

历届试题选 (二重积分的计算)

1. 设有平面区域 $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, 则

$$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = \text{_____}. \quad (2004-2005 \text{ 学年})$$

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$

(D) 0.

答案: 记 $D_2 = \{(x, y) | -a \leq x \leq 0, x \leq y \leq -x\}$, $D_3 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq a, -y \leq x \leq y\}$, 则 $D = D_2 \cup D_3$.

$$\text{故 } \iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = \iint_{D_2} (xy + \cos x \sin y) dx dy + \iint_{D_3} (xy + \cos x \sin y) dx dy.$$

注意到 D_2 关于 x 轴对称, 且 $f(x, y) = xy + \cos x \sin y$ 满足 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则

$$\iint_{D_2} (xy + \cos x \sin y) dx dy = 0.$$

D_3 关于 y 轴对称, 且 $g(x, y) = xy$ 满足 $g(-x, y) = -g(x, y)$, $h(x, y) = \cos x \sin y$ 满足

$h(-x, y) = h(x, y)$, 则

$$\iint_{D_3} xy dx dy = 0, \quad \iint_{D_3} \cos x \sin y dx dy = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy.$$

$$\text{故 } \iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy.$$

故选 (A).

2. 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy = \text{_____}$. (2004—2005 学年)

解: 因为区域 D 关于 $y = x$ 对称, 则 $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$.

$$\text{故 } \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy = \frac{1}{a^2} \iint_D x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint_D y^2 dx dy$$

$$= \frac{1}{a^2} \iint_D x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint_D x^2 dx dy$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \iint_D x^2 dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) R^4.$$

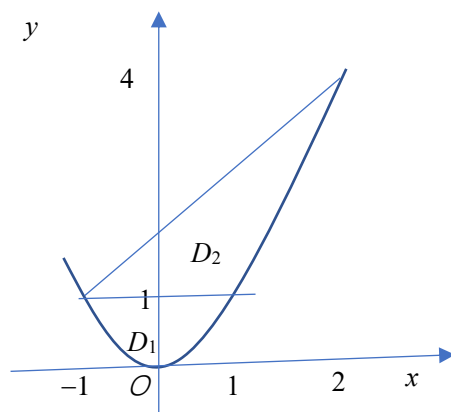
答案: $\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) R^4$.

3. 改变积分次序并求值: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x \sin y dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} x \sin y dx$.

(2004—2005 学年)

解: 区域 D_1 和 D_2 如图所示, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x \sin y dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} x \sin y dx \\ &= \iint_{D_1} x \sin y dx dy + \iint_{D_2} x \sin y dx dy \\ &= \iint_{D_1 \cup D_2} x \sin y dx dy \\ &= \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} x \sin y dy \\ &= \int_{-1}^2 x [\cos x^2 - \cos(x+2)] dx \\ &= \int_{-1}^2 x \cos x^2 dx - \int_{-1}^2 x \cos(x+2) dx \\ &= \frac{1}{2} \sin x^2 \Big|_{-1}^2 - [x \sin(x+2)]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 \sin(x+2) dx \\ &= \frac{1}{2} (\sin 4 - \sin 1) - [2 \sin 4 + \sin 1 + \cos(x+2)]_{-1}^2 \\ &= -\frac{3}{2} (\sin 4 + \sin 1) + \cos 1 - \cos 4. \end{aligned}$$



4. 计算 $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy$, 其中 D 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 所围闭区域. (2004—2005 学年)

解: 令 $\begin{cases} x = 2r \cos \theta \\ y = 3r \sin \theta \end{cases}$, 则 $|J| = 2 \cdot 3 \cdot r = 6r$, 故

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot 6r dr \\ &= -6\pi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} d(1 - r^2) = -6\pi \cdot \frac{2}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = 4\pi. \end{aligned}$$

5. 交换积分次序 $\int_0^2 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy =$ _____。 (2005—2006 学年)

解：本题中的 $y = \sqrt{4x - x^2}$ 可改写成 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ，即

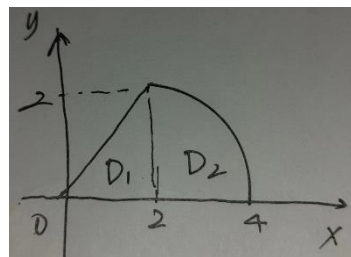
$$x = 2 + \sqrt{4 - y^2}.$$

如图所示， D_1 为 $x=0$ ， $x=2$ ， $y=0$ ， $y=x$ 所围成的区域， D_2 为 $x=2$ ，

$x=4$ ， $y=0$ ， $y=\sqrt{4x-x^2}$ 所围成的区域。

于是，

$$\begin{aligned} & \int_0^2 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy \\ &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \end{aligned}$$



6. 设平面区域 D 由正方形 $|x| + |y| = 1$ 所围成，则 $\iint_D (1+x+y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2005—2006 学年)

解：因为 D 是菱形区域，关于 x 轴对称，而 $f(x, y) = y$ 满足 $f(x, -y) = -f(x, y)$ ，所以， $\iint_D y dx dy = 0$ 。

同样， D 关于 y 轴对称，而 $g(x, y) = x$ 满足 $g(-x, y) = -g(x, y)$ ，所以， $\iint_D x dx dy = 0$ 。

因此， $\iint_D (1+x+y) dx dy = \iint_D dx dy = D$ 的面积，因此，

$$\iint_D (1+x+y) dx dy = 2.$$

7. 设 $f(x)$ 是区域 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ 上的连续函数，则 $\iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ 等于 ()。

(A) $2\pi \int_1^2 xf(x) dx$;

(B) $2\pi \left(\int_0^4 xf(x) dx - \int_0^2 xf(x) dx \right)$;

(C) $2\pi \int_1^2 f(x) dx$;

(D) $2\pi \left(\int_0^4 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx \right)$ 。(2005—2006 学年)

解：利用极坐标变换，可得

$$\iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 rf(r) dr = 2\pi \int_1^2 xf(x) dx.$$

故答案是 (A)。

8. 计算二重积分 $\iint_D |\sin(x+y)| dx dy$ ，其中 $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ 。

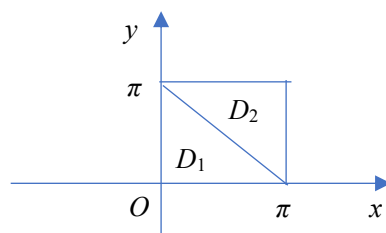
(2005—2006 学年)

解：将区域 D 分成两个区域，其中

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \pi - x, 0 \leq x \leq \pi\}, \quad D_2 = \{(x, y) | \pi - x \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq \pi\}$$

于是,

$$\begin{aligned} \iint_D |\sin(x+y)| dx dy &= \iint_{D_1} \sin(x+y) dx dy - \iint_{D_2} \sin(x+y) dx dy \\ &= \int_0^\pi dx \int_0^{\pi-x} \sin(x+y) dy - \int_0^\pi dx \int_{\pi-x}^\pi \sin(x+y) dy \\ &= \int_0^\pi (\cos x - \cos \pi) dx - \int_0^\pi (\cos \pi - \cos(\pi+x)) dx \\ &= \pi + \pi = 2\pi. \end{aligned}$$



9. 设 $D: x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0$, $f(x, y)$ 为 D 上的连续函数, 且 $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) du dv$, 求 $f(x, y)$. (2005—2006 学年)

解: 令 $A = \iint_D f(u, v) du dv$, 注意: A 是常数, 于是 $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} A$.

两边积分, 得 $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - \frac{8}{\pi} A \iint_D dx dy$.

利用极坐标变换, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-r^2} r dr = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{\sin \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^3 \theta) d\theta = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

10. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) =$ _____.

(A) $2f(2)$; (B) $f(2)$; (C) $-f(2)$; (D) 0. (2006—2007 学年)

解: 设 D 是由 $y=1$, $y=t$, $x=y$, $x=t$ 围成的区域, 则

$$F(t) = \iint_D f(x) dx dy = \int_1^t dx \int_0^x f(x) dy = \int_1^t x f(x) dx,$$

则 $F'(t) = t f(t)$, 故 $F'(2) = 2f(2)$.

答案是 (A).

11. 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $I = \iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy =$ _____. (2006—2007 学年)

解: 将区域划分为两个区域:

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) | x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是,} \quad I &= \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx + \int_0^1 y e^{y^2} dy = 2 \int_0^1 x e^{x^2} dx = e^{x^2} \Big|_0^1 = e - 1. \end{aligned}$$

12. 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 与 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体体积。(2006—2007 学年)

解: 这是一个曲顶柱体的体积问题. 先求两曲面交线在 xoy 面上的投影.

$$\text{联立方程} \begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}, \text{ 消去 } z, \text{ 得 } x^2 + 2y^2 = 6 - 2x^2 - y^2, \text{ 即 } x^2 + y^2 = 2.$$

记 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$, 则所求立体体积为

$$V = \iint_D [6 - 2x^2 - y^2 - (x^2 + 2y^2)] dx dy = 3 \iint_D (2 - x^2 - y^2) dx dy.$$

利用极坐标变换, 有

$$V = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r dr = 6\pi \left(r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 6\pi.$$

13. 计算 $I = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (ax + by + c)^2 dy$, 其中 R, a, b, c 都是不为零的常数, $R > 0$. (2006—2007 学年)

解: 记 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (ax + by + c)^2 dx dy = \iint_D (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 + 2abxy + 2acx + 2bcy) dx dy \\ &= \iint_D (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2) dx dy + 2 \iint_D (abxy + acx + bcy) dx dy. \end{aligned}$$

因为区域 D 关于 x 轴对称, 则 $\iint_D (abxy + bcy) dx dy = \iint_D by(ax + c) dx dy = 0$.

D 关于 y 轴对称, 则 $\iint_D acx dx dy = 0$.

D 关于 $y = x$ 对称, 则 $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$, 因此,

$$\begin{aligned} I &= a^2 \iint_D x^2 dx dy + b^2 \iint_D y^2 dx dy + c^2 \iint_D dx dy \\ &= (a^2 + b^2) \iint_D x^2 dx dy + c^2 \cdot \pi R^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy + c^2 \cdot \pi R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2 + b^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r dr + \pi R^2 c^2 \\
&= \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} R^4 + \pi R^2 c^2 \\
&= \frac{a^2 + b^2}{4} \pi R^4 + \pi R^2 c^2.
\end{aligned}$$

14. D 是直线 $y = x$, $y = 0$, $x = \pi$ 所围成的闭区域, 则 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy =$ _____. (2007—2008 学年)

解: $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2.$

15. 设 $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} d\sigma$, $I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} d\sigma$, 其中 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$, 则 (). (2007—2008 学年)

A、 $I_1 < I_2 < I_3$; B、 $I_2 < I_3 < I_1$; C、 $I_1 < I_3 < I_2$; D、 $I_3 < I_2 < I_1$.

解: 注意到点 $(2, 2)$ 在圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 上.

对方程 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 两边对 x 求导, 得 $2(x-1) + 2(y-1) \frac{dy}{dx} = 0$, 将点 $(2, 2)$ 代入, 可得

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,2)} = -1.$$

于是, 圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 在点 $(2, 2)$ 处的切线方程为 $y-2 = -(x-2)$, 即 $x+y=4$.

因此, 圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 在切线 $x+y=4$ 的下方, 故在区域 D 上, $x+y \leq 4$.

同理, 圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y-0 = -(x-0)$, 即圆 $x+y=0$.

因此, 圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 在切线 $x+y=0$ 的上方, 故在区域 D 上, $x+y \geq 0$.

于是, 在区域 D 上, $\frac{x+y}{4} \leq \sqrt{\frac{x+y}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}.$

故 $I_1 < I_2 < I_3$, 选 (A)

16. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} d\sigma =$ () (2008—2009 学年)

- (A) $\frac{4}{3}\pi$; (B) $\frac{2}{3}\pi$ (C) $\frac{1}{3}\pi$ (D) $\frac{1}{6}\pi$.

解：利用极坐标变换，

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \cdot r dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{3}\right) (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

答案：C

17. 计算二重积分 $I = \iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2+y^2) dx dy$ ，其中积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \pi\}$. (2011—2012 学年)

解：利用极坐标变换，有

$$I = e^\pi \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy = e^\pi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} e^{-r^2} \sin r^2 \cdot r dr.$$

令 $t = r^2$ ，则 $r dr = \frac{1}{2} dt$ ，于是，

$$I = e^\pi \cdot 2\pi \int_0^\pi e^{-t} \sin t \cdot \frac{1}{2} dt = \pi e^\pi \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt.$$

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt &= -e^{-t} \sin t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-e^{-t}) \cos t dt \\ &= -[e^{-t} \cos t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^{-t} (-\sin t) dt] \\ &= e^{-\pi} + 1 - \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt, \end{aligned}$$

$$\text{所以,} \quad \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1).$$

$$\text{故} \quad I = \frac{\pi}{2} e^\pi (e^{-\pi} + 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} e^\pi.$$