概率论与数理统计

随机变量函数的数学期望

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

三、随机变量函数的数学期望

1. 问题的提出：

设已知随机变量X的分布，我们需要计算的不是X的期望，而是X的某个函数的期望，比如说 $g(X)$ 的期望。那么应该如何计算呢?

一种方法是，因为 $g(X)$ 也是随机变量，故应有概率分布，它的分布可以由已知的 X 的分布求出来。一旦我们知道了$g(X)$的分布，就可以按照期望的定义把 $E[g(X)]$ 计算出来。

三、随机变量函数的数学期望

使用这种方法必须先求出随机变量函数 $g(X)$ 的分布，一般是比较复杂的。

那么是否可以不先求 $g(X)$ 的分布而只根据 X 的分布求得$E[g(X)]$呢?

下面的定理指出，答案是肯定的。

三、随机变量函数的数学期望

定理 设Y是随机变量X的函数：$Y=g(X)$ (g是连续函数)

(1) 当X为离散型时，它的分布率为$P(X=x_k)=p_k$;(k=1,2,…)，

若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

(2) 当X为连续型时，它的密度函数为$f(x)$。若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

三、随机变量函数的数学期望

$$E(Y)=E[g(X)]=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k, & X\text{离散型}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & X\text{连续型}\end{cases}$$

该公式的重要性在于：当我们求 $E[g(X)]$ 时，不必知道 $g(X)$ 的分布，而只需知道 X 的分布就可以了。这给求随机变量函数的期望带来很大方便。

三、随机变量函数的数学期望

上述定理还可以推广到两个或两个以上随机变量的函数的情况。

设 Z 是随机变量X,Y的函数$Z=g(X,Y)$(g是连续函数)，Z 是一维随机变量则

(1)若(X,Y)是二维连续型，概率密度为$f(x,y)$，则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

三、随机变量函数的数学期望

(2) 若(X,Y)是二维离散型,概率分布为

$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}(i,j=1,2\cdots)$则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_k$$

这里假定上两式右边的积分或级数都绝对收敛.

三、随机变量函数的数学期望

例 6 设风速V在$(0,a)$上服从均匀分布,即具有概率密度

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<v<a\\ 0 & 其它\end{cases}$$

又设飞机机翼受到的正压力W是V的函数:$W=kV^2$ $(k>0,常数)$,求W的数学期望。

解：由上面的公式

$$E(W)=\int_{-\infty}^{+\infty}kv^2f(v)dv=\int_0^a kv^2\frac{1}{a}dv=\frac{1}{3}ka^2$$

三、随机变量函数的数学期望

例 7 设二维连续型随机变量（X,Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} A\sin(x+y) & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1)求系数A，　(2)求$E(X),E(XY)$.

解：（1）由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^{\pi/2}dy\int_0^{\pi/2}A\sin(x+y)dx=1,\ \text{得}A=\frac{1}{2}$$

三、随机变量函数的数学期望

例 7 设二维连续型随机变量（X,Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} A\sin(x+y) & 0\le x,y\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

(1)求系数A， (2)求$E(X),E(XY)$.

解（2）$E(X)=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi}{4}$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi}{2}-1$$

谢 谢 大 家