

# 概率论与数理统计

## $t$ 分布、 $F$ 分布

主讲人：郑旭玲



信息科学与技术学院



01

$t$  分布

---

## $t$ 分布

---

### 定义

设  $X \sim N(0,1)$  ,  $Y \sim \chi^2(n)$  , 且  $X$  与  $Y$  相互独立 ,  
则称变量

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

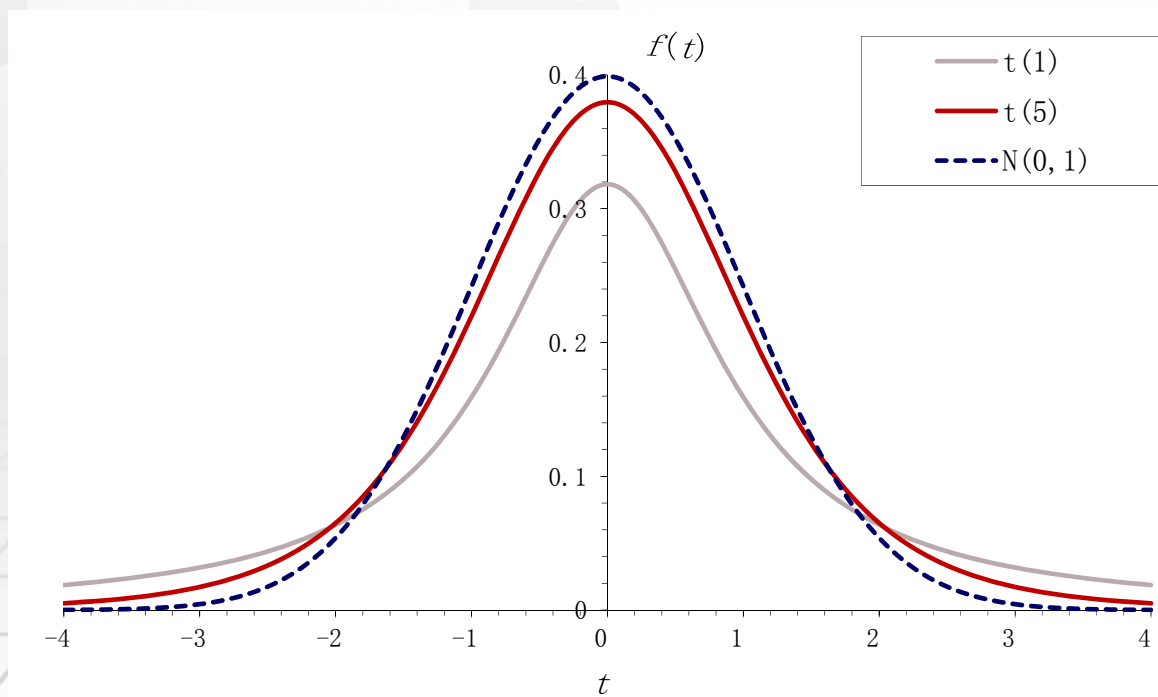
所服从的分布为自由度为  $n$  的  $t$  分布。记为  $t \sim t(n)$  .

$t$ 分布又称为学生氏分布 , 由英国统计学家 *William Gosset* (1876 ~ 1937) 于1908年以笔名 *student* 首次发表。

## $t$ 分布

$t(n)$  分布的概率密度函数为：

$$h(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad -\infty < t < \infty$$



## $t$ 分布的性质

1.  $t$  分布的密度函数关于  $t = 0$  对称。

当  $n$  充分大时，由  $\Gamma$  函数的性质有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

即当  $n$  足够大时， $t \overset{\text{近似}}{\sim} N(0, 1)$ 。

当  $n=1$  时， $h(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ ，即柯西分布。

2. 具有自由度为  $n$  的  $t$  分布  $t \sim t(n)$ ，其数学期望与方差为：

$$E(t) = 0 \quad (n > 1), \quad D(t) = n/(n-2) \quad (n > 2)$$

## $t$ 分布的性质

### 3. $t$ 分布的分位点

对于给定的  $\alpha (0 < \alpha < 1)$ , 称满足条件

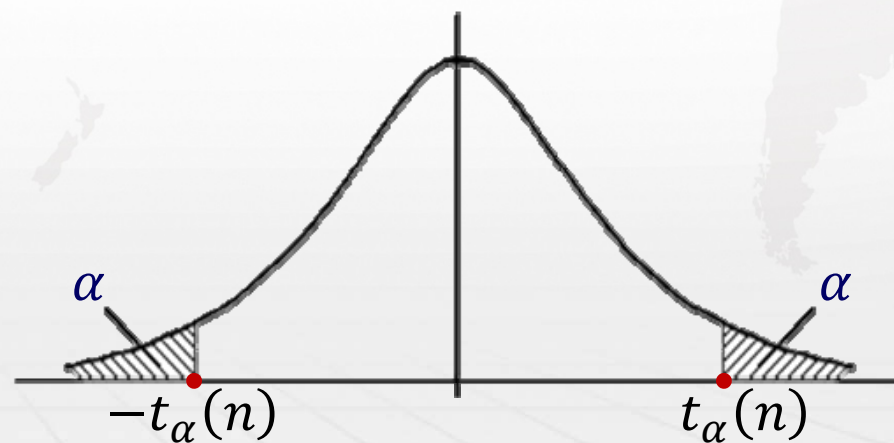
$$p\{t > t_{\alpha}(n)\} = \int_{t_{\alpha}(n)}^{\infty} h(t)dt = \alpha$$

的点  $t_{\alpha}(n)$  为  $t(n)$  分布的上  $\alpha$  分位点。



$t$  分布的上  $\alpha$  分位点的性质：

$$t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$$





## $t$ 分布的性质

$t_{\alpha}(n)$ 可查t分布表，

例如  $t_{0.025}(15)$

$=2.1315$

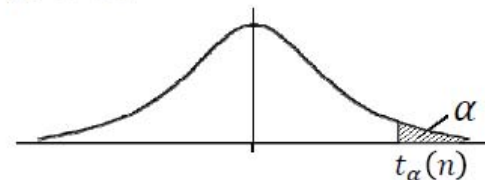
又如  $t_{0.9}(10)$

$=-t_{0.1}(10)$

$=-1.3722$

附表 4  $t$  分布表

$$P\{t(n) > t_{\alpha}(n)\} = \alpha$$



$\alpha \backslash n$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.376	1.963	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	1.061	1.386	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.978	1.250	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.941	1.190	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.920	1.156	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.906	1.134	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.896	1.119	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.889	1.108	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.883	1.100	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.879	1.093	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.876	1.088	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.873	1.083	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.870	1.079	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.868	1.076	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.866	1.074	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.865	1.071	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.863	1.069	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.862	1.067	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.861	1.066	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.860	1.064	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453

## $t$ 分布的性质

$t_{\alpha}(n)$  可查  $t$  分布表,

例如  $t_{0.025}(15)$

$= 2.1315$

又如  $t_{0.9}(10)$

$= -t_{0.1}(10)$

$= -1.3722$

附表 2 标准正态分布表

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$



$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

当  $n > 45$  时, 可用标准正态分布来近似, 即  $t_{\alpha}(n) \approx z_{\alpha}$

例如  $t_{0.25}(50) \approx z_{0.25} \approx 0.675$

即  $\Phi(?) = 0.75 \Rightarrow x \approx 0.675$





02

*F* 分 布

---

## $F$ 分布

### 定义

设  $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$ ,  $U$  与  $V$  相互独立,

则称随机变量  $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$  服从自由度为  $n_1$  及  $n_2$  的  $F$  分布,

$n_1$  称为第一自由度,  $n_2$  称为第二自由度, 记作  $F \sim F(n_1, n_2)$ 。

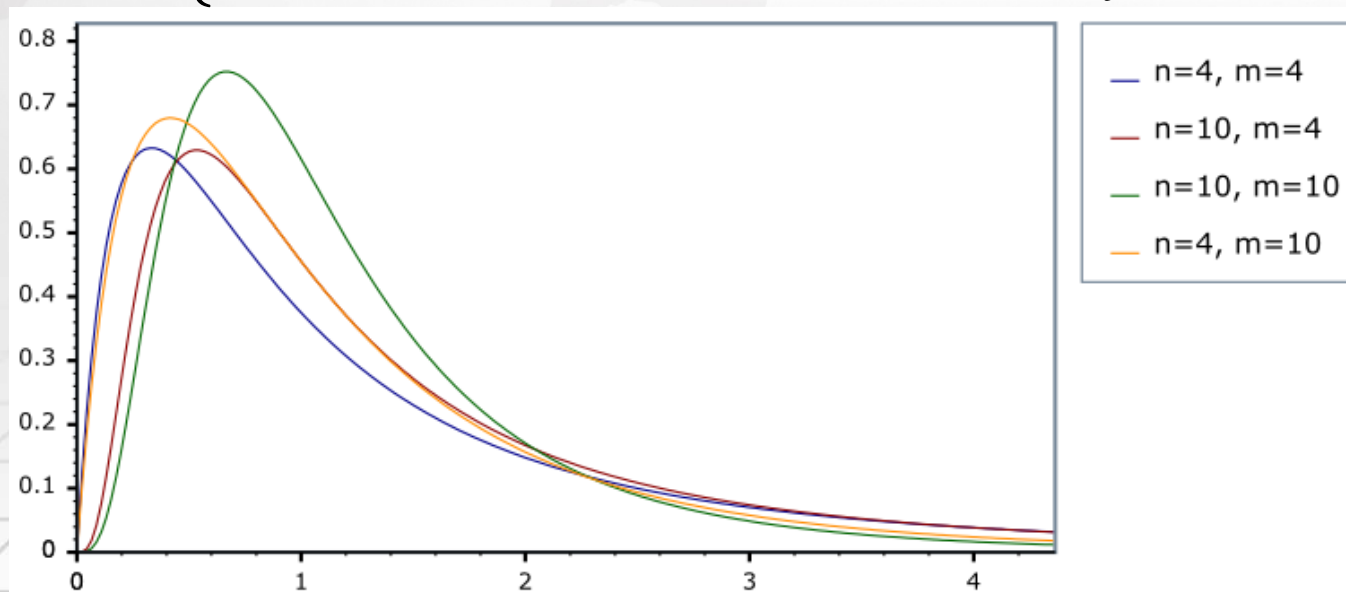
$F$  分布由英国统计学家 R. A. Fisher (1890 ~ 1962) 于1924年提出。

由定义可见,  $\frac{1}{F} = \frac{V/n_2}{U/n_1} \sim F(n_2, n_1)$

## $F$ 分布

若  $F \sim F(n_1, n_2)$ ,  $F$  的概率密度为

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} (y)^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} y\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$



## $F$ 分布的性质

1.  $\frac{1}{F} = \frac{V/n_2}{U/n_1} \sim F(n_2, n_1)$

2.  $F$  分布的数学期望为：

$$E(F) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad \text{若 } n_2 > 2$$

即它的数学期望并不依赖于第一自由度  $n_1$ 。

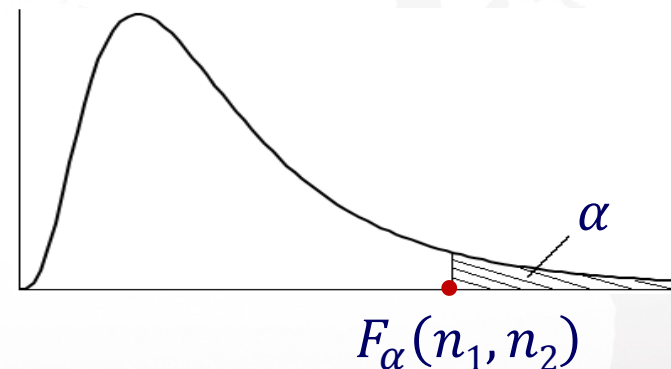
## $F$ 分布的性质

### 2. $F$ 分布的分位点

对于给定的  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ , 称满足条件

$$p\{F > F_{\alpha}(n_1, n_2)\} = \int_{F_{\alpha}(n_1, n_2)}^{\infty} \psi(y) dy = \alpha$$

的点  $F_{\alpha}(n_1, n_2)$  为  $F(n_1, n_2)$  分布的上  $\alpha$  分位点。



**$F$  分布的上  $\alpha$  分位点的性质：**  $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$

$F$  分布的上  $\alpha$  分位点可查表求得。

$$\text{例：} F_{0.95}(12, 9) = \frac{1}{F_{0.05}(9, 12)} = \frac{1}{2.80} = 0.357$$



## 例题

例

设 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 是来自正态总体  $N(0, 2^2)$  的简单随机样本，  
下列统计量服从什么分布？

$$(1) \frac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}} \quad ; \quad (2) (X_1^2 + X_2^2) / (X_3^2 + X_4^2)$$

解：(1)  $\because \frac{X_i}{2} \sim N(0, 1), i = 1, 2, 3, 4, \quad \therefore (\frac{X_2}{2})^2 + (\frac{X_3}{2})^2 + (\frac{X_4}{2})^2 \sim \chi^2(3)$

$$\text{故 } \frac{\frac{X_1}{2}}{\sqrt{\{(\frac{X_2}{2})^2 + (\frac{X_3}{2})^2 + (\frac{X_4}{2})^2\} / 3}} \sim t(3)$$

## 例题

例

设 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 是来自正态总体  $N(0, 2^2)$  的简单随机样本，  
下列统计量服从什么分布？

$$(1) \frac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}} \quad ; \quad (2) (X_1^2 + X_2^2) / (X_3^2 + X_4^2)$$

解：(2)  $\because (\frac{X_1}{2})^2 + (\frac{X_2}{2})^2 \sim \chi^2(2), \quad (\frac{X_3}{2})^2 + (\frac{X_4}{2})^2 \sim \chi^2(2)$

$$\therefore \frac{\{(\frac{X_1}{2})^2 + (\frac{X_2}{2})^2\} / 2}{\{(\frac{X_3}{2})^2 + (\frac{X_4}{2})^2\} / 2} \sim F(2, 2)$$

## 例题

例

设随机变量  $X \sim t(n) (n > 1)$ ,  $Y = \frac{1}{X^2}$ ,

问  $Y$  服从什么分布？

解：由  $t$  分布的定义可知， $X = \frac{A}{\sqrt{B/n}} \sim t(n)$ ,

其中  $A \sim N(0,1)$ ,  $B \sim \chi^2(n)$  且  $A$  与  $B$  相互独立

又  $A^2 \sim \chi^2(1)$ ,

故  $Y = \frac{1}{X^2} = \frac{B/n}{A^2} \sim F(n,1)$



## 小结

---

  $t$  分布的定义、性质及上 $\alpha$ 分位点

  $F$  分布的定义、性质及上 $\alpha$ 分位点

The background of the slide features a light gray world map at the top and a perspective grid at the bottom. A central red horizontal band contains a darker red world map and the text.

**谢 谢 大 家**