概率论与数理统计
随机变量的函数的分布

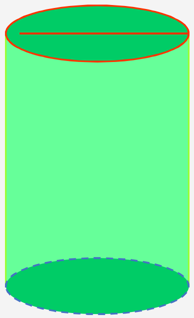
主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

一、问题的提出

在实际中，人们常常对随机变量的函数更感兴趣。

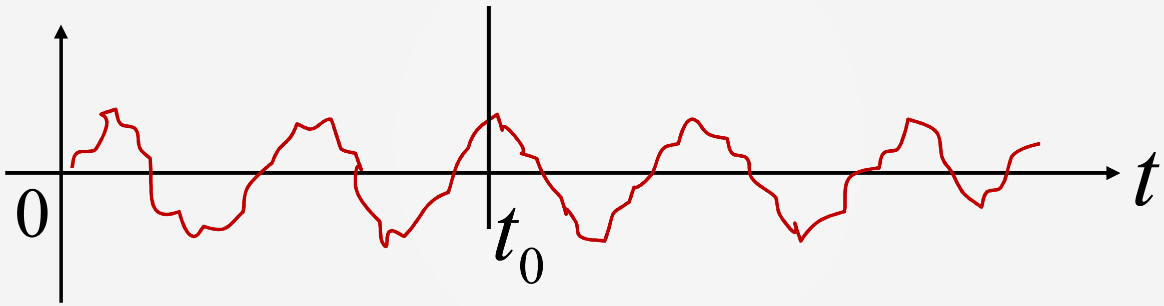
比如，已知圆轴截面直径 d 的分布，



求截面面积 $A=\dfrac{\pi d^2}{4}$ 的分布。

一、问题的提出

在比如，已知 $t=t_0$ 时刻噪声电压 V 的分布，



求功率 $W=V^2/R$（R 为电阻）的分布等。

一、问题的提出

设随机变量 X 的分布已知，$Y=g(X)$ (设g 是连续函数），

如何由 X 的分布求出 Y 的分布?

二、离散型随机变量函数的分布

例1：设 $X\sim\begin{Bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\end{Bmatrix}$ **求** $Y=2X+3$ **的概率函数。**

解： **当** X **取值 1，2，5 时，** Y **取对应值 5，7，13。**

而且X取某值与Y取其对应值是两个同时发生的事件，两者具有相同的概率。

故 $Y\sim\begin{Bmatrix}5 & 7 & 13\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\end{Bmatrix}$

二、离散型随机变量函数的分布

一般地，若X是离散型$r.v$，X的分布律为

$$X \sim \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \cdots x_n \\ p_1 & p_2 \cdots p_n \end{Bmatrix}$$

则 $Y=g(X)$ ~ $\begin{Bmatrix} g(x_1) & g(x_2) \cdots g(x_n) \\ p_1 & p_2 \quad \cdots \quad p_n \end{Bmatrix}$

如果$g(x_k)$中有一些是相同的，把它们作适当并项即可。

二、离散型随机变量函数的分布

如：

$$X \sim \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{Bmatrix}$$

则 $Y=X^2$ **的分布律为：**

$$Y \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.4 \end{Bmatrix}$$

三、连续型随机变量函数的分布

例2：设 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} x/8, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ **求 Y=2X+8 的概率密度。**

解：设Y的分布函数为 $F_Y(y)$，

$$F_Y(y)=P\{\, Y \le y \,\} = P\,(2X+8 \le y\,)$$

$$=P\{\, X \le \frac{y-8}{2} \} = F_X(\frac{y-8}{2})$$

于是Y的密度函数

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(\frac{y-8}{2}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$Y=2X+8$

注意到 $0<x<4$ **时，** $f_X(x)\neq 0$

即 $8<y<16$ **时，** $f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\neq 0$

此时 $f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)=\frac{y-8}{16}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8<y<16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

三、连续型随机变量函数的分布

例3： 设 X 具有概率密度 $f_X(x)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

解：设 Y 和 X 的分布函数分别为 $f_Y(y)$ 和 $f_X(x)$，

注意到 $Y=X^2\geq 0$，故当 $y\leq 0$ 时，$f_Y(y)=0$。

当 $y>0$ 时，
$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)$$
$$=P(-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y})$$
$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

$$\boxed{F_Y(y)=P(Y\leq y)}$$

求导可得

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

若 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$

则 *Y*=*X*² 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

三、连续型随机变量函数的分布

从上述两例中可以看到，在求 $P(Y\leq y)$ 的过程中，关键的一步是设法从 $\{g(X)\leq y\}$ 中解出 X，从而得到与 $\{g(X)\leq y\}$ 等价的 X 的不等式。

例如，用 $\{X\leq \frac{y-8}{2}\}$ 代替 $\{2X+8\leq y\}$

用 $\{-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y}\}$ 代替 $\{X^2\leq y\}$

这样做是为了利用已知的 X 的分布，从而求出相应的概率。

这是求 $r.v$ 的函数的分布的一种常用方法。

三、连续型随机变量函数的分布

例4：设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2} & 0<x<\pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

$-1 \le Y \le 1$

解　注意到，当 $0<x<\pi$ 时 $0<y<1$

故　　当 $y \le 0$ 时, $F_Y(y)=0$,

当 $y \ge 1$ 时, $F_Y(y)=1$,

$F_Y(y)=P(Y \le y)$

三、连续型随机变量函数的分布

例4：设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2} & 0<x<\pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

$$0<X<\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{2}<X<\pi$$

解：当 $0<y<1$ 时,

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)$$

$$=P(0<X\le \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X<\pi)$$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx$$

$$=\left(\frac{\arcsin y}{\pi}\right)^2+1-\left(\frac{\pi-\arcsin y}{\pi}\right)^2$$

而 $f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}$

求导得： $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

下面给出一个定理，在满足定理条件时可直接用它求出随机变量函数的概率密度。

三、连续型随机变量函数的分布

定理 设 X是一个取值于区间$[a,b]$，具有概率密度 $f(x)$的连续型 $r.v$, 又设$y=g(x)$处处可导，且对于任意 x，恒有$g'(x)>0$ 或恒有$g'(x)<0$，则$Y=g(X)$是一个连续型 $r.v$，它的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f[h(y)]\left|\dfrac{dh(y)}{dy}\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中，$\alpha=\min\limits_{a\le x\le b} g(x), \beta=\max\limits_{a\le x\le b} g(x)$,

$x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数。

此定理的证明与前面的解题思路类似

三、连续型随机变量函数的分布

例7：设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 服从正态分布，证明 $Y = aX + b$ 也服从正态分布。

解： 随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$y = g(x) = ax + b$$

解得 $x = h(y) = \dfrac{y-b}{a}$ $\qquad h'(y) = \dfrac{1}{a}$

所以$Y = aX + b$的概率密度为

$$f_y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < y < +\infty$$

即 $$f_y(y) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}} \quad -\infty < y < +\infty$$

所以$Y = aX + b \sim$ N ($a\mu$+b , $(a\sigma)^2$)

谢 谢 大 家