概率论与数理统计

事件的独立性

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

一、两事件的独立性

例子： 将一颗均匀骰子连掷两次。

设 A={第二次掷出6点}，

B={第一次掷出6点}，

显然 $P(A|B)=P(A)$

这就是说，已知事件B发生，并不影响事件A发生的概率，这时称事件A、B独立。

一、两事件的独立性

由乘法公式知，当事件A、B 独立时，有

$$P(AB)=P(A)\,P(B)$$

$$P(AB)=P(A|B)P(B)$$

用$P(AB)=P(A)\,P(B)$刻划独立性，比用

$$P(A|B) = P(A)$$

或

$$P(B|A) = P(B)$$

更好，它不受 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$ 的制约。

一、两事件的独立性

两事件独立的定义

若两事件 A、B 满足

$$P(AB)=P(A)\,P(B) \qquad (1)$$

则称 A、B **相互独立**，

简称 A、B **独立**。

定理1：

事件A、B独立的充要条件为

$$P(A|B)=P(A)\,,\ P(B)>0$$

或 $$P(B|A)=P(B)\,,\ P(A)>0$$

一、两事件的独立性

证 **先证必要性 .** 设事件 A、B 独立 ,由独立定义知

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

所以 ,当 $P(B)>0$ 时 , $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$

或者 ,当 $P(A)>0$ 时 , $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$

再证充分性： 设 $P(A|B)=P(A)$ 成立 ,则有

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$$

由定义可知 ,事件 A、B 相互独立 .

一、两事件的独立性

例： 从一副不含大小王扑克牌中任取一张，记 $A=\{$抽到$K\}$，$B=\{$抽到的牌是黑色的$\}$

问事件A、B是否独立?

解：由于 $P(A)=4/52=1/13$,

$P(B)=26/52=1/2$,

$P(AB)=2/52=1/26$.

可见， $P(AB)=P(A)P(B)$

故：

事件A、B 独立。

一、两事件的独立性

前面我们是根据两事件独立的定义作出结论的，也可以通过计算条件概率去做：

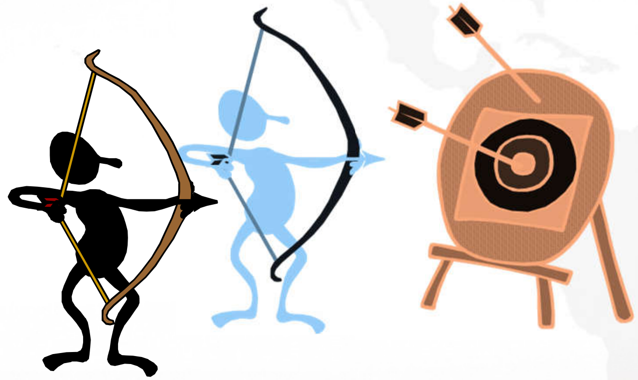
从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 A={抽到K}，B={抽到的牌是黑色的}，则

$$P(A)=1/13, \qquad P(A|B)=2/26=1/13$$

可见 $P(A)= P(A|B)$，即事件A、B独立。

在实际应用中，往往**根据问题的实际意义去判断两事件是否独立**。

一、两事件的独立性



在实际应用中，往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立。

例如： 甲、乙两人向同一目标射击，

记 A={甲命中}，　B={乙命中}，A 与 B 是否独立?

由于“甲命中”并不影响“乙命中”的概率，故认为A、B独立。

(即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率)

一、两事件的独立性

一批产品共 n 件，从中抽取 2 件，设 A_i={第i件是合格品}　i=1,2

若抽取是**有放回**的，则A_1与A_2**独立**。

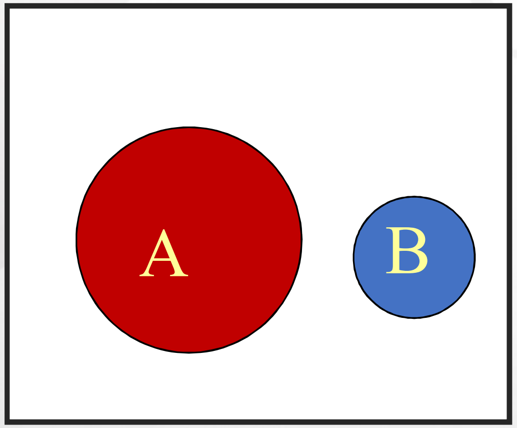
因为第二次抽取的结果**不受**第一次抽取的影响。

若抽取是**无放回**的，则A_1与A_2**不独立**。

因为第二次抽取的结果**受到**第一次抽取的影响。

一、两事件的独立性

请问：如图的两个事件是独立的吗？



我们来计算： $P(AB)=0$

而 $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$

即 $P(AB)\neq P(A)P(B)$

故 A、B不独立。

即 若A、B互斥，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，则A与B不独立。

反之，若A与B独立，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，则A 、B不互斥。

一、两事件的独立性

定理 2：

若两事件A、B独立，

则 $\overline{A}$与B，A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与$\overline{B}$

也相互独立。

证明 仅证A与$\overline{B}$独立

一、两事件的独立性

证明 仅证A与$\overline{B}$独立

$$P(A\overline{B}) = P(A - AB)$$

概率的性质

A、B独立

$$= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B})$$

故 A与$\overline{B}$独立。

二、多个事件的独立性

定义　设 A、B、C 为三事件，如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{cases}$$

则称三事件 A、B、C 为两两独立的事件．

当事件 A、B、C 两两独立时，等式

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

不一定成立．

二、多个事件的独立性

例如 $S=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$，$A=\{\omega_1,\omega_2\}$,$B=\{\omega_1,\omega_3\}$,

$C=\{\omega_1,\omega_4\}$,则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，并且，

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B),\quad P(AC)=\frac{1}{4}=\boldsymbol{P(A)P(C)},$$

$$P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C).$$

即事件 A、B、C 两两独立 .

但是 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C).$

二、多个事件的独立性

对于三个事件A、B、C，若

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

四个等式同时成立，则称

事件A、B、C相互独立。

二、多个事件的独立性

定义： 设 $A_1, A_2, \ldots A_n$ 为 n 个事件，如果对于任意的 $k\ (1< k \le n)$，和任意的$1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le i_n$有等式

$$\boxed{P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \ldots P\left(A_{i_k}\right)}$$

则称 $A_1, A_2, \ldots A_n$ 为相互独立事件。

请注意多个事件两两独立与相互独立的区别与联系

对 $n\ (n > 2)$个事件

相互独立 $\longrightarrow$ 两两独立

$\overset{?}{\longleftarrow}$

三、独立性的概念在计算概率中的应用

对独立事件，许多概率计算可得到简化

例1：有甲、乙两批种子，出苗率分别为0.8和0.9，现从这两批种子中各任取一粒，求

（1）两粒种子都出苗的概率；

（2）恰好有一粒种子出苗的概率；

（3）至少有一粒种子出苗的概率。

解：设 $A=\{$由甲批中取出的一粒种子出苗$\}$

$B=\{$由乙批中取出的一粒种子出苗$\}$

三、独立性的概念在计算概率中的应用

则事件 A、B 相互独立，且事件"两粒种子都出苗"表示为：AB，"恰好有一粒出苗"表示为：$\bar{A}B+A\bar{B}$，"至少有一粒种子出苗 "表示为：$A\cup B$.

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.8\cdot 0.9=0.72$；

(2) $$P(\bar{A}B\cup A\bar{B})=P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})$$

$$=P(\bar{A})P(B)+P(A)P(\bar{B})$$

$$=0.2\cdot 0.9+0.8\cdot 0.1=0.26 .$$

三、独立性的概念在计算概率中的应用

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=0.8+0.9-0.8\cdot 0.9=0.98$.

或者 $P(A\cup B)=1-P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(\bar{A}\bar{B}\right)$

$=1-P\left(\bar{A}\right)P\left(\bar{B}\right)=0.98$.

或者 $P(A\cup B)=P\left(AB+\bar{A}B+A\bar{B}\right)=P(AB)+P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})$

$=0.72+0.26=0.98$.

谢 谢 大 家