# 厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷答案

________学院________系________年级________专业

试卷类型:(理工类 A 卷)　　　　考试时间:2021.11.7

## 一、填空题:(每小题 4 分,共 24 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}=\underline{e^{-2}}$ 。

2. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\underline{\quad 0\quad}$。

3. 设 $y=\ln|\csc x-\cot x|$,则 $\mathrm{d}y=\underline{\csc x\,\mathrm{d}x}$。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,且 $f'(1)=f(1)=2$, $f'(2)=3$,则 $y=f(f(x))$ 在 $x=1$ 处的导数为$\underline{\quad 6\quad}$。

5. 设 $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$,则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=\underline{-\dfrac{11}{72}\sqrt{6}}$。

6. 设 $f(x)=(x-1)^3(x-2)(x-3)$,则方程 $f'(x)=0$ 有$\underline{\quad 3\quad}$个不相等的实数根。

## 二、求下列函数极限(每小题 8 分,共 24 分):

1. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})$;

解: $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$;

解法一: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(e^{(x-1)\ln x}-1)}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}x\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln(1+x-1)}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{-1+1/x}=\lim_{x\to 1}(-2x)=-2$$

解法二: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x(\ln x+1)-1}{-1+1/x}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x(\ln x+1)-1}{x-1}$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{1}=-2$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$。

**解**：注意到当 $x\neq 0$ 时，$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$。

因此，当 $x>0$ 时，$1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$；当 $x<0$ 时，$1-x>x[\frac{1}{x}]\ge 1$。

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$，所以由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}]=1=\lim\limits_{x\to 0^-} x[\frac{1}{x}]$。故 $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$。

三、（本题 8 分）设方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求此隐函数的一阶导数和二阶导数。

**解**：方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 两边对 $x$ 求导，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，解得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2-\cos y}$，继续两边对对 $x$ 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\frac{2}{2-\cos y})\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-2\sin y}{(2-\cos y)^2}\cdot\frac{2}{2-\cos y}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}。$$

**四**、（本题 10 分）已知笛卡尔叶形线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}，其中 a>0 为常数。$$

求由此参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 在 $t=1$ 处的一阶导数和二阶导数。

**解**：$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{6at(1+t^3)-3at^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1+t^3)-3at\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}}=\frac{2t-t^4}{1-2t^3}。$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{2t-t^4}{1-2t^3})\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{(2-4t^3)(1-2t^3)-(2t-t^4)(-6t^2)}{(1-2t^3)^2}\cdot\frac{(1+t^3)^2}{3a(1+t^3)-3at\cdot 3t^2}$$

$$=\frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}。$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}=\frac{2-1}{1-2}=-1，\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=1}=\frac{2\cdot 2^4}{3a(1-2)^3}=-\frac{32}{3a}。$$

**五、**（本题 10 分）数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$。证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限。

**证：**根据题意，有$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n=-(x_n-1)^2+1$。由归纳假设得$0<x_n<1$。

又$x_{n+1}-x_n=x_n-x_n^2=x_n(1-x_n)>0,$ 因此$\{x_n\}$为单调增加数列，且$\dfrac{1}{2}\le x_n\le 1$（单调性也可由以下给出：令$f(x)=-x^2+2x$，$x\in(0,1)$，则$f(x)$在$(0,1)$为单调增加函数，又因为$x_2=\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{2}=x_1$，故$\{x_n\}$为单调增加数列）。

由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。令$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则由极限的保号性，知$\dfrac{1}{2}\le a\le 1$。由$x_{n+1}=2x_n-x_n^2$两边取极限，有$a=-a^2+2a$，解得$a=0$（舍去），$a=1$。因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

**六、**（本题 8 分）已知函数$f(x)$在$x=0$处连续，且满足$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}\right)=2$，

证明: $f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$。

**证：**因为$f(x)$在$x=0$处连续，所以$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

又由$2=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1-\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}}{x}$，得

$$\lim_{x\to0}\left(f(x)-1-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}\right)\cdot x\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to0}x$$

$$=2\cdot0=0。$$

因此，$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)-1-\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}+\left(1+\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to0}\left(f(x)-1-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\right)+1+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=0+1+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot2x}{x}=2。$$

进一步有，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}+\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}\right)+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}=2+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot2-1}{2x}$$

$=2+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}}-1}{2x}=2+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}\cdot2x}{2x}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$。故$f(x)$在$x=0$处可导且$f'(0)=\dfrac{3}{2}$。

**七、**（本题 8 分）设函数 $f(x)=(x^2+x+1)\cos 2x$，求 $f^{(8)}(0)$。

**解：** 首先有，$(\cos 2x)^{(n)}=2^n\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)$。

由莱布尼茨公式，

$$f^{(8)}(x)=C_8^0(\cos 2x)^{(8)}(x^2+x+1)+C_8^1(\cos 2x)^{(7)}(x^2+x+1)'+C_8^2(\cos 2x)^{(6)}(x^2+x+1)''$$

$$=2^8\cos(2x+4\pi)\cdot(x^2+x+1)+8\cdot 2^7\cos(2x+\frac{7}{2}\pi)\cdot(2x+1)+\frac{8\cdot 7}{2}\cdot 2^6\cos(2x+3\pi)\cdot 2$$

$$=2^8[(x^2+x+1)\cos 2x+4(2x+1)\sin 2x-14\cos 2x]$$

所以 $f^{(8)}(0)=2^8(1+0-14)=-13\cdot 2^8=-3328$。

八、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且有 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=-1$。

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$。

**证：** 因为 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=1>0$，$f(2)=-1<0$，所以由零点存在定理，存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(\eta)=0$。

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，知 $\varphi(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且 $\varphi(0)=f(0)=0$，$\varphi(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}f(\eta)=0$。由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,2)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，即有 $f'(\xi)=f(\xi)$。