厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期中试题

考试日期：2014.11　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、计算下列各题：（每小题 5 分，共 50 分）

1．求极限**错误!未找到引用源。错误!未找到引用源。**$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{3x}+2}$；

2． $y=\ln(1+x+\sqrt{x^2+2x})+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$（$x>0$），求 $\mathrm{d}y$；

3．设 $y=(x^2+ax+b)\sin kx$，其中 $k>0$ 为常数，求 n 阶导数；

4．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\ln(1+2x)}=3$，求 $f(0)$， $f'(0)$；

5．求曲线 $y=x\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})$（$x>0$）的渐近线；

6．计算不定积分$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$；

7．求$\int \sec^3 x\tan^3 x\mathrm{d}x$；

8．设函数$y=y(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$确定，求$y=y(x)$的驻点，并判别它是否为极值点.

9．设$a>0$，求曲线$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$处的曲率；

10．求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2(\sqrt[3]{1+\sin x}-1)}$.

二、计算下列各题：（每小题 6 分）

1．若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)=2$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}$；

2． 已知数列 $\{x_n\}$ 满足：$0<x_n<1$， $x_{n+1}(1-x_n)\ge\dfrac{1}{4}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

3．已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导， $f'(0)=\mathrm{e}$，且对任意的 x, y 满足

$$f(x+y)=\mathrm{e}^x f(y)+\mathrm{e}^y f(x)$$

求 $f(0)$ 和 $f'(x)$，并检验 $f'(x)$ 的连续性。

4．设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t-t^2+1 \\ t\,\mathrm{e}^y+y+x=0 \end{cases}$ 所确定，求在 $t=0$ 处曲线的切线方程和法线方程。

三、计算下列各题：（每小题 8 分，共 16 分）

1．判断函数 $y=\dfrac{\sin(1-x)}{(1+e^{\frac{1}{x}})(x^2-1)}$ 间断点类型，如果是可去间断点，请补充或改变函数的定义使它连续。

2．求定义在区间 $[0,2\pi]$ 上的函数 $f(x)=\sin x\,|\cos x|$ 的单调区间、极值点、拐点以及最大值和最小值.

四、证明题：（每小题 5 分，共 10 分）

1．试证明：在区间 $(0,\dfrac{1}{2})$ 内，恒有不等式

$$2x+(x-2)\arctan x>(x+\frac{1}{2})\ln(1+x^2) \text{ 成立.}$$

2．假设 $0<a<b$，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：对于任意正数 $k>0$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{k}{\xi}f(\xi)$.