历届试题选（四）

一、已知函数 $f(x)=\arctan x+\sin x$，求 $f^{(11)}(0)$.（2016—2017）

解：令 $g(x)=\arctan x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，即 $(1+x^2)g'(x)=1$.

两边求 n 阶导数，即 $[(1+x^2)g'(x)]^{(n)}=0$.

由莱布尼茨公式，

$$g^{(n+1)}(x)(1+x^2)+ng^{(n)}(x)(1+x^2)'+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}g^{(n-1)}(x)(1+x^2)''=0,$$

即
$$g^{(n+1)}(x)(1+x^2)+ng^{(n)}(x)\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2!}g^{(n-1)}(x)\cdot 2=0.$$

令 $x=0$， $g^{(n+1)}(0)=-n(n-1)g^{(n-1)}(0)$.

所以， $g^{(11)}(0)=-10\cdot 9g^{(9)}(0)=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7g^{(7)}(0)=\cdots=-10!g'(0)$.

因为 $g'(0)=1$，所以， $g^{(11)}(0)=-10!$.

故
$$f^{(11)}(x)=g^{(11)}(x)+(\sin x)^{(11)}=g^{(11)}(x)+\sin(x+\frac{11}{2}\pi).$$

令 $x=0$，得
$$f^{(11)}(0)=g^{(11)}(0)+\sin\frac{11}{2}\pi=-10!-1.$$

二、已知 $y=x^2\cos^2 x+\dfrac{1}{1+x}$，求 $y^{(n)}(0)\ (n\ge 3)$.（2017—2018）

解： $y=x^2\cos^2 x+\dfrac{1}{1+x}=x^2\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x+\dfrac{1}{1+x}$.

记 $g(x)=x^2\cos 2x$，由莱布尼茨公式，得

$$g^{(n)}(x)=(\cos 2x)^{(n)}\cdot x^2+n(\cos 2x)^{(n-1)}\cdot(x^2)'+\frac{n(n-1)}{2}(\cos 2x)^{(n-2)}\cdot(x^2)''$$

$$g^{(n)}(x)=2^n\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)\cdot x^2+n\cdot 2^{n-1}\cos(2x+\frac{n-1}{2}\pi)\cdot 2x$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}\cos(2x+\frac{n-2}{2}\pi)\cdot 2.$$

令 $x=0$，得

$$g^{(n)}(0)=-2^{n-2}n(n-1)\cos\frac{n}{2}\pi.$$

注意到，$(\dfrac{1}{1+x})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$，故

$$y^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)+\left(\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right)\bigg|_{x=0}=-2^{n-2}n(n-1)\cos\frac{n\pi}{2}+(-1)^n n!.$$

三、设函数 $f(x)=x\ln(1-x^2)$，求 $f^{(11)}(0)$．（2019—2020）

解：记 $g(x)=\ln(1-x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x-1}$．

则 $$g^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)}+\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}.$$

所以，$g^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!-(n-1)!$．

由莱布尼茨公式，得

$$f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)\cdot x+ng^{(n-1)}(x)\cdot 1,$$

令 $x=0$，$f^{(n)}(0)=ng^{(n-1)}(0)=[(-1)^n-1]n(n-2)!$．

故 $$f^{(11)}(0)=[(-1)^{11}-1]\cdot 11\cdot 9!=-\frac{11!}{5}.$$

四、设 $f(x)=(x^2+x+1)\cos^2\dfrac{x}{2}$，求 $f^{(20)}(0)$．（2020—2021）

解：$f(x)=(x^2+x+1)\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)(1+\cos x)$．

由莱布尼茨公式，

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=(1+\cos x)^{(n)}\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)+n(1+\cos x)^{(n-1)}\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)'\\&\quad+\frac{n(n-1)}{2}(1+\cos x)^{(n-2)}\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)''\\&=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)+n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}(2x+1)\\&\quad+\frac{n(n-1)}{2}\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)\cdot 1\end{aligned}$$

故 $$f^{(n)}(0)=\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{n}{2}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2}.$$

因此，$$\begin{aligned}f^{(10)}(0)&=\frac{1}{2}\cos 5\pi+5\cos\frac{9\pi}{2}+\frac{10\cdot 9}{2}\cos 4\pi\\&=-\frac{1}{2}+\frac{90}{2}=\frac{89}{2}.\end{aligned}$$

五、设函数 $f(x)=(x^2+x+1)\cos 2x$，求 $f^{(8)}(0)$．（2021—2022）

解：由莱布尼茨公式，得

$$f^{(n)}(x)=(x^2+x+1)(\cos 2x)^{(n)}+n(x^2+x+1)'(\cos 2x)^{(n-1)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(x^2+x+1)''(\cos 2x)^{(n-2)}$$
$$=(x^2+x+1)\cdot 2^n\cos(2x+\frac{n\pi}{2})+n(2x+1)\cdot 2^{n-1}\cos(2x+\frac{(n-1)\pi}{2})$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot 2^{n-2}\cos(2x+\frac{(n-2)\pi}{2}).$$

故 $$f^{(n)}(0)=2^n\cos\frac{n\pi}{2}+n\cdot 2^{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+n(n-1)\cdot 2^{n-2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2}.$$

因此，

$$f^{(8)}(0)=2^8\cos 4\pi+8\cdot 2^7\cos\frac{7\pi}{2}+56\cdot 2^6\cos 3\pi=2^8-7\cdot 2^9=-13\cdot 2^8=-3328.$$

六、求函数 $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{(1+x^2)(2+x^2)}}$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$．（2017—2018）

解：$\ln y=\frac{1}{3}[\ln(x+1)+\ln(x+2)-\ln(1+x^2)-\ln(2+x^2)]$，

两边求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{2+x^2}],$$

即 $$y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{(1+x^2)(2+x^2)}}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{2+x^2}].$$

故 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}.$$

七、求函数 $y=\sqrt[6]{\frac{x^2-1}{(x+2)(x+4)}}$ 在 $x=2$ 处的微分 $\mathrm{d}y|_{x=2}$．（2019—2020）

解：$\ln y=\frac{1}{6}[\ln(x^2-1)-\ln(x+2)-\ln(x+4)]$，

两边微分，得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}[\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}]\mathrm{d}x,$$

即 $$\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{x^2-1}{(x+2)(x+4)}}[\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}]\mathrm{d}x.$$

令 $x=2$，得 $\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{3}{24}}[\frac{4}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}]\mathrm{d}x=\frac{11}{144\sqrt{2}}\mathrm{d}x$.

八、设 $y=x\cdot\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$_________.（2021—2022）

解：记 $f(x)=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，则 $y=xf(x)$.

于是，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)+xf'(x)$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f'(x)+f'(x)+xf''(x)=2f'(x)+xf''(x)$.

故 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2f'(0)$.

因为 $\ln|f(x)|=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$，两边求导，得

$$\frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}],$$

即
$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}].$$

于是，
$$f'(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}[-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}]=-\frac{11\sqrt{6}}{144}.$$

故
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2f'(0)=-\frac{11}{72}\sqrt{6}.$$

九、求函数 $y=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 和 $\left.\mathrm{d}y\right|_{x=1}$.（2017—2018）

解：$\mathrm{d}y=\frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}\mathrm{d}(\frac{1-x^2}{1+x^2})=\frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{2x}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

于是，$\left.\mathrm{d}y\right|_{x=1}=-\mathrm{d}x$.

十、设方程 $\mathrm{e}^{x-y}=y-1$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求此隐函数在点 $(2,2)$ 处的一阶导数和二阶导数.（2019—2020）

解：方程两边对 x 求导，得 $\mathrm{e}^{x-y}(x-y)'=y'$，即 $\mathrm{e}^{x-y}(1-y')=y'$，解得 $y'=\dfrac{\mathrm{e}^{x-y}}{1+\mathrm{e}^{x-y}}$.

于是，
$$y''=\left(\frac{\mathrm{e}^{x-y}}{1+\mathrm{e}^{x-y}}\right)'=\frac{(\mathrm{e}^{x-y})'\cdot(1+\mathrm{e}^{x-y})-\mathrm{e}^{x-y}\cdot(1+\mathrm{e}^{x-y})'}{(1+\mathrm{e}^{x-y})^2}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{x-y}\cdot(1-y')\cdot(1+\mathrm{e}^{x-y})-\mathrm{e}^{x-y}\cdot\mathrm{e}^{x-y}\cdot(1-y')}{(1+\mathrm{e}^{x-y})^2}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{x-y}\cdot(1-y')}{(1+\mathrm{e}^{x-y})^2}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{x-y}\cdot\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{x-y}}{1+\mathrm{e}^{x-y}}\right)}{(1+\mathrm{e}^{x-y})^2}=\frac{\mathrm{e}^{x-y}}{(1+\mathrm{e}^{x-y})^3}.$$

故
$$y'\Big|_{\substack{x=2\\y=2}}=\frac{\mathrm{e}^{2-2}}{1+\mathrm{e}^{2-2}}=\frac{1}{2}，\quad y''\Big|_{\substack{x=2\\y=2}}=\frac{\mathrm{e}^{2-2}}{(1+\mathrm{e}^{2-2})^3}=\frac{1}{8}.$$

十一、求由方程 $y=\tan(x+y)$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'(x)$ 和 $y''(x)$. (2017—2018)

解：方程 $y=\tan(x+y)$ 两边对 x 求导，得
$$y'=\sec^2(x+y)\cdot(x+y)'=\sec^2(x+y)(1+y')，$$
移项后，得 $y'=-\csc^2(x+y)$.

于是，
$$y''=-2\csc(x+y)\cdot(-\csc(x+y)\cot(x+y))(1+y')$$
$$=2\csc^2(x+y)\cot(x+y))(1-\csc^2(x+y))$$
$$=-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y))$$
$$=-\frac{2\cos^3(x+y)}{\sin^5(x+y)}..$$

十二、设方程 $\ln(x^2+y^2)=2\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求此隐函数在点 $(1,0)$ 处的一阶导数和二阶导数.（2018—2019）

解：方程 $\ln(x^2+y^2)=2\arctan\dfrac{y}{x}$ 两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+2y\cdot y')=2\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2},$$

整理得，$y'=\frac{x+y}{x-y}$，于是，$y'\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=\frac{x+y}{x-y}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=1.$

由 $y'=\frac{x+y}{x-y}$，得

$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y+2xy'}{(x-y)^2}=\frac{-2y+2x\cdot\frac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2}=\frac{2y^2+2x^2}{(x-y)^3}.$$

故 $$y''\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=\frac{2y^2+2x^2}{(x-y)^3}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=2.$$

十三、设方程 $2^{xy}=x^2+y$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.（2020—2021）

解：方程 $2^{xy}=x^2+y$ 两边微分，得

$$2^{xy}\ln 2\cdot\mathrm{d}(xy)=2x\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$$

即 $$2^{xy}\ln 2\cdot(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=2x\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入，得 $\ln 2\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$.

故 $$\mathrm{d}y\big|_{x=0}=\ln 2\mathrm{d}x.$$

十四、设方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求此隐函数的一阶导数和二阶导数.（2021—2022）

解：方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 两边求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-\frac{1}{2}\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

所以，$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2-\cos y}.$$

继续求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2}{(2-\cos y)^2}(2-\cos y)'$$

$$=-\frac{2}{(2-\cos y)^2}\sin y\cdot y'$$

$$=-\frac{2}{(2-\cos y)^2}\sin y\cdot\frac{2}{2-\cos y}$$

$$=-\frac{4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

十五、求星形线$\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$在$\theta=\frac{\pi}{4}$处的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$的值.（2016—2017）

解：$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(a\sin^3\theta)'}{(a\cos^3\theta)'}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(-\tan\theta)'}{(a\cos^3\theta)'}=\frac{-\sec^2\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=\frac{1}{3a\cos^4\theta\sin\theta}.$$

故$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{1}{3a\cos^4\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3a\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{4\sqrt{2}}{3a}.$$

十六、求函数$\begin{cases}x=\dfrac{t}{1+t^2}\\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2}\end{cases}$在$t=2$所对应点处的切线方程和法线方程.（2017—2018）

解：$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\frac{t^2}{1+t^2})'}{(\frac{t}{1+t^2})'}=\frac{\frac{2t(1+t^2)-t^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{(1+t^2)-t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}}=\frac{2t}{1-t^2},$$

令$t=2$，可得对应点$(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$处的切线斜率为$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=\left.\frac{2t}{1-t^2}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3}$.

故所求的切线方程为$y-\frac{4}{5}=-\frac{4}{3}(x-\frac{2}{5})$，即$y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$；

法线方程为$y-\frac{4}{5}=\frac{3}{4}(x-\frac{2}{5})$，即$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

十七、计算由摆线的参数方程$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$（$0<t<2\pi$）所确定的函数$y=y(x)$的一阶

导数和二阶导数.（2018—2019）

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{\sin t}{1-\cos t})'}{(t-\sin t)'}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^3}$$

$$=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

十八、求星形线$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}(0<t<2\pi)$在点$(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$处的切线方程.（2019—2020）

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\sin^3 t)'}{(\cos^3 t)'}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t.$$

因为点$(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$对应于$t=\frac{\pi}{4}$，故所求切线斜率$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$.

因此，所求切线方程为$y-\frac{\sqrt{2}}{4}=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4})$，即$y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

十九、$y=y(x)$由$\begin{cases}x=2t-1\\ te^y+y+1=0\end{cases}$所确定，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$及$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1}$.（2020—2021）

解：方程$te^y+y+1=0$两边对t求导，得$e^y+te^y\frac{dy}{dt}+\frac{dy}{dt}=0$.

于是，$$\frac{dy}{dt}=-\frac{e^y}{1+te^y}=\frac{e^y}{y};$$

故$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^y}{2y}.$$

因此，$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dy}(\frac{e^y}{2y})\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{ye^y-e^y}{y^2}\cdot\frac{e^y}{2y}=\frac{y-1}{4y^3}e^{2y}.$$

当$x=-1$时，$t=0$，则$y=-1$.

故$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1}=-\frac{e^{-1}}{2},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1}=\frac{1}{2}e^{-2}.$$

二十、已知笛卡尔叶形线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$ ，其中 $a>0$ 为常数。

求由此参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 在 $t=1$ 处的一阶导数和二阶导数。

（2021—2022）

解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(\dfrac{3at^2}{1+t^3})'}{(\dfrac{3at}{1+t^3})'} = \frac{(\dfrac{t^2}{1+t^3})'}{(\dfrac{t}{1+t^3})'} = \frac{\dfrac{2t(1+t^3)-t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}}{\dfrac{(1+t^3)-t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}} = \frac{2t-t^4}{1-2t^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{(\dfrac{2t-t^4}{1-2t^3})'}{(\dfrac{3at}{1+t^3})'} = \frac{\dfrac{(2-4t^3)(1-2t^3)-(2t-t^4)(-6t^2)}{(1-2t^3)^2}}{3a\cdot\dfrac{(1+t^3)-t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}}$$

$$= \frac{2(1+t^3)^4}{3a\cdot(1-2t^2)^3}.$$

故 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1} = \frac{2-1}{1-2} = -1,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} = \frac{2^5}{-3a} = -\frac{32}{3a}.$$