# 概率论与数理统计

## 矩 、 协 方 差 矩 阵

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

## 一、 原点矩 中心矩

**定义** 设X和Y是随机变量，若

$$E(X^k), k=1,2,\cdots$$

存在，称它为**X的k阶原点矩**，简称 **k阶矩**

若 $$E\{[X-E(X)]^k\}, k=2,3,\cdots$$

存在，称它为**X的k阶中心矩**

可见，均值 E（X）是X一阶原点矩，方差D（X）

是X的二阶中心矩。

设 $X$ 和 $Y$ 是随机变量，若

$$E(X^kY^L) \qquad k,L=1,2,\ldots$$ 存在，

称它为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+L$ 阶混合（原点）矩.

若 $$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^L\}$$ 存在，

称它为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+L$ 阶混合中心矩.

可见，

协方差 $Cov(X,Y)$ 是 $X$ 和 $Y$ 的二阶混合中心矩.

## 二、协方差矩阵

将二维随机变量（$X_1$,$X_2$）的四个二阶中心矩

$$c_{11}=E\{[X_1-E(X_1)]^2\} \qquad c_{12}=E\{[X_1-E(X_1)][X_2-E(X_2)]\}$$

$$c_{21}=E\{[X_2-E(X_2)][X_1-E(X_1)]\} \qquad c_{22}=E\{[X_2-E(X_2)]^2\}$$

排成矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

这是一个对称矩阵

称此矩阵为（$X_1$,$X_2$）的**协方差矩阵**。

## 二、协方差矩阵

类似定义$n$ 维随机变量$(X_1,X_2, \ldots,X_n)$ 的协方差矩阵。

若 $c_{ij} = Cov(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$

$( i, j=1,2,\ldots,n )$都存在，

称 $$\text{矩阵} C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为$(X_1,X_2, \ldots,X_n)$ 的协方差矩阵。

## 三、$n$ 元正态分布的概率密度

设 $X' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是一个 $n$ 维随机向量，若它的概率密度为

$$f(x1, x2, \ \ldots, xn) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C|^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\}$$

则称 $X$ 服从 $n$ 元正态分布。

其中$C$是$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的协方差矩阵。$|C|$是它的行列式，$C^{-1}$表示$C$的逆矩阵，$X$ 和$\mu$是 $n$ 维列向量，$X'$表示$X$ 的转置。

## 三、$n$ 元正态分布的性质

1. $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从 $n$ 元正态分布

$\Updownarrow$

对一切不全为0的实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，

$a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n$ 均服从正态分布。

## 三、$n$ 元正态分布的性质

**2. 正态变量的线性变换不变性。**

**若 $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从 $n$ 元正态分布， $Y_1,Y_2, \ldots$， $Y_k$ 是$X_j$（$j=1,2,\ldots,n$）的线性函数，则 $(Y_1,Y_2, \ldots$， $Y_k)$ 也服从多元正态分布。**

## 三、$n$ 元正态分布的性质

3. 设$(X_1,X_2,\dots,X_n)$服从 $n$ 元正态分布，则

“$X_1,X_2,\dots,X_n$ 相互独立”

等价于

“$X_1,X_2,\dots,X_n$ 两两不相关”

## 三、$n$ 元正态分布的性质

例：设随机变量$X$和$Y$相互独立且$X\sim N(1,2)$, $Y\sim N(0,1)$。试求$Z=2X-Y+3$的概率密度。

解：$X\sim N(1,2)$ , $Y\sim N(0,1)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立。

故$X$ 和 $Y$ 的联合分布为正态分布，$X$ 和 $Y$ 的任意线性组合是正态分布。

即 $Z\sim N(E(Z), D(Z))$

$$E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=2+3=5$$

$$D(Z)=4D(X)+D(Y)=8+1=9$$

## 三、$n$ 元正态分布的性质

$Z \sim N(5, 3^2)$

故 $Z$ 的概率密度是

$$f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}, \quad -\infty < z < \infty$$

# 谢 谢 大 家