极限的计算方法

一、利用极限四则运算法则

对函数做某些恒等变形，然后运用极限四则运算法则进行计算。常用的变形或化简有：分式的约分或通分、分式的分解、分子或分母的有理化，三角函数的恒等变形等

例 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)$；（2018—2019）

解：$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$ （2021—2022）

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+2x}-1-x)(\sqrt{1+2x}+1+x)}{x^2(\sqrt{1+2x}+1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1+2x}+1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

注：以上两题是利用分子有理化进行变形的.

例 3. $\lim\limits_{x\to-1}(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3})$；（2019—2020）

解：$$\lim_{x\to-1}(\frac{1}{1+x}-\frac{3}{1+x^3})=\lim_{x\to-1}(\frac{1}{1+x}-\frac{3}{(1+x)(1-x+x^2)})$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{(1+x)(1-x+x^2)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{1-x+x^2}=-1.$$

注：本题是通过通分，然后进行因式分解变形后，求得极限的.

二、幂指函数极限的计算

幂指函数：$(u(x))^{v(x)}$，其中$u(x)$，$v(x)$是x的函数，不是常数.

幂指函数极限的计算方法：

（1）利用重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}.$

（2）通常是利用 $(u(x))^{v(x)}=\mathrm{e}^{\ln(u(x))^{v(x)}}=\mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))}$，通过计算 $v(x)\ln(u(x))$ 的极限，得到幂指函数的极限.

常见的形式是 $\lim u(x)=1$，$\lim v(x)=\infty$ 的情形.

可以用下列方法计算：

$$\lim(u(x))^{v(x)}=\lim\mathrm{e}^{\ln(u(x))^{v(x)}}=\mathrm{e}^{\lim v(x)\ln(u(x))},$$

因为 $\lim v(x)\ln u(x)=\lim v(x)\ln(1+u(x)-1)=\lim v(x)(u(x)-1)$，只要计算 $\lim v(x)(u(x)-1)$，就可以得到 $\lim(u(x))^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim v(x)(u(x)-1)}$.

例 1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}$；(2021—2022)

解一：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2n})^{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\dfrac{1}{2n})^{-2n}]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$

解二：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{4n\ln(1-\frac{1}{2n})}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}4n\ln(1-\dfrac{1}{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}4n\cdot(-\dfrac{1}{2n})=-2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$；(2017—2018)

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x-1)\cdot\dfrac{1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x\cdot x}=2$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\mathrm{e}^2$.

例 3. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2-x}{x})^{\frac{x}{\sin\pi x}}$；(2019—2020)

解：由于 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2-x}{x}-1)\cdot\dfrac{x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(1-x)}{x\sin\pi(1-x)}=2\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\cdot\pi(1-x)}=\dfrac{2}{\pi}$，

故 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2-x}{x})^{\frac{x}{\sin\pi x}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$.

例 4. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4})^{\frac{1}{x}}$；(2016—2017)

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{2^x-1+3^x-1+4^x-1+5^x-1}{4})^{\frac{1}{x}}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1+3^x-1+4^x-1+5^x-1}{4}\cdot\dfrac{1}{x}$

$$=\frac{1}{4}(\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x})$$

$$=\frac{1}{4}(\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5)=\ln(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)^{\frac{1}{4}}=\ln\sqrt[4]{120},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4})^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt[4]{120}}=\sqrt[4]{120}.$

三、利用夹逼极限准则：

关键在于适当的放缩.

例 1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}})$；（2016—2017）

解：因为 $\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}})<\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=2,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=2,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=2$.

由夹逼极限准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}})=2$.

例 2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}})$；（2017—2018）

解：$\because \dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}$，

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

由夹逼极限准则，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}})=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

例 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$；（2019—2020）

解：因为 $3=\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{2^n+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n}=3\sqrt[n]{2}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}3\sqrt[n]{2}=3$，由夹逼极限准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$.

例 4. $\lim\limits_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]$.　（2021—2022）

解：因为 $x\cdot(\frac{1}{x}-1)<x[\frac{1}{x}]\le x\cdot\frac{1}{x}$，即 $1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1$，由夹逼极限准则知，$\lim\limits_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]=1$.

例 5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})$；

解：因为 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$，即

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})\le\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}).$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$，由夹逼极限准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})=\frac{1}{2}$.

注：分子不能放缩，否则放缩过大.

四、利用“有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小”的性质

例 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x+\sin x}$；（2018—2019）

解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$|\sin x|\le 1$，由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=0\times\frac{1}{1+0}=0.$$

又因为 $|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sin x}\arctan x=0.$$

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$；（2021—2022）

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0} x=0$，而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$.

由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，故 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

五、利用等价无穷小代换

记住常见的等价无穷小代换：当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad (1+x)^{\mu}-1\sim \mu x.$$

例 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2+x^4)+\ln(1+x^2+x^4)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$；（2018—2019）

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2+x^4)+\ln(1+x^2+x^4)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1-x^2+x^4)(1+x^2+x^4)]}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^4+x^8)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x^8}{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}=2\lim_{x\to 0}(1+x^4)=2.$$

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2+x})(\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{1-x})$；（2020-2021）

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2+x})(\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{1-x})=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{1-x}\dfrac{x-1}{x^2+x}(\mathrm{e}^{2x}-1)$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{1-x}\frac{x-1}{x^2+x}\cdot 2x=2\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{1-x}\frac{x-1}{x+1}=-2\mathrm{e}.$$

六、变量替换

利用变量替换将极限转化，例如，令 $x=\varphi(t)$ 或者 $t=\psi(x)$，将 x 的极限转化为求 t 的极限.

注：（1）需要先求出 t 的极限，且极限表达式中的 x 都全部应换成 t；

（2）$x\to\infty$ 的极限可通过倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$ 转化成 $t\to 0$ 的极限.

例 1. $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$；（2020—2021）

解：令 $u=\pi-\arccos x$，$\arccos x=\pi-u$，则 $x=\cos(\pi-u)=-\cos u$，且

$$\lim_{x\to -1^+} u = \lim_{x\to -1^+} (\pi - \arccos x) = 0 .$$

于是，$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(\pi - \arccos x)^2}{1+x} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u^2}{1-\cos u} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u^2}{\frac{1}{2}u^2} = 2.$

例 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+2} - x)$；（2018—2019）

解：令 $x = \dfrac{1}{t}$，则 $t \to 0^+$. 于是，

$$\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+2} - x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(\sqrt{\frac{1}{t^2}+2} - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2t^2} - 1}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}\cdot 2t^2}{t^2} = 1$$

注：这里用到了 $t \to 0$ 时，$(1+2t^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \dfrac{1}{2}\cdot 2t^2$.

七、利用单调有界准则

常用归纳法讨论数列的单调性和有界性，然后通过递推式两边求极限，解方程，可求出极限.

单调性的判定：（1）$x_{n+1} - x_n$ 的符号；（2）如果 $x_n > 0$ 可通过 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 大于等于 1 或小于等于 1 来判定；

有界性判定：可以先假设极限存在，求出极限后，对单调数列来说，极限值就是它的一个界.

例 1. 证明：数列 $x_1 = 2$，$x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$ 极限存在，并求出极限. （2016-2017）

证明：首先，用归纳法证明：$0 < x_n \le 3,\ n = 1, 2, \cdots$

事实上，当 $n = 1$ 时，结论显然成立.

假设结论当 $n = k$ 时成立，即 $0 < x_k \le 3$.

当 $n = k+1$ 时，$0 < x_{k+1} = \sqrt{3x_k} \le \sqrt{3\cdot 3} = 3$，结论也成立.

因此，数列 $\{x_n\}$ 有界.

又因为 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\dfrac{3}{x_n}} \ge 1$，即 $x_{n+1} \ge x_n$，$n = 1, 2, \cdots$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由于单调有界数列必有极限，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

由$x_{n+1}=\sqrt{3x_n}$两边求极限，有$A=\sqrt{3A}$，故$A=3$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

例 2. 设$-1<x_1<0$，$x_{n+1}=x_n^2+2x_n$，$n=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.（2017—2018学年）

证明：首先，用归纳法证明：$-1<x_n<0, n=1,2,\cdots$.

由已知条件，当$n=1$时，结论成立.

假设结论对$n=k$时，结论成立，即$-1<x_k<0$.

当$n=k+1$时，$x_{k+1}=x_k^2+2x_k=x_k(x_k+2)<0$，且

$$x_{k+1}+1=x_k^2+2x_k+1=(x_n+1)^2>0,$$

即$-1<x_{k+1}<0$.

故数列$\{x_n\}$有界.

又$x_{n+1}-x_n=x_n^2+x_n=x_n(x_n+1)<0$，即数列$\{x_n\}$单调减少.

由于单调有界数列必有极限，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

由$x_{n+1}=x_n^2+2x_n$两边求极限，得$A=A^2+2A \Rightarrow A=0$或$A=-1$.

因为$\{x_n\}$单调减少，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不可能为 0，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1$.

例 3. 设数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求其极限值.（2018—2019）

证明：首先，用归纳法证明：$0<x_n<2,\ n=1,2,\cdots$

事实上，当$n=1$时，结论显然成立.

假设结论当$n=k$时成立，即$0<x_k<2$.

当$n=k+1$时，$0<x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，结论也成立.

因此，数列$\{x_n\}$有界.

接下来，用归纳法证明数列$\{x_n\}$单调增加，即$x_{n+1}\ge x_n$，$n=1,2,\cdots$.

当 $n=1$ 时，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=x_1$，结论成立.

设结论对 $n=k-1$ 时也成立，即 $x_k \ge x_{k-1}$，则当 $n=k$ 时，

$$x_{k+1}-x_k=\sqrt{2+x_k}-\sqrt{2+x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-1}}{\sqrt{2+x_k}+\sqrt{2+x_{k-1}}}\ge 0,$$

即 $x_{k+1}\ge x_k$，结论对 $n=k$ 时也成立.

因此，数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由于单调有界数列必有极限，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 两边取极限，得 $A=\sqrt{2+A}$. 解得 $A=2$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

例 4. 证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ 存在，且极限值大于 1 但不超过 2.（2020—2021）

证明：记 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$，显然数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的.

又因为

$$\begin{aligned}0<x_n&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\\&=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2,\end{aligned}$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界.

由于单调有界数列必有极限，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ 存在.

由于 $0<x_n<2,\ n=1,2,\cdots$，由极限的保号性，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ 不会超过 2.

例 5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其极限值.（2021—2022）

证明一：因为 $x_1<1$，当 $n>1$ 时，$x_n-1=-x_{n-1}^2+2x_{n-1}-1=-(x_{n-1}-1)^2\le 0$.

故 $x_n\le 1,\ n=1,2,\cdots$.

由 $x_1>0$，如果 $x_n>0$，由 $0<x_n\le 1$，有 $x_{n+1}=x_n(-x_n+2)>0$，即 $0<x_n\le 1,\ n=1,2,\cdots$.

当 $n=1,2,\cdots$ 时,

$$x_{n+1}-x_n=-x_n^2+x_n=x_n(1-x_n)\ge 0,$$

故数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由于单调有界数列必有极限，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$ 两边求极限可得 $A=-A^2+2A$，解得 $A=0$ 或 $A=1$.

由于 $x_n\ge\dfrac{1}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则 $A\ne 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

证法二：由 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$ 可得

$$x_{n+1}-1=-x_n^2+2x_n-1=-(x_n-1)^2.$$

于是，$\quad x_n-1=-(x_{n-1}-1)^2=-(x_{n-2}-1)^4=\cdots=-(x_1-1)^{2^{n-1}}$，

即 $x_n=1-\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}})=1$.

八、根据参数不同求极限

例 1. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+xe^{tx}}$ 的表达式.（2017—2018）

解：如果 $x>0$，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+xe^{tx}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{tx}(xe^{-tx}+1)}{e^{tx}(e^{-tx}+x)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{xe^{-tx}+1}{e^{-tx}+x}=\dfrac{0+1}{0+x}=\dfrac{1}{x}$；

如果 $x=0$，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{0+1}{1+0}=\lim\limits_{t\to+\infty}1=1$；

如果 $x<0$，则 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+xe^{tx}}=\dfrac{x+0}{1+0}=x$.

$$故\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 1, & x=0.\\ x, & x<0\end{cases}$$

注： $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tx}=\begin{cases}+\infty, & x>0\\ 1, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$，$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-tx}=\begin{cases}0 & x>0\\ 1, & x=0\\ +\infty & x<0\end{cases}$.

九、利用洛必达法则求极限

如果 $\lim\varphi(x)=0$，$\lim\psi(x)=0$，则

例 1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x^3)^{\frac{1}{\tan x-x}}$；（2018—2019）

解：$\lim\limits_{x\to0}(1+x^3)^{\frac{1}{\tan x-x}}=\lim\limits_{x\to0} e^{\ln(1+x^3)^{\frac{1}{\tan x-x}}}=\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\ln(1+x^3)}{\tan x-x}}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\tan x-x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{\sec^2 x-1}$$（洛必达法则）

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{\tan^2 x}=3,$$

故 $\lim\limits_{x\to0}(1+x^3)^{\frac{1}{\tan x-x}}=e^3$.

例 2. $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$；（2021—2022）

解：$\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\tan x}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$（洛必达法则）

$$=\frac{1}{6}.$$

例 3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$；（2021—2022）

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x(1+\ln x)-1}{-1+\dfrac{1}{x}}$（洛必达法则）

$$=\lim_{x\to1}x\cdot\frac{x^x(1+\ln x)-1}{-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x^x(1+\ln x)-1}{-x+1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)^2+x^x\cdot\frac{1}{x}}{-1}=-2.$$

注： $(x^x)'=x^x(1+\ln x)$.

九、含幂指函数相减或指数函数相减的极限

如果 $\lim\varphi(x)=0$， $\lim\psi(x)=0$，则

$$\lim\frac{e^{\varphi(x)}-e^{\psi(x)}}{\varphi(x)-\psi(x)}=\lim e^{\psi(x)}\frac{e^{\varphi(x)-\psi(x)}-1}{\varphi(x)-\psi(x)}=\lim e^{\psi(x)}\cdot\lim\frac{e^{\varphi(x)-\psi(x)}-1}{\varphi(x)-\psi(x)}=1,$$

即 $e^{\varphi(x)}-e^{\psi(x)}\sim\varphi(x)-\psi(x)$.

注： 这里的极限对六种极限情形都成立.

例 1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x^{\frac{2}{3}})(e^{\frac{1}{x^2}}-e^{\frac{1}{x^2+x+1}})$；（2016—2017）

解：$$\lim_{x\to\infty}(x^2+x^{\frac{2}{3}})(e^{\frac{1}{x^2}}-e^{\frac{1}{x^2+x+1}})=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2+x+1}}(x^2+x^{\frac{2}{3}})(e^{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1}}-1)$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2+x+1}}\lim_{x\to\infty}(x^2+x^{\frac{2}{3}})\cdot(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1})$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x^2+x^{\frac{2}{3}})\cdot\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(1+x^{-\frac{4}{3}})\cdot\frac{1+\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$$

$$=0\times 1=0.$$

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-\sqrt{1+x^4}}$；（2019—2020）

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-\sqrt{1+x^4}}=\lim_{x\to 0}e^x\frac{e^{\tan x-x}-1}{\sqrt{1+x^2\sin x}-\sqrt{1+x^4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^x\frac{\tan x-x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-\sqrt{1+x^4}}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{x}\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-x)(\sqrt{1+x^{2}\sin x}+\sqrt{1+x^{4}})}{(\sqrt{1+x^{2}\sin x})^{2}-(\sqrt{1+x^{4}})^{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}(\sqrt{1+x^{2}\sin x}+\sqrt{1+x^{4}})\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^{2}\sin x-x^{4}}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^{2}\sin x(1-\frac{x^{2}}{\sin x})}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^{2}\sin x}\lim_{x\to0}\frac{1}{1-\frac{x^{2}}{\sin x}}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^{3}}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sec^{2}x-1}{3x^{2}}$$ （洛必达法则）

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan^{2}x}{3x^{2}}=\frac{2}{3}.$$

例 3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x}-x}{1-x+\ln x}$；（2021—2022）

解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x}-x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}x\frac{x^{x-1}-1}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{(x-1)\ln x}-1}{1-x+\ln x}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\ln(1+x-1)}{1-x+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{2}}{1-x+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}(-2x)=-2.$$

十一、利用泰勒公式求极限

（1）在求 $x\to x_0$ 的极限时，将分子分母都展开成 $a(x-x_0)^{k}+o((x-x_0)^{k})$ 的形式；

（2）在求 $x\to\infty$ 的极限时，可以通过倒代换 $x=\frac{1}{t}$，转化成 $t\to0$ 的极限.

例 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-x)(x^2+\ln(1-x^2))}{x^3(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x)}$；（2016—2017）

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-x)(x^2+\ln(1-x^2))}{x^3(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\ln(1-x^2)}{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}$

因为 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2!}(-\dfrac{x^2}{2})^2+o(x^4)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{(-x^2)^2}{2}+o(x^4)=-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\ ,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\ln(1-x^2)}{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x^2-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}-(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24})+o(x^2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}{\dfrac{x^4}{12}+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}{\dfrac{1}{12}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{-\dfrac{1}{2}+0}{\dfrac{1}{12}+0}=-6\ .$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$

$$=\frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{6},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-x)(x^2+\ln(1-x^2))}{x^3(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x)}=(-\dfrac{1}{6})\cdot(-6)=1.$

例 2. $\lim\limits_{x\to\infty}[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)-\sqrt{1+x^4}]$；（2016—2017）

解：令 $x=\dfrac{1}{t}$，则

$$\lim_{x\to\infty}[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)-\sqrt{1+x^4}]=\lim_{t\to 0}[\mathrm{e}^{t}(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1)-\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{t}(1-t+t^2)-\sqrt{1+t^4}}{t^2}\ .$$

因为$\mathrm{e}^{t}=1+t+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)$，$\sqrt{1+t^4}=1+\dfrac{1}{2}t^4+o(t^4)=1+o(t^2)$，则

$$\mathrm{e}^{t}(1-t+t^2)-\sqrt{1+t^4}=(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2))(1-t+t^2)-1$$

$$=1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)-1=\frac{t^2}{2}+o(t^2).$$ （舍去高于 2 次的项，并入$o(t^2)$）

故 $$\lim_{x\to\infty}[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)-\sqrt{1+x^4}]=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^2}=\lim_{t\to 0}(\frac{1}{2}+\frac{o(t^2)}{t^2})=\frac{1}{2}.$$

例 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{3}x^2-\sqrt[3]{1+x^2}}{\mathrm{e}^{-x^2}-1+x\sin x}$；（2017—2018）

解：因为

$$\mathrm{e}^{-x^2}=1-x^2+\frac{1}{2!}(-x^2)^2+o(x^4),\quad x\sin x=x(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))=x^2-\frac{1}{6}x^4+o(x^4),$$

则 $$\mathrm{e}^{-x^2}-1+x\sin x=-x^2+\frac{x^4}{2}+x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)=\frac{x^4}{3}+o(x^4).$$

由 $$\sqrt[3]{1+x^2}=1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(x^2)^2+o(x^4)=1+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4),$$

可得 $$1+\frac{1}{3}x^2-\sqrt[3]{1+x^2}=\frac{1}{9}x^4+o(x^4).$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}x^2-\sqrt[3]{1+x^2}}{\mathrm{e}^{-x^2}-1+x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{9}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{9}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{\frac{1}{9}+0}{\frac{1}{3}+0}=\frac{1}{3}.$$