历届试题选（曲面积分）

一、设Σ是椭球面$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{1}=1$上半部分之外侧，则$\iint\limits_{\Sigma} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____。

(A) $\dfrac{1}{3}\sqrt{2}\pi$； (B) $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\pi$； (C) $\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\pi$； (D) $\dfrac{1}{6}\sqrt{2}\pi$。

(2005—2006)

二、设Σ是整个球面$x^2+y^2+z^2=9$，取外侧，则$\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的值是 ________。

(2005—2006)

三、设Σ是平面$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$在第一卦限的部分，则$\iint_{\Sigma}(2x+\dfrac{4}{3}y+z)\,\mathrm{d}S=$______________。

(2008—2009)

四、计算$I=\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma}[(x+y)^2+z^2+2yz\,]\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=2x+2z$ 。 (2008—2009)

五、计算$I=\oint\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成的区域的整个边界曲面。

(2008—2009)

六、计算$\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是抛物面$z=4-x^2-y^2$在$z\geq 0$部分，方向取下侧。

(2010—2011)

七、计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是抛物面$z=2-x^2-y^2$ $(1\leq z\leq 2)$的上侧。 (2010—2011)

八、计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z^2-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leq z\leq 1)$的下侧。 (2010—2011)

九、计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，$a$为大于零的常数。 (2011—2012)

十、计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是平面$z=x+1$被圆柱面$x^2+y^2=1$所截的部分. (2014—2015)

十一、计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是曲面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$在$z\geq 0$的部分. (2016—2017)

十二、计算$\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是正方体$\Omega:0\leq x\leq a,$

$0 \le y \le a, 0 \le z \le a$ 的表面，取外侧. (2016—2017)

十三、计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} (xy - y + y^2 + z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限中的部分.

(2017—2018)

十四、计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} [(x + y + z)^2 - 2xz]\mathrm{d}S$，其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = x + z$. (2017—2018)

十五、利用 Gauss 公式计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为椭圆抛物面 $z = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}$（$0 \le z \le 1$）的上侧. (2017—2018)

十六、计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} (y - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z - x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ $(z \ge 0)$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2rx$（$0 < r < R$）所截的部分，方向取上侧. (2017—2018)

十七、设曲面 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧，试将第二类曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化成第一类曲面积分，并计算其值. (2018—2019)

十八、计算第二类曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由三个坐标面和平面 $x + y + z = 1$ 所围成的空间有界区域的整个边界曲面，取外侧. (2018—2019)

十九、计算第二类曲线积分 $I = \oint_L (x^2 y\cos x + 2xy\sin x - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (x^2\sin x - 2x)\mathrm{d}y$，其中 L 是由上半圆 $y = \sqrt{2x - x^2}$，取逆时针方向. (2019—2020)

二十、计算第二类曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}S$，其中 Σ 是平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限中的部分.

(2019—2020)

二十一、设曲面 Σ 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧，计算第二类曲面积分

$$I = \oiint\limits_{\Sigma} \frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2 + z^2}.$$ (2019—2020)

二十二、计算第一类曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} (xz + yz + z^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限的部分.

(2020—2021)

二十三、计算第二类曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} (y^2 + z^2)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2 + z^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z \le 1)$ 的上侧. (2020—2021)

二十四、设 Σ 是平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分取下侧，则第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(6x+4y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________________. (2021—2022)

二十五、计算第一类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为旋转抛物面 $2z=x^2+y^2$ 在 $0\le z\le 2$ 的部分. (2021—2022)

二十六、计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成空间区域的整个边界曲面的外侧. (2021—2022)