概率论与数理统计

连续型随机变量的边缘概率密度

主讲人：郑旭玲

信息科学与技术学院

连续型随机变量的边缘概率密度

对连续型随机变量 (X,Y)，

设 X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$

由于

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\right]dx$$

$$f_X(x)=F_X'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

则 (X,Y) 关于 X 的**边缘概率密度**为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

连续型随机变量的边缘概率密度

对连续型随机变量 (X,Y)，

设X和Y的联合概率密度为 $f(x,y)$

则 (X,Y) 关于X的**边缘概率密度**为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

(X,Y) 关于Y的**边缘概率密度**为

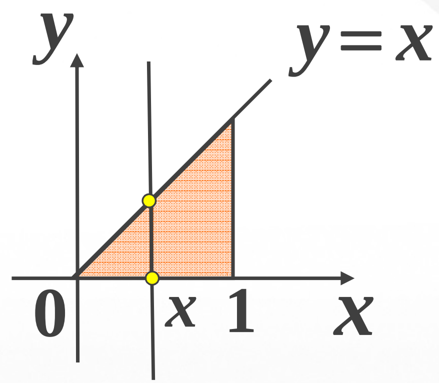
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

连续型随机变量的边缘概率密度

例 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad, & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1)c 的值；(2)两个边缘密度。



解 ：(1) $1=\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x cy(2-x)dy$

$$=\int_0^1 c(2-x)\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^x\right)dx=\frac{c}{2}\int_0^1\left(2x^2-x^3\right)dx$$

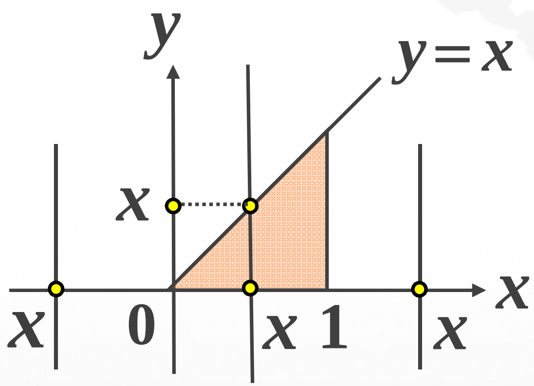
$$=\frac{c}{2}\left[\frac{2x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right]\Bigg|_0^1=5c/24,\qquad \text{故 } c=24/5.$$

连续型随机变量的边缘概率密度

例 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1)c 的值；(2)两个边缘密度。



解：(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

当$x>1$或$x<0$时,$\forall y\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(x,y)=0$,故 $f_X(x)=0$.

当 $0\le x\le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy+\int_{0}^{x} f(x,y)dy+\int_{x}^{+\infty} f(x,y)dy$$

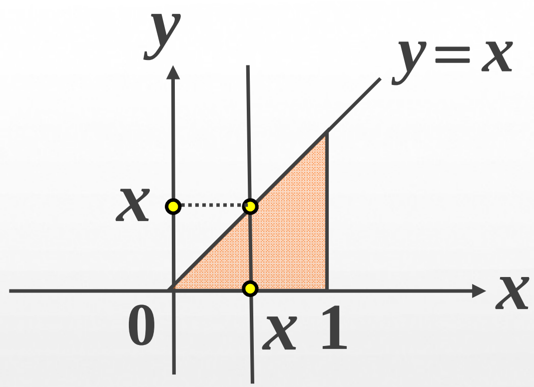
连续型随机变量的边缘概率密度

当 $0\le x\le 1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy+\int_{0}^{x} f(x,y)dy+\int_{x}^{+\infty} f(x,y)dy.$$

$$=\int_0^x \frac{24}{5}y(2-x)dy$$

$$=\frac{12}{5}x^2(2-x),$$



综上，

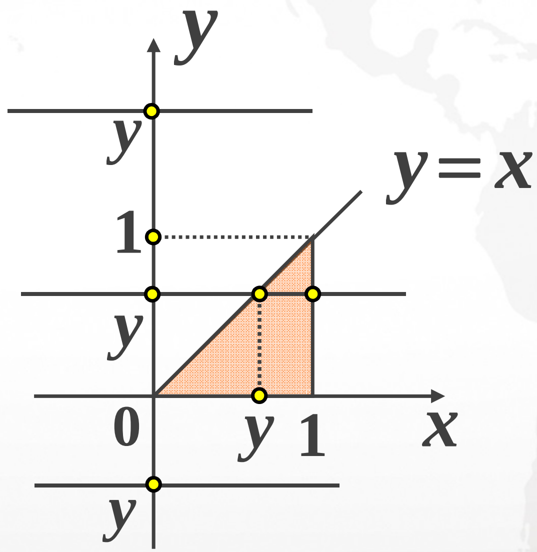
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

连续型随机变量的边缘概率密度

例 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1)c 的值；(2)两个边缘密度。



解：(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

当$y>1$或$y<0$时，对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(x,y)=0$，故 $f_Y(y)=0$.

当$0\le y\le 1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx+\int_{y}^{1} f(x,y)dx+\int_{1}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

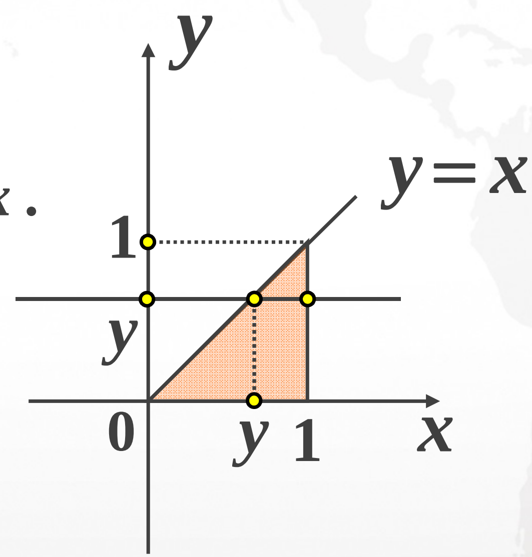
连续型随机变量的边缘概率密度

当$0 \le y \le 1$时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx + \int_{y}^{1} f(x,y)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

$$= \int_{y}^{1} \frac{24}{5} y(2-x)dx$$

$$= \frac{24}{5} y(\frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2}),$$



综上,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{24}{5} y(\frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2}), & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

连续型随机变量的边缘概率密度

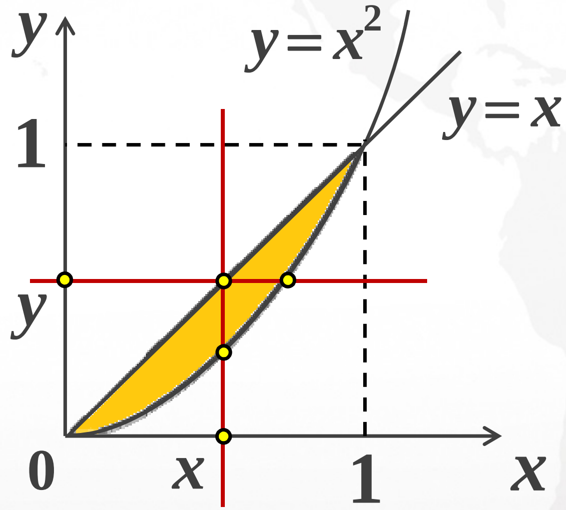
在求连续型随机变量的边缘密度时，往往要求联合密度在某区域上的积分。当联合密度函数是**分段**表示的时候，在计算积分时应特别注意**积分限**。

连续型随机变量的边缘概率密度

例 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求两个边缘密度。



解：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$