历届试题选（六）解答

一、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)\cdot f(2)>0$， $f(0)\cdot f(1)<0$. 证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)$. (2016—2017)

证明：因为函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)\cdot f(2)>0$， $f(0)\cdot f(1)<0$，由零点定理，存在 $x_1\in(0,1)$， $x_2\in(1,2)$，使得 $f(x_1)=0$， $f(x_2)=0$.

作辅助函数 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-2x}$，则 $F'(x)=f'(x)\mathrm{e}^{-2x}-2f(x)\mathrm{e}^{-2x}$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导知， $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

由罗尔定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,2)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)\mathrm{e}^{-2\xi}-2f(\xi)\mathrm{e}^{-2\xi}=0,$$

移项后可得 $f'(\xi)=2f(\xi)$.

二、设函数 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续（n 为自然数， $n\geq 2$）， $f(0)=f(n)$. 证明：存在 ξ，$\xi+1\in[0,n]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+1)$. (2016—2017)

证明：由已知条件，可得 $F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=f(0)-f(n)=0$.

如果 $F(0)=F(1)=\cdots=F(n-1)=0$，则可取 $\xi=k(k=0,1,\cdots,n-1)$.

如果存在某个整数 $k(0\leq k\leq n-1)$，使得 $F(k)\neq 0$，由 $F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=0$ 知，一定能找到另一个整数 $l(0\leq l\leq n-1)$，使得 $F(k)F(l)<0$.

由于 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续，由零点定理，在 k 和 l 之间必存在点 ξ，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+1)$..

显然， $\xi\in[0,n-1]$， $\xi+1\in[0,n]$.

三、设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可导，并且满足 $\forall x\in\mathbb{R}$， $|f(x)|\leq 1$， $|f'''(x)|\leq 1$. 证明：$\forall x\in\mathbb{R}$， $|f'(x)|^3\leq\dfrac{9}{8}$. (2016—2017)

证明：由已知条件和泰勒公式，有

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(t-x)^3,$$

其中ξ介于x和t之间.

任取$h>0$，分别将$t=x+h$及$t=x-h$代入上式，得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)h^3,$$
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2-\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)h^3.$$

其中$x-h<\xi_2<x<\xi_1<x+h$.

两式相减，有

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)h^3+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)h^3,$$

即，$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)h^2-\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)h^2.$$

于是，$$|f'(x)|\le\frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|}{2h}+\frac{1}{2\cdot 3!}|f'''(\xi_2)|h^2+\frac{1}{2\cdot 3!}|f'''(\xi_1)|h^2$$
$$\le\frac{2}{2h}+\frac{1}{2\cdot 3!}h^2+\frac{1}{2\cdot 3!}h^2=\frac{1}{h}+\frac{1}{6}h^2.$$

令$\frac{1}{2h}=\frac{1}{6}h^2$（或令$(\frac{1}{h}+\frac{1}{6}h^2)'=0$），有$h=\sqrt[3]{3}$，则有$|f'(x)|\le\frac{6+h^3}{6h}\le\frac{9}{8}$.

四、设函数$f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且$f(2)=2f(1)$．证明：存在$\xi\in(1,2)$，使得$\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$．（2017—2018）

证明：作辅助函数$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，于是，$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

由于函数$f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，则函数$F(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导.

因为$f(2)=2f(1)$，故$F(1)=\frac{f(1)}{1}=f(1)=\frac{f(2)}{2}=F(2)$.

由罗尔定理知，存在$\xi\in(1,2)$，使得$F'(\xi)=0$，即$\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0$，也即

$\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

五、设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有连续的二阶导数. 证明：存在$\xi\in(a,b)$，

使得 $f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.（2017—2018）

证明：由泰勒公式，

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2,\ \xi\text{介于}x\text{和}\frac{a+b}{2}$$

之间.

分别取$x=a$，$x=b$，得

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})-f'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4},$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4},$$

其中$a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$.

两式相加，得

$$f(a)+f(b)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}$$

$$=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)],$$

因为 $f(x)$ 在(a,b)内具有连续的二阶导数，所以，$f''(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，故 $f''(x)$在

$[\xi_1,\xi_2]$上取得最大值M 和最小值m.

于是，$m\le\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\le M$.

由连续函数的介值定理，存在$\xi\in[\xi_1,\xi_2]$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$.

故 $$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

六、设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且有 $f(0)=0$， $f(1)+f(2)=2$，

$f(3)=4$. 证明: (1) 至少存在一点$\xi\in[1,2]$, 使得 $f(\xi)=1$; (2) 至少存在一点$\eta\in(0,3)$，

使得 $f'(\eta)=1$．(2018—2019)

证明：(1) 作辅助函数$\varphi(x)=f(x)-1$．

容易得到，$\varphi(1)+\varphi(2)=f(1)+f(2)-2=0$，即$\varphi(1)\varphi(2)\le 0$．

如果$\varphi(1)=0$，即 $f(1)=1$，取$\xi=1$．

如果$\varphi(1)\neq 0$，则$\varphi(1)\varphi(2)<0$，由零点定理，存在$\xi\in(1,2)$，使得$\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1$．

(2) 作辅助函数$F(x)=f(x)-x$，

由 (1) 知，$\xi\in[1,2]$， $f(\xi)=1$．于是，$F(\xi)=f(\xi)-\xi=1-\xi\le 0$，而

$F(3)=f(3)-3=4-3>0$，由零点定理，存在$c\in[\xi,3]$，使得$F(c)=0$．

因为函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，则函数$F(x)$在$[0,c]$上连续，在$(0,c)$内可导，且$F(c)=F(0)=0$．

由罗尔定理，存在$\eta\in(0,c)\subset(0,3)$，使得$F'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)=1$．

七、设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=1$， $f(1)=0$．试证：(1) 存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=x_0$；(2) 存在不同的$\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$．(2019—2020)

证明：作辅助函数$F(x)=f(x)-x$，显然$F(x)$在$[0,1]$上连续，且

$$F(0)=f(0)=1>0,\quad F(1)=f(1)-1=-1<0.$$

由零点定理，存在$x_0\in(0,1)$，使得$F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$．

(2) 因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，由拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(0,x_0)$，$\eta\in(x_0,1)$

$$f(x_0)-f(0)=f'(\xi)(x_0-0)，即 x_0-1=f'(\xi)x_0，$$

$$f(1)-f(x_0)=f'(\eta)(1-x_0)，即 -x_0=f'(\eta)(1-x_0)．$$

两式相乘，可得$-x_0(x_0-1)=f'(\eta)(1-x_0)f'(\xi)x_0$，即 $f'(\xi)f'(\eta)=1$．

八、设 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续, 在$(0,2)$内可导, 且 $f(1)+f(2)=0$. 证明存在一点$\xi\in(0,2)$,

使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.　(2020—2021)

证明： 首先证明在$[1,2]$中存在一点c，使得 $f(c)=0$.

如果 $f(1)=f(2)=0$，则取$c=1$或$c=2$.

如果 $f(1)\neq 0$，因为 $f(1)+f(2)=0$，则 $f(1)f(2)<0$，由 $f(x)$ 的连续及零点定理，存在$c\in(1,2)$，使得 $f(c)=0$.

作辅助函数$F(x)=xf(x)$.

由于 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，可得$F(x)$在$[0,c]$上连续，在$(0,c)$内可导，且

$$F(0)=0,\ F(c)=cf(c)=0.$$

由罗尔定理，存在$\xi\in(0,c)\subset(0,2)$，使得$F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

九、设$a>b>0$，证明：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.　(2020—2021)

证明：利用拉格朗日中值定理，$\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b=\dfrac{1}{\xi}(a-b)$，其中$b<\xi<a$.

由$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$，得$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

十、设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且有 $f(0)=0$， $f(1)=1$， $f(2)=-1$.

证明：至少存在一点$\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.　(2021—2022)

证明：作辅助函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

由 $f(1)=1$， $f(2)=-1$，即 $f(1)f(2)<0$. 有连续函数的零点定理，存在$c\in(1,2)$，使得 $f(c)=0$.

因为函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，则函数$F(x)$在$[0,c]$上连续，在$(0,c)$内可导，且$F(0)=F(c)=0$. 由罗尔定理，存在$\xi\in(0,c)\subset(0,2)$，使得

$$F'(\xi) = f'(\xi)\mathrm{e}^{-\xi} + f(\xi)(-\mathrm{e}^{-\xi}) = 0\,,$$

即 $f'(\xi) = f(\xi)$.