概率论与数理统计

离散型随机变量的条件分布律

主讲人：郑旭玲

信息科学与技术学院

课前导入

- 高盐饮食是导致高血压的元凶
- 包含“免费”字样的邮件很可能是广告
- 看手机比看书更容易近视

在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

推广到随机变量

设有两个随机变量X,Y，在给定Y取某个或某些值的条件下，求X的概率分布。

这个分布就是条件分布。

课前导入

例如，一个家庭有两个孩子，已知一个是男孩，问另一个是女孩的概率是多少？

设随机变量X表示两个孩子中女孩的数量，Y表示男孩的数量。

这实际上是要求

$$P\{X=1\mid Y\geq 1\}$$

样本空间

$S=\{$男男，男女，女男，~~女女~~$\}$

离散型随机变量的条件分布

定义 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若 $P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\quad i=1,2,\ldots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的**条件分布律**。

类似地，也可定义在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律。

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\quad j=1,2,\ldots$$

离散型随机变量的条件分布

条件分布是一种概率分布，具有概率分布的一切性质，如：

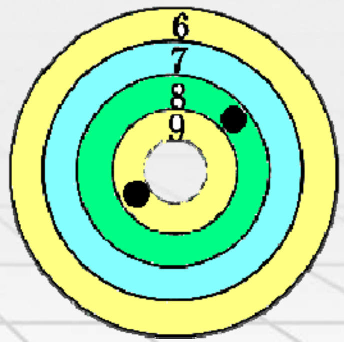
$$P\left\{X = x_i \mid Y = y_j\right\} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left\{X = x_i \mid Y = y_j\right\} = 1$$

离散型随机变量的条件分布

例 一射手进行射击，击中目标的概率 $p(0 < p < 1)$，射击进行到击中目标两次为止。**以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数。**试求 X 和 Y 的联合分布及条件分布。

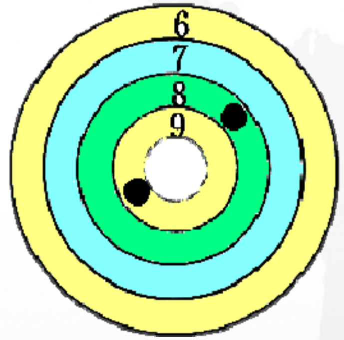
解 依题意，$\{Y=n\}$ 表示在第 n 次射击时击中目标，且在前 n-1 次射击中有一次击中目标。$\{X=m\}$ 表首次击中目标时射击了 m 次 。



离散型随机变量的条件分布

1 2 …… m ……… n-1 n

n次射击　击中　击中



每次击中目标的概率为 p

$$P\{X=m, Y=n\}=?$$

不论m ($m<n$)是多少，$P\{X=m, Y=n\}$都应等于

$$\boxed{P\{X=m, Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}}$$

由此得X和Y的联合分布律为 $P\{X=m, Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}$

(n=2,3, …; m=1,2, …, n-1)

离散型随机变量的条件分布

为求条件分布，先求边缘分布。

***X*的边缘分布律是：**

$$\boxed{P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{+\infty}P\{X=m,Y=n\}}$$

$$=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-p)^{n-2}$$

$$=p^2\frac{(1-p)^{m+1-2}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}\quad(m=1,2,\ldots)$$

离散型随机变量的条件分布

Y的边缘分布律是：

$$\boxed{P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$ （ n = 2,3, … ）

离散型随机变量的条件分布

于是可求得：

当n=2,3, …时，

$$P\{X=m|Y=n\}$$

$$=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

$$=\frac{1}{n-1},\quad m=1,2,\ldots,n-1$$

当m=1,2, …时，

$$P\{Y=n|X=m\}$$

$$=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}$$

$$=p(1-p)^{n-m-1},\quad n=m+1,m+2,\ldots$$

离散型随机变量的条件分布

例 对一群体的吸烟及健康状况进行调查，随机变量X和Y：

$$X=\begin{cases}0, & \text{健康}\\ 1, & \text{一般}\\ 2, & \text{不健康}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}0, & \text{不吸烟}\\ 1, & \text{一天吸烟不超过15支}\\ 2, & \text{一天吸烟超过15支}\end{cases}$$

根据调查结果，（X,Y）的联合分布律及边缘分布律如下表：

X \ Y	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	0.35	0.04	0.025	0.415
1	0.025	0.15	0.04	0.215
2	0.020	0.10	0.25	0.370
$P\{Y=y_j\}$	0.395	0.290	0.315	

离散型随机变量的条件分布

(X, Y) 的联合分布律及边缘分布律如下表：

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	0.35	0.04	0.025	0.415
1	0.025	0.15	0.04	0.215
2	0.020	0.10	0.25	0.370
$P\{Y=y_j\}$	0.395	0.290	0.315	

$$P\{X=0 \mid Y=0\}=\frac{p_{00}}{p_{\cdot 0}}=\frac{0.35}{0.395}=0.886 \qquad P\{X=1 \mid Y=0\}=\frac{p_{10}}{p_{\cdot 0}}=\frac{0.025}{0.395}=0.063$$

$$P\{X=2 \mid Y=0\}=\frac{p_{20}}{p_{\cdot 0}}=\frac{0.020}{0.395}=0.051$$

离散型随机变量的条件分布

(X,Y) 的联合分布律及边缘分布律如下表：

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	0.35	0.04	0.025	0.415
1	0.025	0.15	0.04	0.215
2	0.020	0.10	0.25	0.370
$P\{Y=y_j\}$	0.395	0.290	0.315	

同理可得：

x	0	1	2
$P\{X=x\mid Y=0\}$	0.886	0.063	0.061
$P\{X=x\mid Y=1\}$	0.138	0.517	0.345
$P\{X=x\mid Y=2\}$	0.079	0.127	0.794

离散型随机变量的条件分布

(X,Y) 的联合分布律及边缘分布律如下表：

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	0.35	0.04	0.025	0.415
1	0.025	0.15	0.04	0.215
2	0.020	0.10	0.25	0.370
$P\{Y=y_j\}$	0.395	0.290	0.315	

反之，也可求得：

y	0	1	2
$P\{Y=y\|X=0\}$	0.843	0.096	0.060
$P\{Y=y\|X=1\}$	0.116	0.698	0.186
$P\{Y=y\|X=2\}$	0.054	0.270	0.676