多元函数微分学

一、设 $y = f(x,t)$，而 $t = t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t) = 0$ 所确定的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数，试证明： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial t}}$.　　　　（2008-2009）

二、 设函数 $f(x,y) = xy^2z^3$，且有方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ ①

（1）验证在点 $(1,1,1)$ 近旁由方程①式能确定可微的隐函数 $z = z(x,y)$；

（2）试求 $f_x(x,y,z(x,y))$.·　　　　（2008-2009）

三、设有一小山，取它的底面所在的平面为 xoy 坐标面，其底部所占的闭区域为 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 - xy \le 75\}$，小山的高度函数为 $h = f(x,y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$ 。

（1）设 $M(x_0,y_0) \in D$，问 $f(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式；

（2）现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点，也就是说，要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出（1）中 $g(x,y)$ 达到最大值的点。试确定攀岩起点的位置.

（2008-2009）

四、已知 $f(x,y,z) = \dfrac{x\sin y + y\sin z + z\sin x}{\cos x + \cos y + \cos z}$，则 $f_x(0,0,\dfrac{\pi}{2}) =$ ____________.

五、设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x(0,0) = 2, f_y(0,0) = 3$，则下列正确的是（）.

（2009-2010）

（A） $\mathrm{d}z|_{(0,0)} = 3dx + 2dy$.

（B）曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $(2,3,1)$.

（C）曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(0,3,1)$.

（D）曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(1,0,2)$.

六、设$u=f(x+y,xz)$有二阶连续偏导数，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$（　　）.　　　　（2009-2010）

（A）$xf_2'+xf_{11}''+(x+z)f_{12}''+xzf_{22}''$　　　　（B）$xf_{12}''+xzf_{22}''$

（C）$f_2'+xf_{12}''+xzf_{22}''$　　　　（D）xzf_{22}''.

七、已知$z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.　　　　（2009-2010）

八、已知曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线方向为$\vec{T}$，求函数$f(x,y,z)=x^z+\ln\dfrac{y}{z}$在点$(1,2,1)$处沿方向$\vec{T}$的方向导数.　　　　（2009-2010）

九、设$y=f(x,t)$，而$t=t(x,y)$是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的函数，求$\dfrac{dy}{dx}$，其中f,F都具有一阶连续偏导数.　　　　（2009-2010）

十、某厂生产甲、乙两种产品，当产量分别为x和y（吨）时的总收益函数为

$R(x,y)=27x+42y-x^2-2xy-4y^2$，总成本函数为$C(x,y)=36+12x+8y$（万元）

除此之外，生产甲种产品每吨需支付排污费 1 万元，生产乙种产品每吨需支付排污费 2 万元，

（1）在不限制排污支出的情况下，两种产品的产量各为多少时总利润最大？并求最大总利润.

（2）在限制排污总支出为 6 万元时，两种产品的产量各为多少时总利润最大？并求最大总利润.（2009-2010）

十一、设二元函数$z=f(u,v)$具有二阶连续的偏导数，$u=xy$，$v=x^2+y^2$,求z的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$与二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.　　　　（2010-2011）

十二、求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=16\\ x^2+y^2=4x\end{cases}$在点$M(0,0,4)$处的切线方程和法平面方程。　　　　（2010-2011）

十三、设函数$u=xy^2z$，(1)求u函数在点$M_0(1,-1,2)$指向$M_1(2,1,-1)$的方向导数；(2)问函数u在M_0处沿什么方向的方向导数最大？它的最大值是多少？　　　　（2010-2011）

十四、求函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$的极值。　　　　（2010-2011）

十五、设u为定义在平面上的二元函数，u在直角坐标和极坐标下的函数表达式分别为：

$u=f(x,y)=g(r,\theta)$。 设u关于(r,θ)有连续的二阶偏导数。 试将二元函数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$表示成极坐标$(r,\theta)$下所对应的形式。 （2011-2012）

十六、在第一卦限内做椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面使得该切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积最小。 求此切平面与椭球的切点， 并求此最小体积。 （2011-2012）

十七、设$f(x,y)$为平面上二元函数，$f(x,y)$在平面上任意一点$P=(x,y)$处的梯度向量为$\nabla f(x,y)=(2x,y)$。 给定$P_0=(1,1)$， 试求$f(x,y)$的过P_0点的等高线。

（注： 等高线即为$f(x,y)$取值为给定数值的点的轨迹。） （2011-2012）

十八、求曲线Γ：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\(x-1)^2+y^2=2\end{cases}$ 在点（2, 1，1）处的对称式切线方程。 （2011-2012）

十九、证明：$f\left(x,y\right)=\begin{cases}x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$\left(0,0\right)$处连续，可导，但不可微. （2012-2013）

二十、设方程组$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v\\y=\mathrm{e}^u-u\cos v\end{cases}$确定反函数组$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$， $z=u^2+v^2$， 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（2012-2013）

二十一、设$z=f(2x-y,y\sin x)$，其中f具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. （2012-2013）

二十二、求曲线$\begin{cases}x^2+3y^2+z^2=8\\z^2=2x^2+2y^2\end{cases}$在点$(-1,1,-2)$处的切线方程与法平面方程. （2012-2013）

二十三、求曲线$C:\begin{cases}x^3+y^3+z^3=3\\z=xy\end{cases}$在$(1,1,1)$处的法平面. （2013-2014）

二十四、计算：（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$； （2）设$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$， 求$dz$. （2013-2014）

二十五、已知$f(x,y)=x^2+(\ln y)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x^2+y^2}}$,求$f'_x(2,1)$, $f'_y(2,1)$. （2013-2014）

二十六、试讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性. （2013-2014）

二十七、设 $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$，试证明：$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=0.$ （2013-2014）

二十八、求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数. （2013-2014）

二十九、求曲线 $C:\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 上到 xoy 平面距离最近的点. （2013-2014）

三十、求曲面 $\sin xy+\sin yz+\sin zx=1$ 在 $(1,\dfrac{\pi}{2},0)$ 处的切平面方程. （2014-2015）

三十一、求函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 的方向导数. （2014-2015）

三十二、设函数 $z=f(x+\mathrm{e}^y,x^2y)$ 的二阶偏导连续，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. （2014-2015）

三十三、设 $z=\sqrt{|xy|}$，1）求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$；2）证明该函数在点 $(0,0)$ 处不可微. （2014-2015）

三十四、求曲线 $x^2+y^2-z^2=1$，$x+y-2z=0$ 在点（1,1,1）处的切线方程和法平面方程. （2014-2015）

三十五、求曲面 $\Sigma: x^2+y^2-2z=0$ 上的点到点 $P(2,2,0)$ 的最短距离. （2014-2015）

三十六、已知函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，（1）求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$，并说明函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续；（2）求在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 的偏导数；（3）问在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 是否可微？

（2015-2016）

三十七、设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $\begin{cases} z=xf(x+y) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$ 所确定的函数，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，$F(x,y,z)$ 具有连续的一阶偏导数，且 $F_y+xf'(x+y)F_z\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.（2015-2016）

三十八、求由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分.（2015-2016）

三十九、在曲面 $z=xy$ 上求出一点，使曲面 $z=xy$ 在该点的法向量与函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $P(1,2,1)$ 处的梯度平行，并写出过该点的切平面方程.（2015-2016）

四十、求点 $(1,1,\dfrac{1}{2})$ 到曲面 $z=x^2+y^2$ 的最短距离.（2015-2016）

四十一、设 $F(u,v)$ 可微，试证明曲面 $F(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})=0$ 上任一点处的切平面都通过一定点.（2015-2016）