蕴涵

蕴涵联结词为$\rightarrow$，当$p \rightarrow q$时，意味着q为p的**必要条件**

其中，p为**前件**，q为**后件**

当p为假时，**蕴涵命题必为真**，因为q无论是真是假都**不违背前件。**

蕴涵关系**不在乎前件和后件之间内在的联系**，如因为2<3,所以1+1=2是没有意义的，但在数理逻辑中是正确的

等价

等价联结词为$\leftrightarrow$,当且仅当p与q**真值相同**时，等价命题为**真**

可以理解为**充要条件**

与非

代表形如“**p与q的否定式**”的命题，p与q**至少有一个为假**，记作$p \uparrow q$

或非

代表形如“**p或q的否定式**”的命题，p与q**均为假**，记作$p \downarrow q$

命题公式及其赋值

简单命题作为命题逻辑中**最基本的研究单位**，其真值确定，又称为**命题常元**

取值1或0的变元称为**命题变元**

通过**联结词**与圆括号将**命题变项联结起来**的符号称为**合式公式**

单个命题变元或命题常元称为**原子命题公式**，**多个命题变项**或**常项的联结串**为**命题公式**或**命题形式**，简称为**公式**

组成公式的子部分称为**子公式**

对象语言是用来**描述研究对象的语言**，而**元语言**是**描述对象语言的语言**

> 如张三聪明且可爱，其中设p:张三聪明，q:张三可爱，则原命题为p∧q,其中的p和q为元语言，$p \wedge q$为对象语言

公式层次

单个命题变元

层次为0

否定命题

若$p = \neg q$，且q为n层公式，则p为**n+1层**公式

合取、析取、蕴涵、等价

以合取为例，若$p = q \wedge r$，p为n+1层公式，其中n为q的层次和r的层次中的**较大值**

解释

为公式中的命题变项各**指定一个真值**，这称为对公式的一种**解释**

如果解释使得**公式为真**，则这个解释为**成真解释**，否则为**成假解释**

真值表

公式在**所有赋值下**取值情况记为**真值表**

若两个公式的**真值表**对所有赋值最后结果相同，则称两个**真值表相同**

如两个公式中的**变项数量不相等**，则向公式变项数量多的公式补齐。

补齐的变元称为**哑元**，对变项数量少的公式无影响

公式类型的判断

- 如公式A真值表**结果均为1**，则公式为**重言式**
- 如公式A真值表**结果均为0**，则公式为**矛盾式**
- 如公式A**不为矛盾式**，公式A称为**可满足式**

等值演算

等值式

设A,B为两个**命题公式**，如$A \leftrightarrow B$为**重言式**，则A与B**等值**，记作$A \Leftrightarrow B$

其中，⇔不是**联结符**，是一个元语言符号

等值式模型

1. 双重否定律

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A \tag{2.1}$$

2. 幂等律

$$A \Leftrightarrow A \vee A, \quad A \Leftrightarrow A \wedge A \tag{2.2}$$

3. 交换律

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, \quad A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A \tag{2.3}$$

4. 结合律

$$\begin{gathered}(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \\ (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)\end{gathered} \tag{2.4}$$

5. 分配律

$$\begin{gathered}A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (\vee \text{对} \wedge \text{的分配律}) \\ A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (\wedge \text{对} \vee \text{的分配律})\end{gathered} \tag{2.5}$$

6. 德摩根律

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg \mathrm{B}, \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \tag{2.6}$$

7. 吸收律

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A \tag{2.7}$$

8. 零律

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \tag{2.8}$$

9. 同一律

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A, \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A \tag{2.9}$$

10. 排中律

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1 \tag{2.10}$$

11. 矛盾律

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0 \tag{2.11}$$

12. 蕴涵等值式

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \tag{2.12}$$

13. 等价等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \tag{2.13}$$

14. 假言易位

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A \tag{2.14}$$

15. 等价否定等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B \tag{2.15}$$

16. 归谬论

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A \tag{2.16}$$

析取范式和合取范式

命题变项及其**否定**统称**文字**，

由有限个文字构成的**析取式**称作**简单析取式**，

简单析取式为**重言式**，当且仅当它同时含某个命题变项及其否定式

由有限个文字构成的**合取式**称作**简单合取式**，

简单合取式为**矛盾式**，当且仅当它同时含某个命题变项及其否定式

范式

有限个简单合取式的**析取**构成的公式为**析取范式**，

有限个简单析取式的**合取**构成的公式为**合取范式。**

析取范式与**合取范式**统称为**范式**

析取范式为**矛盾式**，当且仅当其每个**简单合取式**都为**矛盾式**

合取范式为**重言式**，当且仅当其每个**简单析取式**均为**重言式**

化简命题

按下面三步，将所有命题化为**析取范式**或**合取范式**

利用蕴含等值式与等价等值式

$$\begin{cases} A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B \\ A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \end{cases}$$

利用双重否定律与德摩根律

$$\begin{cases} \neg\neg A \Leftrightarrow A \\ \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \ \wedge \neg B \end{cases}$$

利用分配律

$$\begin{cases} A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{cases}$$

范式存在定理

任一命题公式都存在**与之等值的范式**

极小项和极大项

在含有**n个命题变项**的**简单合取式(简单析取式)**中，如**每个命题变项**及其**否定恰好**出现**一个**，并且只出现**一次**，同时**命题变项**及其否定按**字典序从小到大**排列，

那么，这样的**简单合取式(简单析取式)**称为**极小项(极大项)**

如下表所示

表 2.4　含 p,q,r 的极小项与极大项

极小项			极大项		
公　式	成真赋值	名　称	公　式	成假赋值	名　称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0　0　0	m_0	$p \vee q \vee r$	0　0　0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0　0　1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0　0　1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0　1　0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0　1　0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0　1　1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0　1　1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1　0　0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1　0　0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1　0　1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1　0　1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1　1　0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1　1　0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1　1　1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1　1　1	M_7

主范式

所有**简单合取式(简单析取式)**都是**极小项(极大项)**的**析取范式(合取范式)**称为**主析取范式(主合取范式)**

任何命题公式都存在**与之等值的主析取范式**和**主合取范式**，并且是**唯一**的

求主析取范式，可以补上$\neg p \vee p$，凑成**极小项**的形式

求主合取范式，可以补上$\neg p \wedge p$，凑成**极大项**的形式

主析取范式和主合取范式的关系

已知一个公式的**主析取范式**，即可知其**主合取范式**，反之亦然

主析取范式和主合取范式的下标不相同

如有含2个变项的公式A能被表示为$m_1 \vee m_2$，它就能被表示为$M_0 \wedge M_3$

n个命题变项的主析取范式或主合取范式共有2^{2^n}个

主析取范式和主合取范式与**真值表一一对应**

应用

求成真赋值和成假赋值

主析取范式

设公式A含**n个命题变项**，其**主析取范式**有**s个极小项**，则A有**s个成真赋值**

这几个**成真赋值**分别为**极小项角标的二进制表示**

其余的赋值均为**成假赋值**

主合取范式

设公式A含**n个命题变项**，其**主合取范式**有**s个极大项**，则A有**s个成假赋值**

这几个**成假赋值**分别为**极大项角标的二进制表示**

其余的赋值均为**成真赋值**

判断公式类型

主析取范式

- A为**重言式**当且仅当其**主析取范式**含2^n**个极小项**
- A为**矛盾式**当且仅当其**主析取范式不含极小项**，此时记其**主析取范式为0**
- A为**可满足式**当且仅当其**主析取范式**含**至少一个极小项**

主合取范式

- A为**重言式**当且仅当其**主合取范式不含极大项**，此时记其**主合取范式为1**
- A为**矛盾式**当且仅当其**主合取范式**含2^n个**极大项**

- A为**可满足式**当且仅当其**主合取范式极大项**少于2^n个

n元真值函数

将一串代表**各个命题变项真值的真值串**的集合表示为

$$\{0,1\}^n$$

假设有两个命题变项，那么这个真值串的集合包含$00, 01, 10, 11$

称

$$F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

为一个**n元真值函数**

每个真值函数都与唯一的**主析取范式**或**主合取范式等值**

联结词的完备集

设S是一个**联结词集合**，若**任何n元真值函数**都可以仅由S中的联结词构成的公式表示，S是**联结词完备集**

联结词完备集有

- $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$
- $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \to\}$
- $S_3 = \{\neg, \wedge, \vee\}$
- $S_4 = \{\neg, \wedge\}$
- $S_5 = \{\neg, \vee\}$
- $S_6 = \{\neg, \to\}$
- $S_7 = \{\downarrow\}$
- $S_8 = \{\uparrow\}$

可满足性问题与消解法

一般命题公式的**可满足性问题**可以归结为**合取范式**的**可满足性问题**

同时出现某个**命题变项**和其**否定**的**简单析取式**为**永真式**，可以从**合取范式中消去**

而**不含任何文字**的**简单析取式**为**空简单析取式**，记作λ

规定**空简单析取式**是**不可满足**的，也即含有**空简单析取式**的**合取范式**是**不可满足**的

补

设l为一个**文字**，记

$$l^c = \begin{cases} \neg p, 若 l = p \\ p, 若 l = \neg p \end{cases}$$

为**文字l的补**

相关定理

若**合取范式S**含有**简单析取式**l，从S中删去所有包含l的**简单析取式**，再从剩下的简单析取式中**删去**l^c，得到的**合取范式**记作S'，则有$S \approx S'$

其中的**约等于号**表示，只要**左侧的式子**能够**满足**，**右侧的式子就可满足**

消解法

设C_1, C_2是两个**简单析取式**，分别含有**一个文字**和该文字的**补**，从两个析取式中分别删去**这个文字**和**这个文字的补**，余下的析取式**再构成一个析取式**

这样的**析取式**称为C_1, C_2的**消解式**或**消解结果**，记为$Res(C_1, C_2)$

如上得到**消解式**的规则称为**消解规则**

若两个**析取式**可对多对文字消解，其消解结果**均等值**

否证与消解序列

设S为一个**合取范式**，$C_1, C_2, \cdots, C_n$为一个**简单析取式序列**，

若对每一个$i(1 \le i \le n)$，C_i为S中的一个**简单析取式**或C_i为其之前的**某两个简单析取式**C_j, C_k $(1 \le j < k < n)$的**消解结果**

那么，这个序列称为由S导出的**消解序列**，当$C_n = \lambda$时，称此序列为S的**一个否证。**

消解完全性

S有否证当且仅当S不可满足

消解法判断公式可满足性

引入定理

$$C_1 \wedge C_2 \approx Res(C_1, C_2)$$

> 以公式$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q)$为例
>
> 首先，先以此合取范式的各个简单析取式，两两消解得到一组析取式$q, \neg p, p$
>
> 然后，再将这一组析取式与原来的析取式组两两进行消解，在消解过程中一旦出现了空简单析取式，则公式不可满足，这个公式就是如此
>
> 假设消解时没出现空简单析取式，如果出现了全新的析取式，即此前的消解过程从未见过的析取式，将这些析取式记录下来作为另一组析取式组。
>
> 抛弃原来的析取式组，将剩下的两组析取式进行循环
>
> 这个过程中，如果再也没有全新的析取式，那么这个公式就是可满足的

推理理论

推理的形式结构

推理是从**前提**出发推出**结论**的思维过程

设**前提**为一个**公式集合**Γ，即$\Gamma: \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，设**结论为B**，将由$\Gamma$推出B的推理记为$\Gamma \vdash B$，这种记法称为**推理的形式结构**

当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$**为重言式，推理是有效**的

有效的推理形式被记为$\Gamma \models B$，反之记为$\Gamma \not\models B$

推理定律

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$	假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难
$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$	构造性二难(特殊形式)
9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$	破坏性二难

其中 A,B,C,D 等是元语言符号，表示任意的命题公式.

自然推理系统

形式系统

形式系统I由下面**四个部分**构成

- **非空的字母表A(I)**
- A(I)中的符号构造的**合式公式集E(I)**
- E(I)中一些特殊的公式组成的**公理集**$A_x(I)$
- **推理规则集**R(I)

将I记为四元组$< A(I), E(I), A_x(I), R(I) >$

其中，$< A(I), E(I) >$为I的**形式语言系统**，$< A_x(I), R(I) >$为I的**形式演算系统**

形式系统的种类

公理推理系统

只能从**若干条给定的公理**出发，用系统中的推理规则进行演算，得到结论称为**系统中的定理**

自然推理系统

从**任意给定的前提**出发，用系统中的推理规则进行**推理演算**，得到**推理结论**

自然推理系统**没有公理集**

自然推理系统的定义

自然推理系统P定义如下

字母表

- **命题变项符号**
- **联结词符号**
- **括号与逗号**

合式公式

- 即**命题公式**

推理规则

- **前提引入**规则：在证明的任何步骤都可以**引入前提**
- **结论引入**规则：得到的任**何结论都可以作为后继证明的前提**
- **置换**规则：命题公式中的**子公式**均可**用等值公式置换**
- **九条推理定律**

（4）假言推理规则（或分离规则）：若证明的公式序列中已出现过 $A\to B$ 和 A，则由假言推理定律 $(A\to B)\wedge A\Rightarrow B$ 可知，B 是 $A\to B$ 和 A 的有效结论. 由结论引入规则可知，可以将 B 引入命题序列. 用图式表示为如下形式.

$$\begin{array}{l} A\to B \\ \underline{A} \\ \therefore B \end{array}$$

以下各条推理规则直接以图式给出，不再加以说明.

（5）附加规则：

$$\begin{array}{l} \underline{A} \\ \therefore A\vee B \end{array}$$

（6）化简规则：

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

（7）拒取式规则：

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ \neg B\end{array}}{\therefore \neg A}$$

（8）假言三段论规则：

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ B \to C\end{array}}{\therefore A \to C}$$

（9）析取三段论规则：

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee B \\ \neg B\end{array}}{\therefore A}$$

（10）构造性二难推理规则：

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ C \to D \\ A \vee C\end{array}}{\therefore B \vee D}$$

（11）破坏性二难推理规则：

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ C \to D \\ \neg B \vee \neg D\end{array}}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

（12）合取引入规则：

$$\frac{\begin{array}{c}A \\ B\end{array}}{\therefore A \wedge B}$$

证明

设**前提**$A_1, A_2, \cdots, A_k$,结论B和**公式序列**$C_1, C_2, \cdots, C_k$,若公式序列中的任意一个公式为**前提中的一种**或可由**公式应用推理规则**得到，且$C_k = B$，

则称**公式序列**$C_1, C_2, \cdots, C_k$为由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$推出B的**证明**

构造证明

附加前提证明法

设推理形式结构具有**如下形式**

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k) \to (A \to B)$$

则可以转化为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B$$

两者是**等价的**，在这种转化中，**A为附加前提**

归谬法

设推理形式结构具有如下形式

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k) \rightarrow B$$

如能得到

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \wedge \neg B)$$

为**矛盾式**，则说明**原推理正确**

消解证明法

将**前提中的公式**，及**结论的否定**都化成**等值合取范式**，以这些**合取范式**中的**所有简单析取式为前提**，用**消解规则**构造证明

如能得到**空式**，则推理正确

一阶逻辑基本概念

一阶逻辑命题符号化

个体词

个体词指研究对象中可以**独立存在的具体或抽象的客体**，如中国，3等个体词

表示具体或特定客体的个体词称为**个体常项**，用a,b,c表示

表示抽象或泛指的个体词称为**个体变项**，用x,y,z表示，其取值范围为**个体域或论域**

包含一切事物的个体域称为**全总个体域，**无特别说明均**默认为全总个体域**

谓词

谓词指刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词，用F,G,H表示

如...是**无理数**就是**一个谓词**，π是无理数则表示为F(π)

表示**具体性质或关系的谓词**称为**谓词常项**

表示**抽象的或泛指的性质或关系的谓词**称为**谓词变项**，**常项变项**均用F,G,H表示

含n个个体变项的谓词称为**n元谓词**，记作$P(x_1, x_2, ..., x_n)$

当n=1时，这指代**个体具有性质P**

当n大于1时，这指代**这些个体满足关系P**

不带个体变项的谓词称为**0元谓词**

特性谓词

为了表示同一命题在**不同个体域**的情况引入的谓词，如"**...是无理数**"

量词

表示**个体常项**与**变项**之间数量关系的词

全称量词

表示"一切的"、"所有的"，用符号∀表示

$\forall x$表示**个体域内的所有个体**，$\forall x \forall y G(x, y)$表示个体域所有**个体x与y有关系G**

存在量词

表示"**存在**"的概念，用符号∃表示

一阶逻辑公式及其解释

一阶语言

用于**一阶逻辑**的**形式语言**，本身由**抽象符号**构成，一阶语言有多种，现在讨论**一阶语言**$\mathscr{L}$

字母表

设L是一个**非逻辑符号集合**，由L生成的**一阶语言**$\mathscr{L}$的**字母表**包括

非逻辑符号

- L中的**个体常项**，a,b,c...
- L中的**函数符号**，f,g,h...
- L中的**谓词符号**，F,G,H...

L不一定要同时包含这三者，但如果L**不含谓词符号，**一阶语言**与命题逻辑无异**，因此通常假设L中**至少包含一个谓词符号**

逻辑符号

- **个体变项**，x,y,z...
- **量词符号**，$\forall, \exists$
- **联结词符号**，$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- **括号与逗号**

项

在$\mathscr{L}$中，**个体常项符号**和**个体变项符号**是项，**n元函数**$\phi(t_1, t_2, ..., t_n)$也是**一个项**

原子公式

设$R(x_1, x_2, ..., x_n)$为$\mathscr{L}$的**n元谓词符号**，$t_1, t_2, ..., t_n$为$\mathscr{L}$的**n个项**，则称$R(x_1, x_2, ..., x_n)$是$\mathscr{L}$的**原子公式**

合式公式

原子公式属于**合式公式**，并且如A,B为**合式公式**

$\neg A$，$(A \wedge B), (A \leftrightarrow B), (A \leftarrow B), (A \vee B), \forall xA, \exists xA$均为**合式公式**，且有限次如是组合的符合串为合式公式

合式公式简称公式

指导变元与辖域

在公式$\forall xA/\exists xA$中，x为**指导变元**，A为量词的**辖域**

在$\forall x/\exists x$的**辖域**中，x的所有出现均称为**约束出现**，A中**不是约束出现的其他变项**称为**自由出现**

如一个公式**不含自由出现的个体变项**，则称其为**闭式**

解释与赋值

对一个公式**个体域、个体常项符号、函数符号、谓词符号**的指定称作**解释**，指定**自由出现的个体变项的值**称作**赋值。**

$\mathscr{L}$**的解释l为**

- **非空个体域**D_l
- 对每一个**个体常项符号**$a \in L$，有一个$\bar{a} \in D_l$，并称$\bar{a}$为a在l中的**解释**
- 对每一个**n元函数符号**$f \in L$，有一个D_l上的**n元函数**$\bar{f}: D_l^n \to D_l$，称$\bar{f}$为f在l中的**解释**
- 对每一个**n元谓词符号**$F \in L$，有一个D_l上的**n元谓词常项**$\bar{F}$，称$\bar{F}$为F在l中的**解释**

l下的**赋值**σ：对每一个个体变项符号x指定D_l中的一个值$\sigma(x)$

设有**公式A**，规定：在**解释l和赋值**σ下

取**个体域**D_l，将A中**个体常项符号、函数符号、谓词符号**替换为其**解释**，**自由出现个体变项符号**替换为其**赋值**

这样得到的公式记为A'，并称其为**A在l下的解释**

如公式在**任何解释及赋值情况**下均为**真**，则为**永真式；**若均为**假**，则为**矛盾式**，否则为**可满足式**

代换实例

设A_0为含**命题变项**$p_1, p_2, ..., p_n$的**命题公式**，$A_1, A_2, ..., A_n$为n个**谓词公式**，将这些**谓词公式一一**对应**带入命题变项**，称得到的公式A为A_0的**代换实例**

如$F(x) \to G(x)$为$p \to q$的**代换实例**

重言式的**代换实例**均为**永真式**，**矛盾式**的**代换实例**均为**矛盾式**

一阶逻辑等值演算与推理

一阶逻辑等值式与置换规则

设A,B为**一阶逻辑中任意两个公式**，如$A \leftrightarrow B$为**永真式**，则称两者等值，记作$A \Leftrightarrow B$，称其为**等值式**

基本等值式

- 等值演算中的**等值式模型的代换实例**
- 其他等值式

1. 消去量词等值式

设个体域为有限集 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则有

(1) $\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\land A(a_2)\land\cdots\land A(a_n)$

(2) $\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\lor A(a_2)\lor\cdots\lor A(a_n)$ (5.1)

2. 量词否定等值式

设公式 $A(x)$ 含自由出现的个体变项 x，则

(1) $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$

(2) $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$ (5.2)

可以如下直观解释式(5.2). 对于(1),"并不是所有的 x 都有性质 A"与"存在 x 没有性质 A"是一回事. 对于(2),"不存在有性质 A 的 x"与"所有 x 都没有性质 A"是一回事.

3. 量词辖域收缩与扩张等值式

设公式 $A(x)$ 含自由出现的个体变项 x，B 不含 x 的自由出现，则

(1) $\forall x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\lor B$

$\forall x(A(x)\land B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\land B$

$\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\to B$

$\forall x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\forall xA(x)$ (5.3)

(2) $\exists x(A(x)\lor B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\lor B$

$\exists x(A(x)\land B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\land B$

$\exists x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\to B$

$\exists x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\exists xA(x)$ (5.4)

4. 量词分配等值式

设公式 $A(x)$，$B(x)$ 含自由出现的个体变项 x，则

(1) $\forall x(A(x)\land B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\land\forall xB(x)$

(2) $\exists x(A(x)\lor B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\lor\exists xB(x)$ (5.5)

等值规则

置换规则

同公式**不同解释等值**

换名规则

将公式中**某量词辖域中**的**一个约束变项的所有出现**及**相应的指导变元**全部改成该**量词辖域中未曾出现过的某个个体变项符号**，

公式中**其余部分不变**，则两个**公式等值**

一阶逻辑前束范式

定义

具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2...Q_kx_kB$$

的**一阶逻辑公式**称为**前束范式**，其中Q为量词，B为**不含量词的公式**

前束范式存在定理

一阶逻辑中的任何公式都存在**等值的前束范式**

将**与公式等值的前束范式**简称为**公式的前束范式**

一阶逻辑的推理理论

一阶逻辑中**永真式的蕴涵式**为**推理定律**，如一个推理的**形式结构**为**推理定律**，则推理正确

推理定律的来源

- **命题逻辑推理定律**的**代换实例**
- 由**基本等值式**得到的**推理定律**
- 其他推理定律

(1) $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$

消去量词与引入量词

全称量词消去规则$(\forall-)$

$$\frac{\forall xA(x)}{\therefore A(y)}$$

其中，y可以为个体变项或个体常项，且A中x不在$\forall y/\exists y$的辖域中自由出现

全称量词引入规则$(\forall+)$

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$$

其中y为个体变项，且不在Γ中任何公式中自由出现

存在量词消去规则$(\exists-)$

$$\frac{A(y) \to B}{\therefore \exists x A(x) \to B}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x A(x) \\ A(y) \to B\end{array}}{\therefore B}$$

y可为个体变项或个体常项，个体变项不在前提的任何公式和B中自由出现，个体常项不在前提的任何公式和A,B中自由出现

存在量词引入规则$(\exists+)$

$$\frac{A(y)}{\therefore \exists x A(x)}$$

$$\frac{B \to A(y)}{\therefore B \to \exists x A(x)}$$

y可为个体常项或个体变项，且不在$\forall x, \exists x$的辖域内自由出现和出现

集合论

集合代数

集合的基本概念

集合是一些事物组成的集体，这些事物称为元素或成员

表示集合可以用**列元素法**或谓词表示法

集合元素**彼此不同并且无序**，元素和集合的关系为**隶属关系**，属于则为$\in$，否则为$\notin$

集合元素的元素**不属于该集合**，如有一个集合$A=\{a,\{b,c\}\}$,其中的b就不属于A

子集合

设A,B为**集合**，如B中每个元素均为A中**元素**，称B为A的**子集**

也说B被A**包含**，记作$B\subseteq A$,否则为$B\nsubseteq A$

隶属关系和**包含关系**都是**形容两集合之间的关系**

相等

如两集合A,B有$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,则记作$A=B$

真子集

如有$B\subseteq A$且$B\neq A$，则说B为A的**真子集**，记为$B\subset A$

否则记为$B\not\subset A$

空集

不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$

空集是**唯一**的，且空集**为一切集合的子集**

空集的**符号化表示为**

$$\varnothing=\{x|x\neq x\}$$

幂集

设A为集合，A的幂集是**A全体子集构成的集合**，记作$P(A),2^A,\mathscr{P}A$

含有**n个元素**的集合称为**n元集**，它的含有**m个元素的子集**称为它的**m元子集**，**含有一个元素**的叫**单元集**

全集

若某个具体问题涉及集合都是**某个集合的子集**，则此集合称为**全集**，记为E

全集是具有**相对性**的

集合的运算

初级并与初级交

并集、交集、相对补集

$$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$$

如两个集合的交集为$\varnothing$，称这两个集合是**不交**的

对称差集

设A,B为集合，则两者**对称差集**为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

绝对补集

在给定全集E后，A的**绝对补集~A**为

$$\sim A = E - A$$

广义并与广义交

广义并

设A为集合，A的**元素的元素**构成的**集合称为A的广义并**

符号化表示为

$$\cup A = \{X|\exists z(z \in A \wedge x \in z)\}$$

广义交

设A为非空集合，则A的所有元素的**公共元素构成的集合**称为A的**广义交**

符号化表示为

$$\cap A = \{x|\forall z(z \in A) \rightarrow x \in z\}$$

空集的**广义并仍为空集**，但空集**不可以广义交**

对于又有**个体元素又有集合元素**的集合，其广义并和广义交要**将个体元素写在外面**，如集合$A:\{a,\{b,c\}\}$

- $\cup A = a \cup \{b,c\}$
- $\cap A = a \cap \{b,c\}$

运算规定

称**广义并**、**广义交**、**幂集**、**绝对补**为一类（单元运算）运算，并、交、相对补、对称差为二类运算

- 一类运算优先于二类运算
- 一类运算之间由右向左进行
- 二类运算之间由括号决定先后顺序

有穷集的计数

容斥原理

设S为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_n$为n个性质，S中的任何元素x或**具有性质P**或**不具有性质P**

令A_i表示S中具有性质P_i的元素构成的子集，则S中不具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_n$的元素数为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n| = \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

欧拉函数

设n为正整数，欧拉函数$\phi(n)$表示小于n的自然数中与n互素的数的个数，$\phi(1)=1$

设给定正整数n,$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$,则

$$\phi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})\ldots(1-\frac{1}{p_k})$$

错位排列

错位排列数记作D_n，有

$$D_n = n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}]$$

当n充分大时，错位排列占所有排列的比例约为e^{-1}

集合恒等式

证明集合恒等式可以先将式子用命题表示，再用命题演算求证

幂等律	$A \cup A = A$	(6.1)
	$A \cap A = A$	(6.2)
结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(6.3)
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(6.4)
交换律	$A \cup B = B \cup A$	(6.5)
	$A \cap B = B \cap A$	(6.6)
分配律	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(6.7)
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(6.8)

同一律	$A \cup \varnothing = A$	(6.9)
	$A \cap E = A$	(6.10)
零　律	$A \cup E = E$	(6.11)
	$A \cap \varnothing = \varnothing$	(6.12)
排中律	$A \cup \sim A = E$	(6.13)
矛盾律	$A \cap \sim A = \varnothing$	(6.14)
吸收律	$A \cup (A \cap B) = A$	(6.15)
	$A \cap (A \cup B) = A$	(6.16)
德摩根律	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$	(6.17)
	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	(6.18)
	$\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$	(6.19)
	$\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$	(6.20)
	$\sim \varnothing = E$	(6.21)
	$\sim E = \varnothing$	(6.22)
双重否定律	$\sim \sim A = A$	(6.23)

$$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$

$$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$

$$A - B \subseteq A$$

$$A - B = A \cap \sim B$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$A \oplus \varnothing = A$$

$$A \oplus A = \varnothing$$

$$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$$

证明集合恒等式可以先将式子用命题表示，再用命题演算求证

二元关系

基本概念

有序对

由两个元素x, y按照一定顺序排列的二元组称为一个有序对或序偶，记作$< x, y >$，其中x为其第一元素，y是其第二元素

序偶有以下性质:

1. 当$x \neq y$时，有$< x, y > \neq < y, x >$
2. $< x, y > = < u, v >$的充要条件为$x = u$且$y = v$

笛卡尔积

设A,B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成**有序对**，所有这样的有序对组成的集合称为A,B的笛卡尔积，记作$A \times B$

$$A \times B = \{< x, y > | x \in A \wedge y \in B\}$$

运算性质

1. $A \times \varnothing = \varnothing, \varnothing \times A = \varnothing$
2. 笛卡尔积不满足交换律和结合律
3. 对并、交运算满足分配律

   > $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   > $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
   > $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
   > $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

4. $A \subseteq C \vee B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$，反之不成立

二元关系

如一个**集合为空**，或它的元素**均为有序对**，则这个集合称为一个**二元关系**，记作R。可简称为B

对一个二元关系R，如$<x,y>\in R$，记作xRy,否则记为$x \not R y$

设A,B为集合，$A\times B$的**任何子集所定义的二元关系**称为从A到B的二元关系，特别地，当A=B时称为A上的**二元关系**

集合A上的二元关系的数目依赖A中的元素数

特殊的关系

空关系

对于任何集合A，$\varnothing$为$A\times A$的子集，称作A上的空关系，也可以看作A到**任意一个集合上的关系**

全域关系与恒等关系

对任意集合A，定义全域关系E_A和恒等关系I_A为

$$
\begin{gathered}
E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A\\
I_A=\{<x,x>|x\in A\}
\end{gathered}
$$

其他关系

$$L_A=\{<x,y>|x,y\in A,x\le y\}$$

$$D_A=\{<x,y>|x,y\in A,x|y\}$$

$$R_{\subseteq}=\{<x,y>|x,y\in A,x\subseteq y\}$$

- L_A称作A上的小于等于关系，A为实数集R的子集
- D_A称作A上的整除关系，其中x是y的因子，A为非零整数集的子集
- $R_{\subseteq}$称作A上的包含关系，A为由集合构成的集合族

类似地，还有大于等于关系，小于关系，大于关系，真包含关系

关系的表示

- 集合表达式：如$R=\{<x,y>|x\ne y\}$

- 关系矩阵

  设$A=\{x_1,x_2,..,x_n\}$，R为A上的关系，令

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & x_iRx_j\\0, & x_i \not Rx_j\end{cases}$$

  则有

$$M_R=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12}\cdots & r_{1n}\\r_{11} & r_{12}\cdots & r_{1n}\\\vdots & \vdots & \vdots\\r_{11} & r_{12}\cdots & r_{1n}\end{pmatrix}$$

  M_R为R的关系矩阵

- 关系图：

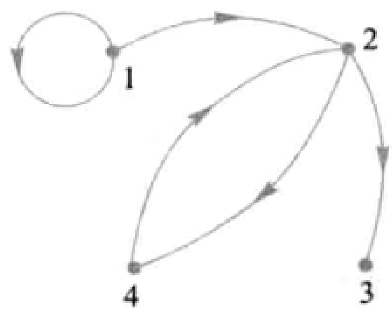


图 7.1

关系的运算

基本运算

对于二元关系R

定义域

定义域记作$domR$，R中所有有序对的**第一元素**构成的集合称为**定义域**

$$domR=\{x|\exists y(<x,y>\in R)\}$$

值域

值域记作$ranR$,R中所有有序对的第二元素构成的集合称为**值域**

$$ranR = \{y|\exists x(< x, y >\in R)\}$$

域

域记作$fldR$，R定义域与值域的**并集**

逆

R的逆即R的**逆关系**，记为R^{-1}

$$R^{-1} = \{< x, y > \mid < y, x >\in R\}$$

右复合

同理有**左复合**，不附加说明采用**右复合**

$$F \circ G = \{< x, y > |\exists t(< x, t >\in F \wedge < t, y >\in G)\}$$

限制与像

设R为**二元关系**，A为**集合**

1. R在A上的**限制**记作$R \upharpoonright A$

   > $$R \upharpoonright A = \{< x, y > |xRy \wedge x \in A\}$$

2. A在R上的像记作$R[A]$

   > $$R[A] = ran(R \upharpoonright A)$$

用函数的观点看待这两个概念，可以看作**限制是在A上能取到的值**，而**像是以A为定义域的值域**

上面的运算中，**逆运算**优先于其他运算，所有的关系运算优先于集合运算

幂运算

设R为A上的关系，n为自然数，则R的n次幂定义为

$$R^0 = I_A$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

- 当R以集合表达式给出时，可以通过重复的右复合运算得到R^n
- 当R以关系矩阵M给出时，则R^n关系矩阵为M^n，但此处矩阵相乘用的是逻辑加(或运算)
- 当R以关系图G给出时，设R^n的关系图为G'，其顶点集与G相同，若有两个顶点在G中可以通过n步到达，则在G'中将这两个顶点相连。所有这样的边都相连后，可以得到R^n的关系图

基本运算的性质

1. 设F为任意关系，有
   - $(F^{-1})^{-1} = F$
   - $domF^{-1} = ranF, ranF^{-1} = domF$
2. 设F,G,H为任意关系，有
   - $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$
   - $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$
3. 设R为A上的关系，则
   - $R \circ I_A = I_A \circ R = R$
4. 设F,G,H为任意关系
   - $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$
   - $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ H$
   - $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$
   - $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$
     此处结论对有限多个关系的并和交仍成立
5. 设F为关系，A,B为集合

- $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$
- $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$
- $F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$
- $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

6. 设A为n元集，R是A上的关系，则存在自然数s和t，使得$R^s = R^t$

   该定理说明有穷集上只有有穷多个不同的二元关系

   推论：

   - 对任何自然数k，有$R^{s+k} = R^{t+k}$
   - 对任何自然数k和i，有$R^{s+kp+1} = R^{s+i}$，其中$p = t - s$
   - 令$S = \{R^0, R^1, \cdots, R^{t-1}\}$，则对于任意的自然数q，有$R^q \in S$

7. 设R为A上的关系，$m, n \in N$

   - $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
   - $(R^m)^n = R^{mn}$

关系的性质

自反与反自反

设R为A上的关系，若

$$\forall x(x \in A \to < x, x > \in R)$$

则称R在A上是自反的，若

$$\forall x(x \in A \to < x, x > \notin R)$$

则称R在A上是反自反的，除这两种情况外则是既不是自反的也不是反自反的

- 自反关系的关系矩阵主对角线元素必为1，关系图每个顶点都有环
- 反自反关系的关系矩阵主对角线元素必为0，每个顶点都没有环

对称与反对称

设R为A上的关系

$$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge <x, y> \in R \rightarrow <y, x> \in R)$$

则称R为A上对称的关系

$$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge <x, y> \in R \wedge <y, x> \in R \rightarrow x=y)$$

则称R为A上反对称的关系

- 对称关系的关系矩阵为对称矩阵，关系图中全为双向边
- 反对称关系的关系矩阵主对角线两侧元素各不同，关系图中没有双向边

传递

设R为A上的关系，若

$$\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in A \wedge <x, y> \in R \wedge <y, z> \in R \rightarrow <x, z> \in R)$$

如果传递关系的关系矩阵的平方的某元素为1，关系矩阵对应的位置元素都为1；关系图中若顶点i到j，j到k有边，则i到k有边

性质成立的充要条件

设R为A上的关系，有

- R在A上自反当且仅当$I_A \subseteq R$
- R在A上反自反当且仅当$R \cap I_A=\varnothing$
- R在A上对称当且仅当$R=R^{-1}$
- R在A上反对称当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- R在A上传递当且仅当$R \circ R \subseteq R$

运算和性质的关系

设R_1, R_2为两个具有相同性质的集合，则

运算	原有性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

关系的闭包

设R为非空集合A上的关系，R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R'，使得

- R'为自反的(对称或传递的)
- $R \subseteq R'$
- 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R''有$R' \subseteq R''$

一般将R的自反闭包记作r(R)，对称闭包记作s(R),传递闭包记作$t(R)$

闭包的构造

设R为A上的关系，则有

- $r(R) = R \cup R^0$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

关系矩阵构造

设关系R,$r(R), s(R), t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s, M_t

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \cdots$$

这里的乘法使用逻辑加，M'为转置矩阵

关系图构造

设关系$R, r(R), s(R), t(R)$关系图分别为G, G_r, G_s, G_t，并按如下方法添加边

- G_r：G每个顶点均加上一个环
- G_s：G每条单向边均加一条反向边
- G_t：将G中所有有间接路径却没有直接路径的两个顶点(也可能是同个顶点)相连

闭包的性质

1. 设R为非空集合A上的关系

- R为自反当且仅当r(R)=R
- R为对称当且仅当s(R)=R
- R为传递当且仅当t(R)=R

2. 设R_1, R_2为非空集合A上的关系且$R_1 \subseteq R_2$

- $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
- $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
- $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

3. 设R为非空集合A上的关系

- 若R为自反的，则其**闭包均自反**
- 若R为对称的，则其**闭包均对称**
- 若R为传递的，则其**自反闭包**和**传递闭包是传递**的

等价关系与划分

等价关系

设R为非空集合A上的关系，若R为**自反**、**对称**、**传递**的，则称R为A上的**等价关系**

设R是一个**等价关系**，若$< x, y > \in R$，称x等价于y，记作$x \sim y$

等价类

设R为非空集合A上的**等价关系**，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y|y \in A\}$$

称$[x]_R$为x关于R的**等价类**，简称为x的**等价类**，也可记为$[x]$或$\bar{x}$

简而言之，x的**等价类**是A中**所有与x等价的元素构成的集合**

等价关系的性质

- $\forall x \in A$，$[x]$为A的**非空子集**
- $\forall x, y \in A$，若xRy，则$[x] = [y]$
- $\forall x, y \in A$，若$x \not R y$，则$[x]$与$[y]$**不交**
- $\cup\{[x]||x \in A\} = A$

划分

商集

设R为非空集合A上的**等价关系**，以R的所有**等价类**作为元素的集合称为A关于R的**商集**，记作A/R，即

$$A/R = \{[x]_R|x \in A\}$$

划分的定义

设A为非空集合，若A的**子集族**$\pi(\pi \subseteq P(A))$满足：

1. $\varnothing \notin \pi$
2. $\forall x \forall y(x, y \in \pi \wedge x \neq y)$
3. $\cup \pi = A$

则称π为A的一个**划分**，π中的元素为A的**划分块**

显然，商集是A的一种**划分**

偏序关系

设R为非空集合A上的关系，若R为**自反的**、**反对称的**、**传递的**，则称R为A上的**偏序关系**，记作$\preceq$

设$\preceq$为**偏序关系**，如果$< x,y > \in \preceq$，则记作$x \preceq y$，读作"x小于等于y"

这里的小于等于指**顺序上的小于等于**

小于与可比

- $\forall x,y \in A, x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \wedge x \neq y$
- $x \preceq y \vee y \preceq x$，则x与y**可比**

全序关系

设R为非空集合A上的**偏序关系**，若$\forall x,y \in A$，且x与y都是可比的，则称R为A上的全序关系，也称为**线序关系**

偏序集

集合A和集合A上的偏序关系$\preceq$一起称作**偏序集**，记作$< A, \preceq >$

偏序集的特殊元素

设$< A, \preceq >$为偏序集，$B \subseteq A, y \in B$

1. 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preceq x)$成立，则称y为B的**最小元**
2. 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preceq y)$成立，则称y为B的**最大元**
3. 若$\forall x(x \in B \wedge x \preceq y \rightarrow x = y)$成立，则称y为B的**极小元**
4. 若$\forall x(x \in B \wedge y \preceq x \rightarrow x = y)$成立，则称y为B的**极大元**

- 最小元与其他元素**均可比**，但**极小元不一定**，它只满足**没有比它小的元素**
- 有穷集B**一定存在极小元**，但**不一定存在最小元**
- 如**存在最小元**则**最小元唯一**，**极小元可能不唯一**
- 若B**仅有一个极小元**，则它一定为B的**最小元**

哈斯图

覆盖

设$< A, \preceq >$为偏序集，$\forall x,y \in A$

若$x \prec y$且不存在$z \in A$使得$x \prec z \prec y$，则说**y覆盖x**

哈斯图的画法

哈斯图罗列了**偏序集中集合A的所有元素**

- $\forall x, y \in A$，若$x \prec y$，则x画在y的下方
- 若y覆盖x，则用一条线段连接x和y

易知**哈斯图的孤立顶点**同时为**极小元和极大元**

上界与下界

设$< A, \preceq >$为偏序集，$B \subseteq A, y \in A$

1. 若$\forall x(x \in B \to x \preceq y)$成立，则称**y为B的上界**
2. 若$\forall x(x \in B \to y \preceq x)$成立，则称**y为B的下界**
3. 令$C = \{y|y\text{为B的上界}\}$，则称C的**最小元为B的最小上界或上确界**
4. 令$D = \{y|y\text{为B的下界}\}$，则称C的**最大元为B的最大下界或下确界**

- 易知B的**最小元必为B的最大下界**，B的**最大元必为B的最小上界**
- B的下界不一定是B的最小元，因为可能不是B中的元素而是A中的
- B的上界、下界、最小上界、最大下界都可能不存在，若存在，则最小上界及最大下界均唯一

代数结构

代数系统

运算及其性质

二元运算

设S为集合，函数$f: S \times S \to S$称为S上的二元运算，简称为**二元运算**

一个集合S上的**二元运算**必须要满足

> **封闭的举例**
>
> 例如自然数集N上的减法对N不封闭
>
> 因为减法可能算出负数

- S中的**任何两个元素**都可以进行**这种运算且运算结果唯一**
- S上的**运算对S封闭**

> 此时减法就不是自然数集上的二元运算

> **算符**
>
> 通常用$\circ, \bullet, *$表示**二元运算**
>
> 若对任意$x, y \in S$，有**运算f**，且**运算结果为z**，则可记为
>
> $$f(<x, y>) = z \Rightarrow x \circ y = z$$

一元运算

设S为集合，函数$f: S \to S$为S上的一个**一元运算**，简称为**一元运算**

一元运算可用算符∘记作

$$\circ(x) = y\text{或}\circ\ x = y$$

运算表

$(xy) \bmod 5$ 表示 xy 除以 5 的余数，其运算表如表 9.5 所示.

表 9.5

∘	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

运算表可用于表示运算的结果

二元运算的主要性质

设$\circ, *$为S上的**二元运算**

交换律

若$\forall x, y, z \in S$均有

$$x \circ y = y \circ x$$

则称运算∘在S上的**可交换**的，满足交换律

结合律

若$\forall x,y,z\in S$都有

$$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$$

则称运算在S上可结合，适合**结合律**

幂等律

若$\forall x\in S$都有

$$x\circ x=x$$

则称该运算适合幂等律

若S中部分x满足**幂等律**，则称其为该运算的**幂等元**

分配律

若$\forall x,y,z\in S$均有

$$\begin{aligned}x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)\\(y\circ z)*x=(y*x)\circ(z*x)\end{aligned}$$

第一条为**左分配律**，第二条为**右分配律**，称运算*对∘适合分配律

分配律一般是指**某个运算对另一个运算满足分配律**，反之不一定成立

吸收律

若$\forall x,y$

$$\begin{aligned}x*(x\circ y)=x\\x\circ(x*y)=x\end{aligned}$$

则称∘和*满足**吸收律**

消去律

若$\forall x,y,z\in S$，满足

- $x\circ y=x\circ z$且$x\neq\theta$，则y=z
- $y\circ x=z\circ x$且$x\neq\theta$，则y=z

称∘运算满足**消去律**，第一条称为**左消去律**，第二条为**右消去律**，θ为零元

二元运算的特异元素

设∘为S上的二元运算

单位元

若存在e_l或e_r，$\forall x \in S$均有

$$
\begin{aligned}
e_l \circ x = x \\
x \circ e_r = x
\end{aligned}
$$

则称e_l/e_r为S中关于∘运算的一个**左单位元/右单位元**

- 若e既是**左单位元又是右单位元**，则其为**单位元**，也称**幺元**
- 若运算∘在S既有**左单位元**又有**右单位元**，则**左单位元必等于右单位元**，即为**单位元**

零元

若$\exists \theta_l/\theta_r \in S, \forall x \in S$,有

$$
\begin{aligned}
\theta_l \circ x = \theta_l \\
x \circ \theta_r = \theta_r
\end{aligned}
$$

则称θ_l/θ_r为S上关于∘运算的**左零元或右零元**

- 若某元素θ既为**左零元又为右零元**，则θ为S上关于∘运算的**零元**
- 若运算∘在S既有**左零元又有右零元**，则**左零元必等于右零元**，即为**零元**
- 若S至少有两个元素，则$e \neq \theta$

逆元

若$\forall x \in S, \exists y_l \in S/y_r \in S$使得

$$
\begin{aligned}
y_l \circ x = e \\
x \circ y_r = e
\end{aligned}
$$

则说y_l/y_r为x的**左逆元或右逆元**，如y既为x的**左逆元**和x的**右逆元**，则称y为x的**逆元**

x的逆元又常记作x^{-1}

- 若x逆元存在，则说其为**可逆的**
- 若x**既存在左逆元又存在右逆元**，则其**左逆元必等于右逆元**，即**存在逆元且该逆元唯一**

代数概念

代数

非空集合S和S上k个**一元或二元运算**$f_1,...,f_k$组成的系统称为一个**代数系统**，简称为**代数**，记作$< S,f_1,f_2,...,f_k >$

对存在特定元素如**单位元**或**零元**的**代数系统**，这些元素称为该代数系统的**特异元素**或**代数常数。**

为强调某个代数系统含有**代数常数**，可将这些代数常数列入**系统表达式**中

> ✅ **举例**
>
> 如<Z,+,0>即表示Z中的+运算存在零元0，也可用集合的名字来表示代数系统，如将该代数系统记为Z

同类型代数

若两个代数系统中**运算个数相同**，**对应运算的元数相同**，**代数常数个数相同**，则称这两个代数系统具有**相同的构成成分**

即**同类型的代数系统**

子代数

设$V=< S,f_1,f_2,...,f_k >$为代数系统，$B\subseteq S$，若B对$f_1,f_2,..,f_k$均封闭，且B和S有相同的**代数常数**

则称$< B,f_1,f_2,...f_{,k} >$为V的**子代数系统**，简称为**子代数**

格与布尔代数

格

格的定义

格的偏序集定义

格的代数系统定义

设 $< S, \preceq >$ 为**偏序集**，若 $\forall x, y \in S, \{x, y\}$都有**最小上界和最大上界**，则称S关于偏序$\prec$作成一个格

定义$x \vee y$为求两者的**最小上界**，$x \wedge y$为求两者的**最大下界**

设$< S, *, \circ >$为代数系统，*和∘为二元运算，若两个运算满足交换律、结合律、吸收律，则$< S, *, \circ >$构成一个格

代数系统定义的格也可以通过适当定义S中的偏序$\preceq$使得$< S, \preceq >$构成一个格，且$\forall a, b \in S$有$a \wedge b = a * b, a \vee b = a \circ b$

偏序集定义的**格与代数系统定义的格统称为格L**

格的性质

格的对偶

设f是含有格中元素以及符号$=, \preceq, \succeq, \vee, \wedge$的命题，令$f^*$为将f中的$\prec$和$\succeq$互相替换，$\wedge$和$\vee$互相替换得到的对偶命题

> **格的对偶原理**
>
> 若含有格中元素以及符号$=, \preceq, \succeq, \vee, \wedge$的命题f对一切格为真，则其对偶命题$f^*$对一切格为真

格的运算性质

设$< L, \preceq >$为格，则运算$\wedge$和$\vee$满足交换律，结合律，幂等律，吸收律

格的其他性质

- 设L为格，$\forall a, b \in L$,有

  $$a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

- 设L为格，$\forall a, b, c, d \in L$,若$a \preceq b$且$c \preceq d$，则$a \wedge c \preceq b \wedge d, a \vee c \preceq b \vee d$
- 设L为格，$\forall a, b, c \in L$,有

  $$a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

  这是格的分配不等式

特殊的格

子格与单元格

- 设$< L, \wedge, \vee >$为格，S为L的非空子集，若S关于L中的运算∧和∨仍构成格，则称S为L的子格
- 设单元集$\{a\}$有运算$*, \circ$满足

  $$a * a = a$$

  $$a \circ a = a$$

  则$< \{a\}, *, \circ >$为单元格

分配格

设$< L, \wedge, \vee >$为格，若$\forall a, b, c \in L$有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

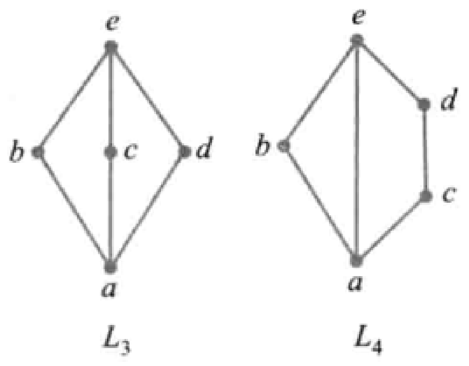
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称L为分配格

只需满足上面等式的一条即为分配格

分配格的充要条件

- 小于5元的格都是**分配格**
- 任何一条**链**都是**分配格**
- 格L为分配格当且仅当L中**不含与钻石格或五角格同构的子格**



有界格

存在全上界和全下界的格L称为**有界格**，记为$< L, \wedge, \vee, 0, 1 >$

- **全上界与全下界**：设L为格，若$\exists a \in L, \forall x \in L$有$a \preceq x$，则称a为L的全下界，同理有全上界
- 在有界格中，将**全下界记为0**，**全上界记为1**
- 全下界0为关于$\wedge$运算的**零元**，$\vee$运算的**单位元**，全上界1为关于$\wedge$运算的**单位元**，$\vee$运算的**零元**
- 有关有界格的对偶命题中，要将**0和1互相替换**

易知全上界与全下界均唯一，有限格一定是有界格

有补格

补元

设$< L, \wedge, \vee, 0, 1 >$为有界格，若$\exists b \in L$使得

$$a \wedge b = 0$$

$$a \vee b = 1$$

则称b为a的补元，易知a与b互为补元

补元不一定唯一，但若L为**有界分配格**，则存在补元且补元唯一

有补格的定义

设$< L, \wedge, \vee, 0, 1 >$为有界格，如$\forall a \in L$，在L中均存在a的补元，则称L为有补格

幂集格

设集合B，偏序集$< P(B), \subseteq >$，则此偏序集为B的**幂集格**

布尔代数

有补分配格称为**布尔格或布尔代数**，并标记为$< B, \wedge, \vee, ', 0, 1 >$，其中'为**求补运算**

图论

图的基本概念

图

图的前置知识

无序积

设A，B为**任意两个集合**，称

$$\{\{a,b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

为A与B的**无序积**，记为**A&B**，无序积对可记为(a,b)

无序积运算满足**交换律**，且元素a和b可以相等

多重集合

存在重复元素的集合称为**多重集合**，某元素**重复出现的次数**称为**该元素的重复度**

无向图与有向图

无向图

无向图为一个**有序二元组**<V,E>，其中

- V为一个**非空有穷集**，称为**顶点集**，其元素称为**顶点**或**结点**
- E为**无序积V&V**的**有穷多重子集**，称作**边集**，其元素称为**无向边**，简称为**边**

- 设G=<V,E>，$e_k = (v_i, v_j) \in E$，称v_i, v_j为e_k的**端点**，e_k与v_i, v_j**关联**

  若**两顶点不相等**，则说**边与端点关联次数为1**，否则**关联次数为2**，并说e_k为**环**

有向图

有向图为一个有序二元组<V,E>，其中

- V为一个非空有穷集，称为**顶点集**，其元素称为**顶点或结点**
- E为笛卡尔积V×V的**有穷多重子集**，称作**边集**，其元素称为**有向边**，简称为**边**
- 设D=<V,E>，$e_k = (v_i, v_j) \in E$，称v_i, v_j为e_k的端点，前者为**始点**，后者为**终点。**e_k与v_i, v_j**关联**

  若两顶点不相等，则说**边与端点关联次数为1**，否则**关联次数为2**，并说e_k为环

两者的一些规定

- 在无向图和有向图中，用圆圈或实心点表示顶点，顶点间连线表示无向边，有箭头则代表有向边
- 一般用D代指有向图，G多代指无向图，也可以为有向图
- 通常用V(G)表示G的**顶点集**，E(G)表示G的**边集**，|V(G)|表示**顶点数**，|E(G)|表示**边数**
- 顶点数称为图的**阶**，n个顶点数的图称为**n阶图**
- **没有边的图称为零图**，**n阶零图**记作N_n，**1阶零图**记作**平凡图**，即**孤立结点**
- **顶点集为空的图为空图**，记为$\varnothing$，一般**顶点集非空**
- 顶点和边有指定符号的图片称为**标定图**，否则为**非标定图**
- 有向图的**有向边改为无向边**后得到的无向图称为**基图**
- 有边连接的**两个顶点相邻**，**至少存在一个公共端点的两个边相邻**
- 无边关联的顶点称作**孤立点**

邻域与闭邻域

无向图中

设无向图$G =< V, E >, \forall v \in V$，称

$$N_G(v) = \{u | u \in V \wedge (u, v) \in E \wedge u \neq v\}$$

为v的**邻域**，即与v**相邻的所有顶点**

v的**闭邻域**包括**v本身及其邻域**，记作$\bar{N}_G(v)$

v的关联集记为$I_G(v)$，是所有与**v关联的边的集合**

$$I_G(v) = \{e|e \in E \wedge e\text{与}v\text{关联}\}$$

有向图中

设有向图$D =< V, E >, \forall v \in V$
称

$$\Gamma_D^+(v) = \{u|u \in V \wedge < v, u > \in E \wedge u \neq v\}$$

$$\Gamma_D^-(v) = \{u|u \in V \wedge < u, v > \in E \wedge u \neq v\}$$

分别为v的**后继元集**和**先驱元集**，即v的**后继的集合**和**先驱的集合**

两者的并集为v的**邻域**，包含v本身则为v的**闭邻域**

多重图

- 在无向图中，若关联一对顶点的**无向边多于1条**，则称这些边为**平行边**

  平行边的数量称为**重数**
- 在有向图中，若关联一对顶点的**有向边(方向相同)多于1条**，则称这些边为**平行边**

含平行边的图称为**多重图**，**不含平行边且不含环**的图称为**简单图**

度

- 设$G =< V, E >$为**无向图**，$\forall v \in V$，称v作为边的端点的次数为v的度数，简称为**度**，记为$d_G(v)$或$d(v)$
- 设$D =< V, E >$为有向图$\forall v \in V$
  - 称v作为**边的始点的次数**为v的**出度**，记为$d_D^+(v)$或$d^+(v)$
  - 称v作为**边的终点的次数**为v的**入度**，记为$d_D^-(v)$或$d^-(v)$

  称$d^+(v) + d^-(v)$为v的**度数**，记作$d_D(v)$或$d(v)$

最大度与最小度

在**无向图G**中，令

$$\Delta(G) = \max\{d(v)|v \in V(G)\}$$

$$\delta(G) = \min\{d(v)|v \in V(G)\}$$

分别为G的**最大度**和**最小度**

在**有向图D**中，令

$$\Delta(D) = \max\{d(v)|v \in V(D)\}$$

$$\delta(D) = \min\{d(v)|v \in V(D)\}$$

$$\Delta^+(D) = \max\{d^+(v)|v \in V(D)\}$$

$$\delta^+(D) = \min\{d^+(v)|v \in V(D)\}$$

$$\Delta^-(D) = \max\{d^-(v)|v \in V(D)\}$$

$$\delta^-(D) = \min\{d^-(v)|v \in V(D)\}$$

分别为**最大度**、**最小度**、**最大出度**、**最小出度**、**最大入度**、**最小入度**

分别简记为$\Delta, \delta, \Delta^+, \delta^+, \Delta^-, \delta^-$

- 度数为1的顶点称为**悬挂顶点**，与它**关联的边**称为**悬挂边**
- 度为偶数(奇数)的顶点称为**偶度(奇度)顶点**

握手定理

- 无向图中，**所有顶点的度数之和**等于**边数的2倍**
- 有向图中，**所有顶点的度数之和**等于**边数的2倍**；所有顶点**入度之和**等于**出度之和**，等于**边数**
- 任何图中奇度顶点个数为偶数

度数列

以无向图$G = < V, E >$为例，$V = \{v_1, v_2 \cdots, v_n\}$，称$d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_n)$为G的**度数列**

标定的无向图，其**度数列唯一**。同理还有**出度列**、**入度列**

可图化列

对于给定的**非负整数列**$d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，若存在以$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$为顶点集的n阶无向图G，使得$d(v_i)=d_i$，称d是**可图化**的

如得到的图是**简单图**，则d是**可简单图化**的

判断定理

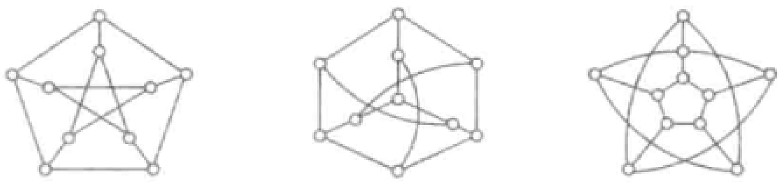
非负整数列$d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n)$**可图化**当且仅当$\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$**为偶数**

同构

设$G_1=<V_1,E_1>,G_2=<V_2,E_2>$为两个**无向图(有向图)**，如**存在双射函数**$f:V_1\to V_2$，使得

- $<v_i,v_j>\in E_1$当且仅当$<f(v_1),f(v_2)>\in E_2$
- $<v_i,v_j>$与$(f(v_i),f(v_j))$的**重数相同**

则称**两图同构**，记作$G_1\cong G_2$



(a) (b) (c)

这三个图均称作**彼特松图**，彼此之间**同构**

同构关系是一种**等价关系**，构成**全体图集合上的二元关系**

完全图

- 设G为n阶**无向简单图**，若G中每个顶点均与其余的$n-1$个**顶点相邻**，则称G为**n阶完全图**，记作$K_n(n\geq 1)$
- 设D为n阶有向简单图，若D中每个顶点均与其余的$n-1$个顶点邻接，则称D为n阶**有向完全图**
- 以n阶完全图K_n为基图的有向完全图为**n阶竞赛图**

易知三者边数分别为$\frac{n(n-1)}{2}, n(n-1), \frac{n(n-1)}{2}$

k-正则图

设G为n阶无向简单图，若$\forall v \in V(G), d(v)=k$，则称G为**k-正则图**

- n阶零图为0-正则图，n阶无向完全图为(n-1)-正则图
- 彼得松图为3-正则图
- k-正则图边数为$m=\frac{kn}{2}$，故k为奇数，则n必为偶数

子图

设$G=<V,E>,G'=<V',E'>$同为有向图或无向图

- 若$V' \subseteq V, E' \subseteq E$，则G'为G的子图并记作$G' \subseteq G$
- 若$V' \subset V, E' \subset E$，则G'为G的真子图并记作$G' \subset G$
- 若又有$V'=V$，则称G'为G的生成子图

导出子图

- 设$G=<V,E>, V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$
  - 称以V_1为顶点集，以G中两个端点都在V_1中的边组成边集E_1的图为G的V_1导出的子图，记作$G[V_1]$
- 又设$E_1 \subset E$且$E_1 \neq \varnothing$，称以E_1为边集，以E_1中**边关联的顶点**为顶点集V_1的图为G的E_1导出的子图，记作$G[E_1]$

补图

设$G=<V,E>$为n阶**无向简单图**，令$\bar{E}=\{(u,v)|u \in V \wedge v \in V \wedge u \neq v \wedge (u,v) \notin E\}$

称$\bar{G}=<V,\bar{E}>$为G的补图

若$G \cong \bar{G}$，则G为自补图

对边和顶点的操作

设$G=<V,E>$为无向图

- 删除边：设$e \in E$，用G-e表示**删除边e**
- 删除边集：设$E' \subset E$，用G-E'表示从E中删除E'的所有边，称为删除E'
- 加新边：设$u, v \in V$，用$G \cup (u, v)/G + (u, v)$表示**新增一条边**(u, v)
- 边的**收缩**：设$e = (u, v) \in E$，用G\e表示删除e后将u和v用新顶点w代替，且使w关联除e以外u，v关联的所有边
- 删除顶点：设$v \in V$，用G-v表示从G中去掉v及其所关联的一切边
- 删除顶点集：设$V' \subset V$，用G-V'表示从G中删除V'中所有顶点，记为删除V'

通路与回路

概念

通路

设G为**无向标定图**，G中顶点与边的交替序列$\Gamma = v_{i0}e_{j1} \cdots e_{jl}v_{il}$称作$v_{i0}$到$v_{il}$的通路

其中，v_{i0}为始点，v_{il}为终点，中间各点称为端点，Γ中**边的条数称为其长度**，**没有边重复出现**的通路为**简单通路**，否则为**复杂通路**

简单图中可以直接用**顶点序列**表示**通路或回路**

回路

始点和终点相同的通路称为**回路**，同理有**简单回路**和**复杂回路**

路径与圈

- 路径：若**简单通路所有顶点**和**所有边互异**，则说Γ为**初级通路或路径**

  路径必为**简单通路**，反之则不然

  - 极大路径：**始点与终点均不与路径外的顶点相邻的路径**
- **圈**：始点和终点相同的路径称为**初级回路**或**圈。长度为奇数的圈**称作**奇圈**，否则为**偶圈**

  由于**长度相同的圈都是同构**的，说两个圈不同，是指两个圈在定义意义下不同，顶点和边的标记序列不同

定理

- 在n阶图G中，若从**互异顶点**u到v**存在通路**，则从u到v存在长度**不大于n-1**的路径

- 在n阶图G中，若**存在v到自身的回路**，则必然存在v到自身长度**小于等于n的初级回路**

图的连通性

连通

- 设无向图$G =< V, E >$

  > 若$u, v \in V$之间存在通路，则称u, v是连通的，记作$u \sim v$，并规定**任何顶点与其自身连通。**

- 设有向图$D =< V, E >$

  > $\forall v_i, v_j \in V$，若从v_i到v_j存在通路，则称v_i**可达**v_j，记作$v_i \to v_j$
  >
  > 规定v_i**总是可达自身**，若两个顶点之间**相互可达**，记作$v_i \leftrightarrow v_j$

连通关系在无向图中为V上的**等价关系**，**相互可达关系**为**有向图**中V上的等价关系

连通图

- 若无向图G是**平凡图**或G中**任何两个顶点连通**，则称G为**连通图**，否则G为**非连通图**

  > 完全图**均为连通图**，零图**为非连通图**

- 若有向图D=<V,E>的**基图为连通图**，则说D为**弱连通图**，简称为**连通图**

  > - 若$\forall v_i, v_j \in V$，$v_i \to v_j$或$v_j \to v_i$至少成立其一，则说D为**单向连通图**
  > - 若$\forall v, v_j \in V$，均有$v_i \leftrightarrow v_j$，则称D为**强连通图**
  > - **易知强连通图必为单向连通图，单向连通图一定为弱连通图**

有向连通图的判别定理

1. 有向图$D =< V, E >$是**强连通图**当且仅当D中存在**经过每个顶点至少一次的回路**
2. 有向图$D =< V, E >$为**单向连通图**当且仅当D中存在**经过每个顶点至少一次的通路**

连通分支

设无向图$G =< V, E >$，V_i为V关于连通关系的一个等价类

称导出子图$G[V_i]$为G的一个连通分支

G的连通分支数为$p(G)$

连通图的连通分支数为1，非连通图的连通分支数大于1，n阶零图连通分支最多，为n

距离

设u,v为无向图G中的任意两个顶点，若$u \sim v$，则称u,v之间长度最短的通路为u,v之间的短程线

短程线的长度称为两顶点之间的距离，记为$d(u,v)$

- 不连通的两顶点距离记为∞
- $d(u,v) \geq 0$，当且仅当u=v时等号成立
- 距离具有对称性：d(u,v)=d(v,u)
- $d(u,v)+d(v,w) \geq d(u,w)$

割集

边割集

设无向图$G=<V,E>$，若存在$E' \subseteq E$使得$p(G-E')>p(G)$，且对于任意的$E'' \subseteq E'$，均有$p(G-E'')=p(G)$,则说E'为G的边割集，或简称为割集

若E'={e}，则说e为割边或桥

点割集

设无向图$G=<V,E>$，若存在$V' \subset V$使得$p(G-V')>p(G)$，且对于任意的$V'' \subset V'$，均有$p(G-V'')=p(G)$,则说V'为G的点割集

若V'={v}，则说v为割点

连通度

点连通度

设G为无向连通图且不是完全图，则说

$$\kappa(G)=\min\{|V'||V'\text{为}G\text{的点割集}\}$$

为G的点连通度，简称为连通度

规定完全图的连通度为n-1，非连通度的点连通度为0

若$\kappa \geq k$，则称G为k-连通图。

k连通图删除任何k-1个顶点得到的图必然连通

边连通度

设G为无向连通图，称

$$\lambda(G)=\min\{|E'||E'\text{为}G\text{的边割集}\}$$

为G的边连通度

规定非连通图的边连通度为0，完全图的边连通度为n-1

若$\lambda \geq r$，则说G为r边-连通图

r边-连通图删除任意r-1条边后得到的图仍然连通。

连通度的相关性质

- $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

二部图

设无向图$G=<V,E>$，若能将V划分为满足下面条件的V_1,V_2

- $V_1 \cup V_2=V, V_1 \cap V_2=\varnothing$
- $V_1 \neq \varnothing, V_2 \neq \varnothing$
- G中每条边的两个端点一个属于V_1，一个属于V_2

则称G为二部图，也称二分图或偶图，称V_1,V_2为互补顶点子集

记二部图为$<V_1,V_2,E>$，易知所有零图为二部图

完全二部图

若G是简单二部图，V_1中的每个顶点均与V_2中的所有顶点相邻，则说G为完全二部图，并记为$K_{r,s}$

其中，r,s分别为$|V_1|,|V_2|$

二部图判别

n阶无向图G为二部图当且仅当G中无奇圈

图的矩阵表示

关联矩阵

- 设无向图$G =< V, E >, V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$

令m_{ij}为顶点v_i与边e_j的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G的关联矩阵，记为$M(G)$

- 设有向图$D =< V, E >$中无环，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，令

> $$m_{ij} = \begin{cases} 1, v_i为e_j始点 \\ 0, v_i与e_j不关联 \\ -1, v_i为e_j终点 \end{cases}$$
>
> 则$(m_{ij})_{m\times n}$为D的关联矩阵，记作M(D)

关联矩阵的性质

- 无向图中
  - 每列元素之和为2(每条边关联两次顶点)
  - 第i行元素之和为v_i的度数
  - 第i行元素之和为0当且仅当v_i为孤立点
  - 元素之和为边数的两倍
  - 两列相同当且仅当两边为平行边
- 有向图中
  - 每列恰好有一个1和-1
  - 1的个数和-1个数相同，且等于边数
  - 第i行中，1的个数为$d^+(v_i)$，-1的个数为$d^-(v_i)$
  - 平行边所对应列相同

邻接矩阵

以有向图为例，无向图只要记得加上相反的有向边即可。

设有向图$D=<V,E>,V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，令$a_{ij}^{(1)}$为顶点$v_i$邻接到顶点$v_j$的边的条数，$(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$为D的邻接矩阵，记作A(D)或A

邻接矩阵的性质

- 所有元素之和等于边数
- 令A的l次幂为A^l，A^l中的各个元素为D中v_i到v_j长度为l的通路数，元素之和为D中长度为l的通路(包括回路)总数，对角线元素之和为长度为l的回路总数

可达矩阵

以有向图为例，无向图只要记得加上相反的有向边即可。

设$D=<V,E>$为有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, v_i\text{可达}v_j\\ \\ 0, otherwise.\end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为D的可达矩阵，记作P(D)，简记为P

易知P的对角线上元素均为1

可达矩阵的求解

- 计算矩阵$B_{n-1}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}A^i$，其中A为邻接矩阵
- 将矩阵中所有大于0的元素换为1

图的运算

图的不交

设图$G_1=<V_1,E_1>,G_2=<V_2,E_2>$，若两图顶点集不交，则说两图不交；如两图边集不交，则说两图边不交

不交的图必然边不交，反之不然

运算集

- 并：$G_1\cup G_2=<V_1\cup V_2,E_1\cup E_2>$

- 交：以$E_1 \cap E_2$为边集E，以E中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图，记作$G_1 \cap G_2$
- 差：以$E_1 - E_2$为边集E，以E中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图，记作$G_1 - G_2$
- 环和：以$E_1 \oplus E_2$为边集E，以E中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图，记作$G_1 \oplus G_2$

性质

- 当两图边不重时
  - $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
  - $G_1 - G_2 = G_1, G_2 - G_1 = G_2$
  - $G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$
- $G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$

欧拉图与哈密顿图

欧拉图

欧拉图是具有欧拉回路的图，具有欧拉通路而无欧拉回路的图称作半欧拉图

- 通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通路称作欧拉通路
- 通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称作欧拉回路

规定平凡图为欧拉图

判定定理

- 无向图G为欧拉图当且仅当G为无奇度顶点的连通图
- 无向图G为欧拉图当且仅当G为恰有奇度顶点的连通图
- 有向图D为欧拉图当且仅当D为**强连通图且每个顶点入度等于出度**
- 有向图D为半欧拉图当且仅当D为单向连通图且恰有两个奇度顶点，其中
  - 一个顶点入度比出度大1
  - 一个顶点出度比入度大1
  - 其余顶点入度等于出度
- G为非平凡欧拉图当且仅当G为连通的且为若干个边不重的圈的并

Fleury算法求解欧拉回路

1. 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0 = v_0$
2. 设$P_i = v_0e_1v_1e_2 \cdots e_iv_i$已经选取，按如下要求选取$e_{i+1}$
   - e_{i+1}与v_i相关联
   - 除非无边可选，否则e_{i+1}不为$G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中的桥
3. 循环至2不能进行

哈密顿图

哈密顿图是具有哈密顿回路的图，半哈密顿图是具有哈密顿通路而没有哈密顿回路的图

- 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称为哈密顿通路
- 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路

规定平凡图为哈密顿图

判定定理

- 若无向图$G =< V, E >$为哈密顿图，则$\forall V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有$p(G - V_1) \leq |V_1|$

  若无向图$G =< V, E >$为半哈密顿图，则$\forall V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有$p(G - V_1) \leq |V_1| + 1$

  彼得松图虽然满足上面的条件，却不是哈密顿图
- 若二部图$G =< V_1, V_2, E >$满足$2 \leq |V_1| \leq |V_2|$,
  - 若G为哈密顿图，则$|V_1| = |V_2|$
  - 若G为半哈密顿图，则$|V_2| = |V_1| + 1$
  - 若$|V_2| \geq |V_1| + 2$，则G不是哈密顿图也不是半哈密顿图
- 设G为n阶无向简单图，如对任意G中不相邻的两个顶点u,v均有$d(u) + d(v) \geq n - 1$，则G中必然有哈密顿通路

  若又有$n \geq 3$，则对任意G中不相邻的两个顶点u,v均有$d(u) + d(v) \geq n$，则G中必然有哈密顿通路
- 设u,v为n阶无向简单图G中两个不相邻的顶点，且$d(u) + d(v) \geq n$，则G为哈密顿图当且仅当$G \cup (u, v)$为哈密顿图

- $n(n\geq 2)$阶竞赛图中都有哈密顿通路

带权图相关问题

带权图

设图$G=<V,E>$，给定$W:E\rightarrow R$，对G的每一条边e，称$W(e)$为e的权

带有权的图称为带权图，记为$G=<V,E,W>$

当$e=<u,v>$时，记$W(e)$为$W(u,v)$

G中任一通路或回路所有边的权之和称为P的长度，记为W(P)

最短路问题

设带权图$G=<V,E,W>$，其中每一条边e的权$W(e)$为非负实数，$\forall u,v\in V$

当u和v连通时，称从u到v长度最短的路径为u到v的最短路径，其长度为u到v的距离，记为$d(u,v)$

- d(u,u)=0
- 如u，v不连通，$d(u,v)=\infty$

Djikstra标号法

略

中国邮递员问题

给定一个带权无向图，其中每条边的权为非负实数，求每一条边至少经过一次的最短回路

如有欧拉回路，最短路径为欧拉回路

否则将多出的奇度顶点单独考虑，奇度顶点需要走两遍

旅行商问题

设$G=<V,E,W>$为一个n阶完全带权图，各边权非负且可以为无穷，求G中一条最短的哈密顿回路

树

无向树

连通无回路的无向图称作无向树，简称为树

每个连通分支都是树的无向图称作森林，平凡图称为平凡树

无向树的悬挂顶点称作树叶，度数大于等于2的顶点称作分支点

树的性质

1. 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题等价

- G是树
- G中任意两个顶点之间存在唯一的路径
- G中无回路且m=n-1
- G连通且m=n-1
- G连通且任何边均为桥
- G无回路，但在任两个不同顶点之间加一条新边后，所得图中有唯一的一个含新边的圈

2. 设T为n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶

星形图

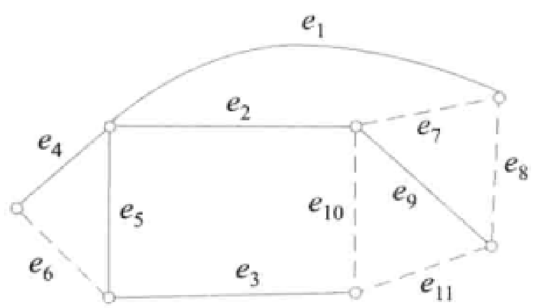
只有一个分支点且分支点度数为n-1的n阶无向树为星形图，称其唯一的分支点为星心

生成树

若无向图G的生成子图T为树，称T为G的生成树

G与T的共边称作T的树枝，不在T的边称作T的弦，称T的所有弦的导出子图为T的余树$\bar{T}$

余树不一定连通，也不一定含回路，如



生成树相关性质

1. 无向图G有生成树当且仅当G是连通图
   - 推论：设G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$
2. 设T为无向连通图G中的一棵生成树，e为T的任意一条弦，则$T \cup e$中含G中只含一条弦e，其余边均为树枝的圈，且不同的弦对应的圈不同
3. 设T是连通图G的一棵生成树，e为T的树枝，则G中存在只含树枝e，其余边都是弦的割集，且不同的树枝对应割集不同

破圈法

构造生成树的一种方法，对于一个含圈的图，不断任取一圈删除圈上的一条边直至不再含边

基本回路

设T为n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设$e_1', e_2', ..., e_{m-n+1}'$为T的弦

设$C_r(r=1,2,\cdots,m-n+1)$为T添加弦e_r'产生的G中由弦e_r'和树枝构成的圈

称C_r为G的对应弦e_r'的基本回路或基本圈，称$\{C_1, C_2, \cdots, C_{m-n+1}\}$为G对应T的基本回路系统，称m-n+1为G的圈秩并记为$\delta(G)$

任一简单回路均可以表示为基本回路的环和

广义回路

称无向图中的圈或若干个边不重的圈的并为广义回路，并规定$\varnothing$、圈、简单回路为广义回路

广义回路的运算

记无向图G的广义回路的全体为C^*

- 环和

  两个广义回路的环和仍为广义回路，环和对C^*封闭

- 数乘

  规定数乘为$0 \cdot C = \varnothing, 1 \cdot C = \varnothing$

C^*对环和运算与数乘运算构成数域$F=\{0,1\}$上的m-n+1维线性空间，称为广义回路空间

任意基本回路系统均为广义回路空间的一个基

基本割集

设T为n阶连通图G的一棵生成树，$e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$为T的树枝

$S_i(i = 1, 2, \cdots, n-1)$为由树枝$e_i$和弦构成的割集，则称$S_i$为G的对应树枝$e_i$的基本割集

称$\{S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}\}$为G对应T的基本回路系统，称n-1为G的割集秩并记为$\eta(G)$

最小生成树

设无向连通带权图$G =< V, E, W >$,T是G的一棵生成树，T的各边权之和称为T的权，记为$W(T)$

G权最小的生成树为最小生成树

Krustal算法

设n阶无向连通带权图$G =< V, E, W >$有m条边，设G中无环(有环则删去)，将m条边按权从小到大顺序排列，设为$e_1, \cdots, e_m$

取e_1在T中，依次检查剩下的边，若边与已在T中的边不能构成回路，则取其于T中，否则舍去

重复直至得到最小生成树

单链聚类

聚类操作是将数据集D中的数据按照它们之间的相似程度聚集成若干个子类

设有一组离散数据$D = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$，D上定义了一个相似度函数d

对于任何两个数据$a_i, a_j \in D$，a_i, a_j的相似度函数为$d(i, j)$，函数值在0~1之间并且$d(i, j) = d(j, i)$

给定正整数k，D的一个k聚类为D的一个k划分$\pi = \{C_1, \cdots, C_k\}$，为了使得同一子类数据尽可能接近，定义划分$\pi$的最小间隔为$D(\pi)$

最小间隔

定义两个不同子类C_s, C_l的距离$D(C_s, C_l)$为$\min\{d(i, j) | a_i \in C_s, a_j \in C_l\}$

k聚类$\pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$的最小间隔为

$$D(\pi) = \min\{D(C_s, C_l) | C_s, C_l \in \pi, 1 \leq i < j \leq k\}$$

可用求最小生成树的方法求使得$D(\pi)$达到最大值的k聚类π

根树及其应用

根树概念

若有向图的基图为无向树，则称该图为有向树

一个顶点的入度为0，其余顶点入度为1的有向树称为根树，绘制时省去箭头

入度为0的顶点称作树根，入度为1出度为0的顶点称作树叶，入度为1出度不为0的顶点称作内点，内点和树根统称为分支点

从树根到任意顶点v的路径长度称作v的层数，最大层数称作树高

根树的家族关系

设T为一棵非平凡根树，$\forall v_i, v_j \in V(T)$

- 若v_i可达v_j，称v_i为v_j的祖先
- 若v_i邻接到v_j，称v_i为v_j的父亲
- 若v_i, v_j同父，称v_i为v_j的兄弟

如T层数相同的顶点都标定次序，则称T为有序树

- 如T的每个分支点至多有r个儿子，称其为r叉树；如有序称为r叉有序树
- 如T的每个分支点都恰好有r个儿子，称其为r叉正则树；如有序称为r叉正则有序树
- 如T为r叉正则树，且每个树叶层数均为树高，称T为r叉完全正则树；如有序称为r叉完全正则有序树

子树

设T为一棵根树，$\forall v \in V(T)$，称v及其后代的导出子图T_v为T的以v为根的根子树

在二叉正则有序树中，每个分支点的两个儿子导出的根子树分别称为分支点的左子树和右子树

最优二叉树

见数据结构

Huffman算法

1. 给定t片树叶，分别以$w_1, \cdots, w_t$为权

2. 在所有入度为0的顶点(不一定是树叶)中选出两个权最小的顶点，添加一个新分支点作为两者的父亲，其权为两者权之和
3. 重复直至只有一个入度为0的顶点

波兰符号法

波兰符号法即前缀符号法，逆波兰符号法为后缀符号法

平面图

平面图的基本概念

若能将无向图G画在平面上使得除顶点外无边相交，称G为可平面图，简称为平面图

画出的无边相交图称为G的平面嵌入，无平面嵌入的图称为非平面图

给定平面图G的平面嵌入，G的边将平面划分为若干个区域，这些区域称为G的面。

其中面积无限的面称为无限面或外部面，记为R_0，其余为有限面或内部面，记为$R_1, \cdots, R_k$

包围每个面的所有边组成的回路(不是边而是回路)称作该面的边界，边界的长度称为该面的次数，记为$deg(R)$

平面图的性质

- 平面图的子图都是平面图，非平面图的母图均为非平面图
- 平面图加平行边或环后仍得平面图，因此研究一个图是否为平面图时可以去掉平行边和环
- 平面图所有面的次数之和等于边数的两倍

极大平面图

若G为简单平面图，若在G的任意两个不相邻的顶点之间加一条边，所得图为非平面图，称G为极大平面图

- 极大平面图连通，并且当阶数大于等于3时没有割点和桥
- 设G为阶数大于等于3的简单连通平面图，G为极大平面图当且仅当G的每个面次数均为3

极小非平面图

若在非平面图G中任意删除一条边所得图为平面图，则称G为极小非平面图

二度顶点的插入与消去

设$e=(u,v)$为G的一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使u,v均与w相邻，则说在G中插入2度顶点w

设w为G的一个2度顶点，w与u,v相邻，删除w并增加新边(u,v)，则说在G中消去2度顶点w

欧拉公式

设连通平面图G的顶点数、边数、面数分别为n,m,r，则有

$$n-m+r=2$$

对于有k个连通分支的平面图G，有

$$n-m+r=k+1$$

欧拉公式的推论

- 设G为连通的平面图，边数为m，顶点数为n，且每个面的次数至少为l($l\geq 3$)，则

  $$m\leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

- K_5与$K_{3,3}$均为非平面图
- 设平面图G有k个连通分支($k\geq 2$)，各面次数至少为l($l\geq 3$)，边数为m，顶点数为n，则

  $$m\leq \frac{l}{l-2}(n-k-1)$$

- 设G为n($n\geq 3$)阶m条边的极大平面图，则

  $$m=3n-6$$

- 设G为简单平面图，则G最小度为$\delta \leq 5$

平面图的判断

同胚

若两个图同构，或通过反复插入、消去2度顶点后同构，则说两图同胚

Kuratowski定理

- 图G是平面图当且仅当G中既不含与K_5同胚的子图，也不含与$K_{3,3}$同胚的子图
- 图G是平面图当且仅当G中既没有可以收缩到K_5的子图，也没有可以收缩到$K_{3,3}$的子图

平面图的对偶图

设G为一个平面图的平面嵌入，构造对偶图G^*如下：

1. 在G的每一个面R_i中放置一个顶点v_i^*
2. 设e为G的一条边，若e在G的面R_i与R_j的公共边界上，作边$e^* = (v_i^*, v_j^*)$与e相交且不与其他任何边相交
3. 若e为G中的桥且在面R_i的边界上，则作v_i^*为端点的环$e^* = (v_i^*, v_i^*)$

平面图的对偶图的性质

设平面图G的对偶图为G^*

- G^*为平面图，且为平面嵌入
- G^*为连通图
- 若边e为G的环，则G^*与e对应的边e^*为桥；若e为桥，则e^*为环
- 大多数情况下G^*为多重图
- 同一个平面图的不同平面嵌入的对偶图不一定同构

顶点数、边数、面数的关系

设平面图G连通且G^*为G的对偶图，n^*, m^*, r^*和n, m, r分别为G^*和G的顶点数、边数、面数，则

- $n^* = r$

- $m^* = m$
- $r^* = n$
- 设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = deg(R_i)$

设平面图G有k个连通分支，G^*为G的对偶图，n^*, m^*, r^*和n, m, r分别为G^*和G的顶点数、边数、面数，则

- $n^* = r$
- $m^* = m$
- $r^* = n - k + 1$
- 设v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = deg(R_i)$

自对偶图

若G^*与G对偶且$G^* \cong G$，则称G为自对偶图

轮图

在$n - 1(n \geq 4)$边形C_{n-1}内放置一个顶点，连接这个顶点与C_{n-1}上的所有顶点，所得的n阶简单图称作n阶轮图，记作W_n

n为奇数的轮图称为奇阶轮图，n为偶数的轮图称作偶阶轮图

轮图均为自对偶图

图的着色

图的顶点着色

对一个无向图G的每个顶点涂上一种颜色,使相邻顶点涂不同的颜色，称为对图G的一种着色。

有环的图不能着色，并且着色与平行边无关，只考虑简单图的着色

色数

如能用k种颜色对图G着色，则说G是k-可着色的;

若图G是k-可着色的，但不是k-1-可着色的，则说G是k色图，k为G的色数并记为$\chi(G)$

- $\chi(G) = 1$当且仅当G为零图

- 设G中至少有一条边，则$\chi(G)=2$当且仅当G为二部图
- $\chi(K_n)=n$
- 如n为偶数，$\chi(C_n)=2$；否则$\chi(C_n)=3$
- 如n为偶数，$\chi(W_n)=4$；否则$\chi(W_n)=3$

Brooks定理

对任意无环图G，均有$\chi(G)\leq\Delta(G)+1$

进一步地，对不是阶大于3的完全图也不是奇圈的无环图，有

$$\chi(G)\leq\Delta(G)$$

地图着色

连通无桥的平面图的平面嵌入及其所有面称为平面地图或地图。地图的面称为国家。

若两个国家的边界上至少有一条公共边，则称这两个国家是相邻的。

面色数

对地图的每个国家涂上一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称为对地图的一个着色。

若能用k种颜色对地图着色，则称该地图是k-面可着色的。

若某地图G是k-面可着色的，但不是k-1-面可着色的，则称之为k色地图

k称为地图G的面色数，记为$\chi^*(G)$

- 地图G是k-面可着色的当且仅当其对偶图G*是k-顶点可着色的。

Heawood定理

任意地图G都是5-面可着色的。

四色定理

任意地图G都是4-可着色的

图的边着色

对图G的每条边涂上一种颜色,使相邻边涂不同的颜色，称为对图G的一种边着色。

若能用k种颜色对图G的边着色，则称图G是k-边可着色的。

若图G是k-边可着色的，但不是k-1-边可着色的，则称k为G的边色数，记为$\chi'(G)$

- 二部图边色数等于Δ

Vizing定理

对于任意无环无向简单图G，有

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

推论：

- 长度大于1的偶圈边色数为2，长度大于2的奇圈边色数为3
- 当n大于3时，$\chi'(W_n)=\Delta(W_n)=n-1$
- 当n为大于1的奇数时，$\chi'(K_n)=n$，当n为偶数时，$\chi'(K_n)=n-1$