概率论与数理统计

方差的性质

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

三、方差的性质

性质1. 设C是常数，则 $D(C)=0$；

性质2. 若 C 是常数，则 $D(CX)=C^2 D(X)$；

性质3. 设 X 与 Y 是两个随机变量，则

$$D(X+Y)= D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

性质4. $D(X)=0 \iff P\{X=C\}=1$，这里$C=E(X)$

三、方差的性质

性质3. 证明 $D(X+Y)=E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\}$

$$
\begin{aligned}
&=E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\}\\
&=E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\}+\\
&+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\\
&=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}
\end{aligned}
$$

若 X,Y 相互独立，由数学期望的性质 4 得

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

此性质可以推广到有限多个相互独立的随机变量之和的情况。

三、方差性质的应用

例 6： 设$X\sim B(n,p)$，求E(X)和D(X).

解：$X\sim B(n,p)$，则X表示n重努里试验中的“成功” 次数。

若设 $X_i=\begin{cases}1 & 如第i次试验成功\\ 0 & 如第i次试验失败\end{cases}$ $i=1,2，\ldots，n$

则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是n次试验中“成功” 的次数。

三、方差性质的应用

可知X_i是0-1分布，所以

$E(X_i)=p$， $D(X_i)=p(1-p)$， $i=1,2$，…， n

由于$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立

于是 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$ $D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p)$

若$X\sim B(n,p)$，则

$$E(X)=np, D(X)=np(1-p)$$

三、方差性质的应用

例 7 设$X \sim N(0,1)$，求$E(X)$和$D(X)$.

解 X的概率密度为

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

于是 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2\phi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

若X~$B(0,1)$，则 $\boxed{E(X)=0, D(X)=1}$

若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$　$E(Z)=0, D(Z)=1$

而$X=\sigma Z+\mu$,由数学期望和方差的性质得

$$E(X)=E(\sigma Z+\mu)=\sigma E(Z)+E(\mu)=\mu$$

$$D(X)=D(\sigma Z+\mu)=\sigma^2 D(Z)+D(\mu)=\sigma^2$$

若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\boxed{E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2}$

这就是说，正态分布的概率密度中的两个参数μ和σ^2分别是该分布的数学期望和方差，因而正态分布完全可由它的数学期望和方差所确定。

三、方差性质的应用

例如

若$X \sim N(1,3), Y \sim N(2,4)$,且$X$和$Y$相互独立,则$Z=2X-3Y$也服从正态分布，而$E(Z)=-4, D(X)=48$,故有$Z \sim N(-4,48)$

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,2,\cdots n$,且它们相互独立，则它们的线性组合:$C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n$($C_1, C_2, \cdots C_n$是不全为0的常数)仍然服从正态分布。

且$C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2\sigma_i^2)$

三、方差性质的应用

例8 设活塞的直径(以cm计)$X \sim N(22.40, 0.03^2)$,气缸的直径$Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X和Y相互独立.任取一支活塞,任取一只气缸,求活塞能装入气缸的概率。

解 按题意需求$P\{X < Y\}$,即求$P\{X - Y < 0\}$.

由于 $X - Y \sim N(-0.10, 0.0025)$

故有

$$P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$$

$$= P\{\frac{(X-Y)-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}} < \frac{0-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\} = \Phi(\frac{0.10}{0.05}) = \Phi(2) = 0.9772$$

谢 谢 大 家