概率论与数理统计

假设检验的基本思想

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

假设检验的基本思想和方法

在本节中，我们将讨论不同于参数估计的另一类重要的统计推断问题。这就是**根据样本的信息检验关于总体的某个假设是否正确**。

这类问题称作假设检验问题。

假设检验 $\begin{cases} \text{参数假设检验} \\ \text{非参数假设检验} \end{cases}$

参数假设检验：总体分布已知，检验关于未知参数的某个假设

非参数假设检验：总体分布未知时的假设检验问题

假设检验

罐装可乐的容量按标准应在350毫升和360毫升之间。

生产流水线上罐装可乐不断地封装，然后装箱外运。怎么知道这批罐装可乐的容量是否合格呢?

把每一罐都打开倒入量杯，看看容量是否合于标准。

这样做显然不行!

假设检验

通常的办法是进行抽样检查。

每隔一定时间，抽查若干罐。如每隔1小时，抽查5罐，得5个容量的值X_1，…，X_5，根据这些值来判断生产是否正常。

如发现不正常，就应停产，找出原因，排除故障，然后再生产；如没有问题，就继续按规定时间再抽样，以此监督生产，保证质量。

假设检验

很明显，不能由 5 罐容量的数据，在把握不大的情况下就判断生产 不正常，因为停产的损失是很大的。

当然也不能总认为正常，有了问题不能及时发现，这也要造成损失。

如何处理这两者的关系，假设检验面对的就是这种矛盾。

假设检验

罐装可乐的容量按标准应在 350 毫升和360毫升之间。

在正常生产条件下，由于种种随机因素的影响，每罐可乐的容量应在355毫升上下波动。这些因素中没有哪一个占有特殊重要的地位。因此，根据中心极限定理，假定每罐容量服从正态分布是合理的。

假设检验

这样，我们可以认为 $X_1,\dots,X_5$ 是取自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，当生产比较稳定时，σ^2 是一个常数。现在要检验的假设是：

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad (\mu_0 = 355)$$

在实际工作中，往往把不轻易否定的命题作为原假设。

它的对立假设是：

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

称H_0**为原假设**（或零假设，解消假设）；

称H_1**为备选假设**（或对立假设）。

假设检验

那么，如何判断原假设H_0是否成立呢?

由于μ是正态分布的期望值，它的估计量是样本均值，因此$\bar{X}$可以根据$\bar{X}$与μ_0的差距$|\bar{X}-\mu_0|$来判断H_0是否成立。

当$|\bar{X}-\mu_0|$较小时，可以认为H_0是成立的;

当$|\bar{X}-\mu_0|$较大时，应认为H_0不成立，即生产已不正常。

较大、较小是一个相对的概念，合理的界限在何处?应由什么原则来确定?

假设检验

问题归结为对差异作定量的分析，以确定其性质。

差异可能是由抽样的随机性引起的，称为

”抽样误差”或 随机误差

这种误差反映偶然、非本质的因素所引起的随机波动。

假设检验

然而，这种随机性的波动是有一定限度的，如果差异超过了这个限度，则我们就不能用抽样的随机性来解释了。

必须认为这个差异反映了事物的本质差别，即反映了生产已不正常。

这种差异称作 **“系统误差”**

假设检验

问题是，根据所观察到的差异，如何判断它究竟是由于偶然性在起作用，还是生产确实不正常?

差异是“抽样误差”还是“系统误差”所引起的?这里需要给出一个量的界限。

假设检验

问题是：如何给出这个量的界限?

人们在实践中普遍采用的一个原则：

小概率事件在一次试验中基本上不会发生。

假设检验

在假设检验中，我们称这个小概率为**显著性水平**，用 α 表示。

α 的选择要根据实际情况而定。常取 $\alpha=0.1$，$\alpha=0.01$，$\alpha=0.05$。

现在回到我们前面罐装可乐的例中：

在提出原假设 H_0 后，如何作出接受和拒绝 H_0 的结论呢？

假设检验

罐装可乐的容量按标准应在350毫升和360毫升之间。一批可乐出厂前应进行抽样检查，现抽查了n 罐，测得容量为$X_1,X_2,\dots,X_n$，问这一批可乐的容量是否合格?

假设检验

提出假设 H_0： $\mu = 355$ ⟷ H_1： $\mu \neq 355$

由于 σ 已知，

选检验统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

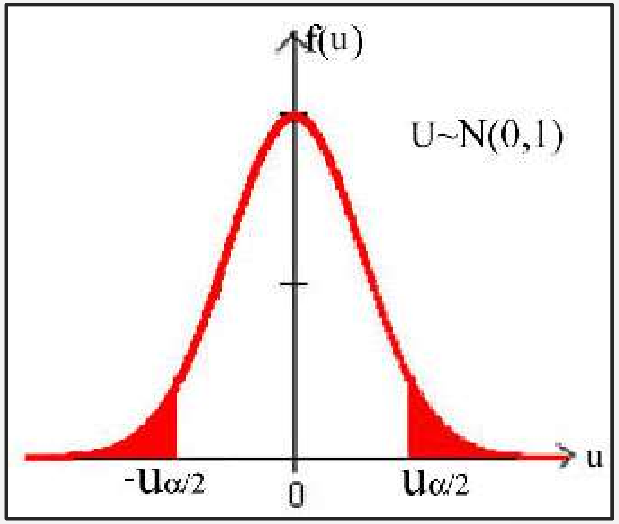
它能衡量差异 $|\bar{X} - \mu_0|$ 大小且分布已知。

对给定的显著性水平 α，可以在 $N(0,1)$ 表中查到分位点的值 $u_{\alpha/2}$，使 $P\{|U| > u_{\alpha/2}\} = \alpha$

假设检验

$$P\{|U|>u_{\alpha/2}\}=\alpha$$

也就是说，“$|U|>u_{\alpha/2}$”是一个小概率事件。



故我们可以取拒绝域为：

$$W:\ |U|>u_{\alpha/2}$$

如果由样本值算得该统计量的实测值落入区域 W，则拒绝 H_0；否则，不能拒绝H_0。

假设检验

这里所依据的逻辑是：

如果H_0是对的，那么衡量差异大小的某个统计量落入区域 W(拒绝域) 是个小概率事件。如果该统计量的实测值落入W，也就是说，H_0成立下的小概率事件发生了，那么就认为H_0不可信而否定它。否则我们就不能否定H_0（只好接受它）。

假设检验

不否定H_0并不是肯定H_0一定对，而只是说差异还不够显著，还没有达到足以否定H_0的程度。

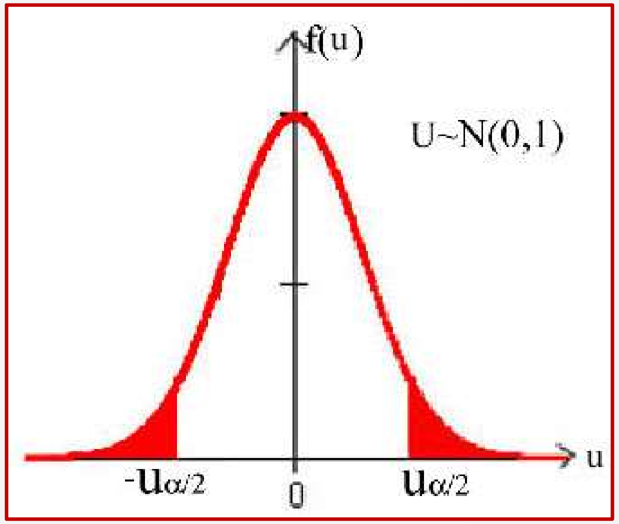
所以假设检验又叫

“显著性检验”

假设检验

如果显著性水平 α 取得很小，则拒绝域 也会比较小。

产生的后果是： H_0难于被拒绝。



如果在 α 很小的情况下H_0仍被拒绝了，则说明实际情况很可能与之有显著差异。

基于这个理由，人们常把 $\alpha=0.05$ 时拒绝H_0称为是显著的，而把在 $\alpha=0.01$ 时拒绝H_0称为是高度显著的。

谢 谢 大 家