概率论与数理统计
贝叶斯公式

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

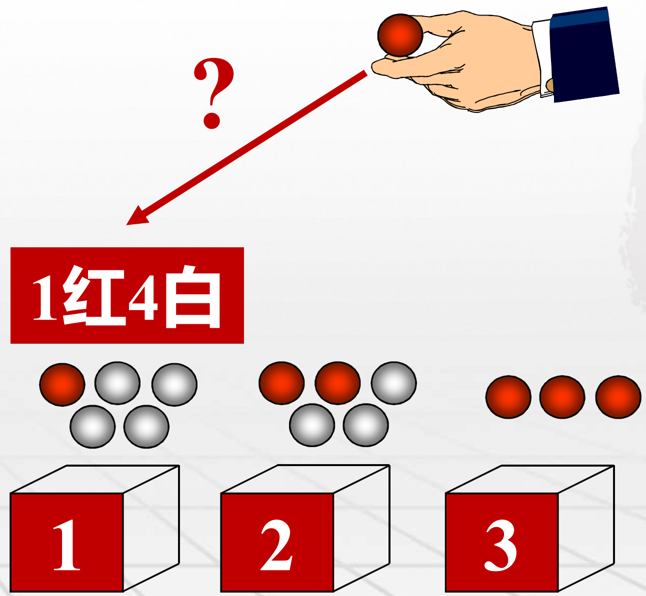
贝叶斯公式

“已知结果求原因”

在实际中更为常见，它所求的是条件概率，是已知某结果发生条件下，探求各原因发生可能性大小。

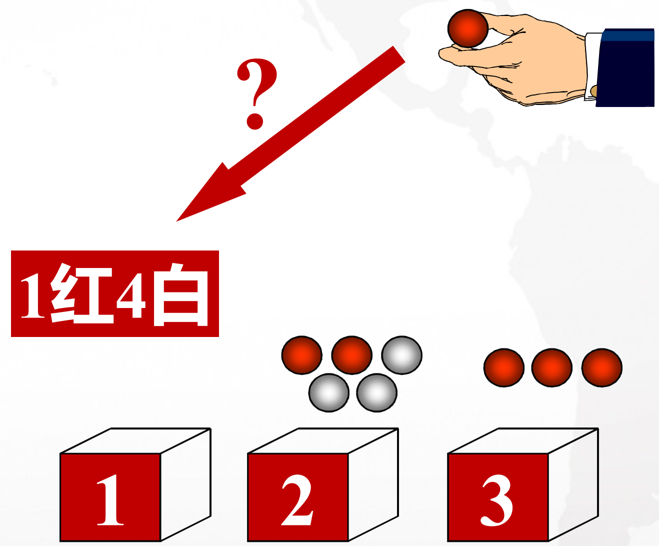
贝叶斯公式

有三个箱子，分别编号为1，2，3。1 号箱装有 1 个红球 4 个白球，2 号箱装有 2 红球 3 白球，3 号箱装有 3 红球。某人从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，发现是红球，求该球是取自1号箱的概率。



贝叶斯公式

某人从任一箱中任意摸出一球，发现是红球，求该球是取自1号箱的概率。



记 $A_i = \{$ 球取自 i 号箱 $\}$, $i=1,2,3$;

$B = \{$ 取得红球 $\}$

$$\boxed{P(A_1 \mid B)} = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

运用全概率公式计算$P(B)$

贝叶斯公式

定理 2（贝叶斯公式）设 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 为样本空间的一个划分，B 为 S 中的任意事件，且$P(B)>0$，则恒有

$$P(A_i \mid B) = P(A_i)P(B \mid A_i) \Big/ \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

该公式于1763年由贝叶斯 (Bayes) 给出。它是在观察到事件B已发生的条件下，寻找导致B发生的每个原因的概率。

贝叶斯公式的实际应用

例： 某一地区患有癌症的人占 0.005，患者对一种试验反应是阳性的概率为0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为0.04，现抽查了一个人，试验反应是阳性，问此人是癌症患者的概率有多大?

解： 设 $C = \{$抽查的人患有癌症$\}$，$A = \{$试验结果是阳性$\}$，

则 $\overline{C}$表示“抽查的人不患癌症”。

已知 $P(C)=0.005$，$P(\overline{C})=0.995$，

$P(A|C)=0.95$，$P(A|\overline{C})=0.04$

求 $P(C|A)$。

贝叶斯公式的实际应用

由贝叶斯公式，可得

$$P(C \mid A) = \frac{P(C)P(A \mid C)}{P(C)P(A \mid C) + P(\bar{C})P(A \mid \bar{C})}$$

代入数据计算得

$$\boldsymbol{P(C \mid A) = 0.1066}$$

贝叶斯公式

在贝叶斯公式中，$P(A_i)$和$P(A_i|B)$分别称为原因的**验前概率**和**验后概率**。

$P(A_i)$（i=1,2,…,n）是在没有进一步信息（不知道事件B是否发生）的情况下，人们对诸事件发生可能性大小的认识。

当有了新的信息（知道B发生），人们对诸事件发生可能性大小$P(A_i|B)$有了新的估计。

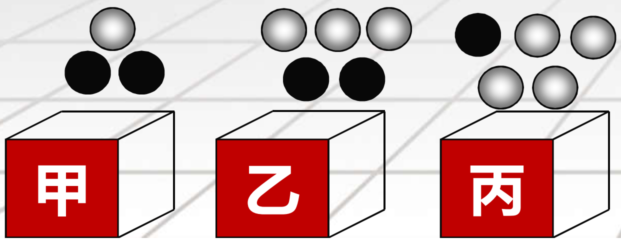
贝叶斯公式从数量上刻划了这种变化

贝叶斯公式

例题：甲盒装有1个白球2个黑球，乙盒装有3个白球2个黑球，丙盒装有4个白球1个黑球。采取掷一骰子决定选盒，出现1、2或者3点选甲盒，4、5点选乙盒，6点选丙盒，在选出的盒里随机摸出一个球，经过秘密选盒摸球后，宣布摸得一个白球，求此球来自乙盒的概率。

解：设 $A_1=\{\text{摸出的球来自甲盒}\}, A_2=\{\text{摸出的球来自乙盒}\},$

$$A_3=\{\text{摸出的球来自丙盒}\}, B=\{\text{摸得白球}\}$$



贝叶斯公式

则 $P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{1}{3}$，$P(A_3)=\frac{1}{6}$

$$P(B|A_1)=\frac{1}{3},\ P(B|A_2)=\frac{3}{5},\ P(B|A_3)=\frac{4}{5}.$$

于是由贝叶斯公式可知白球来自乙盒的概率为

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}}=\frac{2}{5}$$

贝叶斯公式

例2：在数字通迅中，由于随机干扰，当发出信号 " 0 " 时，收到信号 " 0 " ，"不清 " , " 1 " 的概率分别是 0.7 ,0.2 和 0.1 ; 当发信号 " 1 " 时，收到信号为 " 1 " ，"不清 " 和 " 0 " 的概率分别是 0.9、0.1 和 0，如果整个发报过程中 " 0 " 和 " 1 " 出现的概率分别是 0.6 和 0.4，当收到 " 不清 " 时 ,试推测原发信号是什么？

贝叶斯公式

解：设 $B=\{$发出信号"0"$\}$，则 $\overline{B}=\{$发出信号"1"$\}$

$A=\{$收到信号"不清"$\}$，

则 B 与 $\overline{B}$ 为 $\Omega=\{$发出信号"0"或"1"$\}$ 的一个划分。

故收到信号为"不清"而原发信号为"0"的概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})}$$

$$=\frac{0.6\times 0.2}{0.6\times 0.2+0.4\times 0.1}=0.75\,.$$

贝叶斯公式

故收到信号为"不清"而原发信号为"0"的概率为

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.75 .$$

而收到信号为"不清"而原发信号为"1"的概率为

$$P(\overline{B} \mid A)=1-P(B \mid A)=1-0.75=0.25 .$$

因此,可以推测原发信号很可能(确切地说有75%的可能)是"0"。

谢 谢 大 家