厦门大学《离散数学》课程试卷

信息学院2018级

主考教师：金贤安　　试卷类型：（A卷）

一、单项选择题（共5题，每题4分，共20分）

分数	阅卷人

1. 下列公式中，为永真式的是（　C　）。

A. $\neg(F(x)\rightarrow(\forall y(G(x,y)\rightarrow F(x))$

B. $\neg(\forall xF(x)\rightarrow\forall yG(y))\wedge\forall yF(y)$

C. $(\forall xF(x)\vee\forall xG(x))\rightarrow\forall x(F(x)\vee G(x))$

D. $\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists x\forall yF(x,y)$

2. 设A,B,C,D为任意集合，下列说法中，正确的是（　D　）。

A. 若 $A\cap B=A\cap C$,则 $B=C$ 。

B.若 $A\cup B=A\cup C$,则 $B=C$ 。

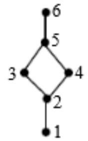
C.若 $A\subset B$ 且 $C\subset D$,则 $A\cap C\subset B\cap D$ 。

D.若 $A\subseteq B$ 且 $C\subseteq D$,则 $A-D\subseteq B-C$ 。

3.设 $<A,R>$ 为偏序集，关系 R 的哈斯图如右下图所示，若 A 的子集 $B=\{2,3,4,5\}$ ，则元素6为集合 B 的（　A　）。

A. 上界　　B.最小上界

C.最大下界　　D.以上答案都不对



4.下列关于欧拉图的叙述不正确的是（C　）。

A. 若无向图 G 是顶点数大于等于2的欧拉图，则边连通度 $\lambda(G)\geq 2$ 。

B. 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通图且没有奇度顶点。

C. 有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 的每一个顶点的入度等于出度。

D. Petersen图不是欧拉图。

5.下列说法中不正确的是（ D ）。

A. 设T是连通无向图G的一棵生成树，则T的余树不含有G的任何边割集。

B. 若图G是不连通的，则G的补图$\overline{G}$是连通的。

C. 设无向图G连通且顶点数大于等于3，若G有割边，则存在顶点v，使得连通分支数$p(G-v)>p(G)$。

D. 设G是n阶无向简单图，$n\geq 3$且为奇数，则G与$\overline{G}$的奇点个数不相等。

二、填空题（共5题，每题3分，共15分）

分数	阅卷人

1. 设$A=\{\{a,b\},a,b,\varnothing\}$，则$A-\varnothing=$_$\{\{a,b\},a,b,\phi\}$_；$A-\{\varnothing\}=$__$\{\{a,b\},a,b\}$____；$P(A)$的元素个数$|P(A)|=$ 16 。

2. 设A,B为非空集合，$|A|=m,|B|=n$，则$|A\times B|=$ _mn_；A到B上的二元关系有_2^{mn}___个；A到A上的二元关系有_2^{n^2}___个。

3. 设R是集合A上的对称关系和传递关系，命题"若对$\forall a\in A$,$\exists b\in A$，使得$<a,b>\in R$,则R是等价关系."的真值为 1 。

4. 在1-200之间不能被3，5和7整除的整数个数为 93 。

5.不同构的5阶根树有 9 棵。

3、**应用、计算和证明题（共6题，65分）**

1.（8分）

分数	阅卷人

设I是如下一个解释：$D=\{2,3\}$，

a	b	$f(2)$	$f(3)$	$P(2,2)$	$P(2,3)$	$P(3,2)$	$P(3,3)$
3	2	3	2	0	0	1	1

(1)

(2) $\forall x\exists yP(y,x)$。

解：（1）

$P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b))$

$= P(3, f(3)) \wedge P(2, f(2))$

$= P(3,2) \wedge P(2,3)$

$= 1 \wedge 0$

$= 0$

(2)

$\forall x \exists y P(y, x) = \forall x (P(2, x) \vee P(3, x))$

$= (P(2,2) \vee P(3,2)) \wedge (P(2,3) \vee (3,3))$

$= (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1)$

$= 1 \wedge 1$

$= 1$

2.(8分)

分数	阅卷人

在命题逻辑自然推理系统P中构造下面推理的证明：

前提：$\neg p \to q$，$s \to \neg q$，$\neg r$，$r \vee s$

结论：p

证明：

①$\neg r$ 前提引入

②$r \vee s$ 前提引入

③s ①②析取三段论

④$s \to \neg q$ 前提引入

⑤$\neg q$ ③④假言推理

⑥$\neg p \to q$ 前提引入

⑦p ⑤⑥拒取式

3.(12分)

分数	阅卷人

设 $<A,R>$ 是偏序集，在 A 上定义新的关系 S: $\forall x,y\in A$, $xSy \Leftrightarrow yRx$,称 S 为 R 的对偶关系。

（1） 证明：S 也是 A 上的偏序关系。

（2） 如果 R 是整数集合 A 上的 $\le$ 关系，则 S 是什么关系？如果 R 是正整数集合上的整除关系，则 S 是什么关系？

（3） $<A,R>$, $<A,S>$ 中的极大元和极小元之间有什么关系？

解：（1） $\forall x, x\in A \Rightarrow xRx \Leftrightarrow xSx$ ，S 是自反的；

$\forall x,y\in A, xSy \wedge ySx \Leftrightarrow yRx \wedge xRy \Rightarrow x=y$, S 是反对称的；

$\forall x,y,z\in A, xSy \wedge ySz \Leftrightarrow yRx \wedge zRy \Rightarrow zRx \Rightarrow xRz$ ，S 是传递的。

(2) 如果 R 是整数集合上的小于或者等于关系，那么 S 是大于或者等于关系；如果 R 是正整数集合上的整除关系，那么 S 是倍数关系。

(3) $<A,R>$ 中的极大元恰是 $<A,S>$ 中的极小元；$<A,R>$ 中的极小元恰是 $<A,S>$ 中的极大元。

4.(12分)

分数	阅卷人

（1） 若T是一棵有t片树叶的2叉正则树，求出T的顶点个数；

（2） 求一棵权为2，3，6，9，13，15的最优二叉树；

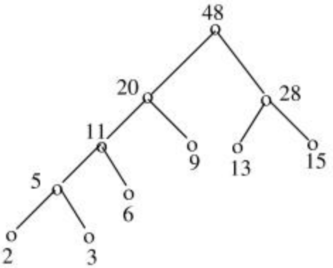
（3） 计算上述最优二叉树的权。

解：（1）设顶点个数为n，边数为m，依题意得

$$\begin{cases} m = 2(n-t) \\ m = n-1 \end{cases}$$

解得$n = 2t-1$.

(2)



(3)5+11+20+48+28=112

所以最优二叉树的权为112.

5.(15分)

分数	阅卷人

G 的围长是指G 中最短圈的长；若G 没有圈，则定义G 的围长为无穷大。

（1） 证明：围长为4的k 正则图至少有$2k$ 个顶点；

（2） 找出一个围长为4有$2k$ 个顶点的k 正则图；

（3） 证明：围长为5的k 正则图至少有k^2+1个顶点。

解：（1）考虑图G相邻的两个顶点x，y，令$S(x)$，$S(y)$分别表示G中与x，y距离为1的顶点集，$S(x)\cap S(y)=\phi$，否则G的围长为3，这和G的围长为4矛盾。因此$|S(x)\setminus y|=|S(y)\setminus x|=k-1$，故至少有$2+2(k-1)=2k$个顶点。

(2)在$S(x)$，$S(y)$间再将它连成完全2部图，所得到的图就是围长为4的图。

(3)从图G中的顶点x出发，S_i表示G中与x距离为i的顶点的集合（$(i=0,1,2,\dots)$.显然S_i中的顶点相互不相邻，S_2中的每一个顶点恰好存在一边与S_1相连，否则G中的围长就小于5，这与G的围长为5矛盾.再由正则性，因此$|S_0|=1,|S_1|=k,|S_2|=k(k-1)$,故$G$至少有$1+k+k(k-1)=k^2+1$个顶点。

6.（10分）

分数	阅卷人

请构造一个8个点15条边且同时满足下述3个条件的无向简单图G:

(1) G是平面图；（2）G是半欧拉图；（3）G是非哈密顿图

1