概率论与数理统计

连续型随机变量的数学期望

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

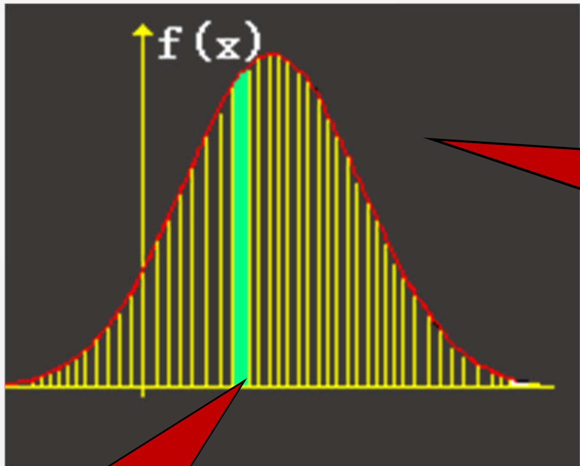
二、连续型随机变量的数学期望

设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$，在数轴上取很密的分点$x_0<x_1<x_2<\ldots$，则X落在小区间$[x_i, x_{i+1})$的概率是

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\approx f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$$

$$= f(x_i)\Delta x_i$$



阴影面积近似为

$f(x_i)\Delta x_i$

小区间$[x_i, x_{i+1})$

二、连续型随机变量的数学期望

由于x_i与x_{i+1}很接近,，所以区间$[x_i, x_{i+1})$中的值可以用x_i来近似代替。

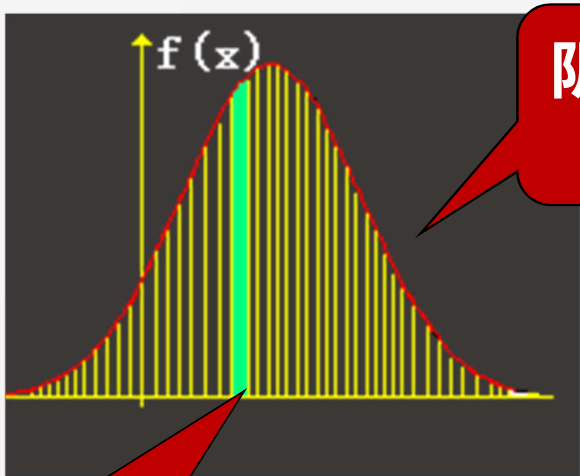
因此X与以概率 $f(x_i)\Delta x_i$ 取值 x_i 的离散型 $r.v$ 近似，

该离散型$r.v$ 的数学期望是

$$\sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i$$

这正是 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

的渐近和式。



二、连续型随机变量的数学期望

定义 2 设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$，如果积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛，则称此积分值为X的**数学期望**，即

$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx}$$

请注意：连续型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的积分。

二、连续型随机变量的数学期望

例4 设$X \sim U(a,b)$,求$E(X)$.

解 X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

X的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

即数学期望位于区间(a,b)的中点.

二、连续型随机变量的数学期望

例 5：有2个互相独立工作的电子装置，它们的寿命$X_k(k=1,2)$服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0,\end{cases}\qquad \theta>0$$

若将这两个电子装置串联连接组成整机，求整机寿命(以小时计) N 的数学期望。

解 $X_k(k=1,2)$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

二、连续型随机变量的数学期望

例 5：有2个互相独立工作的电子装置，它们的寿命$X_k(k=1,2)$服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0,\end{cases}\quad \theta>0$$

若将这两个电子装置串联连接组成整机，求整机寿命(以小时计) N 的数学期望。

二、连续型随机变量的数学期望

解 $X_k(k=1,2)$**的分布函数为**

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$\boldsymbol{N=\min(X_1,X_2)}$ **的分布函数为**

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}1-e^{-\frac{2x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

二、连续型随机变量的数学期望

于是 N 的概率密度为

$$f_{\min}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(N)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\min}(x)dx=\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}}dx=\frac{\theta}{2}$$

谢 谢 大 家