厦门大学《高等数学 I-1》期中试题·答案

考试日期：2014.11　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、计算下列各题：（每小题 5 分，共 50 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{3x}+2}$；

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{3x}+2}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}]^{\frac{2}{3}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^2=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

2． $y=\ln(1+x+\sqrt{x^2+2x})+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$ （$x>0$），求 $\mathrm{d}y$；

解： $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{1+x+\sqrt{x^2+2x}}\mathrm{d}(1+x+\sqrt{x^2+2x})+\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{(x+1)^2}}}\mathrm{d}(\dfrac{1}{x+1})$

$$=\frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+2x}}[1+\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x}}]\mathrm{d}x-\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}\mathrm{d}x$$

3．设 $y=(x^2+ax+b)\sin kx$**，其中** $k>0$ **为常数，求** $\boldsymbol{n}$ **阶导数；**

解： 设 $u=\sin kx, v=x^2+ax+b$，用莱布尼兹高阶导数公式，

$$y^{(n)}=(\sin kx)^{(n)}\cdot v+C_n^1(\sin kx)^{(n-1)}\cdot v'+C_n^2(\sin kx)^{(n-2)}\cdot v''$$

而 $(\sin kx)^{(j)}=k^j\sin(\frac{j}{2}\pi+kx),\ j=n,n-1,n-2$，于是

$$y^{(n)}=k^n(x^2+ax+b)\sin(\frac{n}{2}\pi+kx)+nk^{n-1}(2x+a)\sin(\frac{n-1}{2}\pi+kx)\cdot+n(n-1)k^{n-2}\sin(\frac{n-2}{2}\pi+kx).$$

4．设函数 $f(x)$ **在** $x=0$ **处连续，且** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\ln(1+2x)}=3$**，求** $f(0)$**，** $f'(0)$**；**

解： 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+2x)}\cdot\lim_{x\to 0}\ln(1+2x)=0.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+2x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=3\times 2=6.$$

5．求曲线 $y=x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})$（ $x>0$ ）的渐近线；

解： $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=1$，

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

故所求渐近线为 $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

6．计算不定积分 $\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$；

解： $\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\int(x-\frac{x}{1+x^2})\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C=\frac{1}{2}(x^2+1)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C$$

7．求 $\int\sec^3 x\tan^3 x\mathrm{d}x$；

解： $\int\sec^3 x\tan^3 x\mathrm{d}x=\int\sec^2 x\tan^2 x\mathrm{d}\sec x=\int(\sec^4 x-\sec^2 x)\mathrm{d}\sec x=\frac{1}{5}\sec^5 x-\frac{1}{3}\sec^3 x+C$

8．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定，求 $y=y(x)$ 的驻点，并判别它是否为极值点.

解： 对方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 两边求导，得 $6y^2y'-4yy'+2(y+xy')-2x=0$，

解得 $y'=\frac{x-y}{3y^2-2y+x}$. 令 $y'=0$，则 $x=y$，代入方程，可得 $2x^3-x^2-1=0$，即 $(x-1)(2x^2+x+1)=0$，解得 $x=1$. 故所求驻点为 $x=1$.

对 $6y^2y'-4yy'+2(y+xy')-2x=0$ 两边求导，得

$$12y(y')^2+6y^2y''-4(y')^2-4yy''+2(y'+y'+xy'')-2=0,$$

将 $x=1,y=1,y'=0$ 代入，得 $6y''-4y''+2y''-2=0$，则 $y''=\frac{1}{2}>0$，故 $x=1$ 为极小值点.

9．设 $a>0$，求曲线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的曲率；

解一： $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=1$；

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\sec^2 t}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\frac{\sec^3 t}{at}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{8\sqrt{2}}{a\pi}$.

故所求曲率为$k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\dfrac{\frac{8\sqrt{2}}{\pi a}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\pi a}$.

解二： $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$；$\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}a$；

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$；$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}a$；

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=a(\cos t-t\sin t)$；$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1-\dfrac{\pi}{4})$；

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=a(\sin t+t\cos t)$；$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1+\dfrac{\pi}{4})$；

所求曲率为$k=\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1+\dfrac{\pi}{4})-\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1-\dfrac{\pi}{4})\right|}{[(\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}a)^2+(\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}a)^2]^{3/2}}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}\pi}{8})^3}=\dfrac{4}{\pi a}$.

10．求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2(\sqrt[3]{1+\sin x}-1)}$.

解： 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\sin x}-1\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\sin x}-1\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2\left(\frac{1}{3}\sin x\right)}$$

$$=\frac{1}{12}.$$

二、计算下列各题：（每小题 6 分）

1．若 $f(1)=0$ **且** $f'(1)=2$**，计算**$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin^2x+\cos x)}{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}$**；**

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin^2x+\cos x)}{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin^2x+\cos x-1)-f(1)}{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin^2x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2x+\cos x-1}{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}=f'(1)\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\cos x-1}{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}=\dfrac{1}{2}f'(1)$

2．已知数列$\{x_n\}$满足：$0<x_n<1$，$x_{n+1}(1-x_n)\ge\dfrac{1}{4}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

解：$x_{n+1}-x_n\ge\dfrac{1}{4(1-x_n)}-x_n=\dfrac{(2x_n-1)^2}{4(1-x_n)}>0,\ \{x_n\}$单调增。 由单调有界收敛准则，得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则由收敛数列的性质得$a(1-a)\ge\dfrac{1}{4}$，即$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2\le 0,\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}.$

3. 已知函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，$f'(0)=\mathrm{e}$，且对任意的x,y满足$f(x+y)=\mathrm{e}^x f(y)+\mathrm{e}^y f(x)$

求$f(0)$和$f'(x)$，并检验$f'(x)$的连续性。

解：注意到$f(0)=f(0+0)=\mathrm{e}^0 f(0)+\mathrm{e}^0 f(0)=2f(0),$所以$f(0)=0$。根据导数的定义，得

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^x f(h)+\mathrm{e}^h f(x)-f(x)}{h}=\mathrm{e}^{x+1}+f(x)$$

函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，所以在$(-\infty,+\infty)$内连续，因此根据上式，$f'(x)$也在$(-\infty,+\infty)$内连续。

4．设函数$y=y(x)$由$\begin{cases}x=t-t^2+1\\ t\,\mathrm{e}^y+y+x=0\end{cases}$所确定，求在$t=0$处曲线的切线方程和法线方程。

解：对方程组两边分别对 t 求导，得$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-2t\\ \mathrm{e}^y+t\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-2t\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2t-1-\mathrm{e}^y}{1+t\mathrm{e}^y}\end{cases}$，

所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2t-1-\mathrm{e}^y}{(1-2t)(1+t\,\mathrm{e}^y)}$。将$t=0$代入，得$x=1,y=-1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{e}^{-1}-1.$

即曲线在$(1,-1)$点的切线斜率为$k=-\mathrm{e}^{-1}-1,$法线斜率为$-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}+1}.$

所以切线方程是$y+1=(-\mathrm{e}^{-1}-1)(x-1)$，法线方程是$y+1=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}+1}(x-1)$。

三、计算下列各题：（每小题 8 分，共 16 分）

1．判断函数$y=\dfrac{\sin(1-x)}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})(x^2-1)}$间断点类型，如果是可去间断点，请补充或改变函数的定义使它连续。

解： 在 $x=-1, x=0, x=1$ 函数无定义，故均为间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(1-x)}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})(x^2-1)}=\infty$，所以 $x=-1$ 为无穷间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(1-x)}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})(x^2-1)}=0$， $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(1-x)}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})(x^2-1)}=-\sin 1$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})(x-1)(x+1)}=-\dfrac{1}{2(1+\mathrm{e})}$，所以 $x=1$ 为可去间断点；

令 $y(1)=-\dfrac{1}{2(1+\mathrm{e})}$，则函数在 $x=1$ 连续。

2．求定义在区间 $[0,2\pi]$ 上的函数 $f(x)=\sin x|\cos x|$ 的单调区间、极值点、拐点以及最大值和最小值.

解： $f(x)=\begin{cases}\sin x\cos x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ -\sin x\cos x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}\\ \sin x\cos x, & \dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi\end{cases}$， $f'(x)=\begin{cases}\cos 2x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ -\cos 2x, & \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\\ \cos 2x, & \dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi\end{cases}$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$， $x_2=\dfrac{3\pi}{4}$， $x_3=\dfrac{5\pi}{4}$， $x_4=\dfrac{7\pi}{4}$.

x	0	$(0,\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$
$f'(x)$		+	0	−		+	0	−
$f(x)$		↗		↘		↗		↘
x	$\frac{5\pi}{4}$	$(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4})$	$\frac{7\pi}{4}$	$(\frac{7\pi}{4},2\pi)$		
$f'(x)$	0	+		−	0	+		
$f(x)$		↗		↘		↗		

故 $f(x)$ 的单调增加区间为 $[0,\frac{\pi}{4}]$，$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$，$[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$，$[\frac{7\pi}{4},2\pi]$； $f(x)$ 的单调减少区间为 $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$，$[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$，$[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}]$.

极小值点为$\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}$，极大值点为$\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{2}$.

$$f''(x)=\begin{cases}-2\sin 2x, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 2\sin 2x, & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\\ -2\sin 2x, & \frac{3\pi}{2}<x<2\pi\end{cases}$$

当$0<x<\pi$时，$f'(x)<0$，而当$\pi<x<2\pi$时，$f'(x)>0$，所以曲线$y=f(x)$的拐点为$(\pi,0)$.

由 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{3\pi}{2})=f(2\pi)=0$， $f(\frac{\pi}{4})=f(\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{2}$， $f(\frac{5\pi}{4})=f(\frac{7\pi}{4})=-\frac{1}{2}$，故最大值为 $f(\frac{\pi}{4})=f(\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{2}$，最小值为 $f(\frac{5\pi}{4})=f(\frac{7\pi}{4})=-\frac{1}{2}$.

四、证明题：（每小题 5 分，共 10 分）

1．试证明：在区间$(0,\frac{1}{2})$内，恒有不等式

$$2x+(x-2)\arctan x>(x+\frac{1}{2})\ln(1+x^2)$$ **成立.**

证明：令 $f(x)=2x+(x-2)\arctan x-(x+\frac{1}{2})\ln(1+x^2)$，则

$$f'(x)=2+\arctan x+\frac{x-2}{1+x^2}-\ln(1+x^2)-\frac{x(2x+1)}{1+x^2}=\arctan x-\ln(1+x^2)\text{；}$$

又 $f''(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1-2x}{1+x^2}>0$，则当$x\in(0,\frac{1}{2})$时， $f'(x)>f'(0)=0$，所以当$x\in(0,\frac{1}{2})$时，

$f(x)>f(0)=0$，

即 $$2x+(x-2)\arctan x>(x+\frac{1}{2})\ln(1+x^2).$$

2．假设$0<a<b$，若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：对于任意正数$k>0$，存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{k}{\xi}f(\xi)$.

证明：作辅助函数$F(x)=x^k f(x)$，

由于函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则函数$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$F(a)=a^k f(a)=0$， $F(b)=b^k f(b)=0$，即$F(a)=F(b)$.

由罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=\xi^k f'(\xi)+k\xi^{k-1}f(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=-\frac{k}{\xi}f(\xi)$.