概率论与数理统计

单侧置信区间

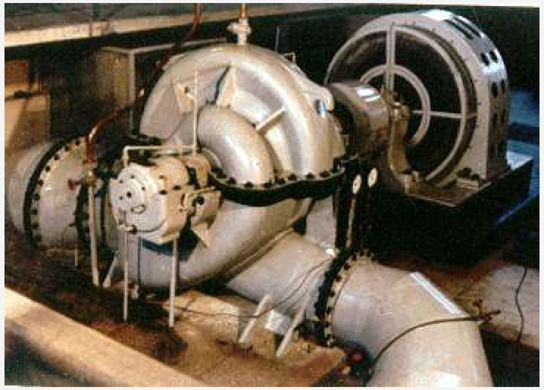
主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

单侧置信区间

上述置信区间中置信限都是双侧的，但对于有些实际问题，人们关心的只是参数在一个方向的界限。

例如对于设备、元件的使用寿命来说，平均寿命过长没什么问题，过短就有问题了。



这时, 可将置信上限取为$+\infty$，而只着眼于置信下限，这样求得的置信区间叫**单侧置信区间**。

单侧置信区间

于是引入单侧置信区间和置信限的定义：

定义 设 θ 是 一个待估参数，给定 $\alpha>0$,

若由样本 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

对于任意 $\theta \in \Theta$, 满足 $P\{\theta \geq \underline{\theta}\}=1-\alpha$

则称区间 $[\underline{\theta}, +\infty)$ 是 θ 的**置信水平为 1- α 的单侧置信区间**。

$\underline{\theta}$ 称为 θ 的**置信水平为 1- α 的单侧置信下限**。

单侧置信区间

若由样本$X_1,X_2,\ldots X_n$确定的统计量

$$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

对于任意 $\theta\in\Theta$，满足

$$P\{\theta\le\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

则称区间$(-\infty,\overline{\theta}]$ 是θ 的置信水平为 1- α 的单侧置信区间。

$\overline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 1- α 的单侧置信上限。

四、例题解析

例2 从一批灯泡中随机抽取5只作寿命试验，测得寿命X（单位：小时）如下：

1050，1100，1120，1250，1280

设灯泡寿命服从正态分布。求灯泡寿命均值μ的置信水平为0.95的单侧置信下限。

解：μ的点估计取为样本均值$\bar{X}$，

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$ 方差σ^2未知

四、例题解析

对给定的置信水平$1-\alpha$，确定分位点$t_\alpha(n-1)$

使
$$P\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_\alpha(n-1)\} = 1-\alpha$$

即
$$P\{\mu \ge \bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha$$

于是得到μ的置信水平为 1- α 的单侧置信区间为

$$[\bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \infty]$$

四、例题解析

即 μ 的置信水平为 1- α 的**单侧置信下限**为

$$\bar{X} - t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

将样本值代入得：

μ 的置信水平为0.95的单侧置信下限是1065小时。

谢谢大家