概率论与数理统计

点　估　计

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

点估计问题的一般提法

设总体 X 的分布函数形式已知，但它的一个或多个参数为未知，借助于总体 X 的一个样本来估计总体未知参数的值，这样的问题称为点估计问题。

点估计问题就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，

用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来估计参数 θ。

例题 1：在某炸药制造厂，一天中发生着火现象的次数 X 是一个随机变量，假设它服从以 $\lambda > 0$ 为参数的泊松分布，参数 λ 为未知，设有以下的样本值，试估计参数 λ.

着火次数 k	0	1	2	3	4	5	6	
发生 k 次着火的天数 n_k	75	90	54	22	6	2	1	$\Sigma = 250$

点估计问题的一般提法

为估计 λ ：

我们需要构造出适当的样本的函数 $T(X_1,X_2,\ldots X_n)$， 每当有了样本，就代入该函数中算出一个值，用来作为 λ 的估计值。

$T(X_1,X_2,\ldots X_n)$ 称为参数 λ 的**点估计量**，

把样本值代入 $T(X_1,X_2,\ldots X_n)$ 中，得到 λ 的一个**点估计值**。

着火次数 k	0	1	2	3	4	5	6	
发生 k 次着火的天数 n_k	75	90	54	22	6	2	1	$\Sigma = 250$

解：因为 $X \sim \pi(\lambda)$，所以 $\lambda = E(X)$.

用样本均值来估计总体的均值 $E(X)$. $\quad \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=0}^{6} k n_k}{\sum_{k=0}^{6} n_k} = \frac{1}{250}(0\times75 + 1\times90 + 2\times54 + 3\times22 + 4\times6 + 5\times2 + 6\times1) = 1.22.$$

故 $E(X) = \lambda$ 的估计为1.22 .

点估计问题的一般提法

由大数定律， $$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

问题是： 使用什么样的统计量去估计 μ ？

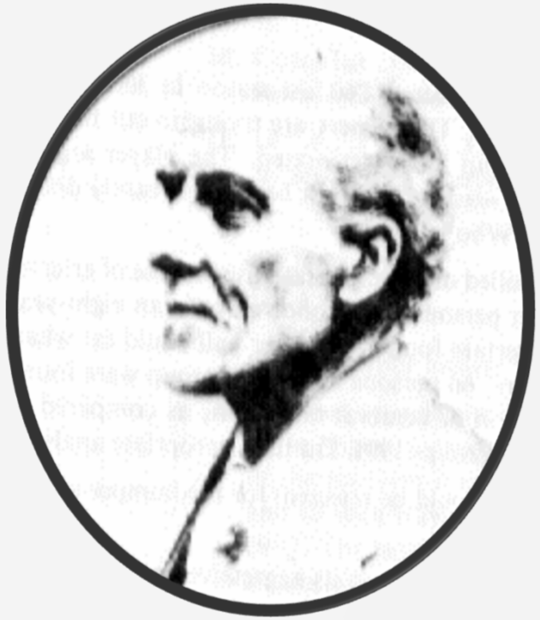
1. 样本均值；
2. 样本中位数；
3. 别的统计量。

二、寻求估计量的方法

1 矩估计法

矩估计法是英国统计学家

K.皮尔逊最早提出来的。



二、寻求估计量的方法

1 矩估计法

若总体 X 的数学期望 $E(X)=\mu$ 有限，则有

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} E(X)=\mu$$

$$\Downarrow$$

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)=\mu_k \ (k=1,2,\cdots)$$

$$g(A_1,A_2,\cdots,A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$$

其中 g 为连续函数。

二、寻求估计量的方法

1 矩估计法

定义：

- 用样本原点矩估计相应的总体原点矩，又用样本原点矩的连续函数估计相应的总体原点矩的连续函数，这种参数点估计法称为**矩估计法**。

理论依据： 大数定律

二、寻求估计量的方法

1 矩估计法—具体做法

设总体的分布函数中含有k个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ ，那么它的前k阶矩 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k$ ，一般都是这 k个参数的函数，记为：

$$\mu_i=\mu_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \quad i=1, 2, \cdots, k$$

从这 k 个方程中解出

$$\theta_j=\theta_j(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \quad j=1, 2, \cdots, k$$

二、寻求估计量的方法

1 矩估计法—具体做法

从这 k 个方程中解出

$$\theta_j = \theta_j(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

那么用诸 μ_i 的估计量 A_i 分别代替上式中的诸 μ_i，

即可得诸 θ_j 的矩估计量：

$$\hat{\theta}_j = \theta_j(A_1, A_2, \cdots, A_k) \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

矩估计量的观察值称为**矩估计值**。

二、寻求估计量的方法

例2： 设总体 X 在 $[a, b]$ 上服从均匀分布，a, b 未知。$X_1, \ldots, X_n$ 是来自 X 的样本，试求 a, b 的矩估计量。

解：$$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\mu_2 = E\left(X^2\right) = D(X) + [E(X)]^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4}$$

二、寻求估计量的方法

即 $\begin{cases} a+b=2\mu_1 \\ b-a=\sqrt{12(\mu_2-\mu_1^2)} \end{cases}$

总体矩

解得 $a=\mu_1-\sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}$ $\quad b=\mu_1+\sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}$

于是 *a*, *b* 的矩估计量为

$$\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2},\quad \hat{b}=\bar{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

样本矩

二、寻求估计量的方法

例3： 设总体 X 的均值 μ 和方差 $\sigma^2(>0)$ 都存在，μ,σ^2 未知。$X_1,\dots,X_n$ 是来自 X 的样本，试求 μ,σ^2 的矩估计量。

解 $\mu_1=E\left(X\right)=\mu$

$$\mu_2=E\left(X^2\right)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$$

二、寻求估计量的方法

解得 $\mu = \mu_1$ 总体矩

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

于是 μ, σ^2 的矩估计量为

$$\hat{\mu} = A_1 = \bar{X}$$ 样本矩

$$\widehat{\sigma^2} = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

二、寻求估计量的方法

上例表明:

总体均值与方差的矩估计量的表达式不因不同的总体分布而异。

例 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 **未知, 即得** μ,σ^2 **的矩估计量**

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

一般地, **用样本均值** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **作为总体** X **的均值的矩估计,**

用样本二阶中心矩 $B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ **作为总体** X **的**

方差的矩估计。

二、寻求估计量的方法

1 矩估计法

优点

- 简单易行

缺点

- 当总体类型已知时，没有充分利用分布提供的信息。

谢 谢 大 家