概率论与数理统计

数学期望的性质及应用

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

四、数学期望的性质

性质1. 设C是常数，则$E(C)=C$;

性质2. 若k是常数，则$E(kX)=kE(X)$;

性质3. $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$;

推广： $$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

性质4. 设X、Y相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$;

推广： $$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$ (诸X_i相互独立时)

请注意:
由$E(XY)=E(X)E(Y)$不一定能推出X,Y独立

四、数学期望的性质

性质3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

证　　设二维随机变量（X,Y）的概率密度$f(x,y)$。其边缘概率密度为$f_X(x), f_Y(y)$,于是有

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

性质3得证。

四、数学期望的性质

性质4. 设X、Y相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$;

又若X,Y相互独立,

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_y(y)dxdy=E(X)E(Y)$$ 性质4得证.

五、数学期望性质的应用

例 8：求二项分布的数学期望

若 $X\sim B(n,p)$，则X表示n重贝努里试验中的“成功”次数。

现在我们来求X的数学期望。

若设 $X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次试验成功}\\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败}\end{cases}$ $i=1,2，\ldots，n$

则 $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

五、数学期望性质的应用

因为 $P(X_i=1)=p$， $P(X_i=0)=1-p$

$$E(X_i)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

可见，服从参数为 n 和 p 的二项分布的随机变量 X 的数学期望是 $n\,p$。

五、数学期望性质的应用

例 9：把数字1,2,…,n 任意地排成一列，如果数字 k 恰好出现在第k个位置上，则称为一个巧合，求巧合个数的数学期望。

解：设巧合个数为X，　引入

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{数字}k\text{恰好出现在第}k\text{个位置上}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}\qquad k=1,2,\ldots,n$$

则　$X=\sum_{k=1}^{n}X_k$　　由于　$E(X_k)=P(X_k=1)=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$

故　$E(X)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=n\cdot\dfrac{1}{n}=1$

五、数学期望性质的应用

例10 **一民航送客车载有20位旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以X表示停车的次数，求E(X)。(设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立)**

解　引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}0 & \text{在第}i\text{站没有人下车}\\ 1 & \text{在第}i\text{站有人下车}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots 10$$

易知　$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$

五、数学期望性质的应用

按题意 $P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, i=1,2,\cdots 10$

由此 $E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, i=1,2,\cdots 10$

进而

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(X_1+X_2+\cdots+X_{10}) \\
&= E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10}) \\
&= 10[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}] = 8.784\text{次}
\end{aligned}
$$

本题是将 X 分解成数个随机变量之和，然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望的和来求数学期望的，此方法具有一定的意义。

谢 谢 大 家