概率论与数理统计

二维连续型随机变量

主讲人：郑旭玲

信息科学与技术学院

二维连续型随机变量

定义

对于二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，如果存在非负可积的函数$f(x,y)$使对于任意x,y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,du\,dv$$

则称(X,Y)是**连续型的二维随机变量**，函数$f(x,y)$称为二维随机变量(X,Y)的**概率密度**，或称为随机变量X和Y的**联合概率密度**。

一维随机变量X

连续型

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$$

$$-\infty<x<+\infty$$

X的概率密度函数

$$f(x)\quad x\in R$$

$$f(x)\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$$

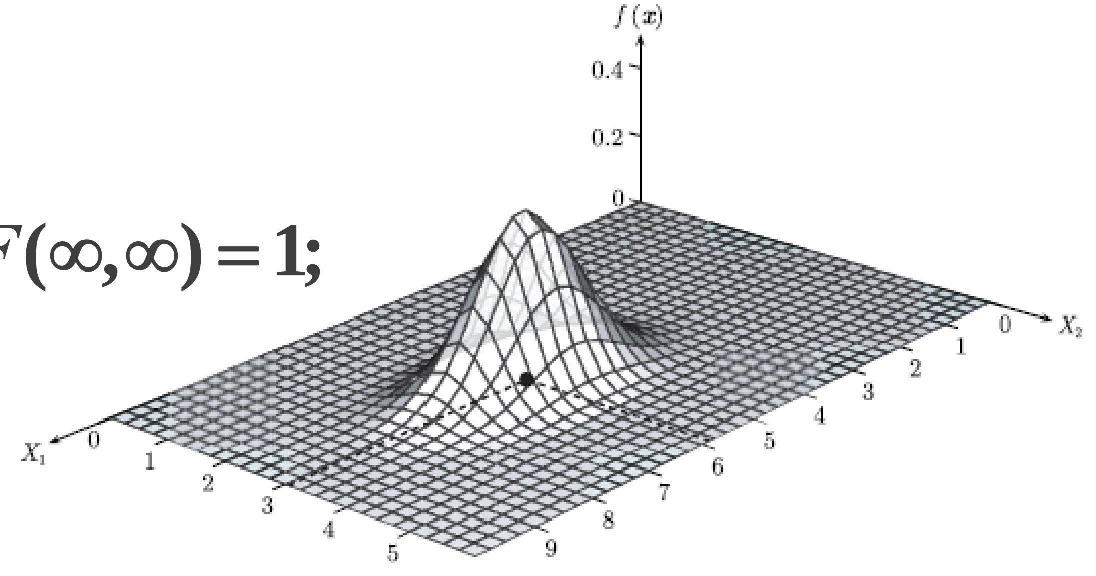
二维连续型随机变量

(X, Y) 的概率密度的性质：

1. $f(x,y)\geq 0$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = F(\infty,\infty)=1$;

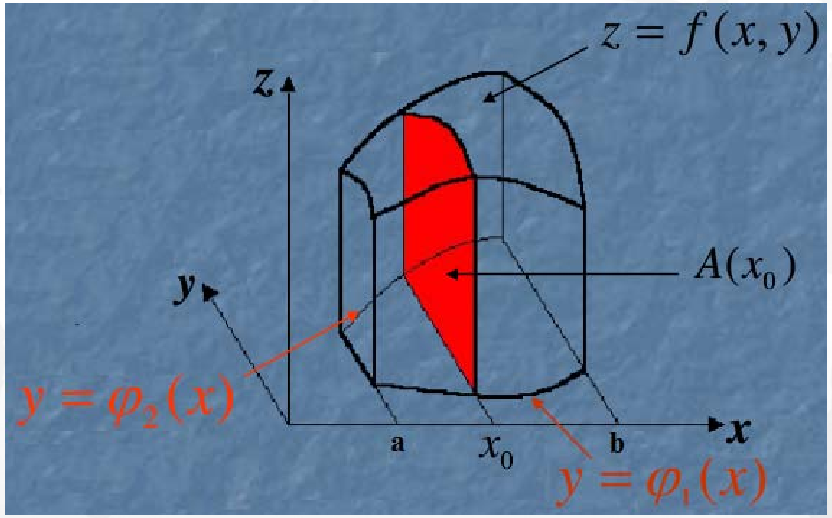
$$\left(\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy = 1\right);$$



几何含义：空间中的一个曲面$z=f(x,y)$与xOy平面之间的空间区域的体积为1。

二维连续型随机变量

(X,Y) 的概率密度的性质：



1. $f(x,y)\geq 0$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$;

3. 设 G 是 xOy 平面上的区域，则有

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dxdy;$$

本质：求以G为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶面的柱体体积

（通常化为二次积分来计算）

二维连续型随机变量

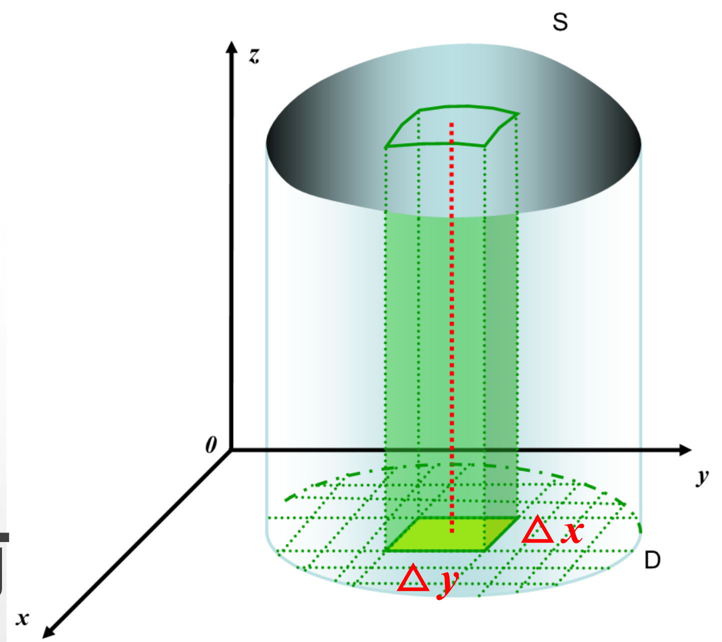
(X,Y) 的概率密度的性质：

1. $f(x,y) \ge 0$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$;

3. 设 G 是 xOy 平面上的区域，则有

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy;$$



4. 若 $f(x,y)$在点(x,y)连续，则有 $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

二维连续型随机变量

若$f(x,y)$在点(x,y)连续，

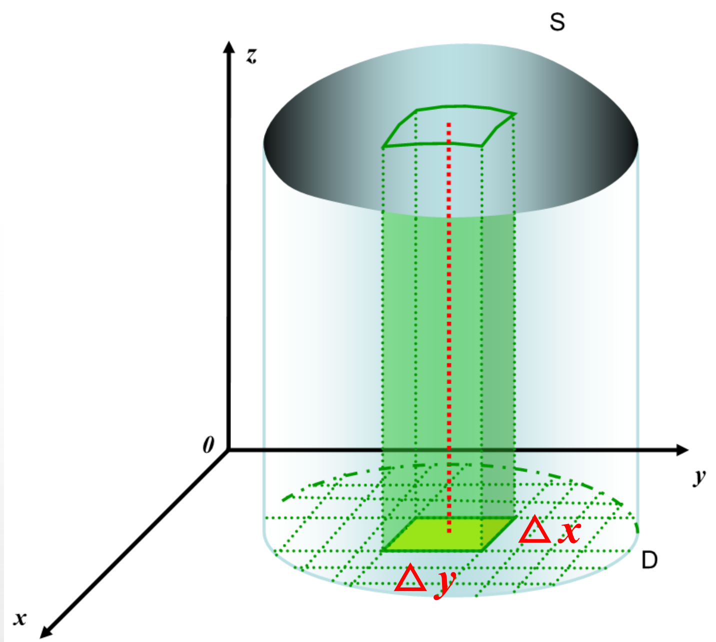
则当Δx,Δy很小时，

$$P\{x < X \le x+\Delta x, y < Y \le y+\Delta y\}$$
$$\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$$

即点(X,Y)落在小长方形

$$(x, x+\Delta x]\times(y, y+\Delta y]$$

内的概率近似地等于 $f(x,y)\Delta x\Delta y$



二维连续型随机变量

计算二重积分需要注意一下几点：

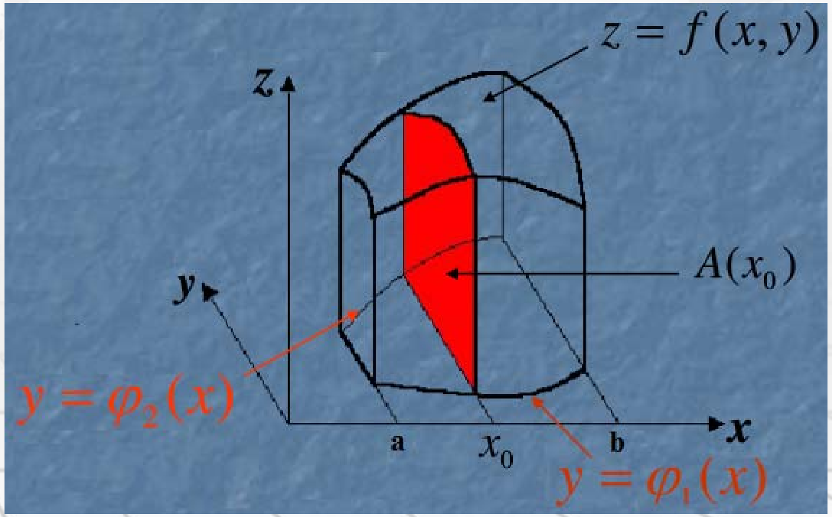
(1)在计算二重积分时，首先根据已知条件确定积分区域D时x—型还是y—型区域，由此确定将二重积分化为先y后x的二次积分还是先x后y的二次积分。

(2)当积分区域D既是x—型区域，有事y—型区域时，把二重积分化为二次积分时，就有两种积分顺序；

$$D:\begin{cases}\Psi_1(y)\le x\le \Psi_2\ y\\ c\le y\le d\end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy;$$

$$=\int_c^d dy\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,dx;$$



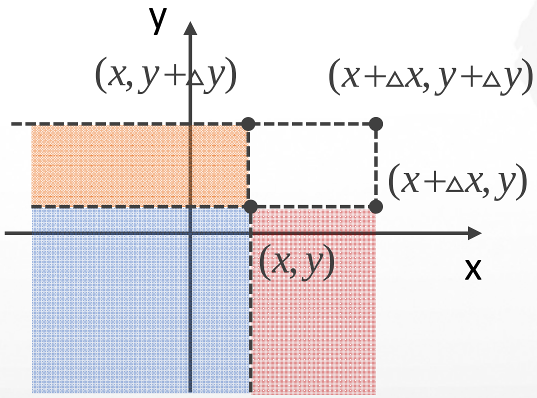
二维连续型随机变量

由性质(4),在f(x,y)的连续点处有

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)$$

$$=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$



这表示若f(x,y)在点(x,y)连续，则当△x,△y很小时，

$$P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$$

即(X,Y)落在小长方形$(x, x+\Delta x]\times(y, y+\Delta y]$内的概率近似地等于$f(x,y)\Delta x\Delta y$

二维连续型随机变量

例 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$;

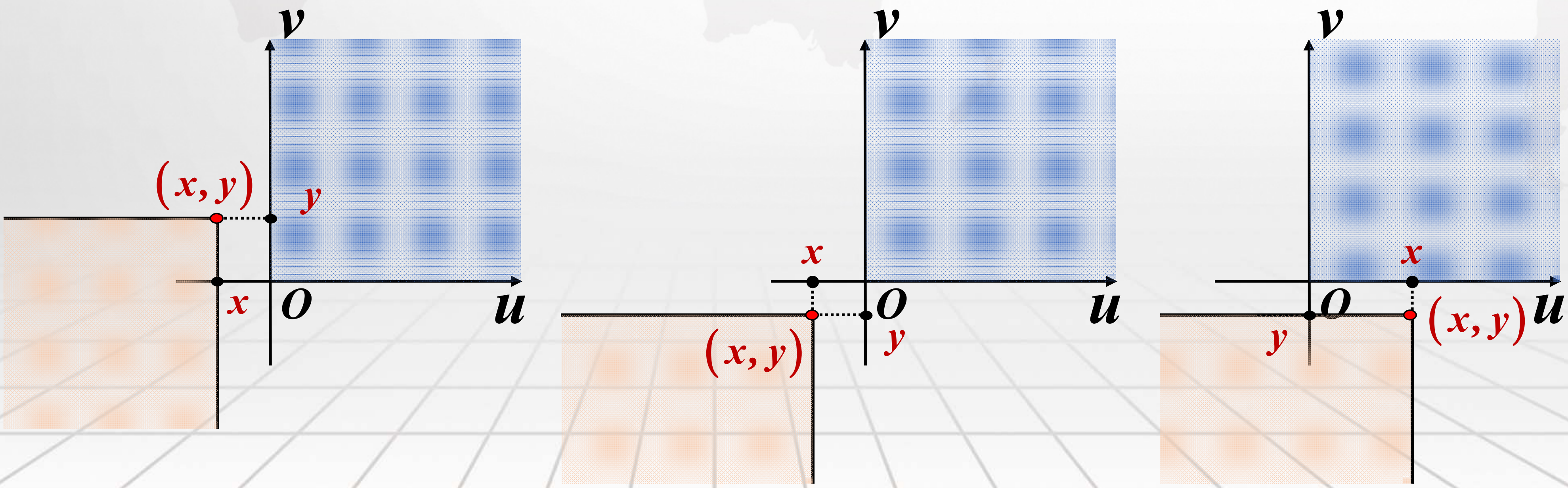
(2) 求概率 $P\{Y\le X\}$.

二维连续型随机变量

解：(1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$

积分区域 $D=\{(u,v)\mid -\infty<u\le x,-\infty<v\le y\}$

$f(u,v)\ne 0$ 区域 $\{(u,v)\mid u>0,v>0\}$



二维连续型随机变量

当 $x \le 0$ 或 $y \le 0$ 时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,dudv = 0$

当 $x>0, y>0$ 时，

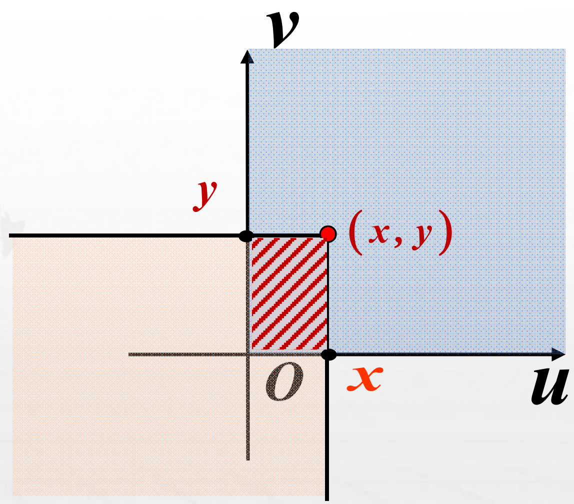
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,dudv$$

$$=\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2e^{-(2u+v)}\,dudv$$

$$=\int_{0}^{y} e^{-v}dv\cdot\int_{0}^{x} 2e^{-2u}du$$

$$=-\left[e^{-v}\right]_{0}^{y}\left(-\left[e^{-2u}\right]_{0}^{x}\right)$$

$$=\left(1-e^{-y}\right)\left(1-e^{-2x}\right)$$



二维连续型随机变量

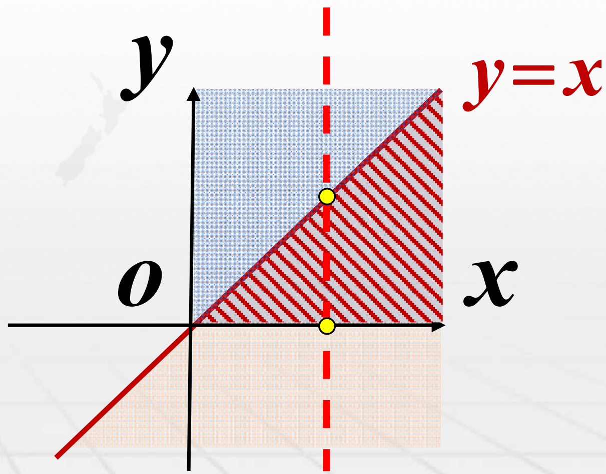
解： (1)

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-y}\right), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) $P\{Y\le X\}$

$$=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)\,dxdy$$

$$=2\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x}e^{-(2x+y)}dy$$



二维连续型随机变量

(2) $P\{Y \le X\}$

$$= \iint\limits_{y\le x} f(x,y)\,dxdy$$

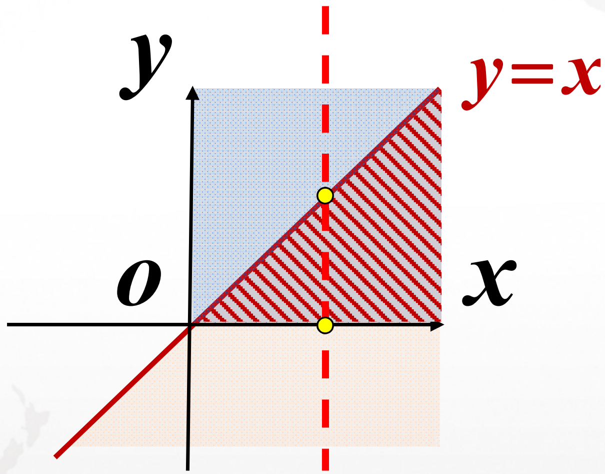
$$= 2\int_0^{+\infty} dx \int_0^x e^{-(2x+y)}\,dy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx \int_0^x e^{-y}\,dy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}(-\left[e^{-y}\right]\Big|_0^x)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}\left(1-e^{-x}\right)dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx - 2\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \left[-e^{-2x}\right]\Big|_0^{+\infty} - \frac{2}{3}\left[-e^{-3x}\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$= 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$



二维连续型随机变量

(2’) $P\{Y \le X\}$

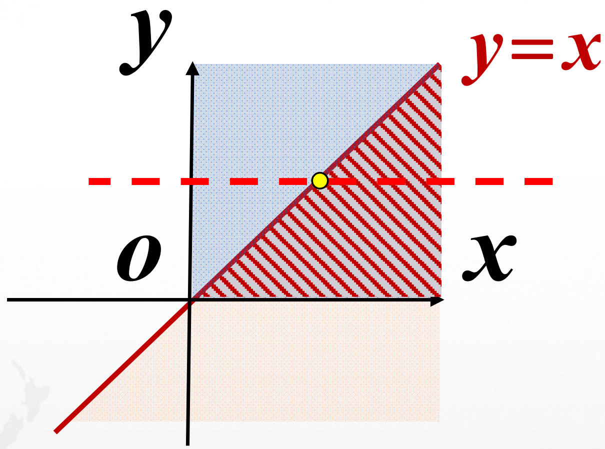
$$= \iint\limits_{y \le x} f(x,y)\,dxdy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} e^{-(2x+y)}\,dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-y}dy \int_0^{x} e^{-2x}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y}\left(\left[-e^{-2x}\right]\Big|_y^{+\infty}\right)dy \;= \int_0^{+\infty} e^{-y}e^{-2y}\,dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3}e^{-3y}\right]\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3}.$$



小结

- 二维随机变量
- 联合分布函数
- 联合分布律
- 联合概率密度函数

谢谢大家