# 厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期中试题

考试日期：2010.11　　信息学院自律督导部整理

**1.　（24 分 每小题 6 分）求下列数列或函数的极限**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{3}+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

**2.　（24 分 每小题 6 分）计算下列函数的导数或微分**

(1) 设 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$；　　(2) 设 $y=\dfrac{\tan x}{1+e^x}$，求 $dy$；

(3) $y=x^2\cos 2x$，求 $y^{(100)}$；

(4) 求由方程 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

**3．（8 分）求函数** $y=\dfrac{|x|-x^2}{x(|x|-x^3)}$ **的间断点及其类型。**

**4．（12 分）问** $\alpha$ 取何值时，函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 在（$-\infty,+\infty$）上（1）连续；（2）可导；（3）一阶导数连续？

**5. （8 分）**设 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^{\mathrm{n}}$，求证：对任意自然数 $n$，$f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 中存在惟一的实根。

**6. （8 分）**证明恒等式：$2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$（$x>1$）.

7． **（12 分）**设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：在 $(a,b)$ 内存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$ 。

**8. （10 分）下面两题任选一题**

**(1)**设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明：在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)>0$。

**(2)** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$，$f(a)=f(b)=\mathrm{A}$，试证明 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 内至少有两个零点。