厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2023.02.18

一、选择题（每小题 **4** 分，共 **16** 分）

1. 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + C$，则 $\int x f(1-x^2)\,\mathrm{d}x =$（　　　）。

（A）$2(1-x^2)^2 + C$；　（B）$-2(1-x^2)^2 + C$；　（C）$\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$；　（D）$-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$。

2. 定积分 $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x =$（　　　）。

（A）$\frac{\pi}{4}$；　（B）$\frac{\pi}{2}$；　（C）π；　（D）$\frac{\pi}{8}$。

3. 设 $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$，$b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$，则（　　　）。

（A）$a > b > 1$；　（B）$1 > a > b$；　（C）$b > a > 1$；　（D）$1 > b > a$。

4. 对于 $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x - 2}$，下列说法正确的是（　　　）。

（A）其值为 $-\ln 2$；　（B）其值为 $\ln 2$；　（C）其值为 $2\ln 2$；　（D）发散。

二、填空题：（每小题 **4** 分，共 **24** 分）

1. 两条抛物线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围图形的面积为______________。

2. $\int_{-1}^{1} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1+|x|}\,\mathrm{d}x =$____________________。

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+xt)\,\mathrm{d}t}{x^3} =$____________________。

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1^2} + 2\sqrt{n^2+2^2} + 3\sqrt{n^2+3^2} + \cdots + n\sqrt{n^2+n^2}}{n^3} =$____________________。

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x} \cos x\,\mathrm{d}x =$____________________。

6. 若 $f(x) = 3x + 4\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $f(2) =$____________________。

三、（8 分）设函数 $f(x)$ 满足 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$ ，其中 C 为任意常数，求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 。

四、求下列定积分（每小题 8 分，共 16 分）：

1. $\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$； 2. $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\,\mathrm{d}x$ 。

五、（8 分）求反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$ 。

六、（10 分）设两条曲线 $y=\sec^2 x$ 、 $y=\cos 2x\ (0\le x\le\frac{\pi}{4})$ 和直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 所围成的平面图形为 D。试求该平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的立体的体积 V。

七、（10 分）在摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}\quad(0\le t\le 2\pi)$ 上求分该曲线的弧长成 $3:1$ 的点的坐标。

八、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 。证明：存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi$ 。