



厦门大学《大学物理 A (上)》课程
期末试卷 (A 卷) 参考解答
(考试时间: 2020 年 6 月)

一、(14 分)

一质点沿半径为 1 m 的圆周运动, 运动方程为 $\theta = 2 + 3t^3$, θ 式中以弧度计, t 以秒计, 求:

(1) $t = 2$ s 时, 质点的切向和法向加速度;

(2) 当加速度的方向和半径成 45° 角时, 其角位移是多少?

解: 由题可得, 质点的角速度和角加速度分别为:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 9t^2 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 18t \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(1) $t = 2$ s 时,

$$a_t = R\alpha = 1 \times 18 \times 2 = 36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$a_n = R\omega^2 = 1 \times (9 \times 2^2)^2 = 1296 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) 当加速度方向与半径成 45° 角时, 有

$$\tan 45^\circ = \frac{a_t}{a_n} = 1$$

即

$$R\omega^2 = R\alpha \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

亦即

$$(9t^2)^2 = 18t$$

则解得

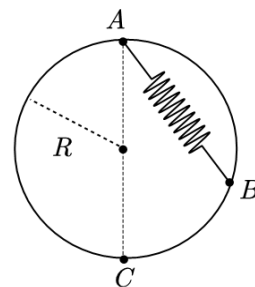
$$t^3 = \frac{2}{9} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

于是角位移为

$$\theta = 2 + 3t^3 = 2 + 3 \times \frac{2}{9} = 2.67 \quad \text{rad} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

二、(14 分)

一根原长 l_0 的弹簧，当下端悬挂质量为 m 的重物时，弹簧长 $l = 2l_0$ 。现将弹簧一端悬挂在竖直放置的圆环上端 A 点，把弹簧另一端所挂重物放在光滑圆环的 B 点，设环的半径 $R = l_0$ ，如图所示，已知 AB 长为 $1.6R$ 。当重物在 B 点无初速地沿圆环滑动时，试求：

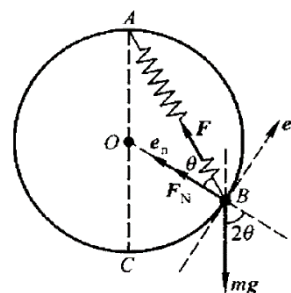


- (1) 重物在 B 点的加速度和圆环对重物的正压力；
- (2) 重物滑到最低点 C 时速度。

解：

$$(1) \text{平衡时: } mg = kl_0, \text{ 所以 } k = \frac{mg}{l_0} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

任意位置时，如右图



$$\begin{cases} mg \sin 2\theta - F \sin \theta = ma_t \\ N + F \cos \theta - mg \cos 2\theta = ma_n = m \frac{v^2}{R} \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\text{处于} B \text{点时: } \cos \theta = \frac{AB}{2R} = 0.8, \sin \theta = 0.6 \text{ 时 } v = 0, \text{ 所以 } a_n = 0$$

$$\text{此时弹性力 } F = k \cdot 0.6l_0 = 0.6mg$$

$$\text{加速度: } a = a_t = g \sin 2\theta - 0.6g \sin \theta = g \sin \theta (2 \cos \theta - 0.6) = 0.6g \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{正压力: } N = -F \cos \theta + mg \cos 2\theta = -0.2mg, \text{ 符号表示与图示反方向。} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

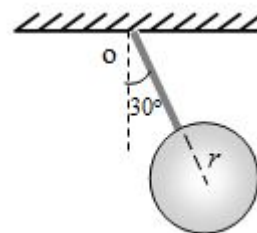
(2) 机械能守恒

$$\frac{1}{2} k (1.6R - l_0)^2 + mg (2R - 1.6R \cos \theta) = \frac{1}{2} mv_c^2 + \frac{1}{2} k (2R - l_0)^2 \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$v_c = \sqrt{0.8gR} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

三、(14 分)

一钟摆可以在竖直平面内摆动。已知摆锤的质量为 m ，半径为 r ，摆杆的质量也为 m ，长度为 $2r$ 。将钟摆拉离平衡位置至与竖直方向成 30° 角，后由静止释放。求：



- (1) 钟摆相对转轴 O 的转动惯量 J ；
- (2) 钟摆由初始位置摆动到竖直位置的过程中重力矩所做的功。

解：

(1) 摆杆的转动惯量：

$$J_1 = \frac{1}{3}m(2r)^2 = \frac{4}{3}mr^2 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

摆锤的转动惯量：

$$J_2 = \frac{1}{2}mr^2 + m(3r)^2 = \frac{19}{2}mr^2 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

∴ 钟摆的转动惯量：

$$J = J_1 + J_2 = \frac{65}{6}mr^2 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

(2) 重力矩做功：

$$W = W_1 + W_2 = -\Delta E_{p1} - \Delta E_{p2} = mgr(1 - \cos 30^\circ) + 3mgr(1 - \cos 30^\circ) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= 2mgr(2 - \sqrt{3}) \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

或：

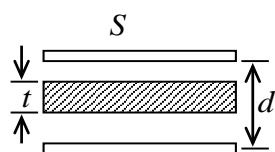
$$W_1 = -\int_{\frac{\pi}{6}}^0 mgr \sin \theta d\theta = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})mgr \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$W_2 = -\int_{\frac{\pi}{6}}^0 3mgr \sin \theta d\theta = 3(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})mgr \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore W = W_1 + W_2 = 2mgr(2 - \sqrt{3}) \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

四、(14 分)

如题所示，一空气平行板电容器，极板面积为 S ，两极板之间距离为 d ，其中平行地放有一层厚度为 t ($t < d$)、相对介电常量为 ϵ_r 的各向同性均匀电介质。略去边缘效应，试求其电容值。



解法一：设极板上的自由电荷面密度为 σ_0 。应用 \vec{D} 的高斯定理可得两极板之间的电位移大小为

$$D = \sigma_0 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由 $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ 得空气中的电场强度大小为

$$E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

电介质中的电场强度的大小为

$$E = \sigma_0 / (\epsilon_0 \epsilon_r) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

两极板之间的电势差为

$$U = E_0(d-t) + Et = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}(d-t) + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}t = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}[\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r)t] \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

电容器的电容为

$$C = \frac{\sigma_0 S}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r)t} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

答案可以有不同的表达形式:

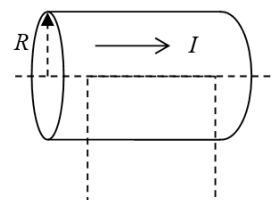
$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\epsilon_r(d-t) + t}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{(d-t) + t/\epsilon_r}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d + (1/\epsilon_r - 1)t}$$

五、(15 分)

如图所示,一半径为 R 的无限长圆柱形载流导线,电流密度为 $j = j_0 r/R$,其中 j_0 为常量, r 为到中心轴的距离。求:



- (1) 距离中心轴 r 处的磁感应强度大小;
- (2) 边长为 $2R$ 的正方形平面的一条边在轴上,则通过该平面的磁通量大小;
- (3) 单位长度该导线内的磁场能。

解: (1)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I = \begin{cases} \mu_0 \int_0^r \frac{j_0 r}{R} 2\pi r dr & r \leq R \\ \mu_0 \int_0^R \frac{j_0 r}{R} 2\pi r dr & r > R \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$B \cdot 2\pi r = \begin{cases} \frac{2\pi\mu_0 j_0 r^3}{3R} & r \leq R \\ \frac{2\pi\mu_0 j_0 R^2}{3} & r > R \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 j_0 r^2}{3R} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 j_0 R^2}{3r} & r > R \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2)3 分

$$\begin{aligned}
\Phi &= \left| \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \right| = \int B dS = \int B_1 dS + \int B_2 dS \\
&= \int_0^R \frac{\mu_0 j_0 r^2}{3R} 2R dr + \int_R^{2R} \frac{\mu_0 j_0 R^2}{3r} 2R dr \\
&= \frac{2\mu_0 j_0 R^3}{3} \left(\frac{1}{3} + \ln 2 \right) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
W_m &= \int w_m \cdot dV = \int_0^R \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r dr \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \\
&= \int_0^R \frac{[\mu_0 j_0 r^2 / (3R)]^2}{2\mu_0} 2\pi r dr \\
&= \frac{[\mu_0 j_0 / (3R)]^2}{2\mu_0} 2\pi \frac{1}{6} R^6 \\
&= \frac{\pi \mu_0 j_0^2 R^4}{54} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}
\end{aligned}$$

六、(14 分)

某人测得一静止棒长为 l ，质量为 m ，于是求得此棒线密度为 $\lambda = m/l$ ，

(1) 假定此棒以速度 v 在棒长方向上运动，此人再测棒的线密度 λ_1 应为多少？

(2) 若棒在速度垂直长度方向上运动，它的线密度 λ_2 又为多少？

解：(1)

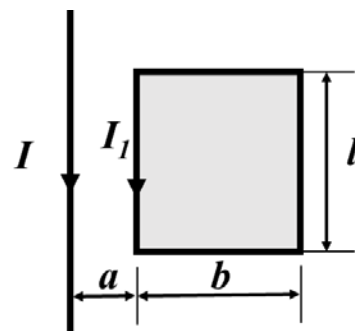
$$\begin{aligned}
l' &= l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \\
m' &= \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \\
\lambda_1 &= \frac{m'}{l'} = \frac{m}{l} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\lambda}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
l'' &= l \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \\
m'' &= \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \\
\lambda_2 &= \frac{m''}{l''} = \frac{m}{l} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}
\end{aligned}$$

七、(15 分)

在长直电流 I 旁放置一矩形线圈与其共面，线圈长为 l 、宽为 b ，近边距长直导线距离为 a ，如图所示。求：



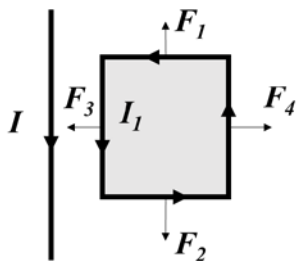
- (1) 线圈与长直导线之间的互感系数；
- (2) 假设线圈中通有逆时针方向的电流 I_1 ，则线圈受的安培力的大小和方向；
- (3) 假设线圈在垂直于导线方向上以匀速率 v 的速度远离导线运动，问当线圈离导线较近的一边到导线的垂直距离为 a 时，线圈中的感应电动势的大小和方向。

解：(1) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 1 分

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I l}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$



(2)

$$\because \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$F_3 = \frac{\mu_0 I I_1 l}{2\pi a} \quad \text{——方向向左} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$F_4 = \frac{\mu_0 I I_1 l}{2\pi(a+b)} \quad \text{——方向向右} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以线圈所受到的安培力合力的大小为：

$$F = F_3 - F_4 = \frac{\mu_0 I I_1 l}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right) = \frac{\mu_0 I I_1 b l}{2\pi a(a+b)} \quad \text{——方向向左} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(3)

方法 1. $\therefore \xi_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{a+b}{a} \right) = \frac{\mu_0 I b l v}{2\pi a(a+b)} \quad ;$

方法 2. $\therefore \xi_i = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi a} - \frac{\mu_0 I l v}{2\pi(a+b)} = \frac{\mu_0 I b l v}{2\pi a(a+b)} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

方向逆时针.....1分