厦门大学《高等数学Ⅰ-1》期中试题·答案

考试日期：2012.11　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

1．求下列函数的极限：（每小题 4 分，共 16 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right)$　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]$

（5）设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f\{\dfrac{\ln[1+f(x)]}{f(\sin x)}\}$。

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(\tan x-\sin x)}{x^3}$

$$=6\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=6\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=3.$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos 2x-1)]^{\frac{1}{\cos 2x-1}\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x}}=e^{-2}$.

（3）因为 $\dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\le\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}}=2$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2}}=2$，由夹逼定理，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right)=2$.

（4）令 $t=\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]=\lim\limits_{t\to 0^+}[\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}\ln(1+t)]=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\dfrac{1}{2}$.

（5）由题设条件和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 得，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，

$$\lim_{x\to 0}f\{\frac{\ln[1+f(x)]}{f(\sin x)}\}=f\{\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+f(x)]}{f(\sin x)}\}=f\{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(\sin x)}\}=f(1)$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{f(\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\dfrac{1}{\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}}=\dfrac{1}{f'(0)}=1.$

2．（10 分）设数列$\{x_n\}$满足$x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n},(n=1,2,\cdots)$，证明此数列极限存在，并求出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

证 1：显然数列$\{x_n\}$满足$0\le x_n\le 2$，所以有界，只需证明$\{x_n\}$单调即可。

$x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1}=\dfrac{3}{2}>x_1$，假设$x_n>x_{n-1}$，则$x_{n+1}-x_n=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}-(1+\dfrac{x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}})=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$，

即$x_{n+1}>x_n$，由归纳法假设知$\{x_n\}$单调增加，故数列$\{x_n\}$收敛。

由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=1+\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$得$a=1+\dfrac{a}{1+a}$，解得$a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。（由于$x_n>1$, 负根舍去）

证 2：假设此数列$\{x_n\}$收敛，并设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由极限的运算法则，在$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$的两端取极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=1+\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$得$a=1+\dfrac{a}{1+a}$，解得$a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，（由于$x_n>1$, 负根舍去）

$$0\le|x_{n+1}-a|=|1+\frac{x_n}{1+x_n}-1-\frac{a}{1+a}|=|\frac{x_n}{1+x_n}-\frac{a}{1+a}|=\frac{|x_n-a|}{(1+x_n)(1+a)}\le\frac{|x_n-a|}{(1+a)}$$

$$\le\frac{1}{(1+a)^2}|x_{n-1}-a|\le\cdots\le\frac{1}{(1+a)^n}|x_1-a|\to 0\ (n\to\infty)$$

由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

证 3：令$f(x)=1+\dfrac{x}{1+x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$，所以递归数列$\{x_n\}$单调，且显然$0\le x_n\le 2$有界，所以

数列$\{x_n\}$收敛，则在等式两端$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$取极限，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=1+\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$得$a=1+\dfrac{a}{1+a}$，

解得$a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。（由于$x_n>1$, 负根舍去）

3．（10 分）讨论函数$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1} & x<0\\ \dfrac{x^2-1}{\cos\frac{\pi x}{2}} & x\ge 0\end{cases}$的连续性，并对间断点判断其类型。

解：在$(-\infty,0)$内$f(x)$是初等函数，在点$x=-1$处无定义，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$不存在且无穷振荡；

在 $(0,+\infty)$ 内，$f(x)$ 在点 $x=2n-1,(n=1,2,\cdots)$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to 2n-1} f(x)=\infty,(n\ge 2)$，

但 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}=-\dfrac{4}{\pi}$。

在点 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=-1,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\dfrac{1}{x^2-1}=\sin(-1)$

综上所述，$x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的振荡间断点；$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点；$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点；$x=2n-1,(n\ge 2)$ 是函数 $f(x)$ 的无穷间断点；除这些点外 $f(x)$ 都连续。

4、（10 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且周期为 2 的奇函数。已知 $x\in(0,1)$ 时，

$f(x)=\ln x+\cos x+e^{x+1}$，求当 $x\in[-4,-2]$ 时，$f(x)$ 的表达式。

解：由于 $f(x)$ 是奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，所以 $f(0)=0$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$-x\in(0,1)$，

$$f(x)=-f(-x)=-[\ln(-x)+\cos(-x)+e^{-x+1}]=-\ln|x|-\cos x-e^{-x+1}$$

又有函数 $f(x)$ 的周期性，当 $x\in(-3,-2)$ 时，有 $x+2\in(-1,0)$，则

$$f(x)=f(x+2)=-\ln|x+2|-\cos(x+2)-e^{-(x+2)+1}=-\ln|x+2|-\cos(x+2)-e^{-x-1}$$

当 $x\in(-4,-3)$ 时，有 $x+4\in(0,1)$，则

$$f(x)=f(x+4)=\ln(x+4)+\cos(x+4)+e^{(x+4)+1}=\ln(x+4)+\cos(x+4)+e^{x+5}$$

再由周期性，$f(-2)=f(0)=0$，$f(-3)=f(-1)=-f(1)=-f(1-2)=-f(-1)$，所以 $f(-1)=0$，

从而 $f(-3)=0$，$f(-4)=f(-2)=f(0)=0$，故

$$f(x)=\begin{cases}\ln(x+4)+\cos(x+4)+e^{x+5} & x\in(-4,-3)\\ -\ln|x+2|-\cos(x+2)-e^{-x-1} & x\in(-3,-2)\\ 0 & x=-4,-3,-2\end{cases}$$

5.（12 分）求下列函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

（1）$y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$　　　（2）$y=(\tan x)^{\sin x}+x^x$

解：（1）$\ln y=\dfrac{1}{2}[\ln|x|+\ln|\sin x|+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^x)]$，$\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{e^x}{1-e^x}]$

$$y'=\frac{y}{2}[\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{2}\frac{e^x}{1-e^x}]=\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\frac{1}{x}+\cot x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}];$$

（2） $y'=[(\tan x)^{\sin x}]'+[x^x]'$，其中 $[x^x]'=(e^{x\ln x})=x^x(\ln x+1)$

$$[(\tan x)^{\sin x}]'=(e^{\sin x\ln\tan x})'=e^{\sin x\ln\tan x}(\sin x\ln\tan x)'=(\tan x)^{\sin x}[\cos x\ln\tan x+\frac{\sin x}{\tan x}\sec^2 x]$$

$$=(\tan x)^{\sin x}[\cos x\ln\tan x+\sec x]$$

所以 $y'=(\tan x)^{\sin x}[\cos x\ln\tan x+\sec x]+x^x(1+\ln x)$.

6.（5 分）已知 $\frac{dy}{dx}=(1+x)(x+\sin x)^2$, **且** $u=x+\sin x$**，求** $\frac{dy}{du}$**.**

解： $\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=(1+x)(x+\sin x)^2(1+\cos x)\cdot$

7.（10 分）已知 $f(x)=x^2\cos 2x$**，试求** $f^{(10)}(x)$**。**

解：由莱布尼兹高阶求导数公式

$$f^{(10)}(x)=(x^2\cos 2x)^{(10)}=x^2\cos^{(10)}2x+C_{10}^1\cdot 2x\cos^{(9)}2x+C_{10}^2\cdot 2\cos^{(8)}2x$$

$$=2^{10}x^2\cos(2x+10\cdot\frac{\pi}{2})+10\cdot 2^{10}x\cos(2x+9\cdot\frac{\pi}{2})+45\cdot 2^9\cos(2x+8\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$=-2^{10}x^2\cos 2x-10\cdot 2^{10}x\sin 2x+45\cdot 2^9\cos 2x.$$

8.（10 分）已知 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & x<0\\ \ln(1+x) & x\ge 0\end{cases}$ **在** $x=0$ **处有二阶导数，试确定参数** a,b,c **的值。**

解：首先 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则由 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)=0$ 得 $c=0$；

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2+bx}{x}=b,$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f'_+(0)=f'_-(0)$，因而 $b=1$；

又有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导， $f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2ax+b-1}{x}=2a$,

$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1+x)^{-1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$，由 $f''_+(0)=f''_-(0)$ 得 $a=-\frac{1}{2}$。

9.（10 分）设函数 $y=f(x)$ **的极坐标式为** $\rho=a(1+\cos\theta)$**，求** $\frac{dy}{dx},\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}$**.**

解：将 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 化为参数方程 ，得 $\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$，（$\theta$ 为参数）

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta\cos\theta - a(1+\cos\theta)\sin\theta = -a(\sin\theta+\sin 2\theta),$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -a\sin^2\theta + a(1+\cos\theta)\cos\theta = a(\cos\theta+\cos 2\theta),$$

故 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = -\dfrac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta+\sin 2\theta} = -\cot\dfrac{3}{2}\theta$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = -\cot\dfrac{3}{2}\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 0$.

10．（10 分）设函数 $y = y(x)$ 由方程 $|x|e^{f(y)} = e^y \ln 2012$ 所确定，其中 f 具有二阶可导，且 $f'(x) \neq 1$，

求当 $x \neq 0$ 时的 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：两边取对数有 $\ln|x| + f(y) = y + \ln(\ln 2012)$，两边对 x 求导，得 $\dfrac{1}{x} + f'(y)y' = y'$，解得

$$y' = \frac{1}{x(1-f'(y))},\quad y'' = -\frac{1-f'(y)-xf''(y)y'}{x^2(1-f'(y))^2} = -\frac{(1-f'(y))^2 - f''(y)}{x^2(1-f'(y))^3}$$

11．（10 分）选做题　以下两题任选其一（仅做一题）

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(x) \neq 0, x \in (a,b)$，若 $f(a) = f(b) = 0$，

证明对任意实数 k，存在点 $\xi \in [a,b]$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k$.

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续可导， $x_i \in (a,b), \lambda_i > 0, (i = 1,2,\cdots,n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$，

证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i) = f'(\xi)$.

(1) 证明：构造辅助函数 $F(x) = f(x)e^{-kx}$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi \in (a,b)$

使得 $F'(\xi) = 0$，即 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = k$ 。

(2) 证明：不妨设 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n$，若 $x_1 = x_n$，则取 $\xi = x_1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i) = f'(\xi)$ 显然成立.

若 $x_1 < x_n$，再设

$$f'(x_1) = \min\{f'(x_1), f'(x_2), \cdots, f'(x_n)\},\ f'(x_n) = \max\{f'(x_1), f'(x_2), \cdots, f'(x_n)\},$$

则有

$$f'(x_1)=f'(x_1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_1)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_n)=f'(x_n)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=f'(x_n)$$

即 $f'(x_1)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)\le f'(x_n)$，又因为 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，因而也在 (x_1,x_n) 上连续，

由连续函数的介值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_n)\subset(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f'(x_i)$.

附加题（10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=a,\ f(b)=b$，试证在 (a,b) 内存在不同的 s,t，

满足 $\dfrac{1}{f'(s)}+\dfrac{2}{f'(t)}=3$。

证： 因为 $f(a)=a<\dfrac{b+2a}{3}<b=f(b)$，由连续的介值定理知，

存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=\dfrac{a+2a}{3}$， 在 $[a,x_0]$ 和 $[x_0,b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理得

$$f(x_0)-f(a)=f'(s)(x_0-a),\ \ s\in(a,x_0)$$

$$f(b)-f(x_0)=f'(t)(b-x_0),\ \ t\in(x_0,b)$$

所以 $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{f'(s)}=(x_0-a),\quad \dfrac{f(b)-f(x_0)}{f'(t)}=(b-x_0),$

两式相加便得 $$\frac{f(x_0)-f(a)}{f'(s)}+\frac{f(b)-f(x_0)}{f'(t)}=b-a$$

即 $$\frac{\frac{b+2a}{3}-a}{f'(s)}+\frac{b-\frac{b+2a}{3}}{f'(t)}=b-a\Rightarrow\frac{\frac{1}{3}(b-a)}{f'(s)}+\frac{\frac{2}{3}(b-a)}{f'(t)}=b-a,$$

故有 $\dfrac{1}{f'(s)}+\dfrac{2}{f'(t)}=3$。