



厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷答案

_____学院_____系_____年级_____专业

试卷类型:(理工类 A 卷)

考试时间:2022. 11. 26

一、填空题:(每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x}{x} = 2$, 则 $f'(0) = \underline{3}$ 。

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{1}$ 。

3. 设 $y + \frac{\pi}{4} e^{x \tan y} = \ln |\sec x|$, 则 $dy|_{x=0} = \underline{\frac{\pi}{4} dx}$ 。

4. 曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{y = 2x + 1}$ 。

5. 设 $y = (x-1)^3(x-2)^4(x-3)^5$, 则 $y^{(5)}|_{x=2} = \underline{240}$ 。

6. 函数 $y = \ln x - \frac{x}{e} + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内有 $\underline{2}$ 个零点。

二、求下列函数极限(每小题 8 分, 共 16 分):

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$;

解: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^{-2}} = 1$ 。

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x \sin x}{\sqrt{1+x^4} - 1}$ 。

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x \sin x}{\sqrt{1+x^4} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)) - 1 - x(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))}{\frac{1}{2}x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^4} = \frac{4}{3}$ 。

三、(本题 10 分) 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ e^{-1} & x\leq 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性和可导性, 并求其导数 $f'(x)$ 。

解: 先讨论连续性。由 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-1} = e^{-1}$, 从而有 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = e^{-1}$, 因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续。现

讨论可导性。由 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{\ln x}{1-x}} - e^{-1}}{x-1} = e^{-1} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{\ln x}{1-x} + 1} - 1}{x-1} = e^{-1} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x}{1-x} + 1}{x-1} =$
 $= e^{-1} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} = e^{-1} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)} = e^{-1} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2e}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-1} - e^{-1}}{x-1} = 0,$

从而 $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导。最后, $f'(x)=\begin{cases} \frac{1-x+x\ln x}{(x-1)^2} x^{\frac{x}{1-x}} & x>1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$ 。

四、(本题 8 分) 求由参数方程 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的一阶导数和二阶导数。

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t};$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{(-\sin t - \cos t)(\cos t + \sin t) - (\cos t - \sin t)(-\sin t + \cos t)}{(\cos t + \sin t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(\cos t + \sin t)} = -\frac{2}{e^t(\cos t + \sin t)^3}。$$

五、(本题 12 分) 求函数 $y = (x+9)x^{\frac{4}{5}}$ 的极值以及该函数图形的凹凸区间和拐点。

解: 由 $y' = \frac{9(x+4)}{5\sqrt[5]{x}}$, 求得可疑极值点为 $x=0$, $x=-4$; 由 $y'' = \frac{36(x-1)}{25\sqrt[5]{x^6}}$, 求得可疑拐点

为 $x=0$, $x=1$ 。

注意到当 $x < -4$ 时, $y' > 0$; 当 $-4 < x < 0$ 时, $y' < 0$; 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$ 。因此由一阶判

别法, 函数 $y = (x+9)x^{\frac{4}{5}}$ 在 $x = -4$ 取到极大值 $10\sqrt[5]{8}$, 在 $x = 0$ 取到极小值 0。

又注意到当 $x < 1$, $x \neq 0$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 所以其图形的凸区间为 $(-\infty, 0)$ 和

$(0, 1)$, 凹区间为 $(1, +\infty)$ 。因此 $(1, 10)$ 为拐点。

六、(本题 12 分) (1) 证明当 $x > 0$ 时, 不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 成立; (2) 设数列 $\{x_n\}$ 的一般

项为 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$, 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在。

证明: (1) 令 $f(x) = \ln(1+x)$, $t \in [0, x]$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (0, x)$, 使得

$$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1+0) = f(x) - f(0) = f'(\xi)x = \frac{1}{1+\xi}x。$$

注意到 $0 < \xi < x$, 从而 $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1$, 因此 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 。

(2) 用单调有界准则。先证数列 $\{x_n\}$ 的单调性。注意到

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

由 (1) 的结论, 有 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$, 从而 $x_{n+1} < x_n$, 因此 $\{x_n\}$ 是单调递减数列。

最后证 $\{x_n\}$ 是有界数列, 只需证有下界就行了。由 (1) 的结论, $\frac{1}{k} > \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ 。从而有

$$\text{从而 } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n > \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln n = \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0。$$

因此 $\{x_n\}$ 是有界数列。故由单调有界准则, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。

(事实上, 还可以证得 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 1$ 。由 (1) 的结论, 当 $k \geq 2$ 时, 有 $\ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) > \frac{1}{k}$, 从而

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n < 1 + \sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) - \ln n = 1 + \sum_{k=2}^n [\ln k - \ln(k-1)] - \ln n = 1。$$

故 $0 < x_n < 1$, 由数列极限的保号性, $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 1$ 。)

七、(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) - f(0) = 1$, 证明存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 2\xi$ 。

证明: 令 $\varphi(x) = f(x) - x^2$, $x \in [0, 2]$, 根据题意, $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\varphi(0) = f(0) = f(1) - 1 = \varphi(1)$ 。由罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\varphi'(\xi) = 0$, 即有 $f'(\xi) = 2\xi$ 。

八、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数且 $f''(x) < 0$ 。(1) 证明: 对于区间 I 上任意两个不相等的点 x_0 和 x , 不等式 $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 成立;

(2) 取函数 $f(x) = \ln x$ 证明: 任给 m 个正数 a_1, a_2, \dots, a_m , 不等式 $\sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_m} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}$ 成立, 并且该等号只在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$ 条件下成立。

证明: (1) 由泰勒公式, 在 x_0 与 x 之间存在 ξ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2。$$

因为 $f''(\xi) < 0$, 所以当 $x \neq x_0$ 时, $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 。

(2) 当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$ 时, 等号成立。

取 $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, $x_0 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}$ 。则 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有二阶导数, 且 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ 。由 (1) 的结论, 对于 $k = 1, 2, \dots, m$, 有 $f(a_k) \leq f(x_0) + f'(x_0)(a_k - x_0)$, 并且该等号只有在 $a_k = x_0$ 才成立。因此当条件 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$ 不成立时,

$$\sum_{k=1}^m f(a_k) < m f(x_0) + f'(x_0) \sum_{k=1}^m (a_k - x_0) = m f(x_0) + f'(x_0) (\sum_{k=1}^m a_k - m x_0) = m f(x_0), \text{ 即有}$$

$$\sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_m} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}。$$