第二类曲线积分 $I=\oint_L (x^2 y\cos x+2xy\sin x-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2x)\mathrm{d}y$ ，其中 L 是由上半圆 $y=\sqrt{2x-x^2}$ ，取逆时针方向. (2019—2020)

二十六、计算第一类曲线积分 $I=\oint\limits_L (y^2+xy^2)\mathrm{d}s$ ，其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$. (2020—2021)

二十七、计算第二类曲线积分 $I=\int\limits_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ ，其中 L 是曲线 $y=\frac{\pi}{2}\cos x$ 从点 $(0,\frac{\pi}{2})$ 到点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 的一段有向弧. (2020—2021)

二十八、设 L 为由上半圆周 $y=\sqrt{4-x^2}$ 及 x 轴所围成的有界区域的整个边界，计算第一类曲线积分 $I=\oint\limits_L (x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}s$. (2021—2022)

二十九、设 L 为上半椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1\,(y\ge 0)$ 上从 $(1,0)$ 到 $(0,2)$ 的那一段有向弧，计算第二类曲线积分 $\int_L (x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y.$ (2021—2022)