第一章

电路模型和电路定律

学习要求

1. 了解电路模型的概念和电路的基本变量。
2. 理解电压、电流的参考方向与实际方向的关系，电压与电流的关联参考方向的概念。
3. 掌握功率的计算、功率的吸收与发出。
4. 掌握电阻、电容、电感、独立电源和受控源的定义及伏安关系。
5. 掌握基尔霍夫定律：KCL 和 KVL。

知识网络图

- 电路模型和电路定律
  - 电路和电路模型
  - 电流和电压的参考方向
    - 关联
    - 非关联
  - 电功率和能量
  - 电路元件
    - 电阻元件
    - 电容元件
    - 电感元件
  - 电压源和电流源
    - 独立电源
    - 受控电源
  - 基尔霍夫定律
    - KCL
    - KVL

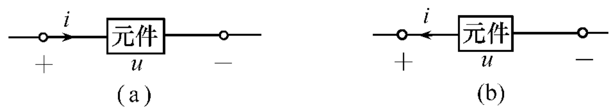
课后习题全解

○ 1－1　**说明题 1－1 图(a)、(b) 中：**

(1)u、i **的参考方向是否关联？**

(2)u、i **乘积表示什么功率？**

(3) **如果在题 1－1 图(a) 中** $u>0$，$i<0$；**图(b) 中** $u>0$，$i>0$，**元件实际发出还是吸收功率？**



题 1－1 图

解　(1) **当流过元件的电流的参考方向，从该元件的标示电压正极性的一端指向负极性的一端，即电流的参考方向与元件两端电压降落的方向一致，称电压和电流的参考方向关联，所以**(a) **图中** u、i **的参考方向是关联的**；(b) **图中** u、i **的参考方向是非关联的。**

(2) **当取元件的** u、i **参考方向为关联参考方向时，定义** $p=ui$ **为元件吸收的功率；当取元件的** u、i **参考方向为非关联时，定义** $p=ui$ **为元件发出的功率。所以**(a) **图中的** ui **表示元件吸收的功率**；(b) **图中的** ui **表示元件发出的功率。**

(3) **在电压、电流参考方向关联的条件下，代入** u、i **数值，经计算，若** $p=ui>0$，**表示元件实际吸收了功率；若** $p<0$，**表示元件吸收负功率，实际是发出功率。**(a) **图中，若** $u>0$，$i<0$，**则** $p=ui<0$，**表示元件吸收了负功率，实际发出功率。在电压、电流参考方向非关联的条件下，代入** u，i **数值，经计算，若** $p=ui>0$，**为正值，表示元件实际是发出功率；若** $p<0$，**为负值，表示元件发出负功率，实际是吸收功率。所以**(b) **图中，当** $u>0$，$i>0$，**则** $p=ui>0$，**表示元件实际发出功率。**

○1－2　**若某元件端子上的电压和电流取关联参考方向，而** $u=170\cos(100\pi t)\text{V}$，$i=7\sin(100\pi t)\text{A}$。**求：**

(1) **该元件吸收功率的最大值；**

(2) **该元件发出功率的最大值。**

解

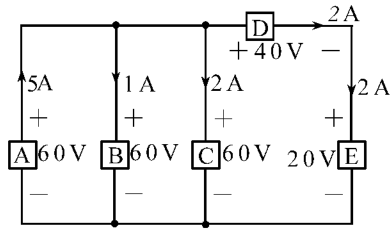
$$
\begin{aligned}
p(t) &= u(t)i(t)\\
&= 170\cos(100\pi t)\times 7\sin(100\pi t)\\
&= 595\sin(200\pi t)\ \text{W}
\end{aligned}
$$

(1) **当** $\sin(200\pi t)>0$ **时**，$p(t)>0$，**元件实际吸收功率；当** $\sin(200\pi t)=1$ **时，元件吸收最大功率：**

$$p_{\max} = 595\ \mathrm{W}$$

(2) 当 $\sin(200\pi t) < 0$ 时，$p(t) < 0$，元件实际发出功率；当 $\sin(200\pi t) = -1$ 时，元件发出最大功率：
$$p_{\max} = 595\ \mathrm{W}$$

○ 1－3　试校核题 1－3 图中电路所得解答是否满足功率平衡。（提示：求解电路以后，校核所得结果的方法之一是核对电路中所有元件的功率平衡，即元件发出的总功率应等于其它元件吸收的总功率）。



题 1－3 图

解　由题 1－3 图可知，元件 A 的电压、电流为非关联参考方向，其余元件的电压、电流均为关联参考方向。所以各元件的功率分别为：

$p_{\mathrm{A}} = 60 \times (-5) = -300\ \mathrm{W} < 0$，为发出功率

$p_{\mathrm{B}} = 60 \times 1 = 60\ \mathrm{W} > 0$，为吸收功率

$p_{\mathrm{C}} = 60 \times 2 = 120\ \mathrm{W} > 0$，为吸收功率

$p_{\mathrm{D}} = 40 \times 2 = 80\ \mathrm{W} > 0$，为吸收功率

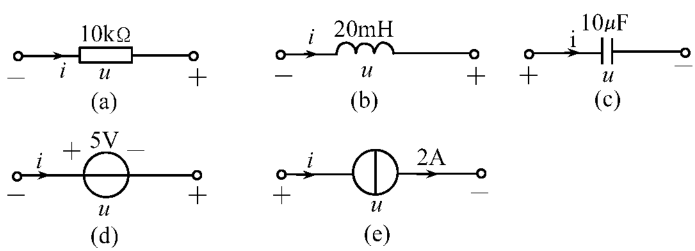
$p_{\mathrm{E}} = 20 \times 2 = 40\ \mathrm{W} > 0$，为吸收功率

电路吸收的总功率为

$$p = p_{\mathrm{B}} + p_{\mathrm{C}} + p_{\mathrm{D}} + p_{\mathrm{E}} = 60 + 120 + 80 + 40 = 300\ \mathrm{W}$$

即，元件 A 发出的总功率等于其余元件吸收的总功率，满足功率平衡。

○ 1－4　在指定的电压 u 和电流 i 参考方向下，写出各元件 u 和 i 的约束方程（元件的组成关系）。



题 1－4 图

解　(a) 图为线性电阻元件，其电压、电流关系满足欧姆定律。(a) 图电阻元件 u 和 i 的约束方程为：

$$u = -Ri = -10 \times 10^{3} i$$

(b) 图为线性电感元件。(b) 图电感元件 u 和 i 的约束方程为：

$$u = -20 \times 10^{-3} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

(c) 图为线性电容元件。(c) 图电容元件 u 和 i 的约束方程为：

$$i = 10\times10^{-6}\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 10^{-5}\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

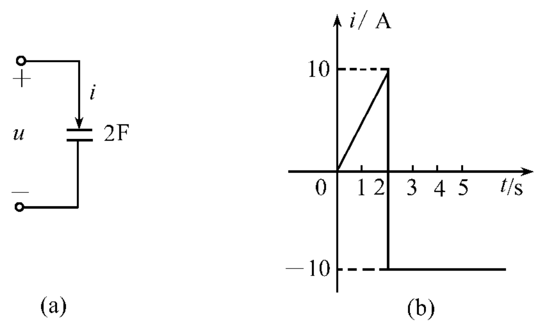
(d) 图是理想电压源。(d) 图的约束方程为：

$$u = -5\mathrm{V}$$

(e) 图是理想电流源。(e) 图的约束方程为：

$$i = 2\mathrm{A}$$

◎ 1－5　题 1－5 图(a) 电容中电流 i 的波形如题 1－5 图(b) 所示，现已知 $u(0)=0$，试求 $t=1\mathrm{s}$，$t=2\mathrm{s}$ 和 $t=4\mathrm{s}$ 时的电容电压 u。



题 1－5 图

分析　电容两端电压、电流的关系为 $i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$，$u(t)=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$，根据公式求解即可。

解　已知电容的电流 $i(t)$，求电压 $u(t)$ 时，有

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi = u(t_0)-\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

式中，$u(t_0)$ 为电容电压的初始值。

本题中电容电流 $i(t)$ 的函数表示式为

$$i(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 5t & 0<t\leqslant 2\mathrm{s}\\ -10 & t>2\mathrm{s}\end{cases}$$

根据 u，i 积分关系，有

$t=1\mathrm{s}$ 时，

$$u(1)=u(0)+\frac{1}{C}\int_0^1 i(t)\mathrm{d}t = 0+\frac{1}{2}\int_0^1 5t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = 1.25\mathrm{V}$$

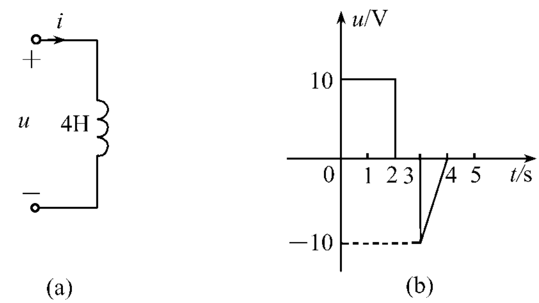
$t=2\mathrm{s}$ 时，

$$u(2) = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^2 i(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \frac{1}{2}\int_0^2 5t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times (\frac{5}{2}t^2)\Big|_0^2 = 5\mathrm{V}$$

$t = 4\mathrm{s}$ 时，

$$u(4) = u(2) + \frac{1}{C}\int_2^4 i(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 5 + \frac{1}{2}\int_2^4 (-10)\,\mathrm{d}t = 5 + \frac{1}{2} \times (-10t)\Big|_2^4 = -5\mathrm{V}$$

○ 1－6　题 1－6 图(a) 中 $L = 4\mathrm{H}$，且 $i(0) = 0$，电压的波形如题 1－6 图(b) 所示。试求当 $t = 1\mathrm{s}$，$t = 2\mathrm{s}$，$t = 3\mathrm{s}$ 和 $t = 4\mathrm{s}$ 时的电感电流 i。



题 1－6 图

解　电感元件 u，i 关系的积分形式为

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

本题中电感电压的函数表示式为

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ 10 & 0 < t \leqslant 2\mathrm{s} \\ 0 & 2 < t \leqslant 3\mathrm{s} \\ 10t - 40 & 3 < t \leqslant 4\mathrm{s} \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

应用 u，i 积分关系式，有

$t = 1\mathrm{s}$ 时，

$$i(1) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \frac{1}{4}\int_0^1 10\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} \times (10t)\Big|_0^1 = 2.5\mathrm{A}$$

$t = 2\mathrm{s}$ 时，

$$i(2)=i(1)+\frac{1}{L}\int_{1}^{2}u(t)\mathrm{d}t$$
$$=2.5+\frac{1}{4}\int_{1}^{2}10\mathrm{d}t=2.5+\frac{1}{4}\times(10t)\Big|_{1}^{2}=5\mathrm{A}$$

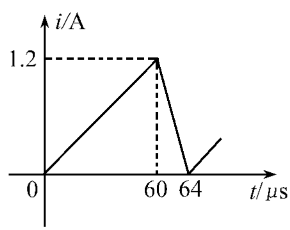
$t=3\mathrm{s}$ 时，

$$i(3)=i(2)+\frac{1}{L}\int_{2}^{3}u(t)\mathrm{d}t$$
$$=5+\frac{1}{4}\int_{2}^{3}0\mathrm{d}t=5\mathrm{A}$$

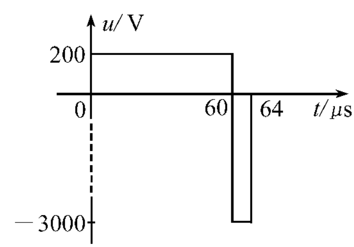
$t=4\mathrm{s}$ 时，

$$i(4)=i(3)+\frac{1}{L}\int_{3}^{4}u(t)\mathrm{d}t$$
$$=5+\frac{1}{4}\int_{3}^{4}(10t-40)\mathrm{d}t=5+\frac{1}{4}\times(5t^2-40t)\Big|_{3}^{4}=3.75\mathrm{A}$$

◎1－7　**若已知显像管行偏转圈中的周期性扫描电流如题1－7图所示，现已知线圈电感为0.01H，电阻略而不计，试求电感线圈所加电压的波形。**



题1－7图



题解1－7图

分析　根据图示可写出 $i(t)$ 的表达式，由 $u_C(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ 即可求解。

解　电流 $i(t)$ 的函数表示式为

$$i(t)=\begin{cases}\dfrac{1.2}{60}\times10^6t & 0\leqslant t\leqslant 60\mu\mathrm{s}\\ 3\times10^5(64\times10^{-6}-t) & 60<t\leqslant 64\mu\mathrm{s}\end{cases}$$

根据电感元件 u,i 的微分关系，得电压的函数表示式为

$$u(t)=0.01\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}2\times10^2 & 0\leqslant t\leqslant 60\mu\mathrm{s}\\ -3\times10^3 & 60<t\leqslant 64\mu\mathrm{s}\end{cases}$$

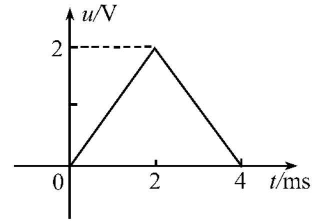
$u(t)$ 的波形如题解1－7图，说明电感的电压可以是时间的间断函数。

○1－8　$2\mu\mathrm{F}$ 的电容上所加电压 u 的波形如题1－8图所示。求：

(1) 电容电流 i；

（2）电容电荷 q；

（3）电容吸收的功率 p。



题 1－8 图

解　（1）电压 $u(t)$ 的函数表示式为

$$u(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 10^3 t & 0<t\leqslant 2\text{ms}\\ 4-10^3 t & 2<t\leqslant 4\text{ms}\\ 0 & t>4\text{ms}\end{cases}$$

根据电容元件 u,i 的微分关系，得电流 $i(t)$ 的函数表示式为：

$$i(t)=2\times 10^{-6}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 2\times 10^{-3} & 0<t\leqslant 2\text{ms}\\ -2\times 10^{-3} & 2<t\leqslant 4\text{ms}\\ 0 & t>4\text{ms}\end{cases}$$

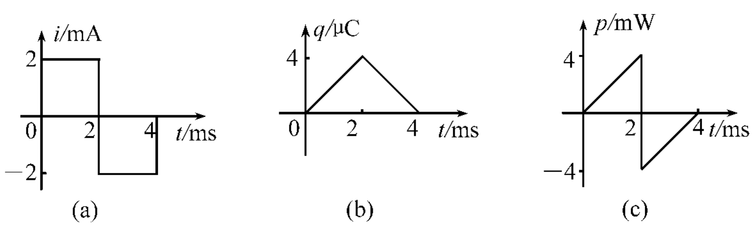
（2）因为 $C=\dfrac{q}{u}$，所以有

$$q(t)=Cu(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 2\times 10^{-3}t & 0<t\leqslant 2\text{ms}\\ 2\times 10^{-6}(4-10^3 t) & 2<t\leqslant 4\text{ms}\\ 0 & t>4\text{ms}\end{cases}$$

（3）在电容元件上电压、电流参考方向关联时，电容元件吸收的功率为

$$p(t)=u(t)i(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 2t & 0<t\leqslant 2\text{ms}\\ -2\times 10^{-3}(4-10^3 t) & 2<t\leqslant 4\text{ms}\\ 0 & t>4\text{ms}\end{cases}$$

$i(t)$，$q(t)$，$p(t)$ 波形如题解 1－8 图所示。



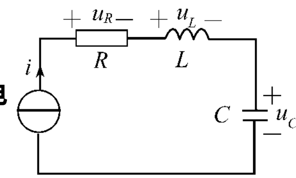
题解 1－8 图

◎ 1－9　电路如题 1－9 图所示，其中 $R=2\Omega$，$L=1\text{H}$，$C=0.01\text{F}$，$u_C(0)=0$，若电路的输入电流为：

（1）$i=2\sin(2t+\dfrac{\pi}{3})\text{A}$；

(2) $i = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{A}$。

试求两种情况下，当 $t > 0$ 时的 u_R、u_L 和 u_C 值。



题 1－9 图

分析 电阻两端的电压与电流关系为 $u_R = iR$，电感端电压为 $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，电容端电压为 $u_C = u_C(0) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi$，根据公式求解即可。

解 根据 R，L 和 C 的 u，i 关系有

(1) 若 $i = 2\sin(2t + \dfrac{\pi}{3})\mathrm{A}$，则有

$$u_R(t) = Ri(t) = 2\times 2\sin(2t+\frac{\pi}{3})$$

$$= 4\sin(2t+\frac{\pi}{3})\mathrm{V}$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 1\times 2[\cos(2t+\frac{\pi}{3})]\times 2$$

$$= 4\cos(2t+\frac{\pi}{3})\mathrm{V}$$

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= 0 + \frac{1}{0.01}\int_0^t 2\sin(2\xi+\frac{\pi}{3})\mathrm{d}\xi$$

$$= 50 - 100\cos(2t+\frac{\pi}{3})\mathrm{V}$$

(2) 若 $i = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{A}$，则有

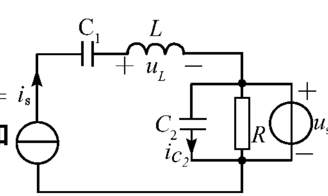
$$u_R(t) = Ri(t) = 2\times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{V}$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 1\times(-\mathrm{e}^{-t}) = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{V}$$

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{0.01}\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi}\mathrm{d}\xi = 100(1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{V}$$

○ 1－10 电路如题 1－10 题图所示，设 $u_S(t) = U_m\cos(\omega t)$，$i_S(t) = I\mathrm{e}^{-\alpha t}$，试求 $u_L(t)$ 和 $i_{C_2}(t)$。



题 1－10 图

解 可以看出，流过电感的电流等于电流源的电流 i_S，电容 C_2 上的电压为 u_S，故由 L，C 元件的 u，i 约束方程可得

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_S(t)}{\mathrm{d}t} = LI\mathrm{e}^{-\alpha t} \times (-\alpha) = -LI\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{V}$$

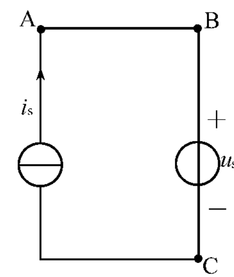
$$i_{C_2}(t) = C_2\frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t} = C_2U_m[-\sin(\omega t)]\omega$$
$$= -\omega C_2U_m\sin(\omega t)\mathrm{V}$$

○ 1－11　电路如题 1－11 图所示，其中 $i_S = 2\mathrm{A}$，$u_S = 10\mathrm{V}$。

(1) 求 2A 电流源和 10V 电压源的功率；

(2) 如果要求 2A 电流源的功率为零，在 AB 线段内应插入何种元件？分析此时各元件的功率；

(3) 如果要求 10V 电压源的功率为零，则应在 BC 间并联何种元件？分析此时各元件的功率。



题 1－11 图

解　(1) 电流源发出的功率

$$p = u_Si_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

电压源吸收的功率

$$p = u_Si_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

(2) 若要 2A 电流源的功率为零，则需使其端电压为零。在 AB 间插入 $u_S' = 10\mathrm{V}$ 电压源，极性如题解 1－11 图(a) 所示。此时，电流源的功率为 $p = 0 \times i_S = 0\mathrm{W}$。插入的电压源发出功率 20W，原来的电压源吸收功率 20W。

(3) 若要 10V 电压源的功率为零，则需使流过电压源的电流为零。可以采取在 BC 间并联 $i'_S = 2\mathrm{A}$ 的电流源，如题解 1－11 图(b) 所示，或并联 $R = u_S/i_S = 10/2 = 5\Omega$ 的电阻，如题解 1－11 图(c) 所示。

题解 1－11 图(b) 中，因 $i_S = i'_S$，由 KCL 可知，流经 u_S 的电流为零。所以 u_S 的功率为零。原电流源发出功率为

$$p = u_Si_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

并入电流源吸收功率为

$$p = u_Si'_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

题解 1－11 图(c) 中，流经电阻的电流为

$$i_R = \frac{u_S}{R} = \frac{10}{5} = 2\mathrm{A}$$

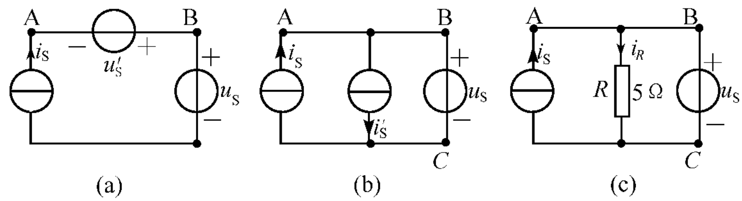
由 KCL 可知，流经 u_S 的电流为零，因此，u_S 的功率为零。此时，电流源发出功率

$$p = u_Si_S = 10 \times 2 = 20\mathrm{W}$$

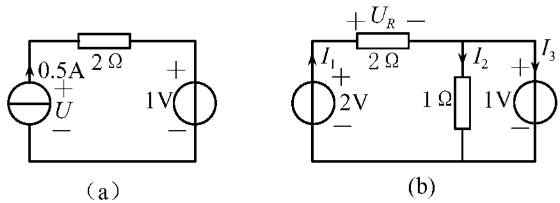
电阻消耗功率

$$p = \frac{u_S^2}{R} = \frac{10^2}{5} = 20\mathrm{W}$$

◎ 1－12　试求题 1－12 图所示电路中每个元件的功率。



题解 1－11 图



题 1－12 图

分析　电阻消耗的功率 $P=I^2R$，电压源吸收的功率 $P=U_SI_S$，电流源发出的功率 $P=I_SU$，根据公式求解即可。

解　(a) 图中，由于流经电阻和电压源的电流为 0.5A，所以电阻消耗功率

$$P_R=RI^2=2\times0.5^2=0.5\text{W}$$

电压源吸收功率

$$P_U=U_SI_S=1\times0.5=0.5\text{W}$$

由于电阻电压

$$U_R=RI=2\times0.5=1\text{V}$$

得电流源端电压

$$U=U_R+U_S=1+1=2\text{V}$$

电流源发出功率

$$P_I=I_SU=0.5\times2=1\text{W}$$

(b) 图中 2Ω 电阻的电压

$$U_R=2-1=1\text{V}$$

所以有

$$I_1=\frac{U_R}{2}=\frac{1}{2}=0.5\text{A}$$

$$I_2=\frac{1}{1}=1\text{A}$$

由 KCL 得

$$I_3=I_1-I_2=0.5-1=-0.5\text{A}$$

故 2V 电压源发出功率

$$P=2\times I_1=2\times0.5=1\text{W}$$

1V 电压源发出功率

$$P = 1 \times (-I_3) = 1 \times 0.5 = 0.5\text{W}$$

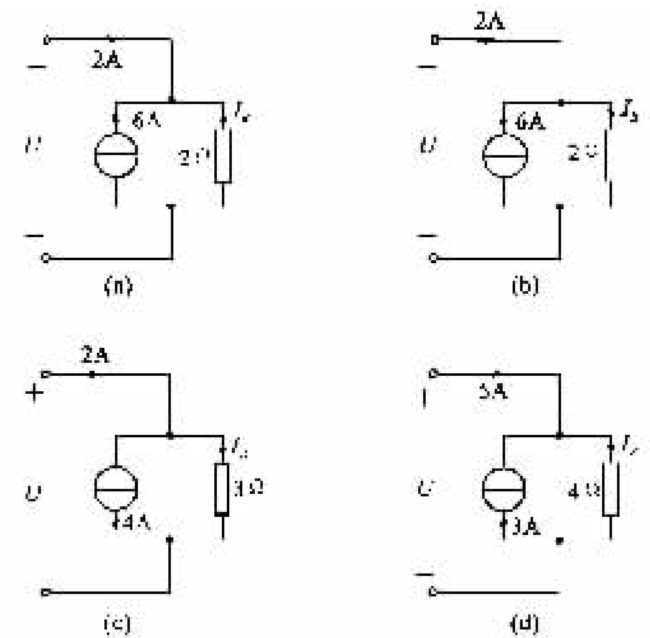
2Ω 电阻消耗功率

$$P = 2 \times I_1^2 = 2 \times 0.5^2 = 0.5\text{W}$$

1Ω 电阻消耗功率

$$P = 1 \times I_2^2 = 1 \times 1^2 = 1\text{W}$$

○ 1－13　试求题 1－13 图中各电路的电压 U，并讨论其功率平衡。



题 1－13 图

解　应用 KCL 先计算电阻电流 I_R，再根据欧姆定律计算电阻电压 U_R，从而得出端电压 U，最后计算功率。

(a) 图中

$$I_R = 2 + 6 = 8\text{A}$$

$$U = U_R = 2 \times I_R = 2 \times 8 = 16\text{V}$$

所以输入电路的功率为

$$P = U \times 2 = 16 \times 2 = 32\text{W}$$

电流源发出功率

$$P_I = 6 \times U = 6 \times 16 = 96\text{W}$$

电阻消耗功率

$$P_R = 2 \times I_R^2 = 2 \times 8^2 = 128\text{W}$$

显然 $P+P_{\mathrm{I}}=P_R$，即输入电路的功率和电源发出的功率都被电阻消耗了。

(b) 图中

$$I_R=6-2=4\text{A}$$

$$U=U_R=2\times I_R=2\times 4=8\text{V}$$

所以输入电路的功率为

$$P=-U\times 2=-8\times 2=-16\text{W}$$

电流源发出功率

$$P_{\mathrm{I}}=6\times U=6\times 8=48\text{W}$$

电阻消耗功率

$$P_R=2\times I_R{}^2=2\times 4^2=32\text{W}$$

显然仍满足

$$P+P_{\mathrm{I}}=P_R$$

实际上电流源发出的功率被电阻消耗了 32W，还有 16W 输送给了外电路。

(c) 图中

$$I_R=2-4=-2\text{A}$$

$$U=U_R=3\times I_R=3\times(-2)=-6\text{V}$$

所以输入电路的功率为

$$P=U\times 2=-6\times 2=-12\text{W}$$

电流源发出功率

$$P_{\mathrm{I}}=4\times 6=24\text{W}$$

电阻消耗功率

$$P_R=3\times I_R^2=3\times(-2)^2=12\text{W}$$

显然仍满足

$$P+P_{\mathrm{I}}=P_R$$

(d) 图中

$$I_R=5-3=2\text{A}$$

$$U=U_R=4\times I_R=4\times 2=8\text{V}$$

所以输入电路的功率为

$$P=U\times 5=8\times 5=40\text{W}$$

电流源发出功率

$$P_{\mathrm{I}}=-3\times U=-3\times 8=-24\text{W}$$

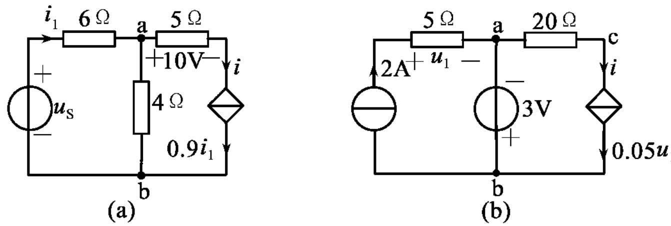
电阻消耗功率 $\quad P_R=4\times I_R{}^2=4\times(-2)^2=16\text{W}$

显然仍满足 $\quad P+P_{\mathrm{I}}=P_R$

○ 1－14　电路如题 1－14 图所示，试求：

（1）电流 i_1 和 u_{ab}[图(a)]；

（2）电压 u_{cb}[图(b)]。



题 1－14 图

解　（1）受控电流源的电流为

$$0.9i_1 = i = \frac{10}{5} = 2\text{A}$$

所以

$$i_1 = \frac{2}{0.9} \approx 2.222\text{A}$$

$$u_{ab} = 4 \times i_{ab} = 4 \times (i_1 - i) = 4 \times (i_1 - 0.9i_1) = 4 \times 0.1i_1$$
$$= 4 \times 0.1 \times \frac{20}{9} \approx 0.889\text{V}$$

（2）因为 $u_1 = 2 \times 5 = 10\text{V}$，所以受控电流源的电流为

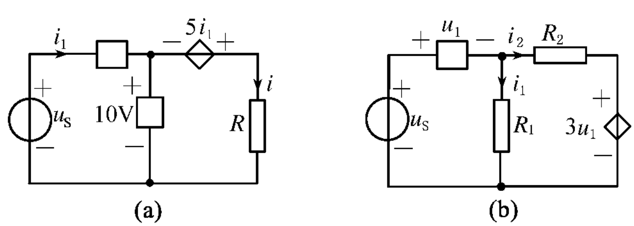
$$i = 0.05u_1 = 0.05 \times 10 = 0.5\text{A}$$

$$u_{ac} = 20 \times i = 20 \times 0.5 = 10\text{V}$$

因为　$u_{ab} = -3\text{V}$

所以　$u_{cb} = -u_{ac} + u_{ab} = -10 - 3 = -13\text{V}$

● 1－15　对题 1－15 图示电路：



题 1－15 图

（1）已知图(a)中，$R = 2\Omega$，$i_1 = 1\text{A}$，求电流 i；

（2）已知图(b)中，$u_S = 10\text{V}$，$i_1 = 2\text{A}$，$R_1 = 4.5\Omega$，$R_2 = 1\Omega$，求 i_2。

分析　根据图(a)右边回路的 KVL 方程即可求解 i，由图(b)左边回路 KVL 方程即可求出 u_1。

解　（1）对图(a)中右边的回路列 KVL 方程（顺时针方向绕行）有

$$Ri - 10 - 5i_1 = 0$$

所以
$$i = \frac{10 + 5i_1}{R} = \frac{10 + 5 \times 1}{2} = 7.5\text{A}$$

(2) 图(b) 中，电路 R_1 两端的电压为

$$u_{R_1} = R_1 i_1 = 4.5 \times 2 = 9\text{V}$$

对左边回路列 KVL 方程顺时针方向绕行有

$$u_{R_1} - u_S + u_1 = 0$$

所以

$$u_1 = u_S - u_{R_1} = 10 - 2 \times 4.5 = 10 - 9 = 1\text{V}$$

从图(b) 中右边回路的 KVL 方程顺时针方向绕行得

$$R_2 i_2 + 3u_1 - u_{R_1} = 0$$

所以

$$i_2 = \frac{u_{R_1} - 3u_1}{R_2} = \frac{2 \times 4.5 - 3 \times 1}{1} = 6\text{A}$$

小结 掌握回路的 KVL 方程是本题的解题关键。

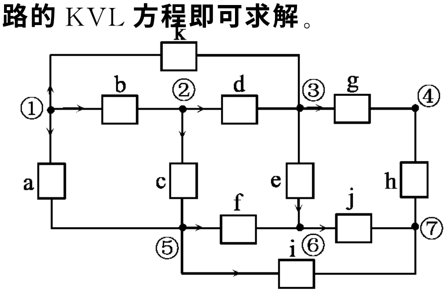
○ 1－16 (1)$i_4 = 1\text{A}$，$i_5 = 13\text{A}$；

(2)$i_1 = \frac{10}{3}\text{A}$，$i_2 = \frac{1}{3}\text{A}$，$i_3 = -\frac{11}{3}\text{A}$，$i_4 = 1\text{A}$，$i_5 = 13\text{A}$。

◎ 1－17 在题 1－17 图所示电路中，已知 $u_{12} = 2\text{V}$，$u_{23} = 3\text{V}$，$u_{25} = 5\text{V}$，$u_{37} = 3\text{V}$，$u_{67} = 1\text{V}$，尽可能多地确定其它各元件的电压。

分析 求解各元件的电压只需根据各个回路的 KVL 方程即可求解。

解 已知 $u_b = u_{12} = 2\text{V}$，$u_d = u_{23} = 3\text{V}$，$u_c = u_{25} = 5\text{V}$，$u_j = u_{67} = 1\text{V}$，选取回路列 KVL 方程。



题 1－17 图

对回路(①②⑤①)有

$$u_a = u_{15} = u_{12} + u_{25} = 2 + 5 = 7\text{V}$$

对回路(①②③①)有

$$u_k = u_{13} = u_{12} + u_{23} = 2 + 3 = 5\text{V}$$

对回路(②③④⑦⑥⑤②)有

$$u_{23} + u_{37} - u_{67} - u_{56} - u_{25} = 0$$

所以

$$u_f = u_{56} = u_{23} + u_{37} - u_{67} - u_{25} = 3 + 3 - 1 - 5 = 0$$

对回路(③④⑦⑥③)有

$$u_e = u_{36} = u_{37} - u_{67} = 3 - 1 = 2\text{V}$$

对回路(⑤⑥⑦⑤)有

$$u_i = u_{57} = u_{56} + u_{67} = 0 + 1 = 1\text{V}$$

○ 1－18　对上题所示电路，指定各支路电流的参考方向，然后列出所有结点处的 KCL 方程，并说明这些方程中有几个是独立的。

解　支路电流的参考方向如题 1－17 图所示，各结点的 KCL 方程分别为(以流出结点的电流为正)

$$①\ i_a + i_b + i_k = 0 \qquad ②\ -i_b + i_c + i_d = 0$$

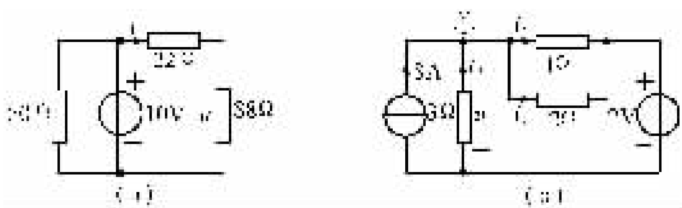
$$③\ -i_d + i_e + i_g - i_k = 0 \qquad ⑤\ -i_a - i_c + i_f + i_i = 0$$

$$⑥\ -i_e - i_f + i_j = 0 \qquad ⑦\ -i_j - i_i - i_g = 0$$

把以上 6 个方程相加，得到 0 = 0 的结果，说明这 6 个方程不是相互独立的，但其中任意 5 个方程是相互独立的。

○1－19　略

○ 1－20　利用 KCL 和 KVL 求解题 1－20 图示电路中的电压 u。



题 1－20 图

解　在(a) 图中，设电流 i，右边网孔的 KVL 方程为

$$22i + 88i = 10$$

解得

$$i = \frac{10}{110} \approx 0.091\text{A}$$

所以

$$u = 88i = 88 \times \frac{10}{110} = 8\text{V}$$

在(b) 图中，设电流 i_1, i_2, i_3，① 号结点上的 KCL 方程为

$$i_1 + i_2 + i_3 = 8$$

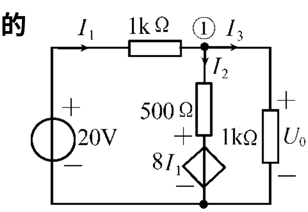
对右边大孔和其中的小孔分别按顺时针列出的 KVL 方程为

$$i_1 + 2 - 3i_3 = 0, \qquad i_1 - 2i_2 = 0$$

由以上三个方程解得

$$i_3 = 2\text{A}$$

所以



题 1－21 图

$$u = 3i_3 = 3 \times 2 = 6\text{V}$$

●1－21　试求题 1－21 图示电路中控制量 I_1 及 U_0。

分析　根据图示电路列出结点的 KCL 及回路的 KVL 方程即可求解。

解　设电流 I_1, I_2, I_3。对结点 ① 和两个网孔列 KCL(电流流入为正,流出为负) 和 KVL 方程,有

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 1000I_1 + 500I_2 + 8I_1 = 20 \\ 8I_1 + 500I_2 - 1000I_3 = 0 \end{cases}$$

应用行列式求解以上方程组,有

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1008 & 500 & 0 \\ 8 & 500 & -1000 \end{vmatrix} = -2008 \times 10^3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 20 & 500 & 0 \\ 0 & 500 & -1000 \end{vmatrix} = -30 \times 10^3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1008 & 500 & 20 \\ 8 & 500 & 0 \end{vmatrix} = -10160$$

则

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-30 \times 10^3}{-2008 \times 10^3} = 14.94\text{mA}$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-10160}{-2008 \times 10^3} = 5.06\text{mA}$$

所以

$$U_0 = 1000 \times I_3 = 1000 \times \frac{10160}{2008 \times 10^3} = 5.06\text{V}$$

小结　求解电路中的变量,利用 KCL、KVL 方程是最基本的方法。

○1－22　$u_1 = 20\text{V}, u = 200\text{V}$

第二章

电阻电路的等效变换

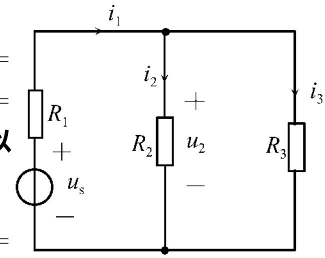
学习要求

1. 理解等效变换的概念，利用等效变换分析电路。
2. 掌握电阻的等效变换：串并混联、Y↔△ 的等效变换。
3. 理解、掌握两种电源的等效变换。
4. 深刻理解单口电路输入电阻 R_{in} 的定义，并会计算。
5. 理解二端电阻电路等效电阻的定义，熟练掌握求等效电阻的方法。

知识网络图

- 电阻电路的等效变换
  - 电阻的等效变换
    - 电阻的串联
    - 电阻的并联
    - 电阻的 Y↔△
  - 电源的串联、并联等效变换
    - n 个电压源串联
    - n 个电流源并联
    - n 个电压源并联：要求电压相同
    - n 个电流源串联：要求电流相同
  - “实际电源”的等效变换
    - 实际电压源 → 实际电流源
    - 实际电流源 → 实际电压源
    - 等效互换的原则：端口 VAR 不变
  - 输入电阻
    - 输入电阻的定义
    - 输入电阻的求法
      - 电阻变换法
      - 外加电压／电流法

课后习题全解



题 2－1 图

○ 2－1　**电路如题 2－1 图所示，已知 $u_S = 100V$，$R_1 = 2k\Omega$，$R_2 = 8k\Omega$。若：(1)$R_3 = 8k\Omega$；(2)$R_3 = \infty$(R_3 处开路)；(3)$R_3 = 0$(R_3 处短路)。试求以上 3 种情况下电压 u_2 和电流 i_2，i_3。**

解　(1) R_2 和 R_3 为并联且相等，其等效电阻 $R = \frac{8}{2} = 4k\Omega$，则

$$i_1 = \frac{u_S}{R_1 + R} = \frac{100}{2+4} = \frac{50}{3}\text{mA}$$

$$i_2 = i_3 = \frac{i_1}{2} = \frac{50}{6} = 8.333\text{mA}$$

$$u_2 = R_2 i_2 = 8 \times \frac{50}{6} = 66.667\text{V}$$

(2) 因 $R_3 = \infty$，则有　$i_3 = 0$

$$i_2 = \frac{u_S}{R_1 + R_2} = \frac{100}{2+8} = 10\text{mA}$$

$$u_2 = R_2 i_2 = 8 \times 10 = 80\text{V}$$

(3) 因 $R_3 = 0$，则有 $i_2 = 0$，得 $u_2 = 0$，

$$i_3 = \frac{u_S}{R_1} = \frac{100}{2} = 50\text{mA}$$

○ 2－2　**电路如题 2－2 图所示，其中电阻、电压源和电流源均为已知，且为正值。求：(1) 电压 u_2 和电流 i_2；(2) 若电阻 R_1 增大，对哪些元件的电压、电流有影响？影响如何？**

解　(1) 因为 R_2 和 R_3 为并联，且该并联部分的总电流为电流源的电流 i_S，根据分流公式，有

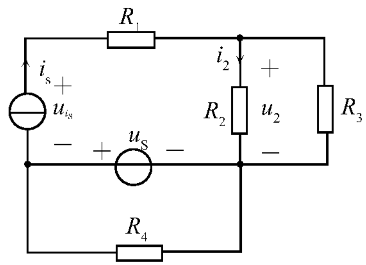
$$i_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_S$$

$$u_2 = R_2 i_2 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_S$$

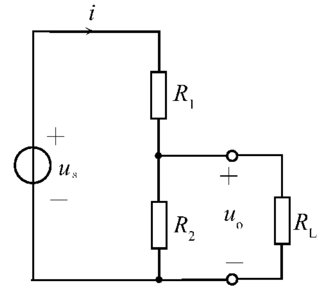
(2) 由于 R_1 和电流源串接支路对其余电路来说可以等效为一个电流源。因此当 R_1 增大，对 R_2，R_3，R_4 及 u_S 的电流和端电压都没有影响。但 R_1 增大，R_1 上的电压增大，将影响电流源两端的电压，即

$$u_{i_S} = R_1 i_S + u_2 - u_S$$

显然，u_{i_S} 随 R_1 的增大而增大。



题 2－2 图



题 2－3 图

◎2－3　**电路如题 2－3 图所示。(1) 求** $\dfrac{u_o}{u_S}$；(2) **当** $R_L \gg R_1 \,//\, R_2 \left(=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)$ **时，**$\dfrac{u_o}{u_S}$ **可近似为** $\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$，**此时引起的相对误差为**

$$\frac{\dfrac{u_o}{u_S}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{\dfrac{u_o}{u_S}}\times 100\%$$

当 R_L **为** $(R_1 \,//\, R_2)$ **的 100 倍、10 倍时，分别计算此相对误差。**

分析　R_2 与 R_L 并联，然后与 R_1 串联，则 $\dfrac{u_o}{u_S}=\dfrac{R_2 \,//\, R_L}{R_2 \,//\, R_L+R_1}$。

解　(1)

$$R=\frac{R_2\times R_L}{R_2+R_L}$$

$$i=\frac{u_S}{R_1+R}$$

$$u_o=Ri=\frac{u_SR}{R_1+R}$$

所以

$$\frac{u_o}{u_S}=\frac{R}{R_1+R}=\frac{R_2R_L}{R_1R_2+R_1R_L+R_2R_L}$$

(2) **设** $R_L=K\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$，**代入上述** $\dfrac{u_o}{u_S}$ **式子中，可得**

$$\frac{u_o}{u_S}=\frac{R_2\times K\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{R_1R_2+(R_1+R_2)\times K\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}=\frac{K}{(1+K)}\times\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

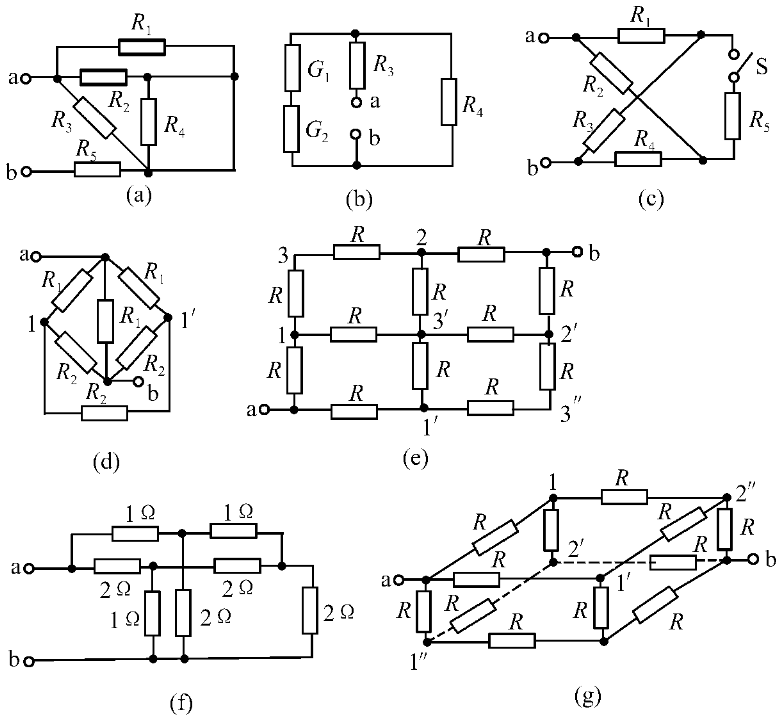
相对误差为

$$\eta=\frac{\left(\dfrac{u_o}{u_S}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\right)\times 100\%}{\dfrac{u_o}{u_S}}=\frac{\dfrac{K}{1+K}\,\dfrac{R_2}{R_1+R_2}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}{\dfrac{K}{1+K}\,\dfrac{R_2}{R_1+R_2}}\times 100\%$$

$$= \frac{\frac{K}{1+K} - 1}{\frac{K}{1+K}} \times 100\% = -\frac{1}{K} \times 100\%$$

当 $K = 100$ 时，$\eta = -1\%$；$K = 10$ 时，$\eta = -10\%$。

◎ 2－4　求题 2－4 图示各电路的等效电阻 R_{ab}，其中 $R_1 = R_2 = 1\Omega, R_3 = R_4 = 2\Omega$，$R_5 = 4\Omega, G_1 = G_2 = 1\text{S}, R = 2\Omega$。



题 2－4 图

分析　根据串联、并联，$Y \leftrightarrow \triangle$ 变换等电阻电路的等效方法即可求解。

解　图(a)中将短路线缩为点后，可知 R_4 被短路，R_1，R_2 和 R_3 为并联，于是有

$$R_{ab} = [R_1 /\!/ R_2 /\!/ R_3] + R_5 = [1 /\!/ 1 /\!/ 2] + 4 = 4.4\Omega$$

图(b)中 G_1 和 G_2 所在支路的电阻

$$R = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} = 2\Omega$$

所以　$$R_{ab} = [R /\!/ R_4] + R_3 = [2 /\!/ 2] + 2 = 3\Omega$$

图(c)改画后可知，这是一个电桥电路，由于 $R_1 = R_2, R_3 = R_4$ 处于电桥平衡，故开关闭合与打开时的等效电阻相等。即

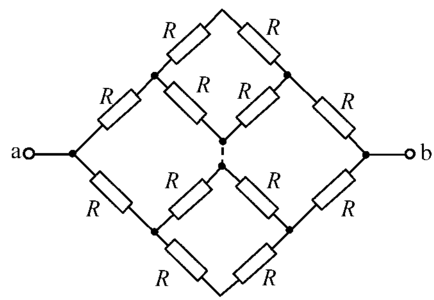
$$R_{ab} = (R_1 + R_3) /\!/ (R_2 + R_4) = (1+2) /\!/ (1+2) = 1.5\Omega$$

图(d)中结点 1，1′同电位(电桥平衡)，所以 1—1′间跨接电阻 R_2 可以拿去(也可以用短路线替代)，故

$$\begin{aligned} R_{ab} &= (R_1 + R_2) // (R_1 + R_2) // R_1 \\ &= (1+1) // (1+1) // 1 = 0.5\Omega \end{aligned}$$

图(e)为非串联电路，其具有某种对称结构，称之为平衡对称网络。

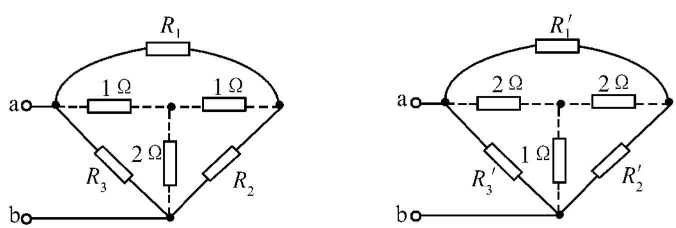
因为该电路为对称电路，因此可将电路从中心点断开(因断开点间的连线没有电流)如题解 2－4 图(a)所示。



题解 2－4 图(a)

则
$$R_{ab} = \frac{2R + (2R // 2R)}{2} = \frac{3}{2}R = 3\Omega$$

图(f)中(1Ω，1Ω，2Ω)和(2Ω，2Ω，1Ω)构成两个 Y 形连接，分别将两个 Y 形转化成等值的三角形连接，如题解 2－4 图(b)所示。等值三角形的电阻分别为



题解 2－4 图(b)

$$R_1 = (1 + 1 + \frac{1 \times 1}{2}) = 2.5\Omega$$

$$R_2 = (1 + 2 + \frac{1 \times 2}{1}) = 5\Omega$$

$$R_3 = R_2 = 5\Omega$$

$$R'_1 = 2 + 2 + \frac{2 \times 2}{1} = 8\Omega$$

$$R'_2 = 1 + 2 + \frac{1 \times 2}{2} = 4\Omega$$

$$R'_3 = R'_2 = 4\Omega$$

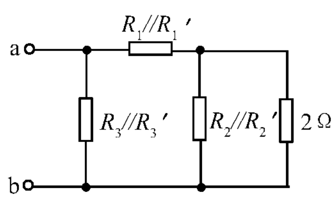
并接两个三角形，最后得题解 2－4 图(c) 所示的等效电路，所以

$$R_{ab} = [2 \,/\!/\, (R_2 \,/\!/\, R'_2) + (R_1 \,/\!/\, R'_1)] \,/\!/\, (R_3 \,/\!/\, R'_3)$$
$$= [2 \,/\!/\, (5 \,/\!/\, 4) + (2.5 \,/\!/\, 8)] \,/\!/\, (5 \,/\!/\, 4)$$
$$= [\frac{20}{19} + \frac{40}{21}] \,/\!/\, \frac{20}{9} = 1.269\Omega$$

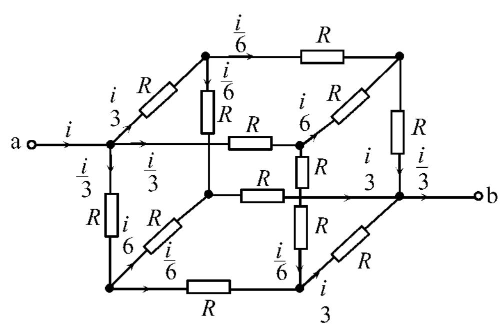
图(g) 也是一个对称电路。根据电路的结构特点，设 i 从 a 流入，则与 a 相连的 3 个电阻 R 中流过的电流均为 $\frac{i}{3}$。同理，从 1′ 点分流的支流 R 对称，故支流为 $\frac{i}{6}$，得各支路电流的分布如题解 2－4 图(d) 所示。由此得端口电压

$$u_{ab} = \frac{1}{3}i \times R + \frac{1}{6}i \times R + \frac{1}{3}i \times R = \frac{5}{6}i \times R$$

所以 $$R_{ab} = \frac{u_{ab}}{i} = \frac{5}{6}R = 1.667\Omega$$

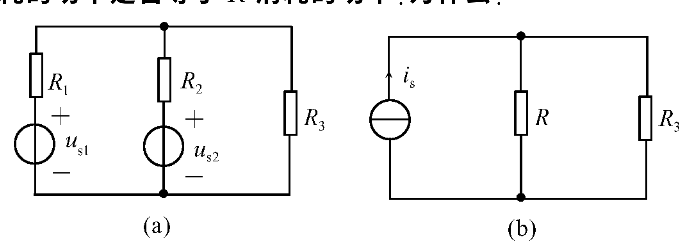


题解 2－4 图(c)

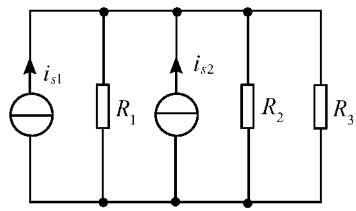


题解 2－4 图(d)

○ 2－5 在题 2－5 图(a) 电路中，$u_{s1} = 24\text{V}$，$u_{s2} = 6\text{V}$，$R_1 = 12\Omega$，$R_2 = 6\Omega$，$R_3 = 2\Omega$。图(b) 为经电源变换后的等效电路。(1) 求等效电路的 i_S 和 R；(2) 根据等效电路求 R_3 中电流和消耗功率；(3) 分别在图(a)，(b) 中求出 R_1，R_2 及 R 消耗的功率；(4) 试问 u_{s1}，u_{s2} 发出的功率是否等于 i_S 发出的功率？R_1，R_2 消耗的功率是否等于 R 消耗的功率？为什么？



题 2－5 图



题解 2－5 图

解　(1) 利用电源的等效变换，图(a) 中电阻与电压源的串联可以用电阻与电流源的并联来等效。等效后的电路如题解 2－5 图所示，其中

$$i_{s1} = \frac{u_{s1}}{R_1} = \frac{24}{12} = 2\text{A}$$

$$i_{s2} = \frac{u_{s2}}{R_2} = \frac{6}{6} = 1\text{A}$$

对题解 2－5 图电路进一步简化为题 2－5 图(b) 所示电路，故

$$i_s = i_{s1} + i_{s2} = 2 + 1 = 3\text{A}$$

$$R = R_1 \,/\!/\, R_2 = \frac{12 \times 6}{12 + 6} = 4\Omega$$

(2) 由图(b) 可解得三条并联支路的端电压

$$u = (R \,/\!/\, R_3) \times i_S = \frac{4 \times 2}{4 + 2} \times 3 = 4\text{V}$$

所以 R_3 的电流和消耗的功率分别为

$$i_3 = \frac{u}{R_3} = \frac{4}{2} = 2\text{A}$$

$$P_3 = R_3 i_3^2 = 2 \times 2^2 = 8\text{W}$$

(3) 根据 KVL，图(a) 电路中 R_1，R_2 两端的电压分别为

$$u_1 = u_{s1} - u = 24 - 4 = 20\text{V}$$

$$u_2 = u_{s2} - u = 6 - 4 = 2\text{V}$$

则 R_1，R_2 消耗的功率分别为

$$P_1 = \frac{{u_1}^2}{R_1} = \frac{(20)^2}{12} = \frac{100}{3} = 33.33\text{W}$$

$$P_2 = \frac{{u_2}^2}{R_2} = \frac{2^2}{6} = \frac{2}{3}\text{W}$$

图(b) 中 R 消耗的功率

$$P = \frac{u^2}{R} = \frac{4^2}{4} = 4\text{W}$$

(4) 图(a) 中 u_{s1} 和 u_{s2} 发出的功率分别为

$$P_{u_{s1}} = u_{s1} \times \frac{u_1}{R_1} = 24 \times \frac{20}{12} = 40\mathrm{W}$$

$$P_{u_{s2}} = u_{s2} \times \frac{u_2}{R_2} = 6 \times \frac{2}{6} = 2\mathrm{W}$$

图(b) 图中 i_s 发出的功率

$$P_{i_s} = ui_s = 4 \times 3 = 12\mathrm{W}$$

显然 $$P_{i_s} \neq P_{u_{s1}} + P_{u_{s2}}$$

由(3) 的解可知 $$P \neq P_1 + P_2$$

以上结果表明,等效电源发出的功率一般并不等于电路中所有电源发出的功率之和;等效电阻消耗的功率一般也并不等于原电路中所有电阻消耗的功率之和。这充分说明,电路的“等效”概念仅仅指对外电路等效,对内部电路(变换的电路)则不等效。

○ 2－6　对题 2－6 图所示电桥电路,应用 Y－三角形等效变换求:(1) 对角线电压 U;(2) 电压 U_{ab}。

解　把(10Ω,10Ω,5Ω) 构成的三角形等效变换为 Y 形,如题解 2－6 图所示。由于两条并联支路的电阻相等,因此得电流

$$I_1 = I_2 = \frac{5}{2} = 2.5\mathrm{A}$$

应用 KVL 得电压

$$U = 6 \times 2.5 - 4 \times 2.5 = 5\mathrm{V}$$

又因输入电阻

$$R_{ab} = (4+4) // (6+2) + 2 + 24 = 30\Omega$$

所以 $$U_{ab} = 5 \times R_{ab} = 5 \times 30 = 150\mathrm{V}$$

◎ 2－7　题 2－7 图为由桥 T 电路构成的衰减器。

(1) 试证明当 $R_2 = R_1 = R_L$ 时,$R_{ab} = R_L$,且有 $\frac{u_o}{u_{in}} = 0.5$;

(2) 试证明当 $R_2 = \frac{2R_1R_L^2}{3R_1^2 - R_L^2}$ 时,$R_{ab} = R_L$,并求此时电压比 $\frac{u_o}{u_{in}}$。

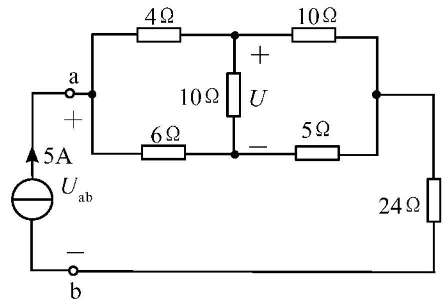
分析　平衡电桥等位点间的电阻可省去。

证明　(1) 当 $R_1 = R_2 = R_L$ 时,此电路为一平衡电桥,c、d 两点为等位点,故可将连于这两点之间的 R_1 支路断开,从而得到一串并联电路,则

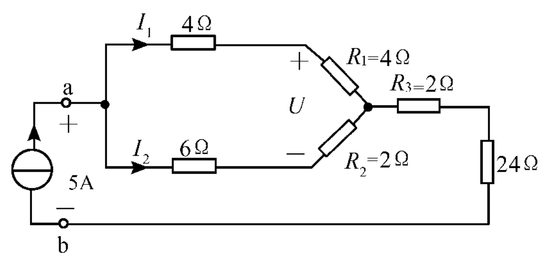
$$R_{ab} = (R_1 + R_1) // (R_2 + R_L) = R_L$$

$$u_o = \frac{1}{2}u_{in}$$

即 $$\frac{u_o}{u_{in}} = \frac{1}{2} = 0.5$$



题 2-6 图



题解 2-6 图

(2) 把由 3 个 R_1 构成的 Y 形电路等效变换为三角形电路，则原电路等效为题解 2－7 图所示，其中 $R = 3R_1$。根据题意，即 $R_2 = \dfrac{2R_1R_L^2}{3R_1^2 - R_L^2}$ 时，不难得出电路的等效电阻 R_{ab} 为

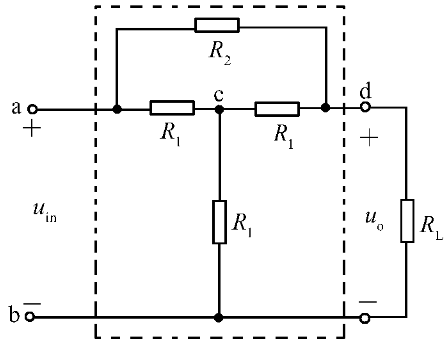
$$R_{ab} = \frac{\dfrac{3R_1R_L}{3R_1 - R_L}3R_1}{\dfrac{3R_1R_L}{3R_1 - R_L} + 3R_1} = \frac{9R_1^2R_L}{9R_1^2} = R_L$$

$$u_o = \frac{\dfrac{3R_1R_L}{3R_1 + R_L}}{\dfrac{3R_1R_2}{3R_1 + R_2} + \dfrac{3R_1R_L}{3R_1 + R_L}}u_{in} = \frac{3R_1 - R_L}{3R_1 + R_L}u_{in}$$

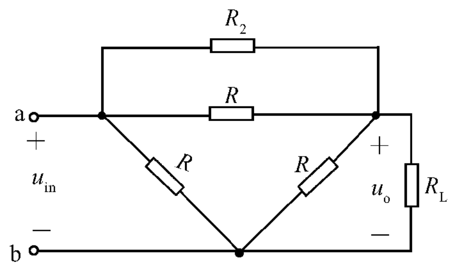
$$\frac{u_o}{u_{in}} = \frac{3R_1 - R_L}{3R_1 + R_L}$$

○ 2－8　在题 2－8 图(a) 中，$u_{s1} = 45V$，$u_{s2} = 20V$，$u_{s4} = 20V$，$u_{s5} = 50V$；$R_1 = R_3 = 15\Omega$，$R_2 = 20\Omega$，$R_4 = 50\Omega$，$R_5 = 8\Omega$；在图(b) 中，$u_{s1} = 20V$，$u_{s5} = 30V$，$i_{s2} = 8A$，$i_{s4} = 17A$，$R_1 = 5\Omega$，$R_3 = 10\Omega$，$R_5 = 10\Omega$。利用电源的等效变换求图(a) 和图(b) 中电压 u_{ab}。

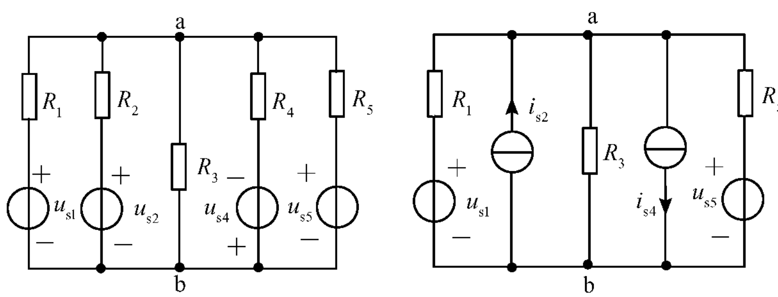
解　图(a) 利用电源的等效变换，将图(a) 中的电压源等效为电流源，得题解 2－8 所示。



题 2-7 图



题解 2-7 图



(a)　　　　(b)

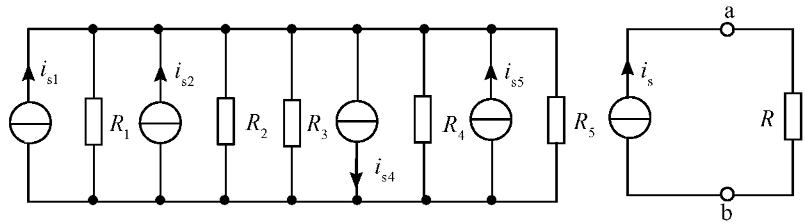
题 2－8 图

$$i_{s1}=\frac{u_{s1}}{R_1}=\frac{45}{15}=3\text{A}$$

$$i_{s2}=\frac{u_{s2}}{R_2}=\frac{20}{20}=1\text{A}$$

$$i_{s4}=\frac{u_{s4}}{R_4}=\frac{20}{50}=0.4\text{A}$$

$$i_{s5}=\frac{u_{s5}}{R_5}=\frac{50}{8}=6.25\text{A}$$



题解 2－8 图

把所有电源流合并，得

$$i_S = i_{s1} + i_{s2} - i_{s4} + i_{s5} = 3 + 1 - 0.4 + 6.25 = 9.85\text{A}$$

把所有电阻并联，有

$$R = R_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} R_2 \mathbin{/\mkern-6mu/} R_3 \mathbin{/\mkern-6mu/} R_4 \mathbin{/\mkern-6mu/} R_5$$

$$= 15 \mathbin{/\mkern-6mu/} 20 \mathbin{/\mkern-6mu/} 15 \mathbin{/\mkern-6mu/} 50 \mathbin{/\mkern-6mu/} 8 = \frac{600}{197}\Omega$$

所以 $$u_{ab} = i_S R = 9.85 \times \frac{600}{197} = 30\text{V}$$

图(b)的求解方法同图(a)，可得 $u_{ab} = -5\text{V}$。

○2－9 $i = \dfrac{1}{8}\text{A}$

○ 2－10 利用电源的等效变换，求题2－10图所示电路中电压比$\dfrac{u_o}{u_S}$。已知 $R_1 = R_2 = 2\Omega, R_3 = R_4 = 1\Omega$。

解 因为受控电流源的电流为 $2u_3 = 2i_3R_3 = 2i_3 \times 1$，即受控电流源的控制量可以改为 i_3，则

$$u_o = R_4 i_4 = R_4(i_3 + 2i_3) = 3i_3$$

即 $$i_3 = \frac{u_o}{3}$$

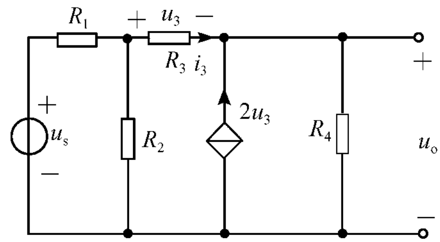
又因 $$i_3 = \frac{1}{4}u_S - \frac{u_o}{2}$$

即 $$\frac{u_o}{3} = \frac{1}{4}u_S - \frac{u_o}{2}$$

所以

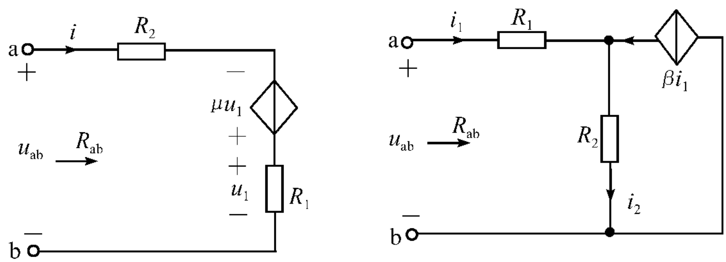
$$\frac{u_o}{u_S} = 0.3$$

○2－11 $u_{10} = 0.75u_s$



题 2－10 图

●2－12　试求题 2－12 图(a)和(b)的输入电阻 R_{ab}。



(a)　　(b)

题 2－12 图

分析　输入电阻 $R_{in}=\dfrac{u}{i}$，u、i 分别为端口电压和端口电流，由公式求解即可。

解　(1) 在图(a)中，设端口电流 i 的参考方向如图所示，因 $u_1=R_1 i$，根据 KVL，有

$$u_{ab}=R_2 i-\mu u_1+R_1 i=R_2 i-\mu(R_1 i)+R_1 i=(R_1+R_2-\mu R_1)i$$

故得 a,b 端的输入电阻

$$R_{ab}=\frac{u_{ab}}{i}=R_1+R_2-\mu R_1$$

(2) 在图(b)中，设电阻 R_2 中的电流 i_2 的参考方向如图所示，由 KVL 和 KCL 可得电压

$$u_{ab}=R_1 i_1+R_2 i_2=R_1 i_1+R_2(i_1+\beta i_1)$$

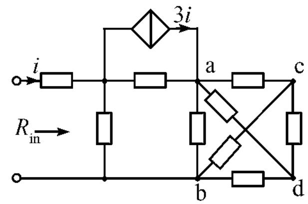
所以 a,b 端的输入电阻

$$R_{ab}=\frac{u_{ab}}{i_1}=R_1+R_2(1+\beta)$$

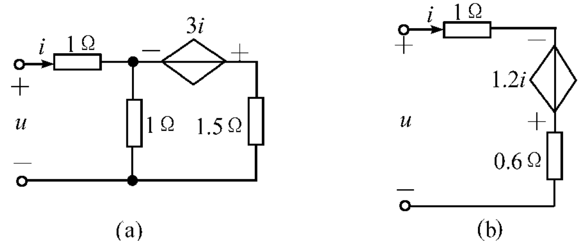
小结　若求解纯电阻电路的输入电阻可利用等效变换求解。电路中若出现有受控源，则常用 $R_{in}=\dfrac{u_{端口}}{i_{端口}}$ 求解。

○2－13　$R_{\text{in}}=\dfrac{R_1R_3}{(1-\mu)R_3+R_1}$

● 2－14　**题 2－14 图所示电路中全部电阻均为 1Ω，求输入电阻 R_{in}。**



题 2－14 图



题解 2－14 图

分析　**对电阻电路进行等效变换，即可容易求解。**

解　a，b **端右边的电阻电路是一平衡电桥，故可拿去** c，d **间连接的电阻，然后利用电阻的串、并联对电路进行简化并进行受控源的等效变换，得题解** 2－14 **图**(a) **所示电路，再进行简化得题解** 2－14 **图**(b) **所示电路，图解** 2－14 **图**(b) **电路的** KVL **方程为**

$$u=1.6i-1.2i=0.4i$$

$$R_{\text{in}}=\frac{u}{i}=0.4\Omega$$

小结　**平衡电桥是一种特殊的电路，**c、d **间连接的电阻可拿去，特殊的电路用特殊的求解方式。**

第三章

电阻电路的一般分析

学习要求

1. 要求会用手写法列出电路方程。
2. 了解图的基本概念，掌握独立结点、独立回路的数目及选取，KCL 和 KVL 的独立方程数。
3. 掌握支路电流法、回路电流法、结点电压法。

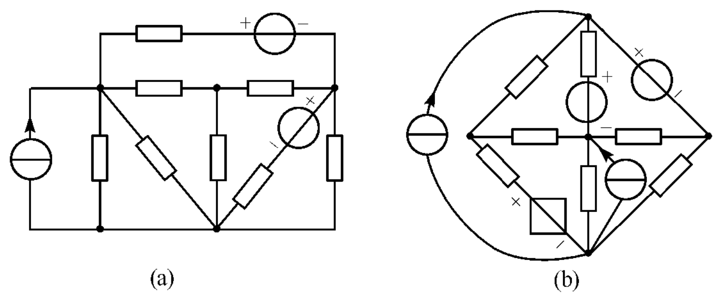
线性电阻电路方程建立的方法及电压、电流的求解，是全书的重点内容之一，是考试考研的必考内容。

知识网络图

- 电阻电路的一般分析
  - 基本概念
    - 结点
    - 支路
    - 回路
    - 电路的图
    - 树
  - 电路方程
    - KCL 独立方程
    - KVL 独立方程
  - 电路分析方法
    - 支路电流法
    - 网孔电流法
    - 回路电流法
    - 结点电压法

课后习题全解

◯ 3－1　在以下两种情况下，画出题 3－1 图所示电路的图，并说明其结点数和支路数：(1) 每个元件作为一条支路处理；(2) 电压源（独立或受控）和电阻的串联组合，电流源和电阻的并联组合作为一条支路处理。



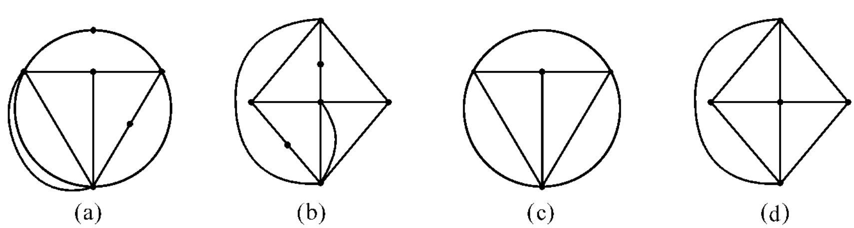
题 3－1 图

解　(1) 题 3－1 图(a) 和题 3－1 图(b) 电路的拓扑图分别如题解 3－1 图(a) 和题解 3－1 图(b) 所示。

(2) 题 3－1 图(a) 和题 3－1 图(b) 电路的拓扑图分别如题解 3－1 图(c) 和题解 3－1 图(d) 所示。

题解 3－1 图(a) 中结点数 $n=6$，支路数 $b=11$；题解 3－1 图(b) 中结点数 $n=7$，支路数 $b=12$。

题解 3－1 图(c) 中结点数 $n=4$，支路数 $b=8$；题解 3－1 图(d) 中结点数 $n=5$，支路数 $b=9$。



题解 3－1 图

◎ 3－2　指出题 3－1 中两种情况下，KCL、KVL 独立方程各为多少？

分析　独立的 KCL 方程个数为 $n-1$，独立的 KVL 方程个数为 $b-n+1$，根据公式求解即可。

解　电路题 3－1 图(a) 对应题解 3－1 图(a) 和题解 3－1 图(c) 两种情况。

题解 3－1 图(a) 中，独立的 KCL 方程个数为 $n-1=6-1=5$

独立的 KVL 方程个数为 $b-n+1=11-6+1=6$

题解 3－1 **图**(c) **中,独立的** KCL **方程个数为** $n-1=4-1=3$

独立的 KVL **方程个数为** $b-n+1=8-4+1=5$

题 3－1 **图**(b) **对应题解** 3－1 **图**(b) **和题解** 3－1 **图**(d) **两种情况。**

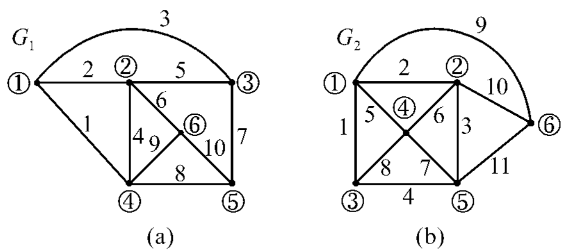
题解 3－1 **图**(b) **中,独立的** KCL **方程个数为** $n-1=7-1=6$

独立的 KVL **方程个数为** $b-n+1=12-7+1=6$

题解 3－1 **图**(d) **中,独立** KCL **方程个数为** $n-1=5-1=4$

独立的 KVL **方程个数为** $b-n+1=9-5+1=5$

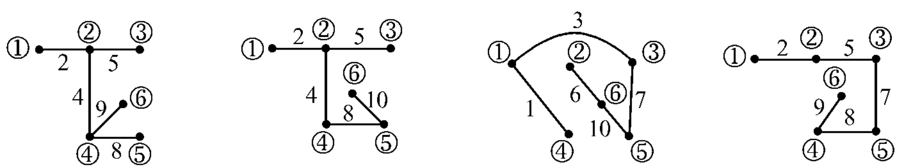
◎3－3　**对题** 3－3 **图**(a) **和题** 3－3 **图**(b) **所示** G_1 **和** G_2**,各画出** 4 **个不同的树,树支数各为多少**?



题 3－3 图

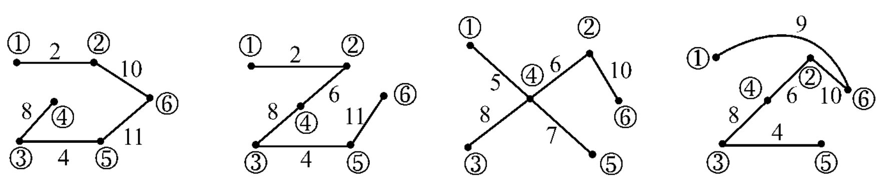
分析　遍后历所有顶点且支路数最少即构成树。

解　题 3－3 图(a) 的 4 个不同的树如题解 3－3 图(a) 所示。



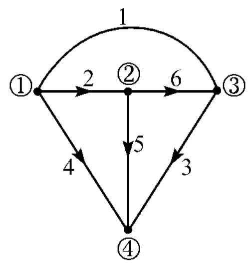
题解 3－3 图(a)

题 3－3 图(b) 的 4 个不同的树如题解 3－3 图(b) 所示。



题解 3－3 图(b)

○ 3－4　题3－4图所示桥形电路共可画出16个不同的树，试一一列出(由于结点数为4，故树支数为3，可按支路号递增的方法列出所有可能的组合，如123,124,…126,134,135…等，从中选出树)。



题3－4图

解　16个不同的树的支路组合为

(123),(124),(125),(135),(136),(145),(146),(156)

(234),(235),(236),(246),(256),(345),(346),(456)

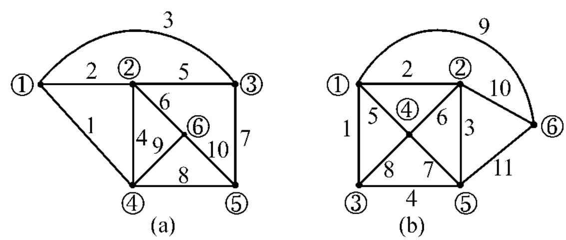
○ 3－5　对题3－3图所示的G_1和G_2，任选一树并确定其基本回路组，同时指出独立回路数和网孔数各为多少？

解　如题3－3图所示。独立回路数 ＝ 网孔数 ＝ 连支数。

对题3－3图(a)以如题解3－5(a)图所选树(2,5,7,8,9)为例，其基本回路组即单连支回路组为(2,3,5),(8,9,10),(5,6,7,8,9),(1,2,5,7,8),(4,5,7,8)(划线数字为连支)。

对题3－3图(b)以如题解3－5图(b)所选树(4,6,8,9,10)为例，其基本回路组即单连支回路组为

(2,9,10),(3,4,6,8),(4,6,8,10,11),(4,7,8),(1,6,8,9,10),(5,6,9,10)。



题解3－5图

○ 3－6　对题3－6图所示非平面图，设：(1)选择支路(1,2,3,4)为树；(2)选择支路(5,6,7,8)为树。问独立回路各有多少？求其基本回路组。

解　$n = 5, b = 10$

独立回路数 $l = b - n + 1 = 10 - 5 + 1 = 6$

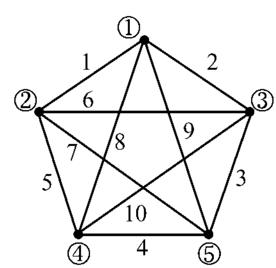
(1)以(1,2,3,4)为树，对应的基本回路组为

(1,2,3,7),(1,2,3,4,5),(1,2,6),(2,3,9),(3,4,10),

(2,3,4,8)。

(2)以(5,6,7,8)为树，对应的基本回路组为

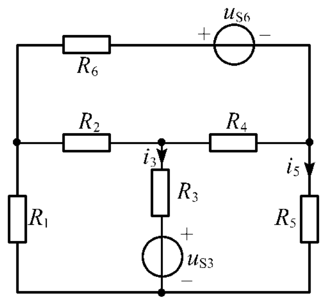
(1,5,8),(3,6,7),(4,5,7),(2,5,6,8),(5,7,8,9),(5,6,10)。



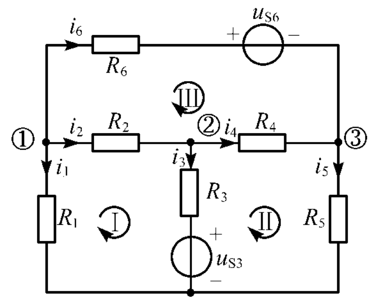
题3－6图

○ 3－7　**题 3－7 图所示电路中** $R_1 = R_2 = 10\Omega, R_3 = 4\Omega, R_4 = R_5 = 8\Omega, R_6 = 2\Omega,$ $u_{S3} = 20\text{V}, u_{S6} = 40\text{V}$，**用支路电流法求解电流** i_5。

解　各支路电流的参考方向如题解 3－7 图所示。



题 3－7 图



题解 3－7 图

列支路电流方程

结点 ①　$i_1 + i_2 + i_6 = 0$

结点 ②　$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$

结点 ③　$-i_4 + i_5 - i_6 = 0$

回路 Ⅰ　$i_2 R_2 + i_3 R_3 - i_1 R_1 = -u_{S3}$

回路 Ⅱ　$i_4 R_4 + i_5 R_5 - i_3 R_3 = u_{S3}$

回路 Ⅲ　$-i_2 R_2 - i_4 R_4 + i_6 R_6 = -u_{S6}$

代入数据，整理得

$$\begin{cases} -10i_1 + 10i_2 + 4i_3 = -20 \\ -4i_3 + 8i_4 + 8i_5 = 20 \\ -10i_2 - 8i_4 + 2i_6 = -40 \end{cases}$$

联立求解以上方程组，得　$i_5 = -0.956\text{A}$

○ 3－8　**用网孔电流法求解题 3－7 图中电流** i_5。

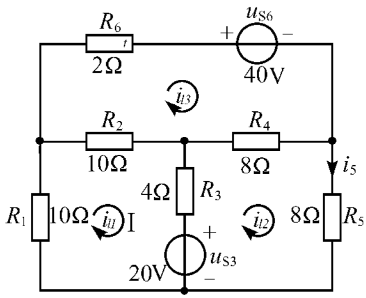
解　设网孔电流为 i_{l1}, i_{l2}, i_{l3}，绕行方向如题解 3－8 图所示，列网孔电流方程为

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3) i_{l1} - R_3 i_{l2} - R_2 i_{l3} = -u_{S3} \\ -R_3 i_{l1} + (R_3 + R_4 + R_5) i_{l2} - R_4 i_{l3} = u_{S3} \\ -R_2 i_{l1} - R_4 i_{l2} + (R_2 + R_4 + R_6) i_{l3} = -u_{S6} \end{cases}$$

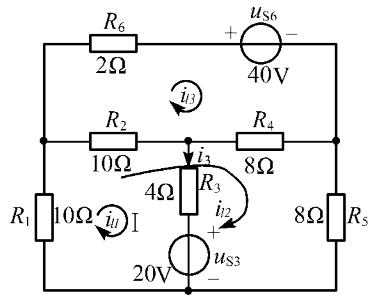
代入数据整理，得

$$\begin{cases} 24i_{l1} - 4i_{l2} - 10i_{l3} = -20 \\ -4i_{l1} + 20i_{l2} - 8i_{l3} = 20 \\ -10i_{l1} - 8i_{l2} + 20i_{l3} = -40 \end{cases}$$

解方程，得　$i_{l2} = i_5 = -0.956\text{A}$



题解 3－8 图



题解 3－9 图

○ 3－9　**用回路电流法求解题 3－7 图中电流 i_3。**

解　取回路电流如题解 3－9 图所示，仅让 i_{l1} 流经 i_3 所在支路，那么 $i_3 = i_{l1}$。

列回路电流方程

$$\begin{cases}(R_1+R_2+R_3)i_{l1}+(R_1+R_2)i_{l2}-R_2i_{l3}=-u_{S3}\\(R_1+R_2)i_{l1}+(R_1+R_2+R_4+R_5)i_{l2}-(R_2+R_4)i_{l3}=0\\-R_2i_{l1}-(R_2+R_4)i_{l2}+(R_2+R_4+R_6)i_{l3}=-u_{S6}\end{cases}$$

代入数据整理，得

$$\begin{cases}24i_{l1}+20i_{l2}-10i_{l3}=-20\\20i_{l1}+36i_{l2}-18i_{l3}=0\\-10i_{l1}-18i_{l2}+20i_{l3}=-40\end{cases}$$

求解方程得　$i_{l1}=-1.552\text{A}$

所以　$i_3=i_{l1}=-1.552\text{A}$

◎3－10　**用回路电流法求解题 3－10 图中 5Ω 电阻中的电流 i。**

分析　根据回路电流法的求解准则求解即可。

解　回路电流的参考方向如题解 3－10 图所示，$i=i_{l3}$。

列回路电流方程

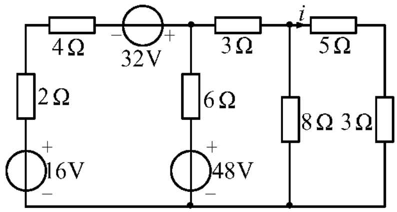
$$\begin{cases}(2+4+6)i_{l1}-6i_{l2}=32-48+16\\-6i_{l1}+(6+3+8)i_{l2}-8i_{l3}=48\\-8i_{l2}+(8+5+3)i_{l3}=0\end{cases}$$

整理得

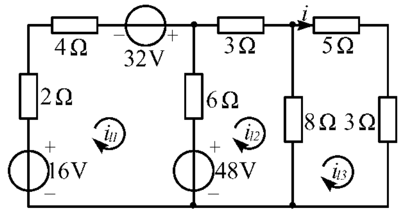
$$\begin{cases}12i_{l1}-6i_{l2}=0\\-6i_{l1}+17i_{l2}-8i_{l3}=48\\-8i_{l2}+16i_{l3}=0\end{cases}$$

求解方程组，得　$i_{l3}=2.4\text{A}$

所以　$i=i_{l3}=2.4\text{A}$



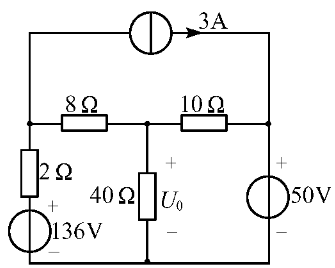
题 3－10 图



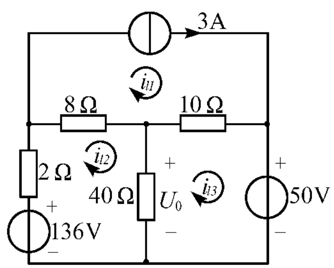
题解 3－10 图

○ 3－11 **用回路电流法求解题 3－11 图所示电路中电压** U_0。

解 **设回路电流的参考方向如题解 3－11 图所示**，$U_0 = 40(i_{l2} - i_{l3})$。



题 3－11 图



题解 3－11 图

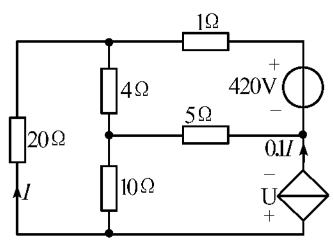
列回路电流方程
$$\begin{cases} i_{l1} = 3\text{A} \\ -8i_{l1} + (2+8+40)i_{l2} - 40i_{l3} = 136 \\ -10i_{l1} - 40i_{l2} + (40+10)i_{l3} = -50 \end{cases}$$

整理得
$$\begin{cases} 50i_{l2} - 40i_{l3} = 160 \\ -40i_{l2} + 50i_{l3} = -20 \end{cases}$$

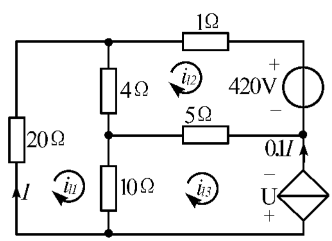
求解方程，得
$$\begin{cases} i_{l2} = 8\text{A} \\ i_{l3} = 6\text{A} \end{cases}$$

所以 $U_0 = 40 \times (8-6) = 80\text{V}$

○ 3－12 **用回路电流法求解题 3－12 图所示电路中电压** U。



题 3－12 图



题解 3－12 图

解　设回路电流的参考方向如题解 3－12 图所示。

列回路电流方程
$$\begin{cases}(20+4+10)i_{l1}-4i_{l2}-10i_{l3}=0\\-4i_{l1}+(4+1+5)i_{l2}-5i_{l3}=-420\\i_{l3}=-0.1I\end{cases}$$

补充方程：$I=i_{l1}$

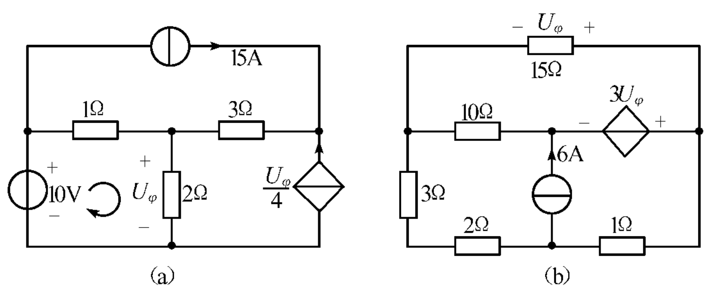
整理得
$$\begin{cases}35i_{l1}-4i_{l2}=0\\-3.5i_{l1}+10i_{l2}=-420\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}i_{l1}=-5\text{A}\\i_{l2}=-43.75\text{A}\\i_{l3}=-0.1i_{l1}=+0.5\text{A}\end{cases}$$

选最外层回路，列 KVL 方程　$20i_{l1}+1\times i_{l2}+420-U=0$

得　$U=276.25\text{V}$

○ 3－13　用回路电流法求解题 3－13 图(a) 和题 3－13 图(b) 两电路中每个元件的功率，并作功率平衡检验。



题 3－13 图

解　(a) 回路电流的参考方向如题解 3－13 图(a) 所示。

列回路电流方程
$$\begin{cases}i_{l1}=15\\-1\times i_{l1}+(1+2)i_{l2}+2i_{l3}=10\\i_{l3}=\dfrac{U_\varphi}{4}\end{cases}$$

补充方程：$U_\varphi=2\times(i_{l2}+i_{l3})$

整理，得
$$\begin{cases}3i_{l2}+2i_{l3}=25\\i_{l2}=i_{l3}\end{cases}$$

求解，得　$i_{l2}=i_{l3}=5\text{A}$

各元件的功率分别为

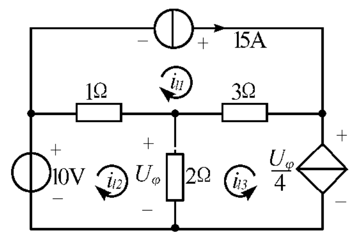
$P_{10\text{V}}=-10i_{l2}=-50\text{W}$，发出功率

$P_{15\mathrm{A}} = -15 \times [3 \times (i_{l1} + i_{l3}) + 1 \times (i_{l1} - i_{l2})]$

$\quad = -15 \times [3 \times 20 + 1 \times 10]$

$\quad = -1050\mathrm{W}$，发出功率

$P_{U_{\varphi}/4} = -\dfrac{1}{4}U_{\varphi} \times [3 \times (i_{l1} + i_{l3}) + U_{\varphi}] = -5 \times [3 \times 20 + 20] = -400\mathrm{W}$，发出功率



题解 3－13 图(a)

$P_{1\Omega} = 1 \times (i_{l1} - i_{l2})^2 = 100\mathrm{W}$

$P_{2\Omega} = \dfrac{U_{\varphi}^2}{2} = \dfrac{(4 \times 5)^2}{2} = 200\mathrm{W}$

$P_{3\Omega} = 3 \times (i_{l1} + i_{l3})^2 = 3 \times 20^2 = 1200\mathrm{W}$

$P_{发} = 50 + 1050 + 400 = 1500\mathrm{W}$

$P_{吸} = 100 + 200 + 1200 = 1500\mathrm{W}$

满足 $P_{发} = P_{吸}$，功率守恒。

(b) 回路电流的参考方向如图题解 3－13(b) 图所示。

列回路电流方程

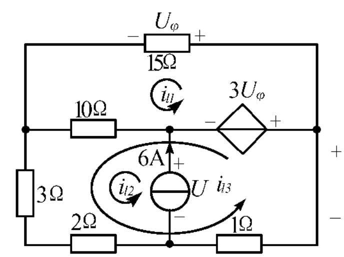
$$\begin{cases} (10+15)i_{l1} - 10i_{l2} - 10i_{l3} = 3U_{\varphi} \\ i_{l2} = 6\mathrm{A} \\ -10i_{l1} + (10+3+2)i_{l2} + (10+3+2+1)i_{l3} = -3U_{\varphi} \end{cases}$$

补充方程： $U_{\varphi} = 15i_{l1}$

整理，得

$$\begin{cases} -20i_{l1} - 10i_{l3} = 60 \\ 35i_{l1} + 16i_{l3} = -90 \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2i_{l1} + i_{l3} = -6 \\ 35i_{l1} + 16i_{l3} = -90 \end{cases}$$

解方程，得
$$\begin{cases} i_{l1} = 2\mathrm{A} \\ i_{l2} = 6\mathrm{A} \\ i_{l3} = -10\mathrm{A} \end{cases}$$



题解 3－13 图(b)

各元件的功率分别为

$P_{15\Omega} = 15 \times i_{l1}^2 = 60\mathrm{W}$

$P_{10\Omega} = 10 \times (i_{l1} - i_{l3} - i_{l2})^2 = 360\mathrm{W}$

$P_{3\Omega} = 3 \times (i_{l2} + i_{l3})^2 = 48\mathrm{W}$

$P_{2\Omega} = 2 \times (i_{l2} + i_{l3})^2 = 32\mathrm{W}$

$P_{1\Omega} = 1 \times i_{l3}^2 = 100\mathrm{W}$

$P_{6\mathrm{A}} = -6U = -6 \times (-3U_{\varphi} - 1 \times i_{l3}) = 480\mathrm{W}$

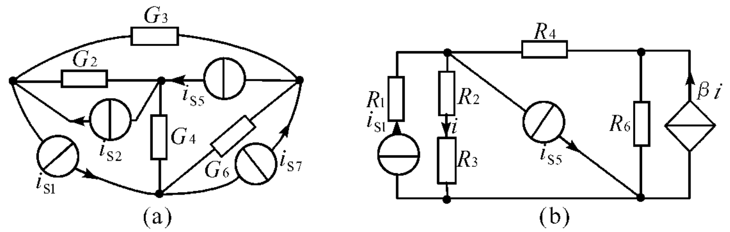
$P_{3U_{\varphi}} = 3U_{\varphi} \times (i_{l3} - i_{l1}) = 3 \times 15 \times 2 \times (-10 - 2) = -1080\mathrm{W}$发出功率

$P_{吸} = 60 + 360 + 48 + 32 + 100 + 480 = 1080\mathrm{W}$

$P_{发} = 1080\mathrm{W}$

$P_{吸} = P_{发}$，功率守恒。

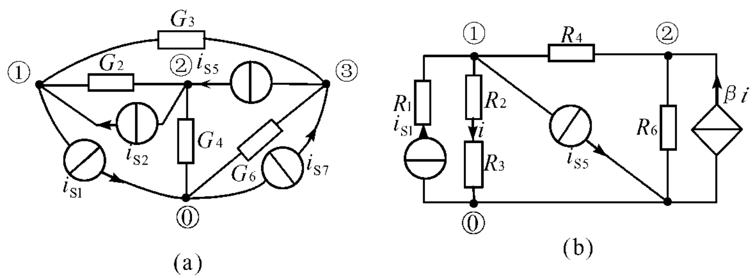
◎ 3－14　列出题 3－14 图中电路的结点电压方程。



题 3－14 图

分析　选取参照结点，列写结点电压方程求解即可。

解　（a）结点的选取和编号如题解 3－14 图（a）所示。



题解 3－14 图

设结点电压为 u_{n1}，u_{n2}，u_{n3}。

列结点电压方程

$$\begin{cases}(G_2+G_3)u_{n1}-G_2u_{n2}-G_3u_{n3}=i_{S2}-i_{S1}\\ -G_2u_{n1}+(G_2+G_4)u_{n2}=i_{S5}-i_{S2}\\ -G_3u_{n1}+(G_3+G_6)u_{n3}=i_{S7}-i_{S5}\end{cases}$$

（b）所选结点和编号如题解 3－14 图（b）所示。

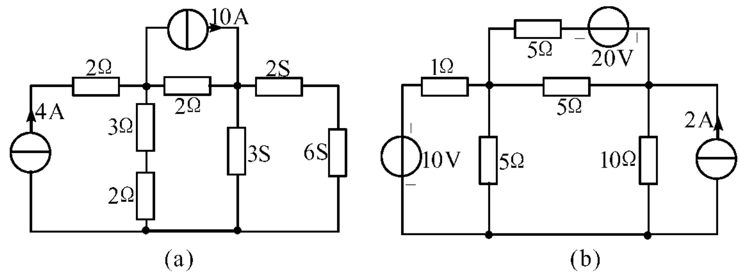
列结点电压方程

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_2+R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{R_4}u_{n2}=i_{S1}-i_{S5}\\ -\dfrac{1}{R_4}u_{n1}+\left(\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_6}\right)u_{n2}=\beta i\end{cases}$$

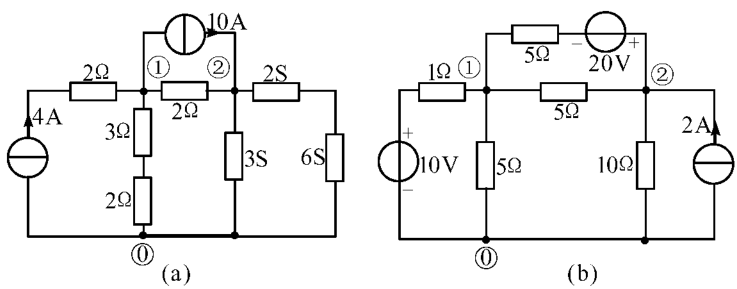
补充方程：

$$i=\frac{u_{n1}}{R_2+R_3}$$

◯ 3－15　列出题 3－15 图中电路的结点电压方程。



题 3－15 图



题解 3－15 图

解　(a) 所选结点如题解 3－15 图(a) 所示。

列结点电压方程
$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2+3}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{2}u_{n2}=4-10\\-\dfrac{1}{2}u_{n1}+\left(\dfrac{1}{2}+3+\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}}\right)u_{n2}=10\end{cases}$$

整理方程组,得
$$\begin{cases}0.7u_{n1}-0.5u_{n2}=-6\\-0.5u_{n1}+5u_{n2}=10\end{cases}$$

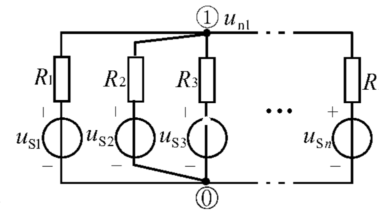
(b) 所选结点如题解 3－15 图(b) 所示。

列结点电压方程
$$\begin{cases}(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5})u_{n1}-(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5})u_{n2}=\dfrac{10}{1}-\dfrac{20}{5}\\-(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5})u_{n1}+(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10})u_{n2}=\dfrac{20}{5}+2\end{cases}$$

整理,得
$$\begin{cases}1.6u_{n1}-0.4u_{n2}=6\\-0.4u_{n1}+0.5u_{n2}=6\end{cases}$$

◎ 3－16　题 3－16 图所示为由电压源和电阻组成的一个独立结点的电路,用结点电压法证明其结点电压为

$$u_{n1}=\frac{\sum G_k u_{Sk}}{\sum G_k}$$



题 3－16 图

此式又称弥尔曼定理。

分析 列写结点电压方程，求出 u_{n1} 即可证明之。

证明 因为只有一个独立结点，所以不存在互导。

$$G_{11}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_n}$$

$$=G_1+G_2+\cdots+G_n=\sum_{k=1}^{n}G_k$$

$$i_{S11}=\frac{u_{S1}}{R_1}+\frac{u_{S2}}{R_2}+\cdots+\frac{u_{Sn}}{R_n}=u_{S1}G_1+u_{S2}G_2+\cdots+u_{Sn}G_n$$

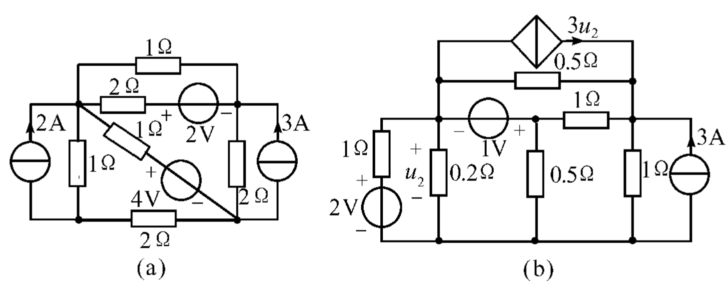
$$=\sum_{k=1}^{n}G_k u_{Sk}$$

结点电压方程为 $$G_{11}u_{n1}=i_{S11}$$

即 $$\sum_{k=1}^{n}G_k u_{n1}=\sum_{k=1}^{n}G_k u_{Sk}$$

所以 $$u_{n1}=\frac{\sum_{k=1}^{n}G_k u_{Sk}}{\sum_{k=1}^{n}G_k}$$

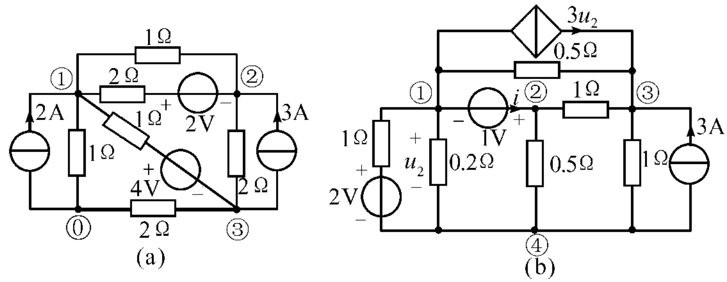
○ 3－17 列出题 3－17 图电路的结点电压方程。



题 3－17 图

解 (a) 结点编号如题解 3－17 图(a) 所示，列结点电压方程。

$$\begin{cases}(1+1+1+\frac{1}{2})u_{n1}-(1+\frac{1}{2})u_{n2}-u_{n3}=2+\frac{4}{1}+\frac{2}{2}\\-(1+\frac{1}{2})u_{n1}+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})u_{n2}-\frac{1}{2}u_{n3}=3-\frac{2}{2}\\-u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)u_{n3}=-\frac{4}{1}-3\end{cases}$$



题解 3－17 图

整理，得

$$\begin{cases}3.5u_{n1}-1.5u_{n2}-u_{n3}=7\\-1.5u_{n1}+2u_{n2}-0.5u_{n3}=2\\-u_{n1}-0.5u_{n2}+2u_{n3}=-7\end{cases}$$

(b) 结点编号如题解 3－17 图(b) 所示。

取结点④为参考点，将无伴电压源 1V 看做是电流为 i 的电流源。列结点电压方程

$$\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{0.2}+\dfrac{1}{0.5}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{0.5}u_{n3}=\dfrac{2}{1}-3u_2-i\\\left(1+\dfrac{1}{0.5}\right)u_{n2}-u_{n3}=i\\-\dfrac{1}{0.5}u_{n1}-u_{n2}+\left(1+1+\dfrac{1}{0.5}\right)u_{n3}=3+3u_2\end{cases}$$

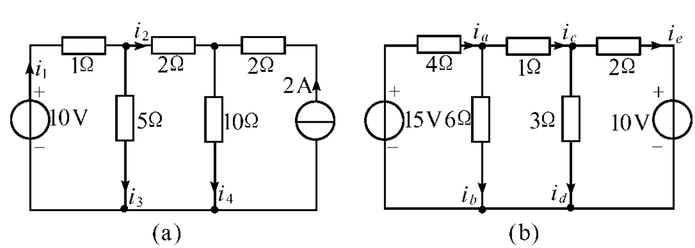
补充方程：

$$\begin{cases}u_2=u_{n1}\\u_{n2}-u_{n1}=1\end{cases}$$

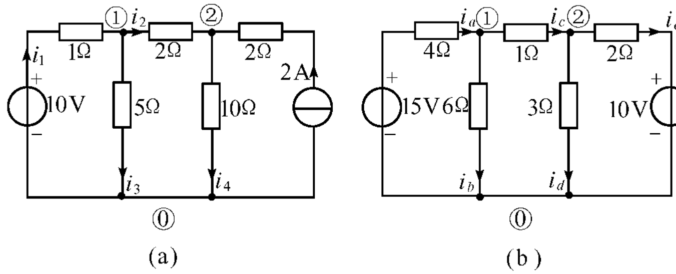
整理方程组，得

$$\begin{cases}11u_{n1}-2u_{n3}=2-i\\3u_{n2}-u_{n3}=i\\-5u_{n1}-u_{n2}+4u_{n3}=3\\u_{n2}-u_{n1}=1\end{cases}$$

◎3－18　用结点电压法求解题 3－18 图所示电路中各支路电流。



题 3－18 图



题解 3－18 图

解　(a) **如题解** 3－18 **图**(a) **所示，列结点电压方程**

$$\begin{cases}(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2})u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}=\frac{10}{1}\\ -\frac{1}{2}u_{n1}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{10})u_{n2}=2\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}1.7u_{n1}-0.5u_{n2}=10\\ -0.5u_{n1}+0.6u_{n2}=2\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}u_{n1}=9.091\text{V}\\ u_{n2}=10.909\text{V}\end{cases}$$

各支路电流

$$i_1=\frac{10-u_{n1}}{1}=0.909\text{A},\quad i_2=\frac{u_{n1}-u_{n2}}{2}=-0.909\text{A}$$

$$i_3=\frac{u_{n1}}{5}=1.818\text{A},\quad i_4=\frac{u_{n2}}{10}=1.091\text{A}$$

(b) **如题解** 3－18 **图**(b) **所示，列结点电压方程**

$$\begin{cases}(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+1)u_{n1}-u_{n2}=\frac{15}{4}\\ -u_{n1}+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})u_{n2}=\frac{10}{2}\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}17u_{n1}-12u_{n2}=45\\ -6u_{n1}+11u_{n2}=30\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}u_{n1}=7.435\text{V}\\ u_{n2}=6.783\text{V}\end{cases}$$

各支路电流

$$i_a=\frac{15-u_{n1}}{4}=1.891\text{A},\quad i_b=\frac{u_{n1}}{6}=1.239\text{A}$$

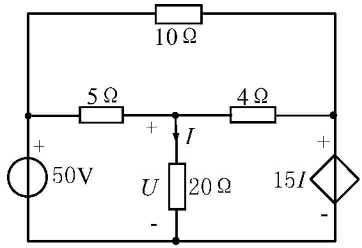
$$i_c=\frac{u_{n1}-u_{n2}}{1}=0.652\text{A},\quad i_d=\frac{u_{n2}}{3}=2.261\text{A},\quad i_e=\frac{u_{n2}-10}{2}=-1.609\text{A}$$

○3－19　$I_S=9A$，　$I_0=-3A$。

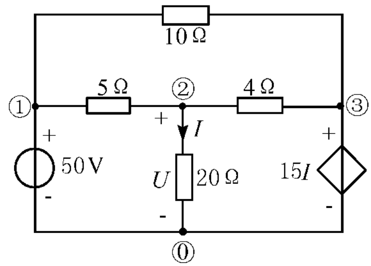
●3－20　**用结点电压法求解题3－20图所示电路中电压U。**

分析　选取参照结点，列写结点电压方程求解即可。

解　如题解3－20图所示，列结点电压方程



题3－20图



题解3－20图

$$\begin{cases} u_{n1}=50 \\ -\frac{1}{5}u_{n1}+(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20})u_{n2}-\frac{1}{4}u_{n3}=0 \\ u_{n3}=15I \end{cases}$$

补充方程：　$I=\frac{u_{n2}}{20}$

整理，得　$0.5u_{n2}-\frac{1}{4}\times15\times\frac{u_{n2}}{20}=\frac{50}{5}$

求得　$u_{n2}=32V$

所以　$U=u_{n2}=32V$

小结　结点电压方程不够的话，就要增加补充方程，补充方程一般为元件的伏安特性。

○3－21　**略**

●3－22　**用结点电压法求解题3－22图所示电路中u_{n1}和u_{n2}。你对此题有什么看法？**

分析　列写结点电压方程求解即可。

解　如题3－22图所示，列结点电压方程

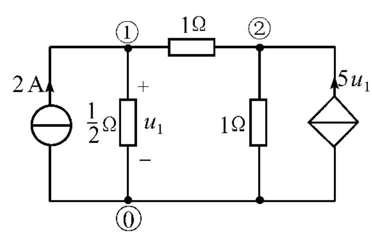
$$\begin{cases} (1+2)u_{n1}-u_{n2}=2 \\ -u_{n1}+(1+1)u_{n2}=5u_1 \end{cases}$$

补充方程：　$u_1=u_{n1}$

整理，得

$$\begin{cases} 3u_{n1}-u_{n2}=2 \\ -6u_{n1}+2u_{n2}=0 \end{cases}$$

可见该方程无解。只能说明该电路模型不切实际。



题3－22图

小结　方程无解，表明电路不合理。

○3－23　**略**

○3－24　**略**

第四章

电 路 定 理

学习要求

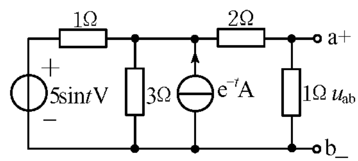
1. 掌握叠加定理、替代定理的基本内容、适用范围及条件，较熟练地应用这些定理分析电路。
2. 熟练掌握戴维宁定理、诺顿定理，熟练使用之求解电路问题。
3. 了解特勒根定理、互易定理的基本内容、适用范围及条件，会使用之求解某些类型的电路问题。
4. 逐步掌握多个定理、多种解法结合求解电路问题。

知识网络图

电路定理
- 叠加定理
- 替代定理
- 戴维宁定理和诺顿定理
- 特勒根定理
- 互易定理
- 对偶原理

课后习题全解

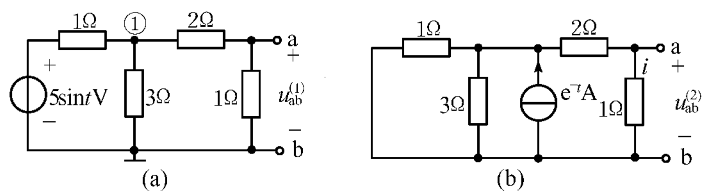
◎4－1　**应用叠加定理求题 4－1 图所示电路中电压 u_{ab}。**



题 4－1 图

分析　先让 $5\sin t$V 单独作用求解 $u_{ab}^{(1)}$，再让 e^{-t} 单独作用求解 $u_{ab}^{(2)}$，$u_{ab}=u_{ab}^{(1)}+u_{ab}^{(2)}$。

解　首先画出两个电源单独作用时的分电路如题解 4－1 图(a) 和图(b) 所示。



题解 4－1 图

对题解 4－1 图(a) 应用结点电压法可得：

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2+1}\right)u_{n1}=\frac{5\sin t}{1}$$

解得

$$u_{n1}=\frac{5\sin t}{\frac{5}{3}}=3\sin t\mathrm{V}$$

$$u_{ab}^{(1)}=\frac{u_{n1}}{2+1}\times 1=\frac{1}{3}u_{n1}=\frac{1}{3}\times 3\sin t=\sin t\mathrm{V}$$

对题解 4－1 图(b)，应用电阻的分流公式有：

$$i=\frac{e^{-t}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2+1}+1}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}e^{-t}\mathrm{A}$$

所以

$$u_{ab}^{(2)}=1\times i=\frac{1}{5}e^{-t}=0.2e^{-t}\mathrm{V}$$

故由叠加定理得

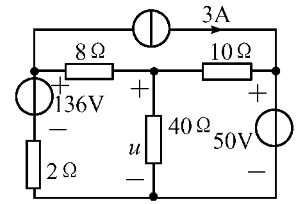
$$u_{ab}=u_{ab}^{(1)}+u_{ab}^{(2)}=\sin t+0.2e^{-t}\mathrm{V}$$

○ 4－2　**应用叠加定理求题 4－2 图示电路中电压 u。**

解　画出电源分别作用的分电路如题解 4－2 图(a) 和(b) 所示。

对题解图 4－2(a) 应用结点电压法有

$$\left(\frac{1}{8+2}+\frac{1}{40}+\frac{1}{10}\right)u_{n1}=\frac{136}{8+2}+\frac{50}{10}$$



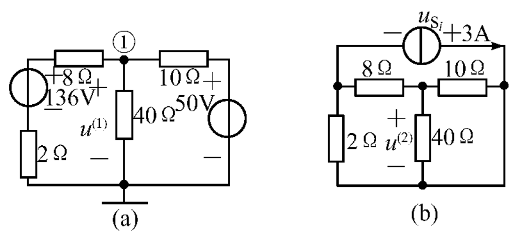
题 4－2 图

解得

$$u^{(1)}=u_{n1}=\frac{13.6+5}{0.1+0.025+0.1}$$

$$=\frac{18.6}{0.225}$$

$$=\frac{248}{3}=82.667\text{V}$$



题解 4－2 图

对题解 4－2 图(b)，应用电阻串并联化简方法，可求得

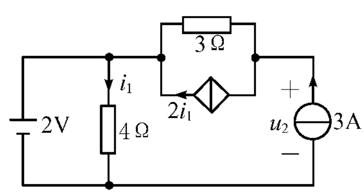
$$u_{S_i}=3\times\frac{2\times\left(8+\dfrac{10\times40}{10+40}\right)}{\left(8+\dfrac{10\times40}{10+40}\right)+2}=3\times\frac{32}{18}=\frac{16}{3}\text{V}$$

$$u^{(2)}=\frac{-u_{Si}}{2}=-\frac{16}{3}\times\frac{1}{2}=-\frac{8}{3}\text{V}$$

所以，由叠加定理得原电路的 u 为

$$u=u^{(1)}+u^{(2)}=\frac{248}{3}-\frac{8}{3}=\frac{240}{3}=80\text{V}$$

○ 4－3　**应用叠加定理求题 4－3 图所示电路中电压 u_2。**



题 4－3 图

解　根据叠加定理，作出 2V 电压源和 3A 电流源单独作用时的分电路如题解 4－3 图(a) 和(b) 所示，受控源均保留在分电路中。

题解 4 — 3 **图**(a) **中** $i_1^{(1)} = \dfrac{2}{4} = 0.5\text{A}$

所以根据 KVL **有**

$$u_2^{(1)} = -3 \times 2i_1^{(1)} + 2 = -3 \times 2 \times 0.5 + 2 = -1\text{V}$$

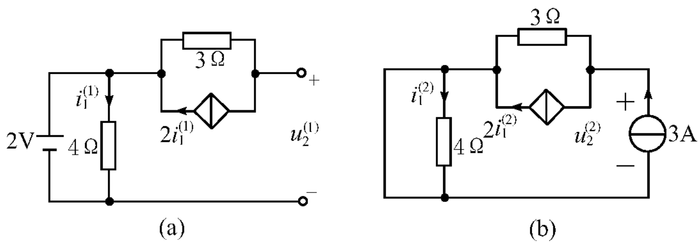
由题解 4 — 3 **图**(b),**得**

$$i_1^{(2)} = 0$$

$$u_2^{(2)} = 3 \times 3 = 9\text{V}$$

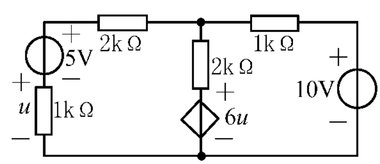
故原电路中的电压

$$u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} = -1 + 9 = 8\text{V}$$

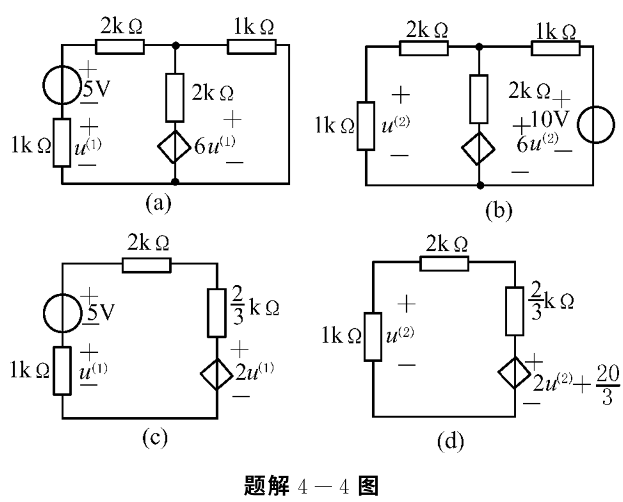


题解 4 — 3 **图**

○ 4 — 4 **应用叠加定理求题** 4 — 4 **图所示电路中电压** u。



题 4 — 4 **图**



题解 4 — 4 **图**

解　按叠加原理，作出5V和10V电压源单独作用时的分电路如题解4—4图(a)和(b)所示，受控电压源均保留在分电路中。

应用电源等效变换把题解4—4图(a)等效为题解4—4图(c)，题解4—4图(b)等效为题解4—4图(d)。由题解4—4图(c)，得

$$u^{(1)} = \frac{2u^{(1)} - 5}{1 + 2 + \frac{2}{3}} \times 1 = \frac{2u^{(1)} - 5}{\frac{11}{3}}$$

从中解得

$$u^{(1)} = -3\text{V}$$

由题解4—4图(d)得

$$u^{(2)} = \frac{2u^{(2)} + \frac{20}{3}}{2 + \frac{2}{3} + 1} \times 1 = \frac{2u^{(2)} + \frac{20}{3}}{\frac{11}{3}}$$

从中解得

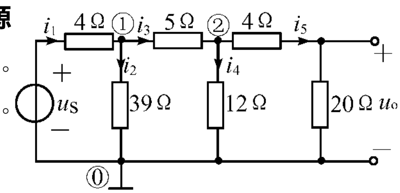
$$u^{(2)} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{11}{3} - 2} = 4\text{V}$$

故原电路的电压

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} = -3 + 4 = 1\text{V}$$

○ 4—5　试求题4—5图所示梯形电路中各支路电流，结点电压和$\frac{u_o}{u_S}$。其中$u_S = 10\text{V}$。

解　由齐性定理可知，当电路中只有一个独立源时，其任意电路的响应与该独立源成正比。用齐性定理分析本题的梯形电路特别有效。现设支路电流如图所示，若给定



题4—5图

$$i_5 = i'_5 = 1\text{A}$$

则可计算出各支路电压电流分别为

$$u_o = u'_o = i'_5 \times 20 = 20\text{V}$$

$$u_{n2} = u'_{n2} = i'_5 \times (4 + 20) = 1 \times 24 = 24\text{V}$$

$$i_4 = i'_4 = u'_{n2}/12 = 24/12 = 2\text{A}$$

$$i_3 = i'_3 = i'_4 + i'_5 = 2 + 1 = 3\text{A}$$

$$u_{n1} = u'_{n1} = i'_3 \times 5 + u'_{n2} = 3 \times 5 + 24 = 39\text{V}$$

$$i_2 = i'_2 = u_{n1}/39 = 39/39 = 1\text{A}$$

$$i_1 = i'_1 = i'_2 + i'_3 = 1 + 3 = 4\text{A}$$

$$u_S = u'_S = i'_1 \times 4 + u'_{n1} = 4 \times 4 + 39 = 55\text{V}$$

即当激励 $u_S = u'_S = 55\text{V}$ 时，各电压、电流如以上计算数值，现给定 $u_S = 10\text{V}$，相当于将以上激励 u'_S 变为原来的$\frac{10}{55}$倍，即 $K = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$。

故电路各支路的电流和结点电压应同时变为原来的 2/11 倍，有

$$i_1 = Ki'_1 = \frac{2}{11} \times 4 = 0.727\text{A}$$

$$i_2 = Ki'_2 = \frac{2}{11} \times 1 = \frac{2}{11}\text{A}$$

$$i_3 = Ki'_3 = \frac{2}{11} \times 3 = \frac{6}{11}\text{A}$$

$$i_4 = Ki'_4 = \frac{2}{11} \times 2 = \frac{4}{11}\text{A}$$

$$i_5 = Ki'_5 = \frac{2}{11} \times 1 = \frac{2}{11}\text{A}$$

$$u_{n1} = Ku'_{n1} = \frac{2}{11} \times 39 = \frac{78}{11}\text{V}$$

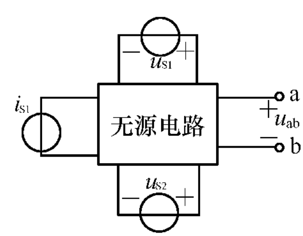
$$u_{n2} = Ku'_{n2} = \frac{2}{11} \times 24 = \frac{48}{11}\text{V}$$

$$u_o = Ku'_o = \frac{2}{11} \times 20 = \frac{40}{11}\text{V}$$

输出电压和激励的比值为

$$\frac{u_o}{u_S} = \frac{\frac{40}{11}}{10} = \frac{4}{11} = 0.364$$

◎ 4－6　题 4－6 图所示电路中，当电流源 i_{S_1} 和电压源 u_{S_1} 反方向时（u_{S_2} 不变），电压 u_{ab} 是原来的 0.5 倍；当 i_{S_1} 和 u_{S_2} 反向时（u_{S_1} 不变），电压 u_{ab} 是原来的 0.3 倍。问：仅 i_{S_1} 反向（u_{S_1}，u_{S_2} 均不变），电压 u_{ab} 应为原来的几倍？



题 4－6 图

分析　利用叠加定理求解即可。

解　根据叠加定理，设响应

$$u_{ab} = K_1 i_{S1} + K_2 u_{S1} + K_3 u_{S2} \qquad ①$$

式中 K_1, K_2, K_3 为未知的比例常数，将已知条件代入上式，得

$$0.5u_{ab} = -K_1 i_{S1} - K_2 u_{S1} + K_3 u_{S2} \qquad ②$$

$$0.3u_{ab} = -K_1 i_{S1} + K_2 u_{S1} - K_3 u_{S2} \qquad ③$$

$$xu_{ab} = -K_1 i_{S1} + K_2 u_{S1} + K_3 u_{S2} \qquad ④$$

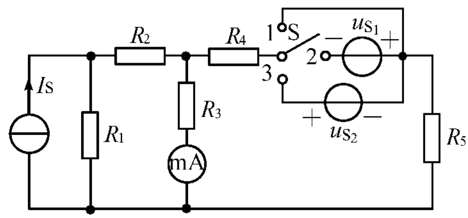
将 ①，②，③ 式相加，得

$$1.8u_{ab} = -K_1 i_{S1} + K_2 u_{S1} + K_3 u_{S2} \quad ⑤$$

显然 ⑤ 式等号右边的式子恰等于 ④ 式等号右边的式子。因此得所求倍数

$$x = 1.8$$

◎ 4－7　题 4－7 图示电路中 $u_{S1} = 10\text{V}$，$u_{S2} = 15\text{V}$，当开关 S 在位置 1 时，毫安表的读数为 $I' = 40\text{mA}$；当开关 S 合向位置 2 时，毫安表的读数为 $I'' = -60\text{mA}$。如果把开关 S 合向位置 3，毫安表的读数为多少？



题 4－7 图

分析　当开关 S 在位置 1 时，电路中仅有电流源作用；当 S 在位置 2 时，I_S 与 u_{S1} 同时作用；当 S 在位置 3 时，I_S 与 u_{S2} 同时作用。利用叠加定理求解即可。

解　设流过电流表的电流为 I，根据叠加定理

$$I = K_1 I_S + K_2 u_S$$

当开关 S 在位置 1 时，相当于 $u_S = 0$，当开关 S 在位置 2 时，相当于 $u_S = u_{S1}$，当开关 S 在位置 3 时，相当于 $u_S = -u_{S2}$，把上述条件代入以上方程式中，可得关系式

$$40 = K_1 I_S$$

$$-60 = K_1 I_S + K_2 u_{S1} = 40 + K_2 \times 10$$

从中解出　$K_2 = \dfrac{-100}{10} = -10$

所以当 S 在位置 3 时，有

$$\begin{aligned} I &= K_1 I_S + K_2 u_{S2} = 40 + (-10) \times (-15) \\ &= 190\text{mA} \end{aligned}$$

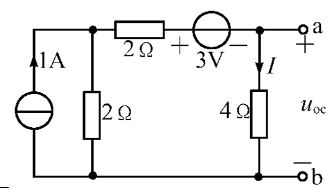
○ 4－8　求题 4－8 图示电路的戴维宁和诺顿等效电路。

解　求开路电压 u_{oc}。设 u_{oc} 参考方向如题 4－8 图所示，由 KVL 列方程

$$(2+4)I + 3 + 2(I-1) = 0$$

解得　$I = -\dfrac{1}{8}\text{A}$

$$u_{oc} = 4 \times I = 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = -0.5\text{V}$$

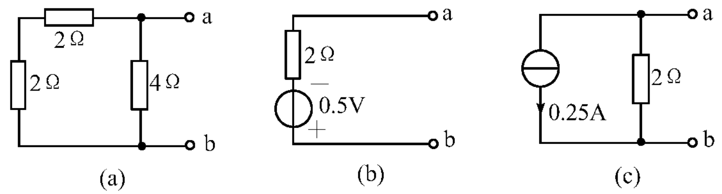


题 4－8 图

求等效电阻 R_{eq}。将原图中电压源短路，电流源开路，电路变为题解 4－8 图(a)，应用电阻串并联等

效，求得

$$R_{eq} = (2+2) \mathbin{/\!/} 4 = 2\Omega$$

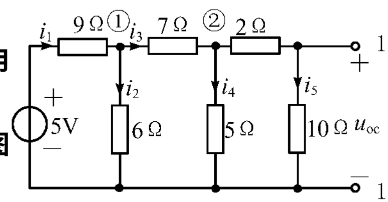


题解 4－8 图

画出戴维宁等效电路如题解 4－8 图(b) 所示，应用电源等效变换得诺顿等效电路如题解 4－8 图(c) 所示。其中

$$I_{sc} = \frac{u_{oc}}{R_{eq}} = \frac{-0.5}{2} = -0.25\text{A}$$

○ 4－9　求题 4－9 图示电路的戴维宁等效电路。



题 4－9 图

解　本题电路为梯形电路，根据齐性定理，应用“倒退法”求开路电压 u_{oc}。

设 $u_{oc} = u'_{oc} = 10\text{V}$，各支路电流如题 4－9 图所示，计算得

$$i_5 = i'_5 = \frac{10}{10} = 1\text{A}$$

$$u_{n2} = u'_{n2} = (2+10) \times 1 = 12\text{V}$$

$$i_4 = i'_4 = \frac{u'_{n2}}{5} = \frac{12}{5} = 2.4\text{A}$$

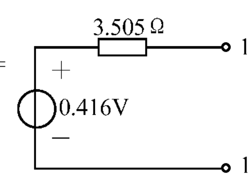
$$i_3 = i'_3 = i'_4 + i'_5 = 2.4 + 1 = 3.4\text{A}$$

$$u_{n1} = u'_{n1} = 7 \times i'_3 + u'_{n2} = 7 \times 3.4 + 12 = 35.8\text{V}$$

$$i_2 = i'_2 = \frac{u'_{n1}}{6} = \frac{35.8}{6} = 5.967\text{A}$$

$$i_1 = i'_2 + i'_3 = 5.967 + 3.4 = 9.367\text{A}$$

$$u_S = u'_S = 9 \times i'_1 + u_{n1} = 9 \times 9.367 + 35.8 = 120.1\text{V}$$



题解 4－9 图

故当 $u_S = 5\text{V}$ 时，开路电压 u_{oc} 为

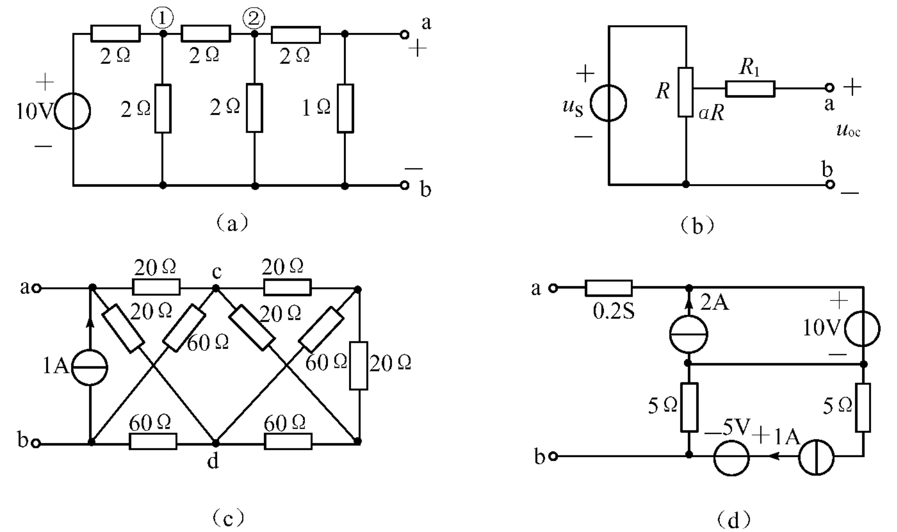
$$u_{oc} = Ku'_{oc} = \frac{5}{120.1} \times 10 = 0.416\text{V}$$

将电路中的电压源路短，应用电阻串并联等效，求得等效电阻 R_{eq} 为

$$R_{eq} = [(9 \mathbin{/\!/} 6 + 7) \mathbin{/\!/} 5 + 2] \mathbin{/\!/} 10 = 3.505\Omega$$

画出戴维宁等效电路如题解 4－9 图所示。

○ 4－10　**求题 4－10 图中各电路在 ab 端口的戴维宁等效电路或诺顿等效电路。**



题 4－10 图

解　(a) 先求开路电压 u_{oc}。应用结点电压法，结点编号如题 4－10 图(a) 所示。结点方程

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)u_{n1}-\frac{1}{2}u_{n2}=\frac{10}{2}\\ -\frac{1}{2}u_{n1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)u_{n2}=0\end{cases}$$

把以上方程加以整理有

$$\begin{cases}3u_{n1}-u_{n2}=10\\ -3u_{n1}+8u_{n2}=0\end{cases}$$

应用消去法，解得

$$u_{n2}=\frac{10}{7}\text{V}$$

故开路电压

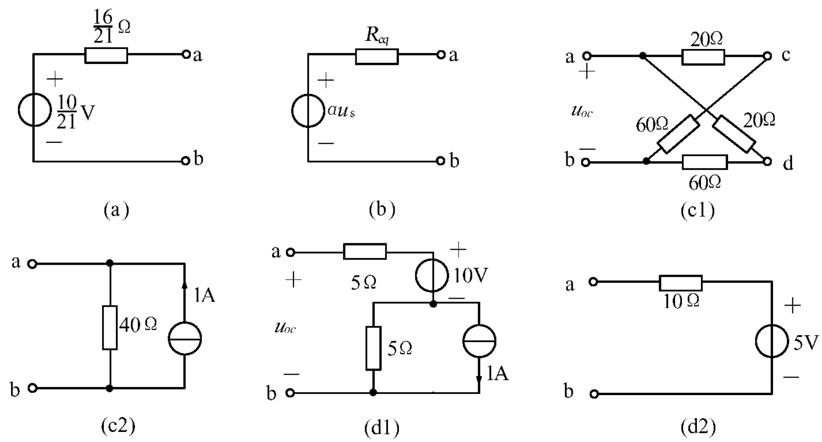
$$u_{oc}=\frac{u_{n2}}{2+1}\times 1=\frac{10}{21}\text{V}$$

再把电压源短路应用电阻串并联求等效内阻 R_{eq}

$$R_{eq}=[(2\,/\!/\,2+2)\,/\!/\,2+2]\,/\!/\,1=\frac{16}{21}\Omega$$

画出戴维宁等效电路如题解 4－10 图(a) 所示。

(b) 应用电阻分压求得开路电压 u_{oc} 为：



题解 4－10 图

$$u_{oc}=\frac{u_S}{R}\times\alpha R=\alpha u_S$$

把电压源短路，可求得等效电阻为 $R_{eq}=[(R-\alpha R)\ /\!/\ \alpha R]+R_1=\alpha(1-\alpha)R+R_1$ 等效电路如题解 4－10 图(b) 所示。

(c) 这个问题用诺顿定理求解比较方便。把 ab 端口短路，显然短路电流等于电流源的电流，即 $I_{sc}=I_{ab}=1A$。

把电流源开路求等效电阻 R_{eq}。由于电路是一平衡电桥，可以把 cd 右侧电阻电路断去如题解 4－10 图(c1) 所示，则

$$R_{eq}=(20+60)\ /\!/\ (20+60)=40\Omega$$

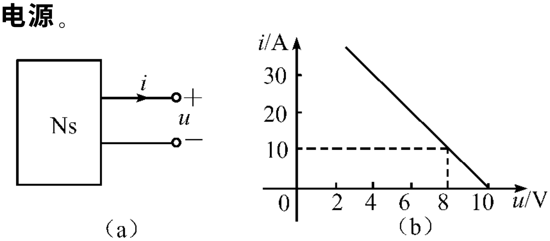
画出诺顿等效电路如题解 4－10 图(c2) 所示。

(d) 应用替代定理，题 4－10 图(d) 可以等效变换为题解 4－10 图(d1) 所示的电路。则开路电压为 $u_{oc}=10-5\times1=5V$

把题解 4－10 图(d1) 中的电压源短路，电流源开路，等效电阻 $R_{eq}=5+5=10\Omega$

画出戴维宁等效电路如题解 4－10 图(d2) 所示。

○ 4－11　题 4－11 图(a) 所示含源一端口的外特性曲线画于题 4－11 图(b) 中，求其等效电源。



题 4－11 图

解　根据戴维宁定理可知，图示含源一端口电路可以等效为题解 4－11 图所示的电源电路，其端口电压 u 和电流 i 满足关系式：

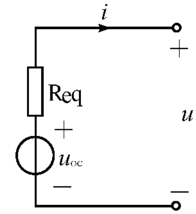
$$u = u_{oc} - R_{eq} i$$

题 4－11 图(b)所示的含源一端口的外特性曲线方程为

$$u = 10 - \frac{1}{5} i$$

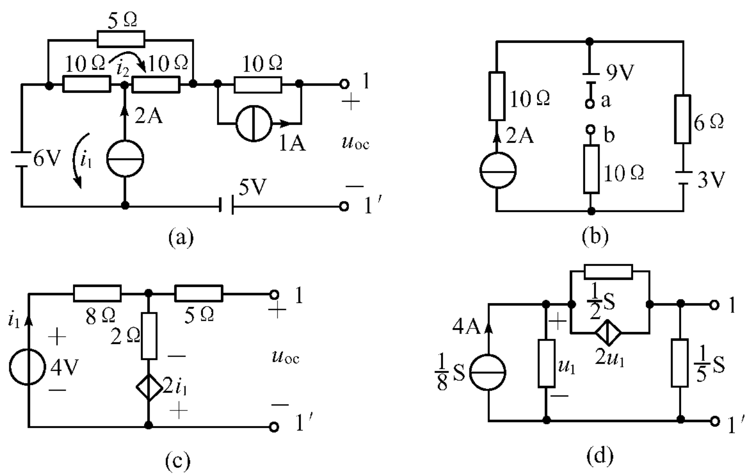
比较以上两个方程式，可得等效电源电路的参数

$$u_{oc} = 10\text{V}, R_{eq} = \frac{1}{5} = 0.2\Omega$$



题解 4－11 图

●4－12　求题 4－12 图示各电路的等效戴维宁电路或诺顿电路。



题 4－12 图

分析　利用各种电路等效变换可求解 u_{oc}、R_{eq}、i_{sc}，即可求其等效戴维宁电路或诺顿电路。

解　(a) 先求开路电压 u_{oc}。应用网孔电流法，设网孔电流 i_1，i_2，其绕行方向如题 4－12 图(a)所示。列网孔电流方程为

$$\begin{cases} i_1 = 2 \\ 10 i_1 + (10 + 10 + 5) i_2 = 0 \end{cases}$$

联立求解以上方程，可得

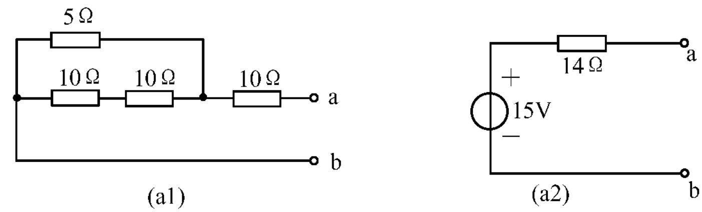
$$i_2 = \frac{-20}{25} = -0.8\text{A}$$

故开路电压为

$$u_{oc} = 10 \times 1 - 5 i_2 + 6 - 5 = 11 + 5 \times 0.8 = 15\text{V}$$

将电压源短接，电流源断开，得题解 4－12 图(a1)所示电路，应用电阻串、并联

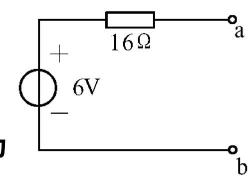
等效求得等效电阻



题解 4－12 图

$$R_{eq} = 5 \mathbin{/\!/} (10 + 10) + 10 = 14\Omega$$

戴维宁等效电路如题解 4－12 图(a2) 所示。



题解 4－12 图(b)

(b) 根据 KVL 求开路电压 u_{ab} 为

$$u_{ab} = -9 + 6 \times 2 + 3 = 6V$$

把 3V 电压源短路，2A 电流源断开，可以看出等效电阻为

$$R_{eq} = 10 + 6 = 16\Omega$$

戴维宁等效电路见题解 4－12 图(b)。

(c) 设开路电压参考方向如题 4－12 图(c) 所示。显然 u_{oc} 等于受控源所在支路的电压，即

$$u_{oc} = 2i_1 - 2i_1 = 0$$

由于电路中有受控源，求等效电阻时不能用电阻串、并联等效的方法，现采用求输入电阻的外加电源法。将题 4－12 图(c) 中 4V 独立电压源短路，在 ab 端子间加电压源 u 如题解 4－12 图(c1) 所示。根据 KVL 列方程。

$$\begin{cases} u = 5i - 8i_1 \\ 8i_1 + 2(i + i_1) - 2i_1 = 0 \end{cases}$$

从第二个方程中解出

$$i_1 = -\frac{2}{8}i = -\frac{1}{4}i$$

把 i_1 代入第一个方程中，可得

$$u = 5i - 8 \times (-\frac{1}{4}i) = 7i$$

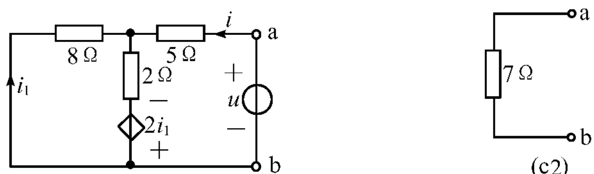
故等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = 7\Omega$$

画出戴维宁等效电路如题解 4－12 图(c2) 所示。

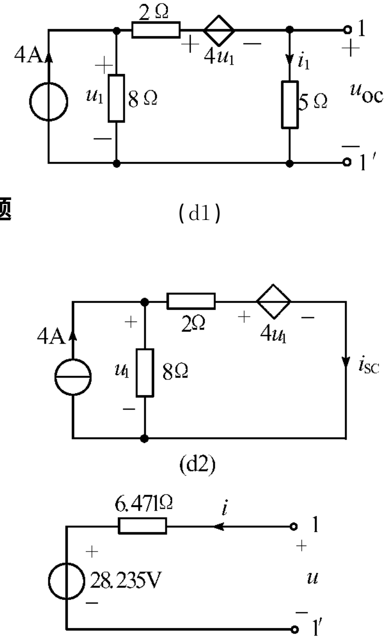
(d) 先求开路电压 u_{oc}。把题 4－12 图(d) 中受控电流源与电阻的并接支路等效变换为受控电压源与电阻的串接支路如题解 4－12 图(d1) 所示。由 KVL 得

$$(2 + 5)i_1 + 4u_1 - u_1 = 0$$



(c1)　　(c2)

题解 4－12 图



(d1)　(d2)　(d3)

题解 4－12 图

把 $u_1 = (4 - i_1) \times 8$ 代入上式中，解得

$$i_1 = \frac{96}{17} = 5.647\text{A}$$

故开路电压

$$u_{oc} = 5 \times i_1 = 5 \times 5.647 = 28.235\text{V}$$

把题解 4－12 图(d1) 中的 1—1′ 端子短接如题解 4－12 图(d2) 所示。由 KVL 得

$$2i_{sc} + 4u_1 - u_1 = 0$$

即

$$i_{sc} = -\frac{3}{2}u_1$$

把 $u_1 = 8 \times (4 - i_{sc})$ 代入上式中，有

$$i_{sc} = -\frac{3}{2} \times 8 \times (4 - i_{sc})$$

解得

$$i_{sc} = \frac{48}{11} = 4.364\text{A}$$

则等效电阻

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{28.235}{4.364} = 6.471\Omega$$

戴维宁等效电路如题解 4－12 图(d3) 所示。

小结　求戴维宁电路时，要求 u_{oc} 和 R_{eq}，求诺顿电路时，要求 i_{sc} 和 R_{eq}。

○ 4－13　求题 4－13 图示两个一端口的戴维宁或诺顿等效电路，并解释所得结果。

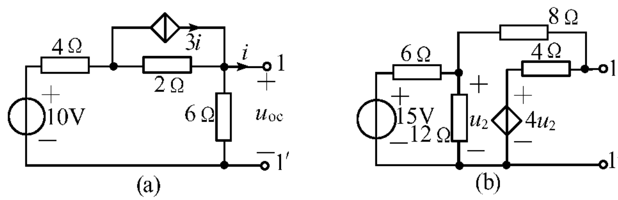
解　(a) 因为端口开路，端口电流 $i = 0$，故受控电流源的电流为零，可将其断开，从而得开路电压

$$u_{oc} = \frac{10}{4+2+6} \times 6 = 5\text{V}$$

把端口短路，电路变为题解 4－13 图(a1) 所示电路。由 KVL 可得

$$(4+2)i_{sc} - 2 \times 3i_{sc} = 10$$

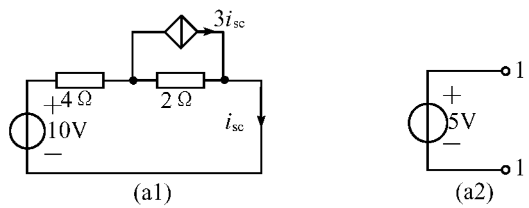
从中解出



题 4－13 图

$$i_{sc} = \frac{10}{4+2-2\times 3} = \infty$$

这说明该电路的等效电阻 $R_{eq} = \dfrac{u_{oc}}{i_{sc}} = 0$，故等效电路为题解 4－13 图(a2) 所示的 5V 理想电压源。显然其诺顿等效电路是不存在的。



题解 4－13 图

(b) 把端子 1—1′ 短路。电路如题解 4－13 图(b1) 所示。由题 4－13 图(b) 可知 12Ω 电阻和 8Ω 电阻并联，则电压

$$u_2 = \frac{15}{6+\dfrac{12\times 8}{12+8}} \times \frac{12\times 8}{12+8} = \frac{20}{3}\text{V}$$

电流 i_{sc} 为

$$i_{sc} = i_1 + i_2 = \frac{u_2}{8} + \frac{4u_2}{4} = \frac{9}{8}u_2 = \frac{9}{8}\times\frac{20}{3} = 7.5\text{A}$$

把 15V 电压源短路，应用外加电源法求等效电阻 R_{eq}，由题解 4－13 图(b2)，可得

$$u_2 = \frac{u}{8+\dfrac{6\times 12}{6+12}} \times \frac{6\times 12}{6+12} = \frac{u}{8+4}\times 4 = \frac{u}{3}$$

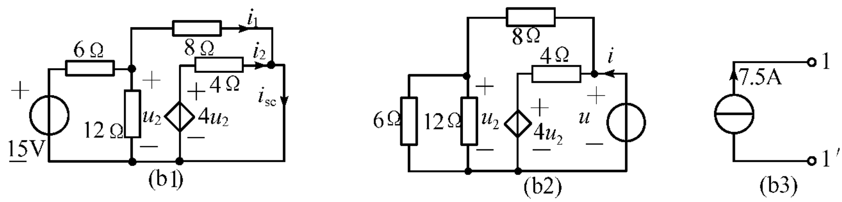
$$i = \frac{u-4u_2}{4} + \frac{u_2}{6\,/\!/\,12} = \frac{u}{4} - \frac{3}{4}u_2 = \frac{u}{4} - \frac{3}{4}\times\frac{u}{3} = 0$$

说明该电路的等效电阻

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = \frac{1}{0} = \infty$$

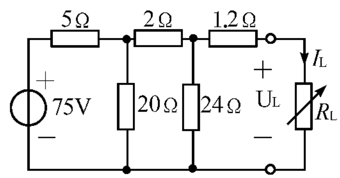
故等效电路为一电流为 7.5A 的理想电流源，即该电路只有诺顿等效电路，如

题解 4－13 图(b3) 所示，而不存在戴维宁等效电路模型。



题解 4－13 图

◎ 4－14　在题 4－14 图所示电路中，当 R_L 取 0，2，4，6，10，18，24，42，90 和 186Ω 时，求 R_L 的电压 U_L、电流 I_L 和 R_L 消耗的功率(可列表表示各结果)。



题 4－14 图

分析　将左边电路等效为戴维宁电路，即可容易求解。

解　先把 R_L 支路断开如题解 4－14 图(a) 所示。应用电源等效互换得一端口电路的戴维宁等效电路的电压和电阻为

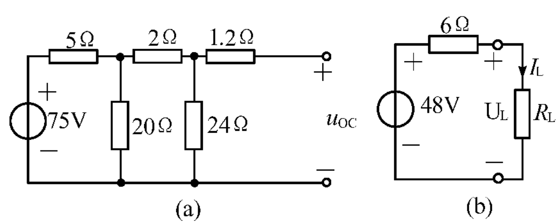
$u_{oc} = 48\text{V}$，　$R_{eq} = 6\Omega$

接上 R_L 支路，如题解 4－14 图(b) 所示，则

$$I_L = \frac{48}{6 + R_L}$$

$$U_L = R_L I_L$$

$$P_L = R_L I_L^2$$



题解 4－14 图

把 R_L 的各个值代入，计算得 U_L、I_L、P_L 的值如下表所示。

R_L(Ω)	0	2	4	6	10	18	24	42	90	186
I_L(A)	8	6	4.8	4	3	2	1.6	1	0.5	0.25
U_L(V)	0	12	19.2	24	30	36	38.4	42	45	46.5
P_L(W)	0	72	92.16	96	90	72	61.44	42	22.5	11.625

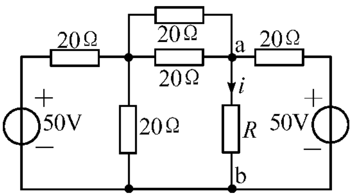
◎ 4－15　在题 4－15 图示电路中，试问：

(1)R 为多大时，它吸收的功率最大？求此最大功率。

(2) 若 $R=80\Omega$，欲使 R 中电流为零，则 a，b 间应并接什么元件，其参数为多少？画出电路图。

分析 先将电路等效为戴维宁电路，然后由最大功率传输定理，即 $R=R_{eq}$ 时，P 最大，$P_{max}=\dfrac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}$，即可求解。

解 (1) 自 a，b 断开 R 所在支路，应用电阻串、并联及电源等效互换将原图变为题解 4－15 图(a)，由题解 4－15 图(a) 易求得开路电压



题 4－15 图

$$u_{oc}=\frac{50-25}{10+10+20}\times(10+10)+25=37.5\text{V}$$

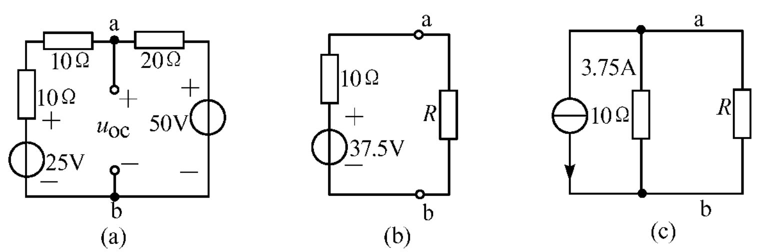
将题解 4－15 图(a) 中电压源短路，求等效电阻

$$R_{eq}=(10+10)\ /\!/\ 20=10\Omega$$

最后得等效电路如题解 4－15 图(b) 所示，由最大功率传输定理可知，当 $R=R_{eq}=10\Omega$ 时，其上可获得最大功率，此时

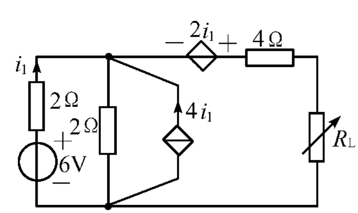
$$P_{max}=\frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}=\frac{37.5^2}{4\times10}=35.156\text{W}$$

(2) 利用电源等效互换，题解 4－15 图(b) 电路可以变化为题解 4－15 图(c)，由 KCL 可知，在 a，b 间并接一个理想电流源，其值 $i_S=3.75\text{A}$，方向由 a 指向 b，这样 R 中的电流将为零。



题解 4－15 图

○ 4－16 题 4－16 图示电路的负载电阻 R_L 可变，试问 R_L 等于何值时可吸收最大功率？求此功率。



题 4－16 图

解 首先求出 R_L 以左部分的等效电路。断开 R_L，设 u_{oc} 如题解 4－16 图(a) 所示，并把受控电流源等效为受控电压源。由 KVL 可得

$$(2+2)i_1+8i_1=6$$

$$i_1=\frac{6}{12}=0.5\text{A}$$

故开路电压

$$u_{oc}=2i_1+2i_1+8i_1=12i_1=12\times0.5=6\text{V}$$

把端口短路，如题解 4－16 图(b) 所示应用网孔电流法求短路电流 i_{sc}，网孔方程为

$$\begin{cases}(2+2)i_1-2i_{sc}+8i_1=6\\-2i_1+(2+4)i_{sc}-(2+8)i_1=0\end{cases}$$

解得

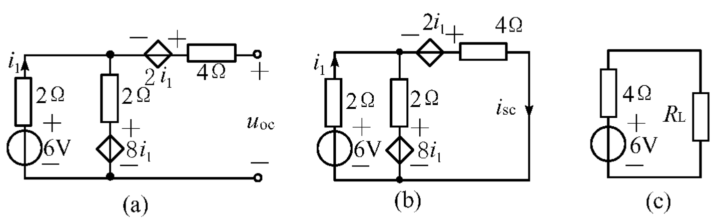
$$i_{sc}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\text{A}$$

故一端口电路的等效电阻

$$R_{eq}=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}=\frac{6}{3/2}=4\Omega$$

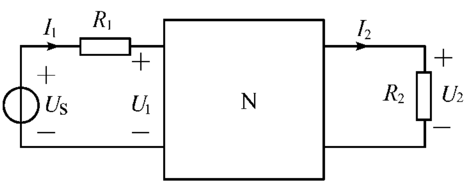
画出戴维宁等效电路，接上待求支路 R_L，如题解 4－16 图(c) 所示。由最大功率传输定理知 $R_L=R_{eq}=4\Omega$ 时其上获得最大功率。R_L 获得的最大功率为

$$P_{max}=\frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}=\frac{6^2}{4\times4}=\frac{36}{16}=2.25\text{W}$$



题解 4－16 图

○ 4－17　题 4－17 图所示电路中 N(方框内部) 仅由电阻组成。对不同的输入直流电压 U_S 及不同的 R_1，R_2 值进行了两次测量，得下列数据：$R_1=R_2=2\Omega$ 时，$U_S=8\text{V}$，$I_1=2\text{A}$，$U_2=2\text{V}$；$R_1=1.4\Omega$，$R_2=0.8\Omega$ 时，$U_S=9\text{V}$，$I_1=3\text{A}$，求 U_2 的值。



题 4－17 图

解　设 N 网络两个端口的电压为 U_1，U_2 如图所示。由题意可知：

第一次测量，有

$$U_1=U_S-R_1I_1=8-2\times2=4\text{V}$$

$$U_2=2\text{V},\quad I_1=2\text{A}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{2}{2} = 1\text{A}$$

第二次测量，有

$$U_1 = U_S - R_1 I_1 = 9 - 1.4 \times 3$$
$$= 9 - 4.2 = 4.8\text{V}$$
$$I_1 = 3\text{A}$$
$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_2}{0.8}$$

根据特勒根定理 2，应满足

$$U_1(-I_1) + U_2 I_2 = U_1(-I_1) + U_2 I_2$$

代入数据，有

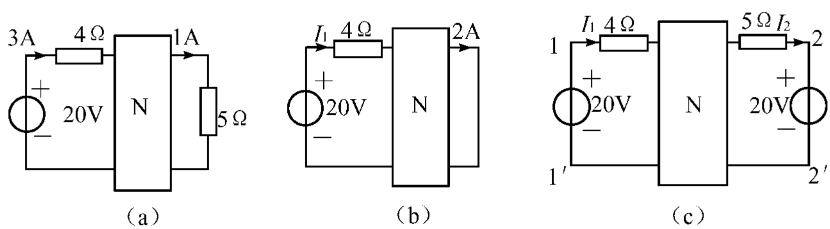
$$4 \times (-3) + 2 \times \frac{U_2}{0.8} = 4.8 \times (-2) + U_2 \times 1$$

从中解得

$$U_2 = \frac{12 - 9.6}{\frac{6}{4}} = \frac{4}{6} \times 2.4 = 1.6\text{V}$$

○4－18　$U'_1 = 3\text{V}$

● 4－19　题 4－19 图中网络 N 仅由电阻组成。根据图(a)和图(b)的已知情况，求图(c)中电流 I_1 和 I_2。



题 4－19 图

分析　图(a)、(b)、(c)有多处相似处，可利用叠加定理. 互易定理. 特勒根定理求解。

解　首先求电流 I_1。

对图(c)应用叠加定理。两个电源单独作用的分电路为题 4－19 图(a)和题解 4－19 图。由题 4－19 图(a)知

$$I_1^{(1)} = 3\text{A}, \quad I_2^{(1)} = 1\text{A}$$

题解 4－19 图相当于把题 4－19 图(a)中的激励和响应互换，因此根据互易定理可得

$$I_1^{(2)} = -I_2^{(1)} = -1\text{A}$$

故题 4－19 **图**(c) **中的电流** I_1 **为**

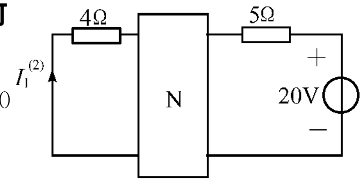
$$I_1 = I_1^{(1)} + I_2^{(1)} = 3 - 1 = 2\text{A}$$

下面求电流 I_2。

对题 4－19 **图**(a) **和**(b) **应用特勒根定理** 2，**可得**

$$20 \times (-I_1) + 1 \times 5 \times 2 = (-3) \times 20 + 1 \times 0$$

$$I_1 = \frac{70}{20} = 3.5\text{A}$$



题解 4－19 **图**

再对题 4－19 **图**(b) **和**(c) **应用特勒根定理** 2，**并把前面求得的** $I_1 = 2\text{A}$ **和** $I_1 = -3.5\text{A}$ **代入，有**

$$20 \times (-I_1) + (5I_2 + 20) \times 2 = 20 \times (-I_1) + 0 \times I_2$$

即

$$20 \times (-3.5) + 10I_2 + 40 = 20 \times (-2)$$

故解得

$$I_2 = \frac{-40 - 40 + 70}{10} = -1\text{A}$$

小结　**一般情况下，电路中带有未知网络的，先观察电阻电路的特点，再综合利用各电路定理求解即可。**

○4－20　$U_1 = 7.2\text{V}$

○ 4－21　**题** 4－21 **图所示电路中** N **仅由电阻组成。已知图**(a) **中电压** $U_1 = 1\text{V}$，**电流** $I_2 = 0.5\text{A}$，**求图**(b) **中** I_1。

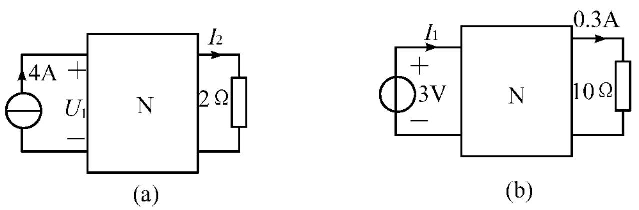
解　**对图**(a) **和**(b) **应用特勒根定理：**

$$U_1 \times (-I_1) + 2 \times I_2 \times 0.3 = (-4) \times 3 + I_2 \times 0.3 \times 10$$

把 $U_1 = 1\text{V}$，$I_2 = 0.5\text{A}$ **代入上式中，有**

$$-I_1 + 0.3 = -12 + 1.5$$

故解得　$$I_1 = 10.8\text{A}$$



题 4－21 **图**

○4－22　**略**

第五章

含有运算放大器的电阻电路

学习要求

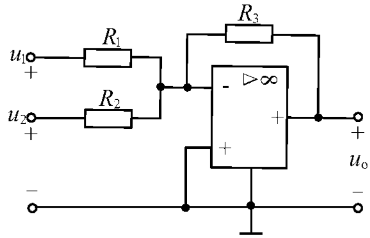
1. 理解运算放大器的电路模型：实际运算放大器、理想运算放大器。
2. 掌握含理想运算放大器电阻电路的分析方法。

知识网络图

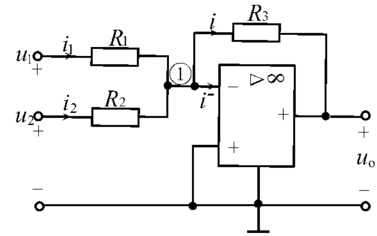
- 含有运算放大器的电阻电路
  - 运放的电路模型
    - 运放的电路图形符号
    - 运放的特性
    - 运放的电路模型
  - 比例电路
    - 反向比例器
    - 同向比例器
    - 反向加法器
    - 减法器
    - 电压跟随器
  - 含运放的电路分析
    - 分析的两条规则
    - 典型电路
      - 非倒向放大器
      - 加法器
      - 多重放大电路

课后习题全解

○ 5－1　设题 5－1 图所示电路的输出 u_0 为 $-u_0=3u_1+0.2u_2$，已知 $R_3=10\text{k}\Omega$，求 R_1 和 R_2。



题 5－1 图



题解 5－1 图

解　如题解 5－1 图所示运算放大器是理想运算放大器，所以应遵循两条规则。

由规则 1　$i^-=0$，知 $i=i_1+i_2$

即
$$\frac{u_1-u_{n1}}{R_1}+\frac{u_2-u_{n1}}{R_2}=\frac{u_{n1}-u_o}{R_3}$$

由规则 2　$u_{n1}=u^+=0$ 代入上式得 $\dfrac{u_1}{R_1}+\dfrac{u_2}{R_2}=\dfrac{-u_o}{R_3}$

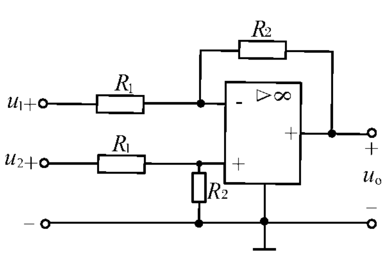
所以
$$-u_o=R_3\left(\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}\right)$$

与已知条件 $-u_o=3u_1+0.2u_2$ 比较，有
$$\frac{R_3}{R_1}=3,\quad \frac{R_3}{R_2}=0.2$$

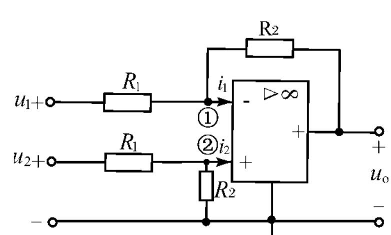
又有
$$R_3=10\text{k}\Omega$$

所以
$$R_1=\frac{R_3}{3}=3.33\text{k}\Omega,\qquad R_2=\frac{R_3}{0.2}=50\text{k}\Omega$$

◎5－2　题 5－2 图所示电路起减法作用，求输出电压 u_o 和输入电压 u_1、u_2 之间的关系。



题 5－2 图



题解 5－2 图

分析 利用虚短、虚断的规则即可求解。

解 由题解 5－2 图知，理想运算放大器遵循两个规则。

由规则 1 知 $$i_1 = i_2 = 0$$

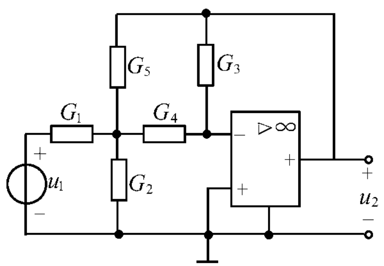
由规则 2 知 $$u_{n1} = u_{n2}$$

列结点电压方程
$$\begin{cases}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})u_{n1}-\frac{1}{R_2}u_o=\frac{u_1}{R_1} & ①\\ (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})u_{n2}=\frac{u_2}{R_1} & ②\end{cases}$$

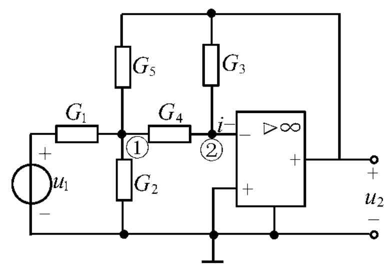
将 $u_{n1} = u_{n2}$ 代入式②，联立式①、式②得

$$u_o = \frac{R_2}{R_1}(u_2 + u_1)$$

○ 5－3 求题 5－3 图所示电路的输出电压与输入电压之比$\frac{u_2}{u_1}$。



题 5－3 图



题解 5－3 图

解 由题解 5－3 图列结点电压方程，并注意到规则 1，$i^- = 0$

$$\begin{cases}(G_1+G_2+G_4+G_5)u_{n1}-G_4u_{n2}-G_5u_2=G_1u_1\\ -G_4u_{n1}+(G_3+G_4)u_{n2}-G_3u_2=0\end{cases}$$

应用规则 2 知，$u_{n2} = 0$

所以，以上两式变为
$$\begin{cases}(G_1+G_2+G_4+G_5)u_{n1}-G_5u_2=G_1u_1\\ u_{n1}=-\frac{G_3}{G_4}u_2\end{cases}$$

从而得
$$\frac{u_2}{u_1}=-\frac{G_1G_4}{(G_1+G_2+G_4+G_5)G_3+G_4G_5}$$

○ 5－4 求题 5－4 图所示电路的电压比值$\frac{u_o}{u_1}$。

解 由题解 5－4 图列结点电压方程，并注意到 $i_1^- = 0$，$i_2^- = 0$，有

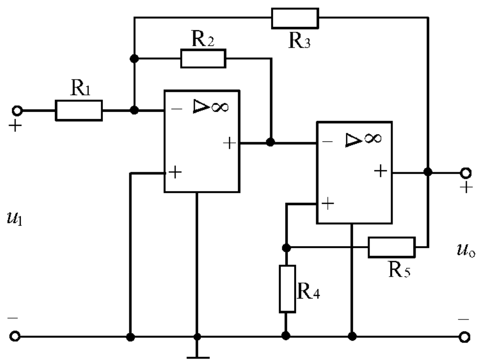
$$\begin{cases}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3})u_{n1}-\frac{1}{R_2}u_{o1}-\frac{1}{R_3}u_o=\frac{u_1}{R_1} & ①\\ (\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5})u_{n2}-\frac{1}{R_5}u_o=0 & ②\end{cases}$$

由规则 2，知　　$u_{n1}=0,\quad u_{o1}=u_{n2}$

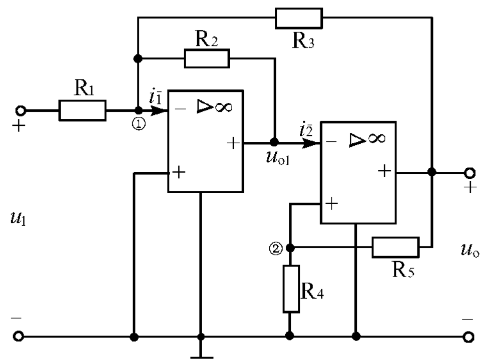
又由式 ② 得　　$u_{n2}=\dfrac{R_4}{R_4+R_5}u_o$

将以上关系式均代入式 ① 从而得到

$$\frac{u_o}{u_1}=-\frac{R_2R_3(R_4+R_5)}{R_1(R_2R_4+R_2R_5+R_3R_4)}$$

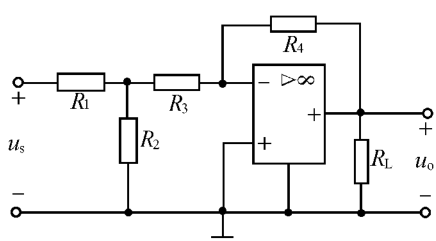


题 5－4 图

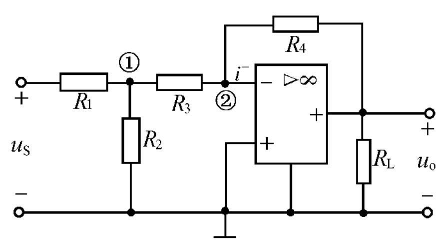


题解 5－4 图

◎5－5　求题 5－5 图所示电路的电压比$\dfrac{u_o}{u_S}$。



题 5－5 图



题解 5－5 图

分析　利用虚短、虚断规则，列写结点电压方程求解即可。

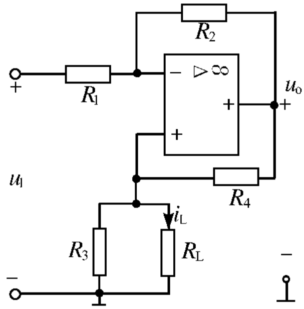
解　由题解 5－5 图列结点电压方程，并注意到 $i^-=0$，有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{R_3}u_{n2}=\dfrac{u_S}{R_1} & ①\\[2ex] -\dfrac{1}{R_3}u_{n1}+\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)u_{n2}-\dfrac{1}{R_4}u_o=0 & ②\end{cases}$$

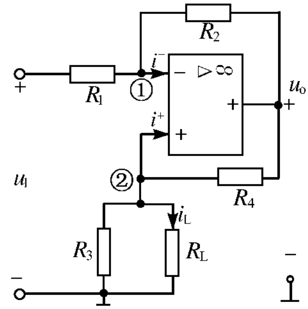
利用规则 2 知，$u_{n2}=0$ 代入上述方程中，从而得到

$$\frac{u_o}{u_S}=-\frac{R_2R_4}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

○ 5－6　**试证明题 5－6 图所示电路若满足 $R_1R_4=R_2R_3$，则电流 i_L 仅决定于 u_1 而与负载电阻 R_L 无关。**



题 5－6 图



题解 5－6 图

证明　由题解 5－6 图列结点电压方程，并注意到 $i^-=i^+=0$，有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)u_{n1}-\dfrac{1}{R_2}u_o=\dfrac{u_1}{R_1} & ①\\ \left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_L}\right)u_{n2}-\dfrac{1}{R_4}u_o=0 & ②\end{cases}$$

应用规则 2 知，
$$u_{n1}=u_{n2}$$

由式 ② 得，$u_o=R_4\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_L}\right)u_{n2}$ 代入式 ①，并整理，得

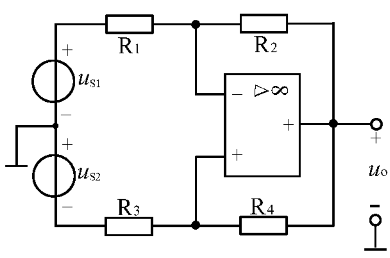
$$u_{n2}=\frac{R_2R_3R_L}{(R_2R_3-R_1R_4)R_L-R_1R_3R_4}u_1$$

从而有
$$i_L=\frac{u_{n2}}{R_L}=\frac{R_2R_3}{(R_2R_3-R_1R_4)R_L-R_1R_3R_4}u_1$$

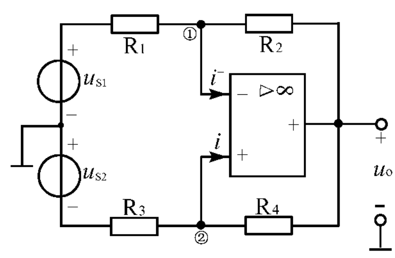
当 $R_1R_4=R_2R_3$ 时，$i_L=\dfrac{R_2R_3}{-R_1R_3R_4}u_1=-\dfrac{R_2}{R_1R_4}u_1$

可见 i_L 仅仅决定于 u_1 而与负载电阻 R_L 无关。

○ 5－7　**求题 5－7 图所示电路的 u_o 与 u_{S1}、u_{S2} 之间的关系。**



题 5－7 图



题解 5－7 图

解　由题解 5－7 图，列结点电压方程，并注意到 $i^-=i^+=0$，有

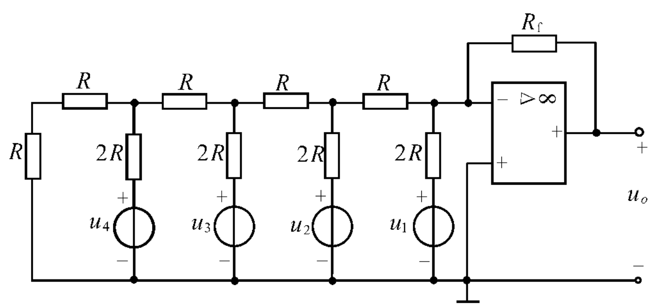
$$\begin{cases}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u_{n1}-\frac{1}{R_2}u_o=\frac{1}{R_1}u_{S1}\\\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)u_{n2}-\frac{1}{R_4}u_o=-\frac{1}{R_3}u_{S2}\end{cases}$$

应用规则 2 有 $u_{n1}=u_{n2}$ 代入上式，解得

$$u_o=\frac{R_2(R_3+R_4)u_{S1}+R_4(R_1+R_2)u_{S2}}{R_2R_3-R_1R_4}$$

○5－8　略

●5－9　电路如题 5－9 图所示，设 $R_f=16R$，验证该电路的输出 u_o 与输入 $u_1\sim u_4$ 之间的关系为 $u_o=-(8u_1+4u_2+2u_3+u_4)$。[注：该电路为一 4 位数字－模拟转换器，常用在信息处理和自动控制领域。该电路可将 4 位二进制数字信号转换成模拟信号，例如当数字信号为 1101 时，令 $u_1=u_2=u_4=1$，$u_3=0$，则由关系式 $u_o=-(8u_1+4u_2+2u_3+u_4)$ 得模拟信号 $u_o=-(8+4+0+1)=-13$。]



题 5－9 图

分析　将左边的复杂电路等效为简单的戴维宁等效电路求解即可。

解　将理想运算放大器左端电路做等效变换(戴维宁等效)，等效电路如题解 5－9 图所示。

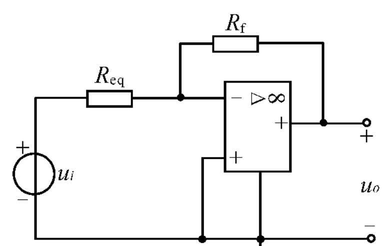
其中：$R_{eq}=R$

$$u_i=\frac{u_4}{16}+\frac{u_3}{8}+\frac{u_2}{4}+\frac{u_1}{2}$$

这是一个反向比例器，且已知 $R_f=16R$，

所以 $u_o=-\frac{R_f}{R_{eq}}u_i=-16u_i$

$$=-(8u_1+4u_2+2u_3+u_4)$$



题解 5－9 图

小结　此电路为数字－模拟转换器，u_1、u_2、u_3、u_4 取不同的值，可以得到不同的模拟电压值。

第六章

一 阶 电 路

学习要求

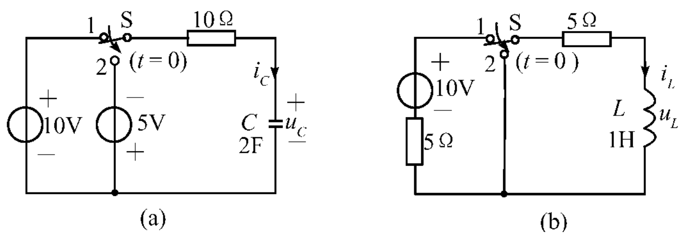
1. 了解本课程中所用电信号的时间函数表达式及时域特性，并会应用，特别是单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 的"切除"作用与"开关"作用，单位冲激信号 $\delta(t)$ 的抽样性。
2. 能写出电容元件与电感元件的伏安关系，包括微分关系与积分关系；深刻理解电容元件与电感元件初始状态 $u_C(0^-)$，$i_L(0^-)$ 的物理意义。
3. 深刻理解和掌握一阶电路零输入响应、零状态响应、全响应的定义、产生原因，并会用列写和求解一阶电路微分方程的方法求解；深刻理解电路时间常数 τ 的物理意义，并会求解。
4. 深刻理解和掌握一阶电路全响应三种分解方式的物理意义，并会进行分解。
5. 深刻理解和掌握求解一阶电路在阶跃激励下全响应的三要素公式及此公式成立的条件，并会应用此公式求解一阶电路的全响应，会画响应的波形。
6. 深刻理解和掌握一阶电路的单位冲激响应，并会求解。
7. 了解一阶电路的正弦响应，并会求解。

知识网络图

- 一阶电路
  - 动态电路的方程及初始条件
  - 动态电路的响应
    - 一阶电路的零输入响应
    - 一阶电路的零状态响应
      - 阶跃响应
      - 冲激响应
    - 一阶电路的全响应

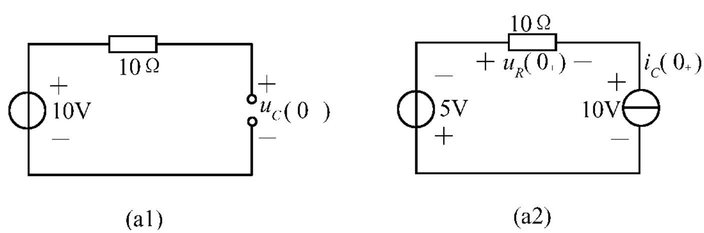
课后习题全解

○ 6—1 题 6—1 图(a)、(b) 所示电路开关 S 在 $t=0$ 时动作，试求电路在 $t=0_+$ 时刻电压、电流的初始值。



题 6—1 图

解 (a) 第一步 求 $t<0$ 时，即开关 S 动作前的电容电压 $u_C(0_-)$。由于开关动作前，电路处于稳定状态，对直流电路有 $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0$，故 $i_C=0$，电容看作开路，$t=0_-$ 时的电路如题解 6—1 图(a1) 所示，可得 $u_C(0_-)=10\mathrm{V}$。



题解 6—1 图

第二步 根据换路时，电容电压 u_C 不会跃变，所以有

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10\mathrm{V}$$

应用替代定理，用电压等于 $u_C(0_+)=10\mathrm{V}$ 的电压源代替电容元件，画出 0_+ 时刻的等效电路如题解 6—1 图(a2) 所示。

第三步 由 0_+ 时刻的等效电路，计算得

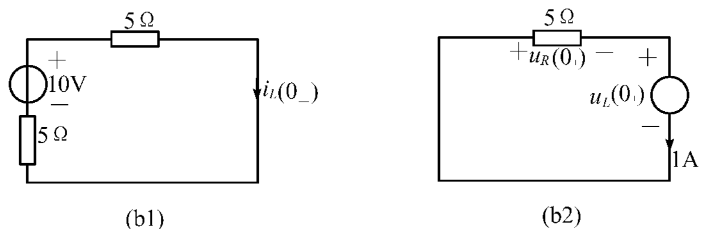
$$i_C(0_+) = -\frac{10+5}{10} = -1.5\text{A}$$

$$u_R(0_+) = 10 \times i_C(0_+) = 10 \times (-1.5) = -15\text{V}$$

换路后，i_C 和 u_R 发生了跃变。

(b) 第一步　由 $t<0$ 时的电路，求 $i_L(0_-)$ 值。由于 $t<0$ 时电路处于稳定状态，电感电流 i_L 为常量，故$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=0$，即 $u_L=0$，电感可以看作短路。$t=0_-$ 时的电路如题解 6－1 图(b1) 所示，由图可知

$$i_L(0_-) = \frac{10}{5+5} = 1\text{A}$$



题解 6－1 图

第二步　根据换路时，电感电流 i_L 不会跃变，所以有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$

应用替代定理，用电流等于 $i_L(0_+)=1\text{A}$ 的电流源替代电感元件，画出 0_+ 时刻的等效电路如题解 6－1 图(b2) 所示。

第三步　由 0_+ 时刻的等效电路，计算得初始值。

$$u_R(0_+) = -u_L(0_+) = 5 \times i_L(0_+) = 5 \times 1 = 5\text{V}$$

$$i_R(0_+) = i_L(0_+) = 1\text{A}$$

显然电路换路后，电感电压 u_L 发生了跃变。

◯6－2　题 6－2 图所示电路中开关 S 在 $t=0$ 时动作，试求各电路在 $t=0_+$ 时刻的电压、电流。已知图(d) 中的 $e(t)=100\sin(\omega t+\frac{\pi}{3})\text{V}$，$u_C(0_-)=20\text{V}$。

解　(a) 在 $t<0$ 时，电路处于稳定状态，电容看作断路，电路如题解 6－2 图(a1) 所示。电容上的电压分别为

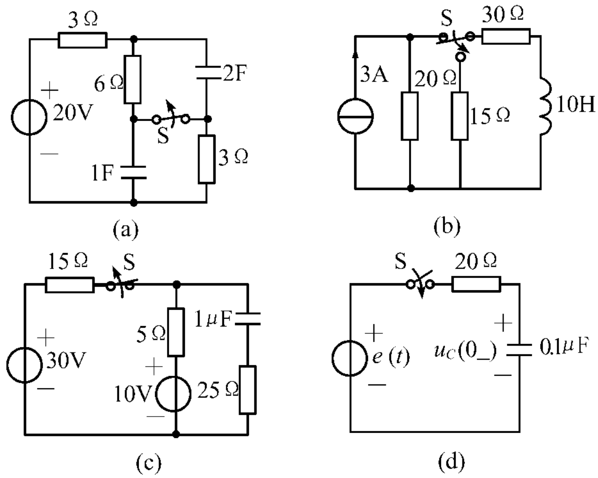
$$u_{C1}(0_-) = \frac{20}{3+6+3} \times 6 = 10\text{V}$$

$$u_{C2}(0_-) = \frac{20}{3+6+3} \times 3 = 5\text{V}$$

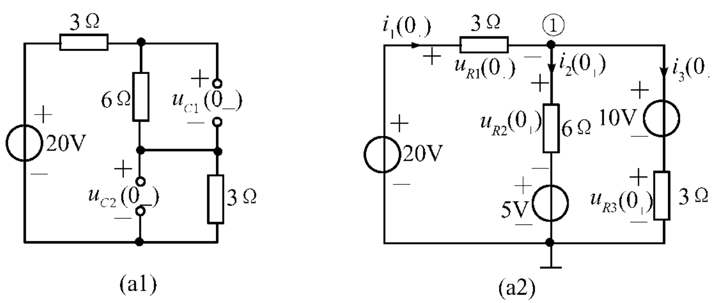
根据换路时电容电压不能跃变，得

$$u_{C1}(0_+) = u_{C1}(0_-) = 10\text{V}$$

$$u_{C2}(0_+) = u_{C2}(0_-) = 5\text{V}$$



题 6－2 图



题解 6－2 图

画出 0_+ **时刻的等效电路如题解** 6－2 **图**(a2)**所示。由图可得结点电压** $u_{n1}(0_+)$ **为**

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)u_{n1}(0_+) = \frac{20}{3}+\frac{10}{3}+\frac{5}{6}$$

$$u_{n1}(0_+) = \frac{10+\dfrac{5}{6}}{\dfrac{5}{6}} = 13\text{V}$$

故各支路电流为

$$i_1(0_+) = \frac{20-u_{n1}(0_+)}{3} = \frac{20-13}{3} = \frac{7}{3}\text{A}$$

$$i_2(0_+) = \frac{u_{n1}(0_+)-5}{6} = \frac{13-5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\text{A}$$

$$i_3(0_+)=\frac{u_{n1}(0_+)-10}{3}=\frac{13-10}{3}=1\text{A}$$

电阻上的电压为

$$u_{R1}(0_+)=3\times i_1(0_+)=3\times\frac{7}{3}=7\text{V}$$

$$u_{R2}(0_+)=6\times i_2(0_+)=6\times\frac{4}{3}=8\text{V}$$

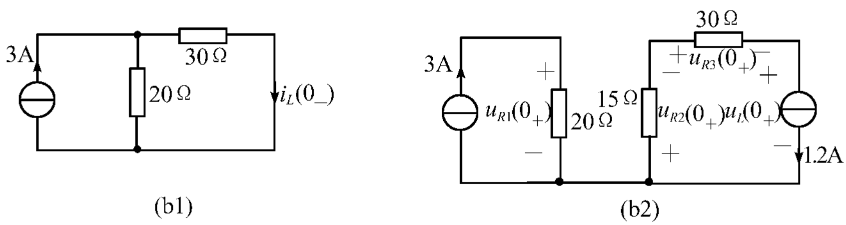
$$u_{R3}(0_+)=3\times i_3(0_+)=3\times 1=3\text{V}$$

(b) 在 $t<0$ 时,电路处于稳定状态,电感看作短路,电路如题解 6-2 图(b1)所示。根据分流关系有

$$i_L(0_-)=\frac{3\times 20}{20+30}=1.2\text{A}$$

根据换路时,电感电流不能跃变,得

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=1.2\text{A}$$



题解 6-2 图

$t=0_+$ 时的等效电路如题解 6-2 图(b2)所示,由图可知

$$u_{R1}(0_+)=20\times 3=60\text{V}$$

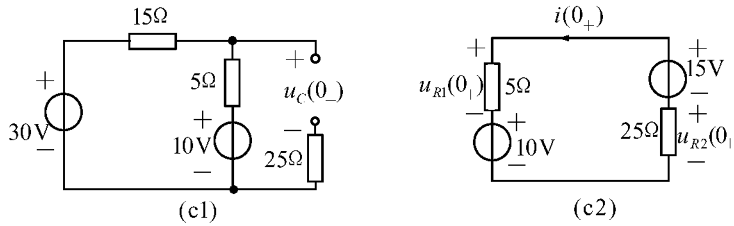
$$u_{R2}(0_+)=1.2\times 15=18\text{V}$$

$$u_{R3}(0_+)=30\times 1.2=36\text{V}$$

$$u_L(0_+)=-u_{R2}(0_+)-u_{R3}(0_+)=-(18+36)=-54\text{V}$$

(c) $t<0$ 时,电路处于稳定状态,电容看作开路,电路如题解 6-2 图(c1)所示。电容上的电压为

$$u_C(0_-)=\frac{30-10}{15+5}\times 5+10=15\text{V}$$



题解 6－2 图

根据 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=15\text{V}$，画出 $t=0_+$ 时的等效电路如题解 6－2 图(c2)所示。由图可得

$$i(0_+)=\frac{15-10}{25+5}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}\text{A}$$

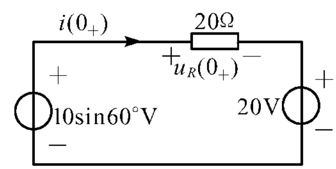
$$u_{R1}(0_+)=5\times i(0_+)=5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\text{A}$$

$$u_{R2}(0_+)=-25\times i(0_+)=-25\times\frac{1}{6}=-\frac{25}{6}\text{V}$$

(d) 由题意知 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=20\text{V}$，$t=0_+$ 时的等效电路如题解 6－2 图(d)所示。由图可知

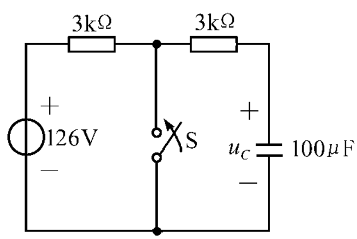
$$i(0_+)=\frac{100\sin 60^\circ-20}{20}=\frac{50\sqrt{3}-20}{20}=3.33\text{A}$$

$$u_R(0_+)=20\times i(0_+)=66.6\text{V}$$

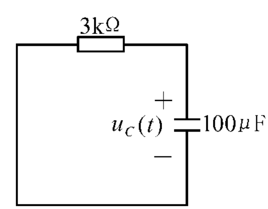


题解 6－2 图(d)

◎ 6－3　题 6－3 图示电路在 $t=0$ 时开关 S 闭合，求 $u_C(t)$。



题 6－3 图



题解 6－3 图

分析　开关 S 断开时，电容两端电压为 126V，则当开关 S 闭合时，$u_C(0_+)$ 为 126V，电压源被短路，$t\geqslant 0$ 后为一 RC 电路，根据公式求解即可。

解　先求初始值 $u_C(0_+)$。由图可知 $t=0_-$ 时，$u_C(0_-)=126\text{V}$，根据换路时电容电压连续，可得

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=126\text{V}$$

$t \geqslant 0$ 后的电路如题解 6－3 图所示。这是一个一阶 RC 电路的零输入响应问题，应有

$$u_C(t) = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

由题解 6－3 图可知时间常数

$$\tau = RC = 3 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 0.3\mathrm{s}$$

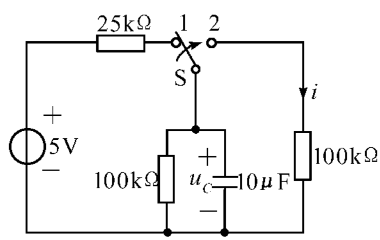
故 $t \geqslant 0$ 后的 $u_C(t)$ 为 $$u_C(t) = 126\mathrm{e}^{-\frac{10}{3}t}\mathrm{V}$$

◎ 6－4 如题 6－4 图所示，开关 S 原在位置 1 已久，$t = 0$ 时合向位置 2，求 $u_C(t)$ 和 $i(t)$。

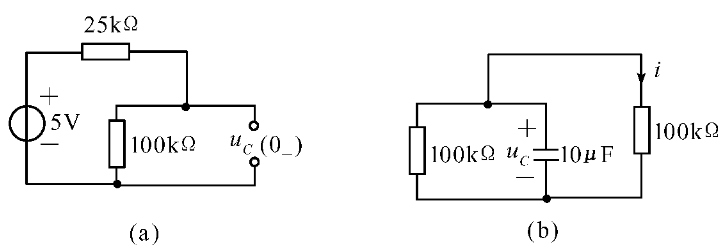
分析 S 位于位置 1 时，电容两端电压为电阻 100kΩ 两端的电压，S 位于位置 2 时，电容同两个 100kΩ 电阻并联，可容易求解。

解 $t < 0$ 时的电路如题解 6－4 图(a) 所示。由题解 6－4 图(a) 可知

$$u_C(0_-) = \frac{5}{100 + 25} \times 100 = 4\mathrm{V}$$



题 6－4 图



题解 6－4 图

故可得电容电压的初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4\mathrm{V}$$

$t > 0$ 后的电路如题解 6－4 图(b) 所示，这是一个一阶 RC 电路的零输入电路。由于从电容两端看去的等效电阻为 $R_0 = 100 \mathbin{/\!/} 100 = 50\mathrm{k\Omega}$，故有时间常数

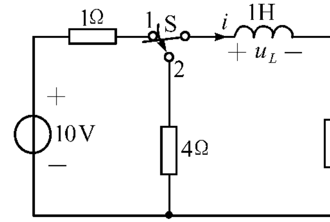
$$\tau = R_0 C = 50 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = \frac{1}{2}\mathrm{s}$$

电容电压

$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=4\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{V}$$

电流

$$i(t)=\frac{u_C(t)}{100}=0.04\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{mA}$$



题 6－5 图

○ 6－5　题 6－5 图中开关 S 在位置 1 已久，$t=0$ 时合向位置 2，求换路后的 $i(t)$ 和 $u_L(t)$。

解　$t<0$ 时的电路如题解 6－5 图(a) 所示。由题解 6－5 图(a) 可知

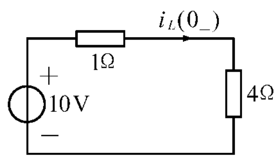
$$i_L(0_-)=\frac{10}{1+4}=2\mathrm{A}$$

根据换路时 i_L 不能跃变，有

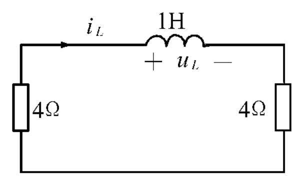
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\mathrm{A}$$

$t>0$ 后的电路如题解 6－5 图(b) 所示。这是一个一阶 RL 零输入电路，其时间常数为

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{1}{4+4}=\frac{1}{8}\mathrm{s}$$



(a)



(b)

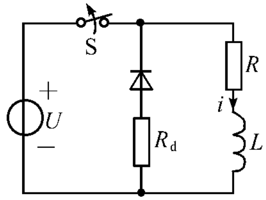
题解 6－5 图

故电感电流和电压分别为

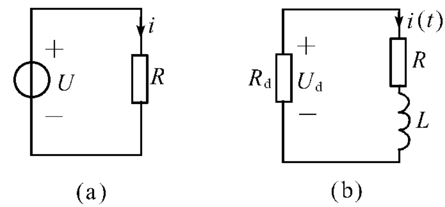
$$i(t)=i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=2\mathrm{e}^{-8t}\mathrm{A}$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=1\times2\mathrm{e}^{-8t}\times(-8)=-16\mathrm{e}^{-8t}\mathrm{V}$$

○ 6－6　题 6－6 图示电路为发电机的励磁电路，励磁绕组的参数为 $R=40\Omega$，$L=1.5\mathrm{H}$，接在 $U=120\mathrm{V}$ 的直流电源上。当打开开关 S 时，要求绕组两端电压不超过正常工作电压的 2.5 倍，并使电流在 0.05 s 内衰减到初值的 5%，试求并联放电电阻 R_d 为多大？(图中二级管的作用是，当开关 S 闭合时，放电电阻 R_d 中无电流，当 S 打开后，绕组电流将通过 R_d 衰减到零，此时二极管如同短路。)



题 6－6 图



题解 6－6 图

解　$t<0$ 时，电路处于稳定状态，此时二极管反向偏置不导通，R_d 中无电流，电路如题解 6－6 图(a) 所示。故

$$i(0_-)=i_L(0_-)=\frac{U}{R}=\frac{120}{40}=3\text{A}$$

开关 S 打开，电感电流不能跃变，因此有

$$i(0_+)=i_L(0_+)=i(0_-)=3\text{A}$$

$t>0$ 后，二极管处于导通状态，电路如题解 6－6 图(b) 所示。由图知，绕组两端的最大电压 $U_d(0_+)$ 为

$$U_d(0_+)=-R_d\times i(0_+)=-R_d\times 3=-3R_d$$

因为要求

$$|U_d(0_+)|=3R_d<120\times 2.5=300\text{V}$$

故有 $R_d<100\Omega$。

又因为，要求在 0.05s 内，$i(t)$ 衰减至初值的 5%，所以有

$$i(0.05)=i_L(0_+)\text{e}^{-\frac{0.05}{\tau}}=i_L(0_+)\times 5\%$$

把 $\tau=\dfrac{L}{R_0}=\dfrac{1.5}{R_d+40}$ 代入上式中，有

$$\text{e}^{-\frac{R_d+40}{1.5}\times 0.05}=\frac{5}{100}$$

解得　$$R_d=30\ln 20-40=49.87\approx 50\Omega$$

考虑到以上两个要求，R_d 的值应取

$$R_d=50\Omega$$

○ 6－7　一个高压电容器原先已充电，其电压为 10kV，从电路中断开以后，经过 15min 它的电压降低为 3.2kV，问：

(1) 再经过 15min 电压将降为多少？

(2) 如果电容 $C=15\mu\text{F}$，那么它的绝缘电阻为多少？

(3) 需经过多少时间，可使电压降至 30V 以下？

(4) 如果以一根电阻为 0.2Ω 的导线将电容接地放电，最大放电电流是多少？若认为在 5τ 时间内放电完毕，那么放电的平均功率是多少？

(5) 如果以 $100\text{k}\Omega$ 的电阻将其放电，应放电多少时间?并重答(4)。

解　根据题意，这个高压电容器为非理想电容，其电路模型如题解 6－7 图所示，且有

$$u_C(0_+) = 10\text{kV}$$

$t > 0$ 时，

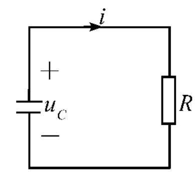
$$u_C(t) = u_C(0_+)\text{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 10\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}\text{kV}$$

由于经过 $t = 15\text{min}$，$u_C(t) = 3.2\text{kV}$，所以有

$$3.2 = 10\text{e}^{-\frac{15\times 60}{\tau}}$$

从中可解得

$$\tau = RC = \frac{15\times 60}{\ln\frac{100}{32}} = 789.866\text{s}$$



题解 6－7 图

(1) 再过 15min，即 $t = (15+15)\times 60\text{s}$ 时

$$u_C(t) = 10\text{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 10\times \text{e}^{-\frac{30\times 60}{789.886}} = 1.024\text{kV}$$

(2) 根据 $\tau = RC$，可得绝缘电阻

$$R = \frac{\tau}{\text{C}} = \frac{789.866}{15\times 10^{-6}} = 52.658\text{M}\Omega$$

(3) 当 u_C 降至 30V 时，有 $30 = 10\times 10^3\text{e}^{-\frac{t}{789.866}}$ 从中解得放电时间 t 为

$$t = \tau\ln\frac{1000}{3} = 789.866\times \ln\frac{1000}{3} = 4588.44s = 76.474\text{min}$$

(4) 用电阻为 0.2Ω 的导线将电容接地放电，这时电路的等效电阻为绝缘电阻和导线电阻的并接，即

$$R_0 = R \,/\!/\, 0.2 = 52.658\times 10^6 \,/\!/\, 0.2 \approx 0.2\Omega$$

因为 $t = 0_+$ 时放电电流最大，所以

$$I_{\max} = \frac{u_C(0_+)}{R_0} = \frac{10\times 10^3}{0.2} = 50\text{kA}$$

时间常数

$$\tau = R_0\text{C} = 0.2\times 15\times 10^{-6} = 3\times 10^{-6} = 3\mu\text{s}$$

在 5τ 时间内，电容若放电完毕，放出的总能量为

$$W_C = \frac{1}{2}\text{C}u_C{}^2(0_+) = \frac{1}{2}\times 15\times 10^{-6}\times (10\times 10^3)^2 = 750\text{J}$$

则放电的平均功率为

$$\overline{P} = \frac{W_C}{5\tau} = \frac{750}{5\times 3\times 10^{-6}} = 50\text{MW}$$

(5) 如果以 $100\text{k}\Omega$ 电阻将其放电，这时电路的放电电阻为

$$R_0 = 100\times 10^3 \,/\!/\, 52.658\times 10^6 \approx 100\times 10^3\,\Omega$$

最大放电电流为

$$I_{\max}=\frac{u_C(0_+)}{R_0}=\frac{10\times10^3}{100\times10^3}=0.1\text{A}$$

电路的时间常数

$$\tau=R_0C=100\times10^3\times15\times10^{-6}=1.5\text{s}$$

放电时间为

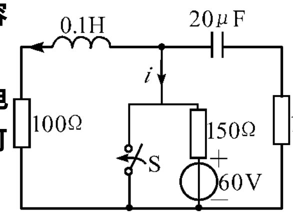
$$t=5\tau=5\times1.5=7.5\text{s}$$

所以放电的平均功率为

$$\overline{P}=\frac{W_C}{5\tau}=\frac{750}{7.5}=100\text{W}$$

◎ 6－8　题 6－8 图示电路中，若 $t=0$ 时开关 S 闭合，求电流 i。

分析　电路处于稳定状态时，电感相当于短路，电容相当于开路。



题 6－8 图

解　$t=0_-$ 时，电路处于稳定状态，电容看作开路，电感相当于短路。电路如题解 6－8 图(a) 所示，可得

$$i_L(0_-)=\frac{60}{100+150}=0.24\text{A}$$

$$u_C(0_-)=100\times i_L(0_-)=100\times0.24=24\text{V}$$

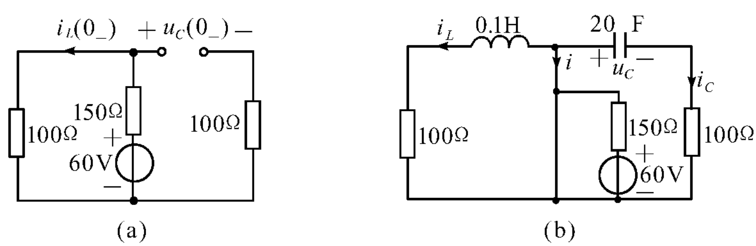
换路时，由于电容电压和电感电流不能跃变，所以有

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0.24\text{A}$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=24\text{V}$$

$t>0$ 后的电路如题解 6－8 图(b) 所示，短路线把电路分成了三个相互独立的回路。由 R、L 串联回路可得

$$i_L(t)=i_L(0_+)\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}=0.24\text{e}^{-\frac{100}{0.1}t}=0.24e^{-1000t}\text{A}$$



题解 6－8 图

由 R、C 串联回路可得

$$u_C(t)=u_C(0_+)\text{e}^{-\frac{t}{RC}}=24\text{e}^{-\frac{t}{20\times10^{-6}\times100}}=24\text{e}^{-500t}\text{V}$$

$$i_C=-\frac{u_C(t)}{100}=-\frac{24\text{e}^{-500t}}{100}=-0.24\text{e}^{-500t}$$

故根据 KCL，电流 $i(t)$ 为

$$i(t)=-[i_L(t)+i_C(t)]=0.24[\mathrm{e}^{-500t}-\mathrm{e}^{-1000t}]\mathrm{A},\quad t>0$$

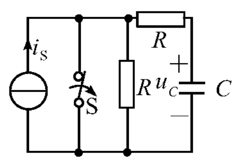
○ 6－9　题 6－9 图所示电路中，若 $t=0$ 时开关 S 打开，求 u_C 和电流源发出的功率。

解　$t<0$ 时，由于电流源被短路，所以可得电容 C 的初始电压值为

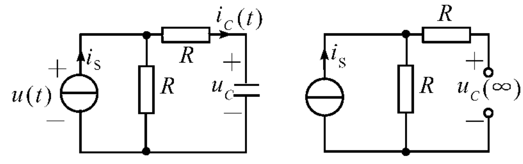
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

$t>0$ 后的电路如题解 6－9 图(a) 所示。故这是一个求零状态响应问题。一阶 RC 零状态电路的响应为

$$u_C(t)=u_C(\infty)[1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}]$$



题 6－9 图



(a)　(b)

题解 6－9 图

式中，$u_C(\infty)$ 是 $t\to\infty$ 时，电路达到稳定状态，电容上的电压，τ 为电路的时间常数。当 $t\to\infty$ 时，电容相当于开路，如题解 6－9 图(b) 所示，则

$$u_C(\infty)=Ri_S$$

时间常数 τ 为

$$\tau=R_0C=(R+R)C=2RC$$

所以有

$$u_C(t)=Ri_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2RC}})\ \mathrm{V},\quad t>0$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=C(-Ri_S\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2RC}})(-\frac{1}{2RC})=\frac{1}{2}i_S\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2RC}}\ \mathrm{A},\quad t>0$$

电流源两端的电压为

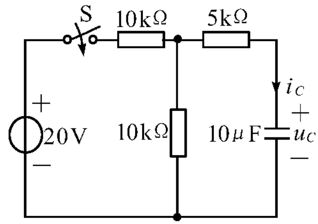
$$u(t)=Ri_C(t)+u_C(t)=R\times\frac{1}{2}i_S\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2RC}}+Ri_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2RC}})$$

$$=Ri_S(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2RC}})\ \mathrm{V},\quad t>0$$

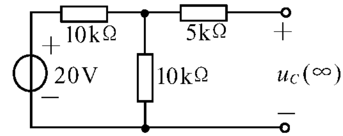
则电流源发出的功率为

$$P=i_Su(t)=Ri_S^2(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2RC}})\ \mathrm{W},\quad t>0$$

○ 6－10　题 6－10 图所示电路中开关 S 闭合前，电容电压 u_C 为零。在 $t=0$ 时 S 闭合，求 $t>0$ 时的 $u_C(t)$ 和 $i_C(t)$。



题 6－10 图



题解 6－10 图

解　由题意可知：$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$，这是一个求零状态响应的问题。在 $t \to \infty$ 时电路如题解 6－10 图所示，由题解 6－10 图可得

$$u_C(\infty) = \frac{20}{10+10} \times 10 = 10\text{V}$$

等效电阻

$$R_0 = [(10 \mathbin{/\!/} 10) + 5] = 10\text{k}\Omega$$

所以时间常数

$$\tau = R_0 C = 10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} = \frac{1}{10}\text{s}$$

则 $t > 0$ 时，电容电压

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = 10(1 - \mathrm{e}^{-10t})\text{V}$$

电容电流为

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-10t}\text{mA}, \quad t > 0$$

○ 6－11　题 6－11 图所示电路中开关 S 打开前已处稳定状态。$t = 0$ 开关 S 打开，求 $t \geqslant 0$ 时的 $u_L(t)$ 和电压源发出的功率。

解　由题 6－11 图可知，$t < 0$ 时，电感支路被短路，故有 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$，这是一个求零状态响应问题。当 $t \to \infty$ 时，电感看作短路，电路如题解 6－11 图所示。应用叠加定理求得 $i_L(\infty)$ 为

$$i_L(\infty) = \frac{10}{2+3+5} + \frac{2 \times 2}{2+3+5} = 1.4\text{A}$$

从电感两端向电路看去的等效电阻为

$$R_0 = 2 + 3 + 5 = 10\Omega$$

则时间常数

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{0.2}{10} = \frac{1}{50}\text{s}$$

故 $t > 0$ 后的电感电流为

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = 1.4(1 - \mathrm{e}^{-50t})\text{A}$$

电感电压

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=14\mathrm{e}^{-50t}\mathrm{V},\quad t>0$$

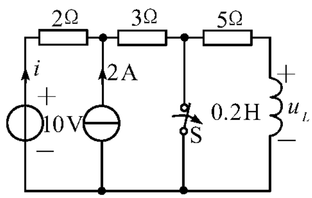
10V 电压源中的电流 i 为

$$i=i_L-2=-0.6-1.4\mathrm{e}^{-50t}\mathrm{A},\quad t>0$$

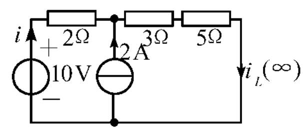
电压源发出的功率为：

$$P=10\times i=-6-14\mathrm{e}^{-50t}\mathrm{W},\quad t>0$$

即，电压源实际的吸收功率。

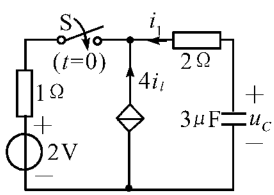


题 6－11 图

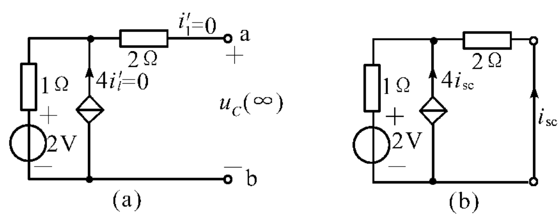


题解 6－11 图

○ 6－12　题 6－12 图所示电路中开关闭合前电容无初始储能，$t=0$ 时开关 S 闭合，求 $t\geqslant 0$ 时的电容电压 $u_C(t)$。



题 6－12 图



题解 6－12 图

解　由题意知 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$，这是一个求零状态响应的问题。当 $t\to\infty$ 时，电容看作开路，受控电流源的电流为零，亦看作开路，电路如题解 6－12 图(a)所示。故有

$$u_C(\infty)=2\mathrm{V}$$

求 a、b 端口的等效电阻。用开路短路法求。题解 6－12 图(b) 所示电路中

$$(4i_{sc}+i_{sc})\times 1+2i_{sc}=2$$

解得

$$i_{sc}=\frac{2}{7}\mathrm{A}$$

则等效电阻

$$R_0=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}=\frac{u_C(\infty)}{i_{sc}}=\frac{2}{\frac{2}{7}}=7\Omega$$

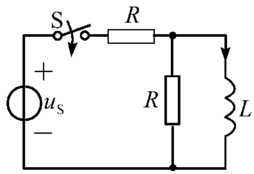
故时间常数

$$\tau=R_0C=7\times3\times10^{-6}=21\times10^{-6}\,\text{s}$$

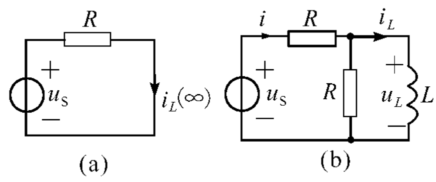
所以 $t>0$ 后，电容电压

$$u_C(t)=u_C(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=2(1-\mathrm{e}^{-\frac{10^6t}{21}})\text{V}$$

○ 6－13　题 6－13 图所示电路中 $t=0$ 时开关 S 闭合，求 i_L 和电源发出的功率。



题 6－13 图



题解 6－13 图

解　显然 $t<0$ 时，由于开关是打开的，电感中无电流，即

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

这是一个求零状态响应的问题。由 $t\to\infty$ 时的稳态电路如题解 6－13 图(a) 可得

$$i_L(\infty)=\frac{u_S}{R}$$

由 $t>0$ 后的电路如题解 6－13 图(b) 可知，从电感两端向电路看去的等效电阻为

$$R_0=R\,/\!/\,R=\frac{R}{2}$$

从而有时间常数

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{2L}{R}\text{s}$$

则 $t>0$ 后，电感电流

$$i_L(t)=i_L(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=\frac{u_S}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}})\text{A}$$

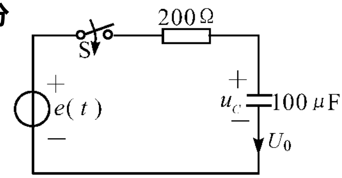
电感电压 u_L 为

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{u_S}{2}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\text{V},\quad t>0$$

由题解 6－13 图(b) 可知，电压源发出的功率

$$P=u_Si=u_S\times(i_L+\frac{u_L}{R})=\frac{u_S^2}{R}(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}})\text{W},\quad t>0$$

6－14　题 6－14 图所示电路中 $e(t)=\sqrt{2}\times 220\cos(314t+30^\circ)\text{V}$，$t=0$ 时合上开关 S，求：(1) u_C；(2) U_0 为何值时，瞬态分量为零。



题 6－14 图

分析　电源电压为交流电压，由 KVL 列写电路的微分方程求解即可。

解　由题意可知，电容电压的初始值为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$$

(1) $t>0$ 时，由 KVL 得电路的微分方程为

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=e(t)$$

其通解为　　$u_C=u'_C+u''_C$

u'_C 为对应齐次方程的通解，即

$$u'_C=k\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=k\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

把 $\tau=RC=200\times100\times10^{-6}=0.02\text{s}$ 代入上式中，有 $u'_C=ke^{-50t}$。

u''_C 为非齐次方程的特解，设 $u''_C=U_\text{m}\cos(\omega t+\theta)$ 并代入微分方程中，有

$$U_\text{m}\cos(\omega t+\theta)-\omega RCU_\text{m}\sin(\omega t+\theta)=\sqrt{2}\times220\cos(314t+30^\circ)$$

用待定系数法确定 U_m 和 θ。引入 $\tan\varphi=\omega CR$，有

$$\sin\varphi=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}},\quad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$$

再令 $|Z|=\sqrt{1+(\omega CR)^2}$，则上面等式变为

$$\begin{aligned}U_\text{m}[\cos(\omega t+\theta)-\omega RC\sin(\omega t+\theta)]&=U_\text{m}|Z|[\cos(\omega t+\theta)\cos\varphi-\sin(\omega t+\theta)\sin\varphi]\\&=U_\text{m}|Z|\cos(\omega t+\theta+\varphi)\end{aligned}$$

于是，得

$$U_\text{m}|Z|\cos(\omega t+\theta+\varphi)=\sqrt{2}\times220\times\cos(314t+30^\circ)$$

比较等式两边，可求得各待定系数为

$$U_\text{m}=\frac{\sqrt{2}\times220}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}=\frac{\sqrt{2}\times220}{\sqrt{1+(200\times314\times100\times10^{-6})^2}}=34.6\sqrt{2}\text{V}$$

$$\omega=314\text{rad/s}$$

$$\theta=30^\circ-\varphi=30^\circ-\arctan(\omega RC)=30^\circ-80.95^\circ=-50.95^\circ\text{V}$$

所以，特解

$$u''_C=34.6\sqrt{2}\cos(314t-50.95^\circ)\text{V}$$

方程的通解为

$$u_C(t)=u'_C+u''_C=k\mathrm{e}^{-50t}+34.6\sqrt{2}\cos(314t-50.95^\circ)\text{V}$$

代入初条件 $u_C(0_+)=U_0$，得常数

$$k=U_0-34.6\sqrt{2}\cos(-50.95°)=U_0-30.825$$

因而电压 u_C 为

$$u_C(t)=(U_0-30.825)\mathrm{e}^{-50t}+34.6\sqrt{2}\cos(314t-50.95°)\mathrm{V},\quad t>0$$

(2) 由 $u_C(t)$ 可知，当 $U_0=30.825\mathrm{V}$ 时，

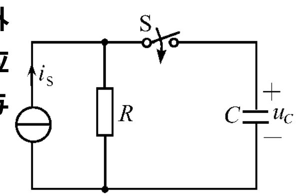
$$u_C(t)=34.6\sqrt{2}\cos(314t-50.95°)\mathrm{V}$$

无暂态分量。

小结　本题分析较为简单，求解方程特解时要选定正确的方法，利用特定系数法较为容易。

◯ 6－15　题 6－15 图所示电路中 $i_S=6\mathrm{A}, R=2\Omega, C=1F, t=0$ 时闭合开关 S，在下列两种情况下，求 u_C, i_C 以及电流源发出的功率：(1) $u_C(0_-)=3\mathrm{V}$；(2) $u_C(0_-)=15\mathrm{V}$。

解　由题意知：$u_C(0_+)=u_C(0_-)\neq 0, t>0$ 后，电路有外加激励电源的作用，即本问题为一阶电路的全响应问题。对线性电路而言，其全响应等于零输入响应与零状态响应之和，即



题 6－15 图

$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+u_C(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

由图可知 $t\to\infty$ 时，

$$u_C(\infty)=Ri_S=2\times 6=12\mathrm{V}$$

时间常数

$$\tau=RC=2\times 1=2\mathrm{s}$$

(1) 当 $u_C(0_-)=3\mathrm{V}$ 时

$$u_C(t)=3\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+12(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})=12-9\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{V},\quad t>0$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=1\times(-9)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\times(-\frac{1}{2})$$

$$=4.5\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{A},\quad t>0$$

由于电流源的端电压等于 $u_C(t)$，故电流源发出的功率为

$$P_{(t)}=i_Su_C(t)=6\times(12-9\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})=72-54\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{W},\quad t>0$$

(2) 当 $u_C(0_-)=15\mathrm{V}$ 时，零输入响应为

$$u_{C1}(t)=15\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

零状态响应仍为

$$u_{C2}(t)=12(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})$$

所以电容电压的全响应应为

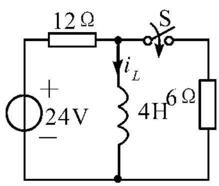
$$u_C(t)=u_{C1}(t)+u_{C2}(t)=12+3e^{-0.5t}\text{V},\quad t>0$$

则

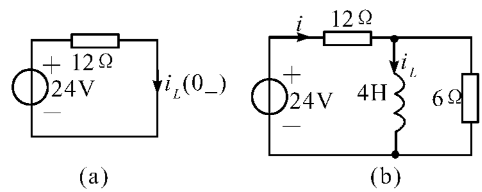
$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=1\times 3e^{-0.5t}\times(-0.5)=-1.5e^{-0.5t}\text{A},\quad t>0$$

$$P(t)=i_S u_C(t)=6\times(12+3e^{-0.5t})=72+18e^{-0.5t}\text{W},\quad t>0$$

○ 6－16　题 6－16 图所示电路中直流电压源的电压为 24V，且电路原已达稳定，$t=0$ 时合上开关 S，求：(1) 电感电流 i_L；(2) 直流电压源发出的功率。



题 6－16 图



题解 6－16 图

解　(1) 计算初始值。$t<0$ 时，电路如题解 6－16 图(a) 所示，因此，有

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{24}{12}=2\text{A}$$

$t>0$ 的电路如题解 6－16 图(b) 所示，可知

$$i_L(\infty)=\frac{24}{12}=2\text{A}$$

时间常数为

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{4}{12\ /\!/\ 6}=\frac{4}{4}=1\text{s}$$

利用三要素公式得

$$i_L(t)=2+(2-2)e^{-t}=2\text{A}$$

以上结果说明，当电路的 $f(\infty)=f(0_+)$ 时，过渡时间为零，电路直接进入稳定状态。

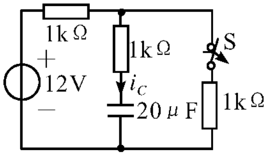
(2) 由题解 6－16 图(b) 所示电路可得

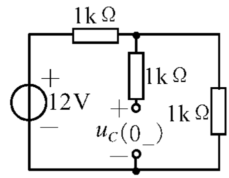
$$i(t)=\frac{24+6i_L(t)}{12+6}=2\text{A}$$

所以电压源发出的功率

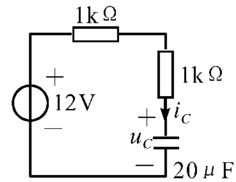
$$P=24\times i=24\times 2=48\text{W}$$

○ 6－17　题 6－17 图所示电路中，开关 S 打开以前已达稳定，$t=0$ 时，开关 S 打开。求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_C(t)$，并求 $t=2\text{ms}$ 时电容的能量。





(a)



(b)

题 6－17 图　　　　题解 6－17 图

解　$t<0$ 时的电路，如题解 6－17 图(a) 所示，则

$$u_C(0_-)=\frac{12\times 1}{1+1}=6\text{V}$$

所以初始值

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\text{V}$$

$t>0$ 后的电路如题解 6－17 图(b) 所示。当 $t\to\infty$ 时，电容看作断路，有

$$u_C(\infty)=12\text{V}$$

时间常数

$$\tau=R_0C=(1+1)\times 10^3\times 20\times 10^{-6}=0.04\text{s}$$

利用三要素公式，得

$$u_C(t)=12+(6-12)\text{e}^{-\frac{t}{0.04}}=12-6\text{e}^{-25t}\text{V},\quad t>0$$

电容电流

$$i_C(t)=C\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}=3\times\text{e}^{-25t}\text{mA},\quad t>0$$

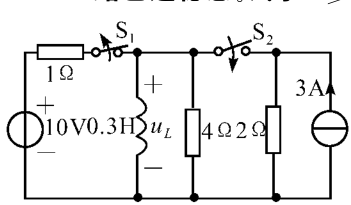
$t=2\text{ms}$ 时，

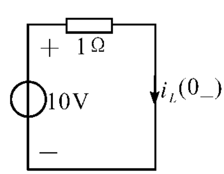
$$u_C(2\text{ms})=12-6\text{e}^{-25\times 2\times 10^{-3}}=12-6\text{e}^{-0.05}=6.293\text{V}$$

电容的储能为

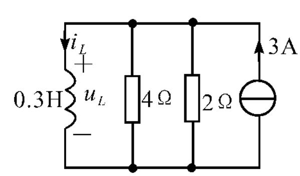
$$W_C(2\text{ms})=\frac{1}{2}Cu_C^2(2\text{ms})=\frac{1}{2}\times 20\times 10^{-6}\times 6.293^2=396\times 10^{-6}\text{J}$$

● 6－18　**题 6－18 图所示电路中 $t=0$ 时开关 S_1 打开，S_2 闭合，在开关动作前，电路已达稳态。试求 $t\geqslant 0$ 时的 $u_L(t)$、$i_L(t)$。**





(a)



(b)

题 6－18 图　　　　题解 6－18 图

分析 $t<0$ 时,电感相当于短路,$t\geqslant 0$ 时,电路为一阶 RL 并联电路。

解 $t<0$ 时,电路处于稳态,电路如题解 6－18 图(a) 所示,则

$$i_L(0_-)=\frac{10}{1}=10\text{A}$$

故电感电流的初值为

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=10\text{A}$$

$t>0$ 后的电路如题解 6－18 图(b) 所示。当 $t\rightarrow\infty$ 时,电感看作短路,因此

$$i_L(\infty)=3\text{A}$$

时间常数

$$\tau=\frac{L}{R_o}=\frac{0.3}{4 // 2}=\frac{9}{40}\text{s}$$

根据三要素公式,有

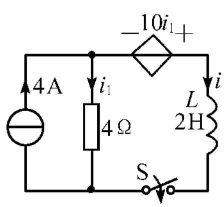
$$i_L(t)=3+(10-3)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=3+7\mathrm{e}^{-\frac{40t}{9}}\text{A},\quad t>0$$

则电感电压

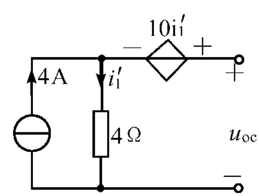
$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=0.3\times 7\mathrm{e}^{-\frac{40t}{9}}\times\left(-\frac{40}{9}\right)=-\frac{28}{3}\mathrm{e}^{-\frac{40t}{9}}\text{V},\quad t>0$$

小结 含有开关的电路,关键分析开头状态变动时刻,此刻电容两端电压不变,流过电感的电流不变。

◎ 6－19 题 6－19 图所示电路中,开关原打开,$t=0$ 时将开关 S 闭合,已知 $i_L(0_-)=0$,求 $t>0$ 时的电流 $i(t)$。



题 6－19 图



题解 6－19 图

分析 $t<0$ 时,电感两端没有电流通过,S 闭合后,$i_L(0_+)=0$。

解 由题意知:$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$,$t\rightarrow\infty$ 时,L 看作短路,由 KVL 得

$$10i_1(\infty)+4i_1(\infty)=0$$

解得 $i_1(\infty)=0$,所以 i_L 的稳态值为电流源的电流,即 $i_L(\infty)=4\text{A}$

把电感断开,电路如题解 6－19 图所示。由题解 6－19 图知,开路电压

$$u_{oc}=10i_1{}'+4i_1{}'=14i_1{}'=14\times 4=56\text{V}$$

由开路、短路法可求得等效电阻 $R_0=\dfrac{u_{oc}}{i_{sc}}=\dfrac{u_{oc}}{i_L(\infty)}=\dfrac{56}{4}=14\Omega$

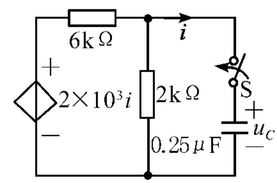
故电路的电间常数 $\tau = \dfrac{L}{R_0} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}\mathrm{s}$

利用三要素公式,可得

$$i_L(t) = 4 + (0-4)\mathrm{e}^{-7t} = 4(1-\mathrm{e}^{-7t})\mathrm{A}, \quad t > 0$$

○ 6-20　题 6-20 图所示电路中,已知 $u_C(0_-) = 6\mathrm{V}$,$t = 0$ 时将开关 S 闭合,求 $t > 0$ 时的电流 i。

解　由题意知电容电压的初始值为



题 6-20 图

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6\mathrm{V}$$

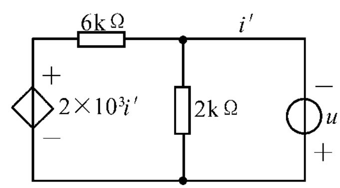
$t \to \infty$ 时,由于电路中无独立电源,故必有

$$u_C(\infty) = 0$$

把电容断开,外加电压源,如题解 6-20 图所示,由 KVL 得

$$\begin{aligned} u' &= -2\times10^3 i' + 6\times10^3\left(i' - \frac{u'}{2\times10^3}\right) \\ &= 4\times10^3 i' - 3u' \end{aligned}$$

从中解出



题解 6-20 图

$$u' = 10^3 i'$$

故电路的等效电阻

$$R_0 = \frac{u'}{i'} = 10^3\Omega$$

电路的时间常数

$$\tau = R_0 C = 10^3 \times 0.25\times10^{-6} = 0.25\times10^{-3}\mathrm{s}$$

由三要素公式,可得电容电压

$$u_C(t) = 6\mathrm{e}^{-\frac{10^3 t}{0.25}} = 6\mathrm{e}^{-4\times10^3 t}\mathrm{V}, \quad t > 0$$

所以电容电流

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -6\times10^{-3}\mathrm{e}^{-4\times10^3 t}\mathrm{A} = -6\mathrm{e}^{-4000t}\mathrm{mA}, \quad t > 0$$

○ 6-21　题 6-21 图所示电路中,已知 $i_S = 10\varepsilon(t)\mathrm{A}$,$R_1 = 1\Omega$,$R_2 = 2\Omega$,$C = 1\mu F$,$u_C(0_-) = 2\mathrm{V}$,$g = 0.25\mathrm{S}$。求全响应 $i_1(t)$,$i_C(t)$,$u_C(t)$。

解　把电容断开,如题解 6-21 图(a) 所示,先求 $t > 0$ 时一端口电路的戴维宁等效电路。由 KVL,得

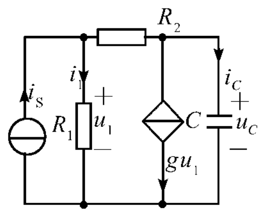
$$u_{oc} = u_1{}' - R_2 g u_1{}'$$

由 KCL 得

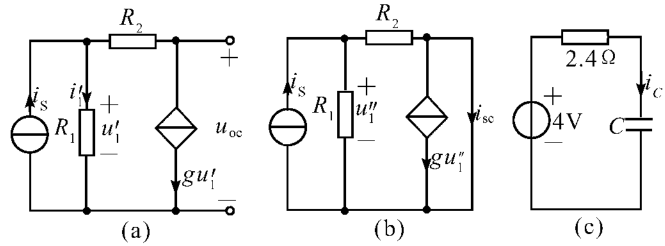
$$\frac{u'_1}{R_1} + g u_1{}' = i_S$$

联立求解以上两个方程,解得

$$u_{oc} = (1 - R_2 g)\frac{i_S R_1}{1 + R_1 g} = (1 - 2 \times 0.25) \times \frac{10 \times 1}{1 + 1 \times 0.25} = 4\text{V}$$



题 6－21 图



题解 6－21 图

把端口短路，如题解 6－21 图(b) 所示，得短路电流

$$i_{sc} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_S - g u_1'' = \frac{R_1 i_S}{R_1 + R_2}(1 - gR_2) = \frac{1 \times 10}{1 + 2} \times (1 - 0.25 \times 2) = \frac{5}{3}\text{A}$$

故等效电阻

$$R_0 = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{4}{\frac{5}{3}} = \frac{12}{5} = 2.4\Omega$$

等效电路如题解 6－21 图(c) 所示。显然

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$$

$$u_C(\infty) = u_{oc} = 4\text{V}$$

$$\tau = R_0 C = 2.4 \times 1 \times 10^{-6} = 2.4 \times 10^{-6}\,\text{s}$$

代入三要素公式中，得电容电压

$$u_C(t) = 4 + (2 - 4)\text{e}^{-\frac{10^6 t}{2.4}} = 4 - 2\text{e}^{-4.17 \times 10^5 t}\,\text{V}, \quad t > 0$$

电容电流为

$$i_C(t) = C\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t} = 0.833\text{e}^{-4.17 \times 10^5 t}\,\text{A}, \quad t > 0$$

在原电路中，应用 KCL，有

$$i_1 + g u_1 + i_C = i_S$$

把 $u_1 = R_1 i_1$ 代入，解得电流

$$i_1(t) = \frac{i_S - i_C}{1 + R_1 g} = \frac{10 - 0.833\text{e}^{-4.17 \times 10^5 t}}{1 + 0.25} = 8 - 0.667\text{e}^{-4.17 \times 10^5 t}\,\text{A}, \quad t > 0$$

○ 6－22　题 6－22 图(a) 所示电路中的电压 $u(t)$ 的波形如题 6－22 图(b) 所示，试求电流 $i(t)$。

解　将电路的工作过程分段。

在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 区间，为电路的零状态的响应，

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{1}{2 \mathbin{/\!/} 3} = \frac{5}{6}\text{s}$$

稳态值为

$$i_L = \frac{2}{2} = 1\text{A}$$

故电流

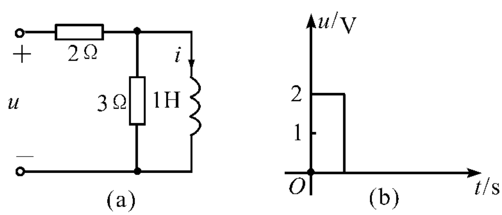
$$i(t) = (1 - e^{-\frac{6}{5}t})\text{A}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

在 $1 \leqslant t < \infty$ 区间,为电路的零输入响应,此时的初值为

$$i_L(1) = (1 - e^{-\frac{6}{5}}) = 0.699\text{A}$$

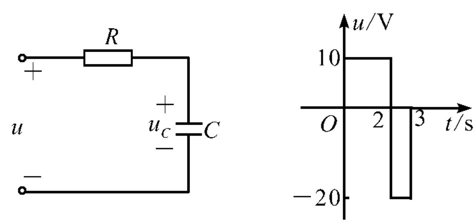
故有

$$i(t) = i_L(t) = 0.699e^{-\frac{6}{5}(t-1)}\text{A}, \quad t > 1\text{s}$$



题 6－22 图

◎ 6－23　RC 电路中,电容 C 原未充电,所加 $u(t)$ 的波形如题 6－23 图所示,其中 $R = 1000\Omega$,$C = 10\mu F$。求:(1) 电容电压 u_C;(2) 用分段形式写出 u_C;(3) 用一个表达式写出 u_C。



题 6－23 图

分析　电源电压是分段的,对电路分段求解即可。

解　(1) 分段求解。在 $0 \leqslant t < 2$ 区间,RC 电路的零状态响应为

$$u_C(t) = 10(1 - e^{-100t})\text{V}$$

$t = 2\text{s}$ 时,

$$u_C(2) = 10(1 - e^{-100\times 2}) \approx 10\text{V}$$

在 $2 \leqslant t < 3$ 区间,RC 的全响应为

$$u_C(t)=-20+[10-(-20)]\mathrm{e}^{-100(t-2)}=-20+30\mathrm{e}^{-100(t-2)}\,\mathrm{V}$$

$t=3\mathrm{s}$ 时，

$$u_C(3)=-20+30\mathrm{e}^{-100(3-2)}\approx-20\mathrm{V}$$

在 $3\leqslant t<\infty$ 区间，RC 的零输入响应为

$$u_C(t)=u_C(3)\mathrm{e}^{-100(t-3)}=-20\mathrm{e}^{-100(t-3)}\,\mathrm{V}$$

(2) 分段形成的 u_C：

$$u_C(t)\begin{cases}10(1-\mathrm{e}^{-100t})\mathrm{V}, & 0\leqslant t<2\mathrm{s}\\ -20+30\mathrm{e}^{-100(t-2)}\,\mathrm{V}, & 2\leqslant t<3\mathrm{s}\\ -20\mathrm{e}^{-100(t-3)}\,\mathrm{V}, & 3\leqslant t<\infty\end{cases}$$

(3) 用阶跃函数表示激励，有

$$u(t)=10\varepsilon(t)-30\varepsilon(t-2)+20\varepsilon(t-3)\mathrm{V}$$

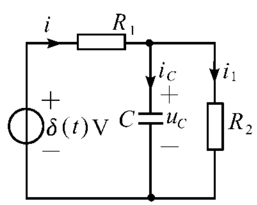
而 RC 串联电路的单位阶跃响应为

$$s(t)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)=(1-\mathrm{e}^{-100t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

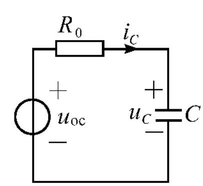
根据电路的线性时不变特性，有

$$\begin{aligned}u_C(t)&=10s(t)-30s(t-2)+20s(t-3)\\&=10(1-\mathrm{e}^{-100t})\varepsilon(t)-30(1-\mathrm{e}^{-100(t-2)})\varepsilon(t-2)+20(1-\mathrm{e}^{-100(t-3)})\varepsilon(t-3)\mathrm{V}\end{aligned}$$

○ 6－24　题 6－24 图所示电路中，$u_C(0_-)=0$，$R_1=3\mathrm{k}\Omega$，$R_2=6\mathrm{k}\Omega$，$C=2.5\mu F$，试求电路的冲激响应 i_C，i_1 和 u_C。



题 6－24 图



题解 6－24 图

解　应用戴维宁定理把原电路变化为题解 6－24 图所示的电路。其中

$$u_{oc}=\frac{R_2\delta(t)}{R_1+R_2}=\frac{2}{3}\delta(t)\mathrm{V}$$

$$R_0=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=2\mathrm{k}\Omega$$

$$\begin{aligned}i_C(t)&=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{400}{3}\mathrm{e}^{-200t}\varepsilon(t)]\\&=2.5\times10^{-6}\times[\frac{400}{3}\delta(t)+\frac{400}{3}\mathrm{e}^{-200t}\varepsilon(t)\times(-200)\varepsilon(t)]\\&=0.333\delta(t)-66.66\mathrm{e}^{(-200)t}\mathrm{mA}\end{aligned}$$

回到题 6－24 图所示原电路求 $i_1(t)$：

$$i_1(t)=\frac{u_C(t)}{R_2}$$

$$=\frac{\frac{400}{3}\cdot e^{-200t}\cdot\varepsilon(t)}{6\times10^3}$$

$$=22.22e^{-200t}\cdot\varepsilon(t)$$

利用阶跃响应求冲激响应。

由于阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 和冲激函数 $\delta(t)$ 之间满足关系

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt}=\delta(t)$$

因此线性电路中阶跃响应 $s(t)$ 与冲激响应 $h(t)$ 之间满足

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

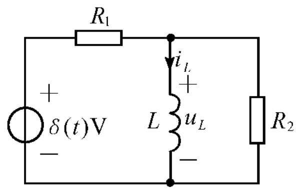
设题解 6－24 图中电路的电压源 $u_{oc}=\frac{2}{3}\varepsilon(t)$。其阶跃响应为

$$s_{u_C}(t)=\frac{2}{3}(1-e^{-\frac{t}{R_0C}})\varepsilon(t)=\frac{2}{3}(1-e^{-200t})\varepsilon(t)\text{V}$$

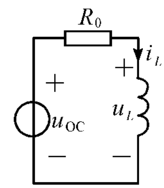
则冲激响应为

$$u_C(t)=\frac{ds_{u_C}(t)}{dt}=-\frac{2}{3}e^{-200t}\times(-200)\varepsilon(t)=\frac{400}{3}e^{-200t}\varepsilon(t)\text{V}$$

◎6－25　题 6－25 图所示电路中，$i_L(0_-)=0$，$R_1=60\Omega$，$R_2=40\Omega$，$L=100\text{mH}$，试求冲激响应 i_L，u_L。



题 6－25 图



题解 6－25 图

分析　先将电路等效为戴维宁电路即可容易求解。

解　应用戴维宁定理把原电路变为题解 6－25 图所示的等效电路。其中

$$u_{oc}=\frac{R_2\delta(t)}{R_1+R_2}=\frac{40\delta(t)}{60+40}=0.4\delta(t)\text{V}$$

$$R_0=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{60\times40}{60+40}=24\Omega$$

应用 KVL，可得电路方程

$$R_0i_L+u_L=u_{oc}$$

即

$$R_0 i_L + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0.4\delta(t),\quad t > 0_-$$

把上式在 0_- 与 0_+ 时间域积分，得

$$\int_{0_-}^{0_+} R_0 i_L \mathrm{d}t + \int_{0_-}^{0_+} L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \int_{0_-}^{0_+} 0.4\delta(t)\mathrm{d}t = 0.4$$

考虑到 $i_L(t)$ 不是冲激函数，有$\int_{0_-}^{0_+}\mathrm{R}_{0L}\mathrm{d}t = 0$，上式积分为

$$L[i_L(0_+) - i_L(0_-)] = 0.4$$

因 $i_L(0_-) = 0$，所以有

$$i_L(0_+) = \frac{0.4}{L} = \frac{0.4}{100\times 10^{-3}} = 4\mathrm{A}$$

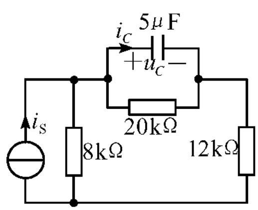
则电路的冲激响应为

$$i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) = 4\mathrm{e}^{-240t}\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

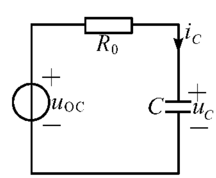
$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 100\times 10^{-3}\times[4\delta(t) + 4\mathrm{e}^{-240t}\times(-240)\varepsilon(t)]$$

$$= 0.4\delta(t) - 96\mathrm{e}^{-240t}\varepsilon(t)\mathrm{V},\quad t > 0_-$$

● 6－26　题6－26图所示电路中，电容原来充电，求当 i_S 给定下列情况时的 u_C 和 i_C：(1) $i_S = 25\varepsilon(t)\mathrm{mA}$；(2) $i_S = \delta(t)\mathrm{mA}$。



题 6 － 26 图



题解 6 － 26 图

分析　先将电路等效为戴维宁电路，再进行求解即可。

解　题 6 － 26 图所示电路的戴维宁等效电路如题解 6 － 26 图所示，其中

$$u_{oc} = \frac{8\times i_S}{8+20+12}\times 20\times 10^3 = \frac{160\times 10^3 i_S}{40} = 40\times 10^3 i_S$$

$$R_0 = \frac{20\times(8+12)}{8+12+20} = \frac{20\times 20}{40} = 10\mathrm{k\Omega}$$

(1) 当 $i_S = 25\varepsilon(t)\mathrm{mA}$ 时，　$u_{oc} = 4\times 10^3\times 25\times 10^{-3}\varepsilon(t) = 100\varepsilon(t)\mathrm{V}$

时间常数

$$\tau = R_0 C = 10\times 10^3\times 5\times 10^{-6} = 5\times 10^{-2}\mathrm{s}$$

所以电容电压为

$$u_C(t)=u_{oc}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=100(1-e^{-20t})\varepsilon(t)\text{V}$$

$$i_C=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=10e^{-20t}\varepsilon(t)\text{mA}$$

(2) 当 $i_S=\varepsilon(t)\text{mA}$ 时，根据线性电路的齐性定理，(1) 中电路的单位价跃响应为

$$Su_C(t)=\frac{100}{25}(1-e^{-20t})\varepsilon(t)=4(1-e^{-20t})\varepsilon(t)\text{V}$$

所以单位冲激响应为

$$u_C(t)=\frac{\mathrm{d}Su_C(t)}{\mathrm{d}t}=-4e^{-20t}\times(-20)\varepsilon(t)=80e^{-20t}\varepsilon(t)\text{V}$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=0.4\delta(t)-8e^{-20t}\varepsilon(t)\text{mA},\quad t>0_-$$

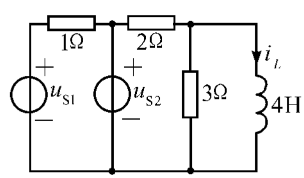
小结　单位冲激响应 $h(t)$ 同单位阶跃响应的关系为 $h(t)=\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$，$S(t)=\displaystyle\int h(\xi)\mathrm{d}\xi$。

○ 6－27　(1) $u_C(t)=\dfrac{10^6}{9}e^{-\frac{10^3}{9}t}\varepsilon(t)\text{V}$

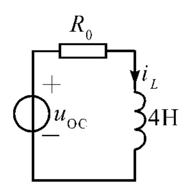
(2) $u_C(t)=\left[\dfrac{10^6}{9}e^{-\frac{10^3}{9}(t)}+2e^{-\frac{10^3}{9}(t)}\right]\varepsilon(t)\text{V}$

(3) $u_C(t)=\left[\dfrac{10^6}{9}e^{-\frac{10^3}{9}(t-2)}\right]\varepsilon(t-2)+2e^{-\frac{10^3}{9}t}\varepsilon(t)\text{V}$

◎ 6－28　题 6－28 图所示电路中，$u_{S1}=\varepsilon(t)\text{V}$，$u_{S2}=5\varepsilon(t)\text{V}$，试求电路响应 $i_L(t)$。



题 6－28 图



题解 6－28 图

分析　将左边复杂电路等效为戴维宁电路即可容易求解。

解　原电路的戴维宁等效电路如题解 6－28 图所示，由于 u_{S_1} 所在支路对电感电流没有影响，可以断开，所以有

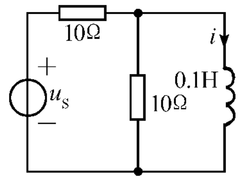
$$u_{oc}=\frac{u_{S_2}\times 3}{2+3}=0.6u_{S_2}=3\varepsilon(t)$$

$$R_0=2\,/\!/\,3=1.2\Omega$$

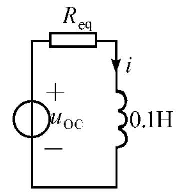
电路的时间常数 $\tau=\dfrac{L}{R_0}=\dfrac{4}{1.2}=\dfrac{10}{3}\text{s}$

故电感电流为 $i_L(t)=\dfrac{u_{oc}}{R_0}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=2.5(1-e^{-0.3t})\varepsilon(t)\text{A}$

◯6－29　题 6－29 图所示电路中电源 $u_S=[50\varepsilon(t)+2\delta(t)]\text{V}$，求 $t>0$ 时电感支路的电流 $i(t)$。



题 6－29 图



题解 6－29 图

解　原图可以等效为题解 6－29 图所示的电路，其中

$$u_{oc}=\frac{1}{2}u_S=25\varepsilon(t)+\delta(t)\text{V}$$

$$R_{eq}=10\ /\!/\ 10=5\Omega$$

电路的时间常数有

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{0.1}{5}=\frac{1}{50}\text{s}$$

因此电路的单位阶跃响应为

$$s_i(t)=\frac{1}{R_0}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)=0.2(1-e^{-50t})\varepsilon(t)\text{A}$$

根据线性电路的叠加性和齐次性，把 u_{oc} 看成是两个激励源之和，因此当 $25\varepsilon(t)$ 作用时，有

$$i'(t)=25s_i(t)=5(1-e^{-50t})\varepsilon(t)\text{A}$$

当 $\delta(t)$ 作用时，

$$i''(t)=\frac{ds_i(t)}{dt}=-0.2e^{-50t}\times(-50)\varepsilon(t)=10e^{-50t}\varepsilon(t)\text{A}$$

所以当两部分激励共同作用时，响应 $i(t)$ 为

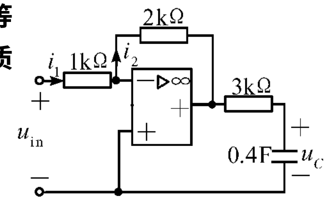
$$\begin{aligned}i(t)&=i'(t)+i''(t)\\&=[5(1-e^{-50t})+10e^{-50t}]\varepsilon(t)\\&=(5+5e^{-50t})\varepsilon(t)\text{A}\end{aligned}$$

◯ 6－30　$u_2(t)=\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{8}e^{-t}\text{V}$

◯6－31　略

◯ 6－32　题 6－32 图所示电路中含有理想运算放大器，试求零状态响应 $u_C(t)$，已知 $u_{in}=5\varepsilon(t)\text{V}$。

解 先求从电容两端看进去的一端口电路的戴维宁等效电路。把电容断开，根据理想运算放大器的性质可知



题 6－32 图

$$i_1 = i_2 = \frac{u_{in}}{1\times 10^3} = \frac{5\varepsilon(t)}{1\times 10^3} = 5\varepsilon(t)\text{mA}$$

$$u_{oc} = -2\times 10^3 \times i_2 = -10\varepsilon(t)\text{V}$$

外加电压源如题解 6－32 图(a) 所示，求等效电阻。由题解 6－32 图(a) 可知

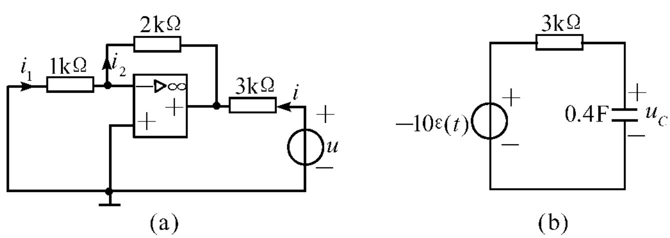
$$i_1 = i_2 = 0, \quad u = 3\times 10^3 i$$

所以等效电阻为 $R_0 = \dfrac{u}{i} = 3\times 10^3\,\Omega$

等效电路如题解 6－32 图(b) 所示。因此有

$$u_C(t) = u_{oc}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = -10(1-e^{-\frac{t}{R_0C}})\varepsilon(t)$$

$$= -10(1-e^{-\frac{10^{-2}}{12}t})\varepsilon(t)\text{V}$$



题解 6－32 图

第七章

二 阶 电 路

学习要求

1. 了解二阶电路的定义，会从电路结构直观判断二阶电路。
2. 会列写简单二阶电路的微分方程。
3. 了解二阶电路零输入响应、阶跃响应、冲激响应的定义与求解方法。
4. 深刻理解和掌握二阶电路零输入响应的 4 种性质与电路参数的关系。
5. 深刻掌握二阶非齐次方程的求解。

知识网络图

- 二阶电路
  - 二阶微分方程
  - 二阶电路
    - 二阶电路的零输入响应
    - 二阶电路的零状态响应
      - 阶跃响应
      - 冲激响应
    - 二阶电路的全响应

课后习题全解

○7－1　**电路如题 7－1 图所示，开关未动作前电路已达稳态，$t=0$ 时开关 S 打开。求 $u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$、$\left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{0_+}$、$\left.\dfrac{di_L}{dt}\right|_{0_+}$、$\left.\dfrac{di_R}{dt}\right|_{0_+}$。**

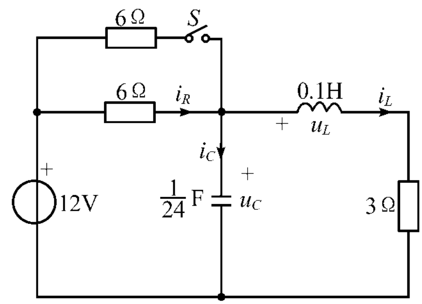


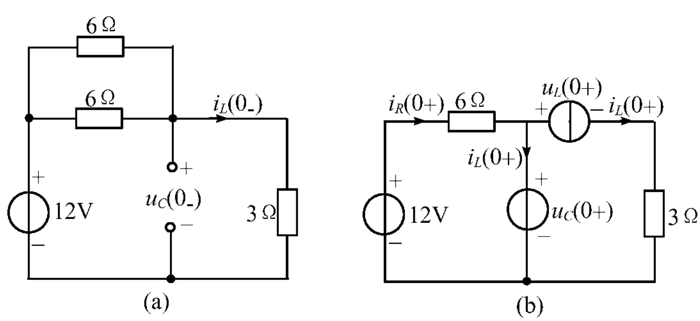
图 7－1

解　①$t<0$ 时，电路处于稳态，如题解 7－1 图(a)所示，求 $u_C(0_-)$，$i_L(0_-)$。

由题解图 7－1 图(a)知　$i_L(0_-)=\dfrac{12}{6/\!/6+3}=2\text{A}$，$u_C(0_-)=3\times i_L(0_-)=6\text{V}$

根据换路定律，得

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\text{A},\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\text{V}$$



题解 7－1 图

②画 0_+ 时刻的电路图如题解 7－1 图(b)所示。

$$i_R(0_+)=\frac{12-u_C(0_+)}{6}=1\text{A}$$

$$C\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0_+}=i_C(0_+)=i_R(0_+)-i_L(0_+)=-1\text{A}$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{1}{C}i_C(0_+)=-24\mathrm{V/s}$$

而

$$L\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=u_L(0_+)=u_C(0_+)-3i_L(0_+)=0$$

所以

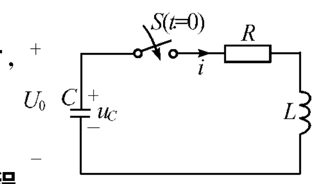
$$\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{12-u_C(0_+)}{6}\right)\right|_{0_+}=-\frac{1}{6}\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=-\frac{1}{6}\times(-24)=4\mathrm{A/s}$$

◎7－2　题7－2图所示电路中，电容原先已充电，$u_C(0_-)=U_0=6\mathrm{V}$，$R=2.5\Omega$，$L=0.25\mathrm{H}$，$C=0.25\mathrm{F}$。试求：

(1) 开关闭合后的 $u_C(t)$、$i(t)$；

(2) 使电路在临界阻尼下放电，当 L 和 C 不变时，电阻 R 应为何值？



题7－2图

分析　此为RLC串联电路，列写微分方程求解即可。

解　(1)开关闭合后如题解7－2图所示，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

初始条件为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\mathrm{V}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=-C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$$

该微分方程对应的特征方程为　$LCp^2+RCp+1=0$

将已知条件 $L=0.25H$，$C=0.25F$，$R=2.5\Omega$ 代入得

$$0.0625p^2+0.625p+1=0$$

即
$$p^2+10p+16=0$$

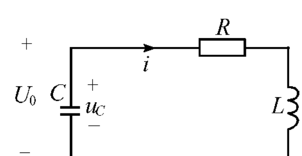
解得
$$p_1=-8,\quad p_2=-2$$

电路处于过阻尼状态，设微分方程的通解为

$$u_C(t)=A_1\mathrm{e}^{-8t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$$

代入初始值 $u_C(0_+)=6\mathrm{V}$，$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$，得

$$A_1+A_2=6,\quad -8A_1-2A_2=0$$



题解7－2图

解得
$$A_1=-2,\quad A_2=8$$

所以

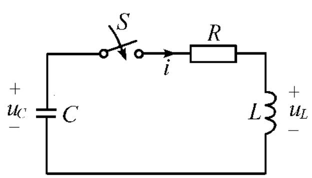
$$u_C(t)=8e^{-2t}-2e^{-8t}\text{V},\quad i(t)=-C\frac{du_C}{dt}=4\times(e^{-2t}-e^{-8t})\text{A}$$

(2)要使电路在临界阻尼下放电,应满足

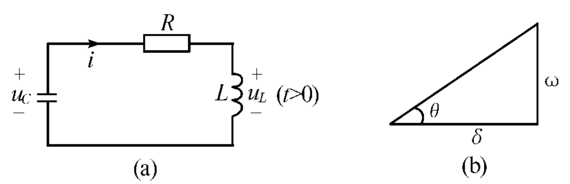
$$(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}=0$$

$$R=2\sqrt{\frac{L}{C}}=2\sqrt{\frac{0.25}{0.25}}=2\Omega$$

○7－3　已知题 7－3 图所示电路中 $R=1\text{k}\Omega$,$C=2\mu\text{F}$,$L=2.5\text{H}$。设电容原先已充电且 $u_C(0_-)=10\text{V}$。在 $t=0$ 时开关 S 闭合。试求 $u_C(t)$、$i(t)$、$u_L(t)$以及 S 闭合后的 i_{max}。



题 7－3 图



题解 7－3 图

解　$t>0$ 电路如题解 7－3 图(a)所示,电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

方程的特征根为

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

代入已知条件:

$$R=1000\Omega,C=2\mu\text{F}=2\times10^{-6}\text{F},L=2.5\text{H}$$

解得

$$p_1=-200+j400,\quad p_2=-200-j400$$

因 p_1 和 p_2 为一对共轭复根,故电路处于欠阻尼状态。

微分方程的通解为

$$u_C(t)=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)\varepsilon(t)$$

式中

$$\omega=400,\quad \delta=200$$

将初始条件

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10\text{V},C\frac{du_C}{dt}\bigg|_{0_+}=-i_L(0_+)=0$$

代入，得

$$A\sin\theta=u_C(0_+)=10\text{V},-\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta=\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$$

解得　　$\theta=\arctan\dfrac{\omega}{\delta}=\arctan 2=63.4°$，　$\mathrm{A}=\dfrac{u_C(0_+)}{\sin\theta}=11.18$

故　　$u_C(t)=11.18\mathrm{e}^{-200t}\sin(400t+63.4°)\text{V}$

$$i(t)=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-CA[-\delta\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)+\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t+\theta)\cdot\omega]$$

$$=CA\mathrm{e}^{-\delta t}\sqrt{\omega^2+\delta^2}\sin(\omega t+\theta-\arctan\frac{\omega}{\delta})$$

如题解 7－3 图(b)，因为 $\theta=\arctan\dfrac{\omega}{\delta}$，$A=\dfrac{u_C(0_+)}{\sin\theta}$，$\sin\theta\ \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\delta^2}}$于是

$$i(t)=CA\mathrm{e}^{-\delta t}\sqrt{\omega^2+\delta^2}\sin\omega t=C\frac{u_C(0_+)}{\omega}(\omega^2+\delta^2)e^{-\delta t}\sin\omega t=10\mathrm{e}^{-200t}\sin400t$$

mA

$u_C(t)$与 $u_L(t)$方向相反，故其相位之和为 0，幅值大小一致，因此

$$u_L=-\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t-\theta)=-11.18\mathrm{e}^{-200t}\sin(400t-63.4°)\text{V}$$

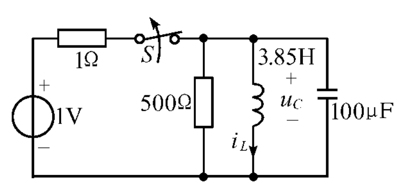
当$\dfrac{\mathrm{d}i(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}=0$，即$\dfrac{u_L(t)}{L}=0$ 时，$400t-63.4°=0$

解得

$$t=\frac{63.4\times\pi}{400\times180}=2.768\times10^{-3}\text{s}$$

电流达最大值，$i_{\max}=10\mathrm{e}^{-200\times2.768\times10^{-3}}\sin(400\times2.768\times10^{-3})=5.142\text{mA}$

○7－4　题 7－4 图所示电路中开关 S 闭合已久，$t=0$ 时，S 打开。求 u_C、i_L。



题 7－4 图

解　$t>0$，电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=0$$

特征方程为

$$LCp^2+\frac{L}{R}p+1=0$$

将已知条件：$L=3.85\text{H}$，$R=500\Omega$，$C=100\times10^{-6}\text{F}$ 代入，解得

$$p_1=-10+\mathrm{j}49.97,\quad p_2=-10-\mathrm{j}49.97$$

设方程的通解为

$i_L(t)=\mathrm{A}e^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$式中 $\delta=10$，$\omega=49.97$

将初始条件：　$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\dfrac{1}{1}=1\text{A}$，　$u_C(0_+)=L\left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$

代入可得 $\begin{cases} A\sin\theta=1 \\ -A\delta\sin\theta+A\omega\cos\theta=0 \end{cases}$

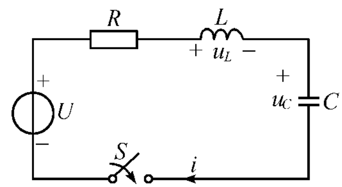
解得

$$\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta}=\arctan\frac{49.97}{10}=78.68°,\quad A=\frac{1}{\sin\theta}=1.02$$

故 $$i_L(t)=1.02e^{-10t}\sin(49.97t+78.68°)\text{A}$$

$$u_C(t)=u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=-LA\sqrt{\delta^2+\omega^2}e^{-\delta t}\sin\omega t=-200.1e^{-10t}\sin 49.97t\text{V}$$

◎7—5 电路如题 7—5 图所示，$t=0$ 时开关 S 闭合，设 $u_C(0_-)=0$，$i(0_-)=0$，$L=1\text{H}$，$C=1\mu\text{F}$，$U=100\text{V}$。若：(1)电阻 $R=3\text{k}\Omega$；(2)$R=2\text{k}\Omega$；(3)$R=200\Omega$。试分别求在上述电阻值时电路中的电流 i 和电压 u_C。



题 7—5 图

分析 电路为 RLC 串联电路，列写微分方程求解即可。

解 $t>0$ 电路如题解 7—5 图所示，电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U$$

设 $u_C(t)$ 的解为 $u_C=u'_C+u''_C$

其中 u'_C 为方程的特解，$u'_C=U=100\text{V}$

u''_C 为对应的齐次方程的通解。

根据特征方程 $$LCp^2+RCp+1=0$$

可得 $$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \quad ①$$

(1)当 $R=3000\Omega$ 时，将已知条件代入式①，

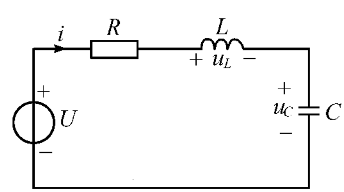
$$p_1=-381.97,\quad p_2=-2618.03$$

可见电路处于过阻尼状态，设 $u''_C=\text{A}_1e^{-381.97t}+\text{A}_2e^{-2618.03t}$

所以 $$u_C(t)=100+A_1e^{-381.97t}+A_2e^{-2618.03t}$$

利用初始条件 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$

$$i(0_+)=C\frac{du_C}{dt}\bigg|_{0_+}=i(0_-)=0$$



题解 7—5 图

可得 $$100+A_1+A_2=0$$
$$-381.97A_1-2618.03A_2=0$$

解得 $$A_1=-117,\quad A_2=17$$

所以 $u_C(t)=100-117e^{-381.97t}+17e^{-2618.03t}\text{V}$

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=44.69\mathrm{e}^{-381.97t}-44.51\mathrm{e}^{-2618.03t}\,\mathrm{mA}$$

(2)当 $R=2000\Omega$ 时,将已知条件代入①,得

$$p_1=p_2=-1000$$

即电路处于临界阻尼状态。设 $u''_C=(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{-1000t}$,

利用初始条件:$u_C(0_+)=0$,　$i(0_+)=C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$

可得　$A_1=-100$,　$A_2=-10^5$

所以　$u_C(t)=100-(100+10^5t)\mathrm{e}^{-1000t}\,\mathrm{V}$

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=100t\mathrm{e}^{-1000t}\,\mathrm{A}$$

(3)当 $R=200\Omega$ 时,将已知条件代入式①,得

$$p_1=-100+\mathrm{j}995,\quad p_2=-100-\mathrm{j}995$$

可见电路处于欠阻尼状态,设 u''_C 的形式为　$u''=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$

其中　$\delta=100$,　$\omega=995$

利用初始条件:　$u_C(0_+)=0$,　$i(0_+)=C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$

可得
$$\begin{cases}100+A\sin\theta=0\\-\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta=0\end{cases}$$

解得 $\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta}=\arctan\frac{995}{100}=84.26^\circ$,$A=-\frac{100}{\sin\theta}=-\frac{100}{\sin 84.26^\circ}=-100.5$

所以　$u_C(t)=100-100.5\mathrm{e}^{-100t}\sin(955t+84.26^\circ)\,\mathrm{V}$

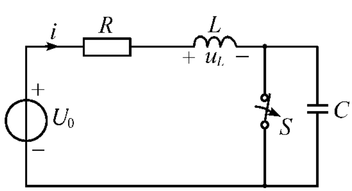
$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0.01\mathrm{e}^{-100t}[\sin(995t+84.3^\circ)-\cos(995t+84.3^\circ)]\,\mathrm{A}$$

○7-6　题 7-6 图所示电路中 $R=3\Omega$,$L=6\mathrm{mH}$,$C=1\mu\mathrm{F}$,$U_0=12\mathrm{V}$,电路已处稳态。设开关 S 在 $t=0$ 时打开,试求 $u_L(t)$。

解　由题意可知电路的初始条件为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{U_0}{R}=\frac{12}{3}=4\mathrm{A}$$



题 7-6 图

$t>0$,电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_0$$

设　$u_C=u'_C+u''_C$

其中 u'_C 为方程的特解,$u'_C=U_0=12\mathrm{V}$;u''_C 为对应的齐次方程的解,先求特征根。

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-250\pm \mathrm{j}12.91\times10^3$$

即 $$p_1=-250+\mathrm{j}12.91\times10^3,p_2=-250-\mathrm{j}12.91\times10^3$$

有 $$u''_C=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$$

式中 $$\delta=250,\quad \omega=12.91\times10^3$$

利用初始条件，有 $$\begin{cases}12+A\sin\theta=0\\ C[-\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta]=4\end{cases}$$

解得 $$\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta-\frac{4}{12C}}=\arctan(-0.039)=-2.22^\circ$$

$$A=-\frac{12}{\sin\theta}=309.84$$

所以 $$u_C(t)=12+309.84\mathrm{e}^{-250t}\sin(12.91\times10^3t-2.22^\circ)\mathrm{V}$$

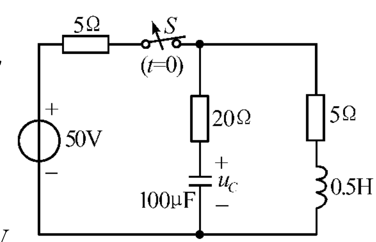
$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-CA\sqrt{\delta^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t=-4\mathrm{e}^{-250t}\sin(12.91\times10^3t)\mathrm{A}$$

电感电压：$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=4L\sqrt{\delta^2+\omega^2}\,\mathrm{e}^{-\delta t}sin(\omega t-\theta)$$

$$=309.84\mathrm{e}^{-250t}\sin(12.91\times10^3t+2.22^\circ)\mathrm{V}$$

◎7－7　**题 7－7 图所示电路在开关 S 打开之前已达稳态；$t=0$ 时，开关 S 打开，求 $t>0$ 时的 u_C。**

分析　$t<0$ 时，电感相当于短路，电容相当于开路，S 打开后，即 $t\geqslant0$ 时，电路为一 RLC 串联电路，再列写微分方程求解即可。



题 7－7 图

解　①**确定初始值**

$t<0$ 时，如题解 7－7 图(a)所示。

$$i_L(0_-)=\frac{50}{5+5}=5\mathrm{A},\quad u_C(0_-)=5i_L(0_-)=25\mathrm{V}$$

由换路定律，知电路的初始值为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=25\mathrm{V}$$

$$i_L(0_+)=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\bigg|_{0_+}=i_L(0_-)=5\mathrm{A}$$

②$t>0$ **后，如题解 7－7 图**(b)，**电路的微分方程为**

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+(R_1+R_2)C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

即 $$0.5\times100\times10^{-6}\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+(20+5)\times100\times10^{-6}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

整理，得
$$5\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+250\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+10^5u_C=0$$

对应的特征方程为
$$5p^2+250p+10^5=0$$

解得
$$p_1=-25+\mathrm{j}139.19,\quad p_2=-25-\mathrm{j}139.19$$

从而
$$u_C(t)=A\mathrm{e}^{-25t}\sin(139.19t+\theta)$$

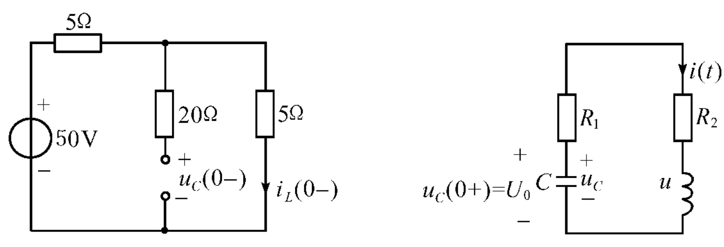
应用初始条件：
$$\begin{cases}u_C(0_+)=25\\ -C\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=5\end{cases}$$

得到
$$\begin{cases}A\sin\theta=25\\ -C\times(-25A\sin\theta+139.19A\cos\theta)=5\end{cases}$$

解得
$$\theta=\arctan\frac{139.19}{25-\dfrac{1}{5C}}=\arctan(-0.07)=-4.03^\circ$$

$$A=\frac{25}{\sin\theta}=\frac{25}{\sin(-4.03^\circ)}=-355.61$$

所以
$$u_C(t)=-355.61\mathrm{e}^{-25t}\sin(139.19t-4.03^\circ)\mathrm{V}$$

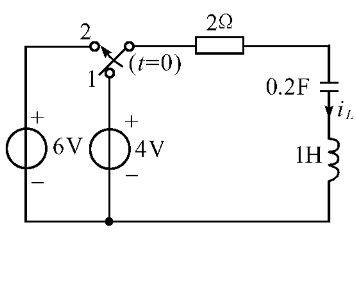


(a)　　　　(b)

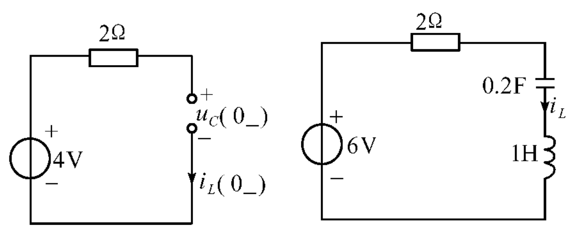
题解 7—7 图

○7—8　题 7—8 图所示电路在开关 S 动作前已达稳态；$t=0$ 时 S 由 1 接至 2，求 $t>0$ 时的 i_L。

解　①确定初始值，$t<0$ 时，如题解 7—8 图(a)。



题 7—8 图



(a)　　　　(b)

题解 7—8 图

$$u_C(0_-)=4\text{V},\quad i_L(0_-)=0$$

由换路定律知电路的初始值为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=4\text{V},\quad i_L(0_+)=-C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=i_L(0_-)=0$$

②$t>0$,如题 7－8 图(b)。

电路的微分方程为 $$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=6$$

设 $$u_C(t)=u'_C+u''_C$$

其中,$u'_C=6\text{V}$,u''_C 为对应的齐次方程的通解。

特征方程为 $$LCp^2+RCp+1=0$$

将已知条件代入, $L=1\text{H},C=0.2\text{F},R=2\Omega$,有 $0.2p^2+0.4p+1=0$

解得 $$p_1=-1+\text{j}2,\quad p_2=-1-\text{j}2$$

可见,电路处于欠阻尼状态,那么 $u''_C=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$(其中 $\delta=1,\omega=2$)

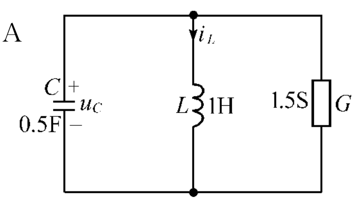
利用初始条件: $$u_C(0_+)=4\text{V},\quad C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$$

得 $$\theta=\arctan2=63.43^\circ,\quad A=\frac{4-6}{\sin\theta}=-2.236$$

所以 $$u_C(t)=u'_C+u''_C=6-2.236\mathrm{e}^{-t}\sin(2t+63.43^\circ)\text{V}$$

$$i_L(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-CA\sqrt{\delta^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-t}\sin\omega t=\mathrm{e}^{-t}\sin2t\text{A}$$

○7－9　题 7－9 图所示 GLC 并联电路中,已知 $u_C(0_+)=1\text{V}$,$i_L(0_+)=2\text{A}$。求 $t>0$ 时的 i_L。



题 7－9 图

解　由题意知,电路的初始值为

$$u_C(0_+)=1\text{V},\quad i_L(0_+)=2\text{A}$$

电路的微分方程为 $$LC\frac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}+GL\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=0$$

对应的特征方程为 $$LCp^2+GLp+1=0$$

代入已知条件: $$0.5p^2+1.5p+1=0$$

解得 $p_1=-1,p_2=-2$,可见电路处于过阻尼状态,

令 $$i_L=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$$

代入初始条件,得 $$A_1+A_2=2$$

$$L\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=L\times(-A_1-2A_2)=1$$

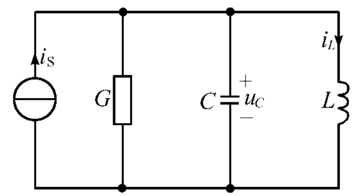
解得 $$A_1=5,\quad A_2=-3$$

故电感电流为 $$i_L(t)=5\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}A$$

○7－10　题 7－10 图所示电路中 $G=5\text{S},L=0.25\text{H},C=1\text{F}$。求:(1)$i_S(t)=\varepsilon(t)A$

时，电路的阶跃响应 $i_L(t)$；(2)$i_S(t)=\delta(t)A$ 时，电路的冲激响应 $u_C(t)$。

解　(1)$i_S(t)=\varepsilon(t)A$ 时，



题 7－10 图

电路的初始值为 $u_C(0_+)=0, i_L(0_+)=0$

$t>0$，电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}+GL\frac{di_L}{dt}+i_L=i_S$$

设 $$i_L=i'_L+i''_L$$

其中 $i'_L=i_S=\varepsilon(t)$，i''_L 为对应的齐次方程的通解

特征方程为 $$LCp^2+GLp+1=0$$

代入已知条件 $$0.25p^2+1.25p+1=0$$

解得 $$p_1=-1,\quad p_2=-4$$

那么 $$i''_L=A_1e^{-t}+A_2e^{-4t}$$

代入初始条件，有 $$\begin{cases}1+A_1+A_2=0\\ L\dfrac{di_C}{dt}\bigg|_{0_+}=0.25\times(-A_1-4A_2)=0\end{cases}$$

解得 $$A_1=-\frac{4}{3},\quad A_2=\frac{1}{3}$$

所以 $$i_L(t)=(1-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t})\varepsilon(t)A$$

(2)当 $i_S=\delta(t)$时，利用冲激响应和阶跃响应的关系，对(1)中结果求导，得

$$i_L(t)=\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{-4t}A$$

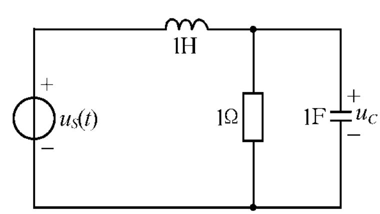
$$u_C(t)=u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=0.25[-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{16}{3}e^{-4t}]=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t}V$$

○7－11　当 $u_S(t)$为下列情况时，求题 7－11 图所示电路的响应 u_C：

(1)$u_S(t)=10\varepsilon(t)V$；(2)$u_S(t)=10\delta(t)V$。

解　(1)当 $u_S(t)=10\varepsilon(t)V$ 时，电路的初始条件为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$



题 7－11 图

$t>0$ 电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2 u_C}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{du_C}{dt}+u_C=u_S$$

设 $$u_C=u'_C+u''_C$$

其中，$u'_C=u_S=10\varepsilon(t)$，$u''_C$ 为对应的齐次方程的通解。

特征方程为 $$LCp^2+\frac{L}{R}p+1=0$$

代入已知条件有 $$p^2+p+1=0$$

解得 $$p_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2},\quad p_2=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

可见电路处于欠阻尼状态，$u''_C=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$

式中，$\delta=\frac{1}{2}$，$\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$，利用初始条件确定 A，θ。

由初始条件 $u_C(0_+)=0$，$C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0$，有

$$\begin{cases}10+A\sin\theta=0\\ C\times(-\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta)=0\end{cases}$$

解得

$$\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta}=\arctan\sqrt{3}=60°,\quad A=-\frac{10}{\sin\theta}=-\frac{20}{\sqrt{3}}$$

所以 $$u_C(t)=10-\frac{20}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60°)\mathrm{V}$$

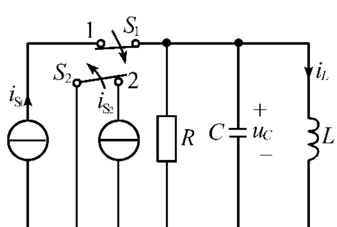
(2)当 $u_S(t)=10\delta(t)\mathrm{V}$ 时，利用冲激响应和阶跃响应的关系，对(1)中 $u_C(t)$ 求导，即为所求的 $u_C(t)$。

所以

$$u_C(t)=-A\mathrm{e}^{-\delta t}\sqrt{\delta^2+\omega^2}\sin\omega t=\frac{20}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\mathrm{V}$$

●7—12 题7—12图所示并联电路中，在 $t=0$ 时开关 S_1 由位置1接至位置2，S_2 由位置2接至位置1。已知 $i_{S_1}=1\mathrm{A}$，$i_{S_2}=5\mathrm{A}$，$R=5\Omega$，$C=0.1\mathrm{F}$，$L=2\mathrm{H}$。求 $t\geqslant0$ 时的 $i_L(t)$。

分析 $t<0$ 时，S_1 处于位置1，S_2 处于位置2，电感相当于短路，电容相当于开路，$t\geqslant0$ 后，开关状态改变，电容电压与电感电流不变。



题7—12图

解　$t<0$ 时，如题解 7－12 图(a)知：

$$i_L(0_-)=i_S=1\text{A},\quad u_C(0_-)=0$$

由换路定律确定初始值为

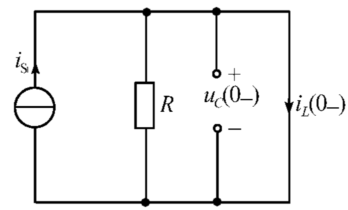
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0,\quad i_L(0_+)=i_L(0_-)=1\text{A}$$

$t\geqslant 0$ 时，如题解 7－12 图(b)，列电路的微分程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=i_{S2}$$

设　　$i_L=i'_L+i''_L$

其中，$i'_L=i_{S2}=5\text{A}$，i''_L 为对应的齐次方程的通解。



(a)

对应的特征方程为 $LCp^2+\frac{L}{R}p+1=0$

代入已知条件，得 $0.2p^2+0.4p+1=0$

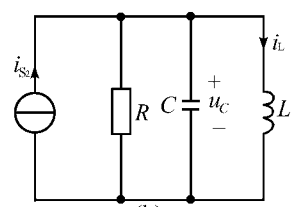
解得　　$p_1=-1+\text{j}2,\quad p_2=-1-\text{j}2$

说明电路处于欠阻尼状态

$i''_C=A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\theta)$，式中 $\delta=1$，$\omega=2$

利用初始条件 $\begin{cases} u_C(0_+)=L\left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=0 \\ i_L(0_+)=1 \end{cases}$

得 $\begin{cases} L\times(-\delta A\sin\theta+\omega A\cos\theta)=0 \\ 5+A\sin\theta=1 \end{cases}$



(b)

题解 7－12 图

解得　　$\theta=\arctan\frac{\omega}{\delta}=\arctan 2=63.43°$

$$A=\frac{1-5}{\sin\theta}=-4.472$$

所以　　$i_L(t)=5-4.472\mathrm{e}^{-t}\sin(2t+63.43°)\text{A}$

小结　列写微分方程再进行求解是解一般 RLC 串联，RLC 并联二阶电路的基本方法。

第八章

相　量　法

学习要求

1. 熟悉正弦量的振幅（最大值）、角频率、相位和初相位。
2. 熟练掌握正弦量的瞬时值、有效值和相位差。
3. 熟悉正弦量的波形。
4. 熟练掌握正弦量的相量和相量图。
5. 熟练掌握基尔霍夫定律和电路元件电压、电流关系的相量形式。

知识网络图

相量法
- 复数
- 特殊相量—正弦量
- 相量法的基础
- 电路定律的相量形式
  - KVL 与 KCL 定律
  - 伏安特性

课后习题全解

○8－1　将下列复数化为极坐标形式：

(1) $F_1 = -5 - \mathrm{j}5$；　(2) $F_2 = -4 + \mathrm{j}3$；　(3) $F_3 = 20 + \mathrm{j}40$；

(4) $F_4 = \mathrm{j}10$；　(5) $F_5 = -3$；　(6) $F_6 = 2.78 + \mathrm{j}9.20$。

解　(1) $F_1 = -5 - \mathrm{j}5 = \alpha \underline{/\theta}$

$\alpha=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

$\theta=\arctan\dfrac{-5}{-5}=-135^\circ$　（F_1 在第三象限）

故 F_1 的极坐标形式为

$F_1=5\sqrt{2}\angle -135^\circ$

(2) $F_2=-4+\mathrm{j}3=\sqrt{(-4)^2+3^2}\angle\arctan(3/-4)$

$=5\angle 143.13^\circ$（F_2 在第二象限）

(3) $F_3=20+\mathrm{j}40=\sqrt{20^2+40^2}\angle\arctan(40/20)$

$=44.72\angle 63.43^\circ$（F_3 在第一象限）

(4) $F_4=10\mathrm{j}=10\angle 90^\circ$（$F_4$ 在虚轴上）

(5) $F_5=-3=3\angle 180^\circ$（F_5 在实轴上）

(6) $F_6=2.78+\mathrm{j}9.20=\sqrt{2.78^2+9.20^2}\angle\arctan(9.20/2.78)$

$=9.61\angle 73.19^\circ$（F_6 在第一象限）

○8－2　将下列复数化为代数形式：

(1) $F_1=10\angle -73^\circ$；　(2) $F_2=15\angle 112.6^\circ$；　(3) $F_3=1.2\angle 152^\circ$；

(4) $F_4=10\angle -90^\circ$；　(5) $F_5=5\angle -180^\circ$；　(6) $F_6=10\angle -135^\circ$。

解　(1) $F_1=10\angle -73^\circ=10\cos(-73^\circ)+\mathrm{j}10\sin(-73^\circ)=2.92-\mathrm{j}9.56$

(2) $F_2=15\angle 112.6^\circ=15\cos 112.6^\circ+\mathrm{j}15\sin 112.6^\circ=-5.76+\mathrm{j}13.85$

(3) $F_3=1.2\angle 152^\circ=1.2\cos 152^\circ+\mathrm{j}1.2\sin 152^\circ=-1.06+\mathrm{j}0.56$

(4) $F_4=10\angle -90^\circ=-\mathrm{j}10$

(5) $F_5=5\angle -180^\circ=-5$

(6) $F_6=10\angle -135^\circ=10\cos(-135^\circ)+\mathrm{j}10\sin(-135^\circ)=-7.07-\mathrm{j}7.07$

○8－3　若 $100\angle 0^\circ+A\angle 60^\circ=175\angle\psi$，求 A 和 ψ。

解　原式 $=100+\mathrm{A}\cos 60^\circ+\mathrm{jA}\sin 60^\circ=175\cos\psi+\mathrm{j}175\sin\psi$

根据复数相等的定义，应有实部和实部相等，即

$$\mathrm{A}\cos 60^\circ+100=175\cos\psi$$

虚部和虚部相等，即

$$\mathrm{A}\sin 60^\circ=175\sin\psi$$

把以上两式平方相加，得

$$\mathrm{A}^2+100\mathrm{A}-20625=0$$

解得

$$\mathrm{A}=\frac{-100\pm\sqrt{100^2+4\times 20625}}{2}=\begin{cases}102.07\\ -202.069\text{（舍去）}\end{cases}$$

所以

$$\sin\psi=\frac{A\sin60^{\circ}}{175}=\frac{102.07\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{175}=0.505$$

$$\psi=30.34^{\circ}$$

◎8－4　求 8－1 题中的 $F_2\cdot F_6$ 和 F_2/F_6。

分析　两个相量相乘将其模值相乘，幅角相加即可，两个相量相除将其模值相除，幅角相减即可。

解　$F_2\times F_6=(-4+j3)\times(2.78+j9.20)=5\angle 143.13^{\circ}\times 9.61\angle 73.19^{\circ}$

$=48.05\angle 216.32^{\circ}=48.05\angle -143.68^{\circ}$

$$F_2/F_6=\frac{-4+j3}{2.78+j9.20}=\frac{5\angle 143.13^{\circ}}{9.61\angle 73.19^{\circ}}=0.52\angle 69.94^{\circ}$$

○8－5　求 8－2 题中的 F_1+F_5 和 F_1/F_5。

解　$F_1+F_5=10\angle -73^{\circ}+5\angle -180^{\circ}$

$=10\cos(-73^{\circ})+j10\sin(-73^{\circ})-5$

$=-2.08-j9.56=9.78\angle -102.27^{\circ}$

$$F_1/F_5=\frac{10\angle -73^{\circ}}{5\angle -180^{\circ}}=2\angle -73^{\circ}+180^{\circ}=2\angle -107^{\circ}$$

○8－6　若已知 $i_1=-5\cos(314t+60^{\circ})$A，$i_2=10\sin(314t+60^{\circ})$A，$i_3=4\cos(314t+60^{\circ})$A。(1)写出上述电流的相量，并绘出它们的相量图；(2)i_1 与 i_2 和 i_1 与 i_3 的相位差；(3)绘出 i_1 的波形图；(4)若将 i_1 表达式中的负号去掉将意味着什么？(5)求 i_1 的周期 T 和频率 f。

解　(1)

$$i_1=-5\cos(314t+60^{\circ})=5\cos(314t+60^{\circ}-180^{\circ})$$
$$=5\cos(314t-120^{\circ})$$
$$i_2=10\sin(314t+60^{\circ})=10\cos(314t-30^{\circ})$$

故 i_1，i_2 和 i_3 的相量表示式为

$$\dot{I}_1=\frac{5}{\sqrt{2}}\angle -120^{\circ}\text{ A},\qquad \dot{I}_2=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle -30^{\circ}\text{ A},\qquad \dot{I}_3=\frac{4}{\sqrt{2}}\angle 60^{\circ}\text{ A}$$

其向量图如题解 8－6 图(a)所示。

(2)

$$\varphi_{12}=\varphi_1-\varphi_2=-120^{\circ}-(-30^{\circ})=-90^{\circ}$$
$$\varphi_{13}=\varphi_1-\varphi_3=-120^{\circ}-60^{\circ}=-180^{\circ}$$

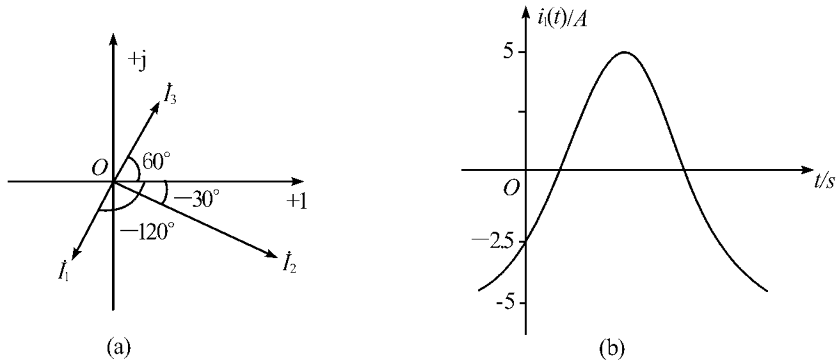
(3)$i_1(t)$的波形图见题解 8－6 图(b)所示。

(4)若将 $i_1(t)$中的负号去掉，意味着 i_1 的初相位超前了 180°，即 i_1 的参考方向反向。

(5)$i_1(t)$的周期和频率分别为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{314}=0.02s=20\text{ms}$$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{0.02}=50\text{Hz}$$



题解 8－6 图

◯8－7　**若已知两个同频正弦电压的相量分别为**

$$\dot{U}_1=50\angle 30^\circ\ \text{V},\qquad \dot{U}_2=-100\angle -150^\circ\ \text{V}$$

其频率 $f=100\text{Hz}$。**求：**

(1)**写出** u_1,u_2 **的时域形式；**

(2)u_1 **与** u_2 **的相位差。**

解　(1)
$$u_1(t)=50\sqrt{2}\cos(2\pi ft+30^\circ)=50\sqrt{2}\cos(628t+30^\circ)\text{V}$$

$$\begin{aligned}u_2(t)&=-100\sqrt{2}\cos(2\pi ft-150^\circ)\\&=100\sqrt{2}\cos(628t-150^\circ+180^\circ)\\&=100\sqrt{2}\cos(628t+30^\circ)\text{V}\end{aligned}$$

(2)**因为**

$$\dot{U}_1=50\angle 30^\circ\ \text{V},\qquad \dot{U}_2=-100\angle -150^\circ\ \text{V}=100\angle 30^\circ\ \text{V}$$

故相位差为 $\varphi=30^\circ-30^\circ=0^\circ$,**即** u_1 **与** u_2 **同相位。**

◯8－8　**已知：**

$$u_1=220\sqrt{2}\cos(314t-120^\circ)\text{V},\quad u_2=220\sqrt{2}\cos(314t+30^\circ)\text{V}$$

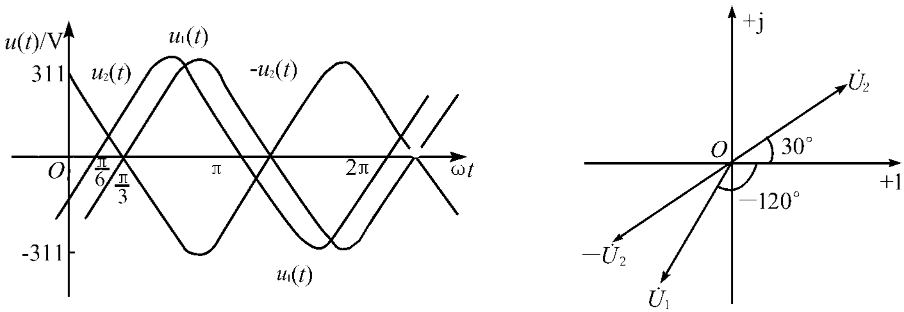
(1)**画出它们的波形图,求出它们的有效值、频率** f **和周期** T**；**

(2)**写出它们的相量并画出其相量图,求出它们的相位差；**

(3)**如果把电压** u_2 **的参考方向反向,重新回答**(1)、(2)。

解　(1)**波形图如题解** 8－8 **图**(a)**所示。**

有效值为



(a)　　(b)

题解 8－8 图

$$u_1 = u_2 = 220\text{V}$$

频率

$$f_1 = f_2 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50\text{Hz}$$

周期

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0.02\text{s}$$

(2)u_1 **和** u_2 **的相量形式为**

$$\dot{U}_1 = 220\angle -120°, \qquad \dot{U}_2 = 220\angle 30°$$

故相位差为

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -120° - 30° = -150°$$

相量图见题解 8－8 **图**(b)**所示。**

(3)u_2 **的参考方向反向,**$u_2(t)$**变为**$-u_2(t)$**,有效值、频率和周期均不变,**$-u_2(t)$**的相量为**

$$\dot{U}_2 = 220\angle 30° - 180° = 220\angle -150°\ \text{V}$$

故 u_1 **和** u_2 **的相位差为**

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -120° - (-150°) = 30°$$

波形图和相量图见题解 8－8 **图**(a)**和**(b)**。**

○8－9　**已知一段电路的电压、电流为:**$u = 10\sin(10^3 t - 20°)\text{V}$,$i = 2\cos(10^3 t - 50°)\text{A}$。

(1)**画出它们的波形图和相量图;**

(2)**求它们的相位差。**

解　(1)
$$u = 10\sin(10^3 t - 20°) = 10\cos(10^3 t - 110°)\text{V}$$

故 u **和** i **的相量分别为**

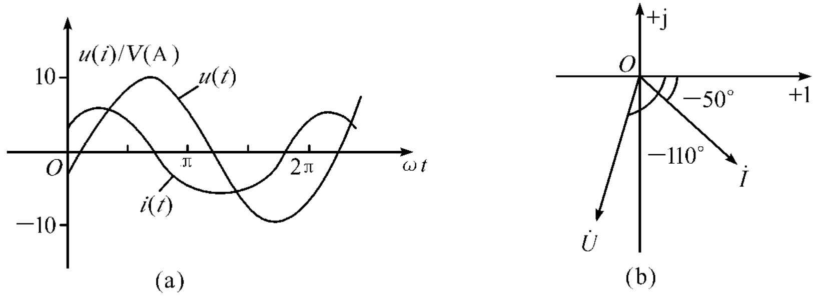
$$\dot{U}=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle -110^\circ\ \text{V},\quad \dot{I}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle -50^\circ\ \text{A}$$

其波形图和相量图见题图解 8－9(a)和(b)所示。

(2)相位差

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=-110^\circ-(-50^\circ)=-60^\circ$$

电压落后于电流 60°。



题解 8－9 图

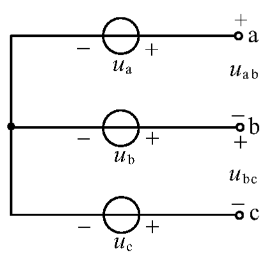
●8－10　已知题 8－10 图,示三个电压源的电压分别为:

$$u_a=220\sqrt{2}\cos(\omega t+10^\circ)\text{V}$$

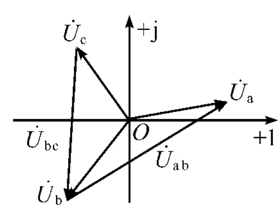
$$u_b=220\sqrt{2}\cos(\omega t-110^\circ)\text{V}$$

$$u_c=220\sqrt{2}\cos(\omega t+130^\circ)\text{V}$$

求(1)3 个电压的和;(2)u_{ab},u_{bc};(3)画出它们的相量图。



题 8－10 图



题解 8－10 图

分析　求解电压和利用相量法求解即可。

解　u_a,u_b,u_c 的相量为

$$\dot{U}_a=220\angle 10^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_b=220\angle -110^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_c=220\angle 130^\circ\ \text{V}$$

(1)应用相量法有

$$\dot{U}_a+\dot{U}_b+\dot{U}_c=220\angle 10^\circ+220\angle -110^\circ+220\angle 130^\circ=0$$

三个电压的和为零,即

$$u_a(t)+u_b(t)+u_c(t)=0$$

(2) $$\dot{U}_{ab}=\dot{U}_a-\dot{U}_b=220\angle 10^\circ-220\angle -110^\circ=220\sqrt{3}\angle 40^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{bc}=\dot{U}_b-\dot{U}_c=220\angle -110^\circ-220\angle 130^\circ=220\sqrt{3}\angle -80^\circ\ \text{V}$$

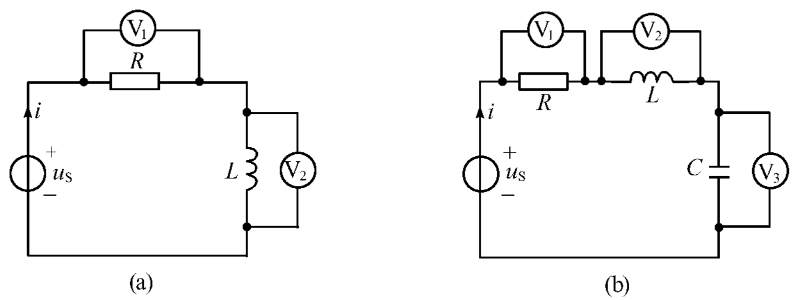
所以 $$u_{ab}=220\sqrt{6}\cos(\omega t+40^\circ)\text{V}$$

$$u_{bc}=220\sqrt{6}\cos(\omega t-80^\circ)\text{V}$$

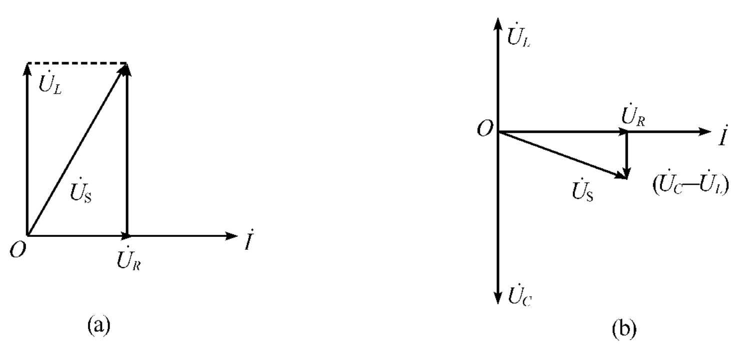
(3)相量图如题解 8-10 图所示。

小结 确定各电压之间的相位,模值关系即可容易画出相量图,画出正确的相量图对解决相量类问题至关重要。

◎8-11 已知题 8-11 图(a)中电压表读数 V_1:30V;V_2:60V;题 8-11 图(b)中的 V_1:15V;V_2:80V;V_3:100V。(电压表的读数为正弦电压的有效值。)求图中电压 U_S。



题 8-11 图



题解 8-11 图

分析 根据各相量之间的相位关系,画出相量图,求解即可。

解　利用相量图求解。设电流 $\dot{I}=I\angle 0^\circ$ A 为参考向量，电阻电压 $\dot{U}_R$ 与 $\dot{I}$ 同相位，电感电压 $\dot{U}_L$ 超前 $\dot{I}$ 90°电容电压 $\dot{U}_C$ 要滞后 $\dot{I}$ 90°，总电压 $\dot{U}_S$ 与各元件电压相量构成一直角三角形。题解 8－11 图(a)和(b)为对应题 8－11 图(a)和(b)的相量图。由题解 8－11 图(a)可得

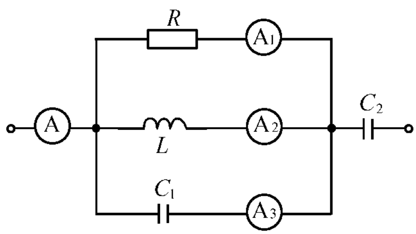
$$U_S=\sqrt{U_R^2+U_L^2}=\sqrt{30^2+60^2}=67.08\text{V}$$

由题解 8－11 图(b)可得

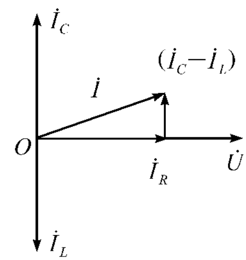
$$U_S=\sqrt{U_R^2+(U_C-U_L)^2}=\sqrt{15^2+(100-80)^2}=25\text{V}$$

○8－12　已知题 8－12 图，图示正弦电流电路中，电流表的读数分别为 A_1：5A；A_2：20A；A_3：25A。

求：(1)图中电流表 A 的读数；(2)如果维持 A_1 的读数不变，而把电源的频率提高一倍，再求电流表 A 的读数。



题 8－12 图



题解 8－12 图

解　利用相量图求解。设以 $\dot{U}=U\angle 0^\circ=\dot{U}_R=\dot{U}_L=\dot{U}_C$ 为参考向量，根据元件电压、电流的相位关系知，$\dot{I}_R$ 和 $\dot{U}$ 同相位，$\dot{I}_C$ 超前 $\dot{U}90^\circ$，$\dot{I}_L$ 滞后 $\dot{U}90^\circ$，相量图如题解 8－12 图所示，总电流 $\dot{I}$ 与 $\dot{I}_R$，$\dot{I}_C$ 和 $\dot{I}_L$ 组成一个直角三角形。故电流表的读数为

$$\text{A}=\sqrt{I_R^2+(I_C-I_L)^2}\text{A}$$

即

(1)
$$\text{A}=\sqrt{5^2+(25-20)^2}=7.07\text{A}$$

(2)
$$\text{A}=\sqrt{5^2+(50-10)^2}=40.31\text{A}$$

○8－13　$R=30\Omega$，$L=127.4\text{mH}$

◎8－14　某一元件的电压、电流(关联参考方向)分别为下述 4 种情况时，它可能是什么元件？

(1) $\begin{cases} u=10\cos(10t+45^\circ)\text{V} \\ i=2\sin(10t+135^\circ)\text{A} \end{cases}$；　(2) $\begin{cases} u=10\sin(100t)\text{V} \\ i=2\cos(100t)\text{A} \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} u = -10\cos t\,\text{V} \\ i = -\sin t\,\text{A} \end{cases}$；　　(4) $\begin{cases} u = 10\cos(314t + 45^\circ)\,\text{V} \\ i = 2\cos(314t)\,\text{A} \end{cases}$。

分析　根电压、电流之间的相位关系，即可确定元件为何种元件。

解　(1)把电流变为余弦形式有

$$i = 2\cos(10t + 135^\circ - 90^\circ) = 2\cos(10t + 45^\circ)\,\text{A}$$

u 和 i 的相量为

$$\dot{U} = \frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \text{V}, \qquad \dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \text{A}$$

则

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 5\angle 0^\circ\ \Omega$$

即电压、电流同相位，根据元件电压、电流相位关系可知，这是一个 5Ω 的电阻元件。

(2)把电压变为余弦形式有

$$u = 10\cos(100t - 90^\circ)\,\text{V}$$

u 和 i 的相量为

$$\dot{U} = \frac{10}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ\ \text{V}, \qquad \dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ \text{A}$$

则

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 5\angle -90^\circ\ \Omega$$

即 $\dot{U}$ 滞后于 $\dot{I}\,90^\circ$，根据元件电压、电流相位关系可知，这是一个 $X_C = 5\Omega$ 的电容元件，其参数 C 为

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{100\times 5} = 2\times 10^{-3}\,\text{F}$$

(3)把电流用余弦表示为

$$i = -\cos(t - 90^\circ)\,\text{A}$$

u 和 i 的相量为

$$\dot{U} = \frac{-10}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ \text{V}, \qquad \dot{I} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ\ \text{A}$$

则

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{-10\angle 0^\circ}{-1\angle -90^\circ} = 10\angle 90^\circ\ \Omega$$

即 $\dot{U}$ 超前 $\dot{I}\,90^\circ$，根据元件电压、电流相位可知，这是一个 $X_L = 10\Omega$ 的电感。其参数 L 为

$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{10}{1}=10\text{H}$$

(4) u 和 i 的相量为

$$\dot{U}=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \text{V},\qquad \dot{I}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ \text{A}$$

则

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=5\angle 45^\circ=\frac{5}{\sqrt{2}}(1+\text{j})=R+\text{j}X_L$$

即这是一个 $R=\frac{5}{\sqrt{2}}\Omega$ 的电阻和 $X_L=\frac{5}{\sqrt{2}}\Omega$ 的电感的串联组合。其参数 L 为

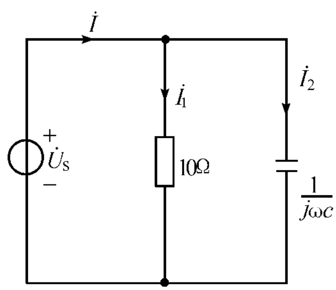
$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{5/\sqrt{2}}{314}=11.3\text{mH}$$

○8－15　$R=66.144\Omega$，$i(t)=\sqrt{2}\cos(10^3t-20.7^\circ)$A

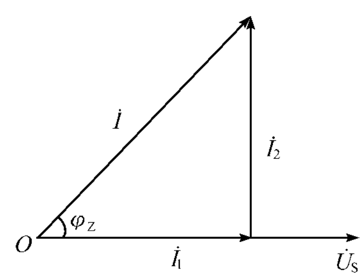
●8－16　已知题 8－16 图，图示电路中 $I_1=I_2=10$A。求 $\dot{I}$ 和 $\dot{U}_S$。

分析　画出相量图，根据各相位关系求解即可。

解　设 $\dot{U}_S$ 为参考相量。$\dot{I}_1$ 与 $\dot{U}_S$ 同相位，$\dot{I}_2$ 超前 $\dot{U}_S 90^\circ$，相量图如题解 8－16 图所示。由相量图可知



题 8－16 图



题解 8－16 图

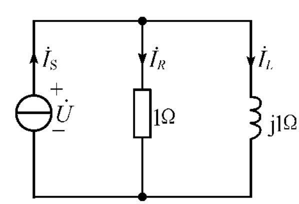
$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}\text{A}$$

$$\varphi_z=\arctan\frac{I_2}{I_1}=\arctan 1=45^\circ$$

由电路图知

$$U_S=RI_1=10\times 10=100\text{V}$$

故 $\dot{U}_S$ 和 $\dot{I}$ 分别为



题 8－17 图

$$\dot{U}_S = 100\angle 0^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I} = I\angle\varphi_z = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \text{A}$$

小结　选取合适的参考相量,画正确的相量图是解本题的关键。

○8－17　$\dot{U}=\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \text{V}$

第九章

正弦稳态电路的分析

学习要求

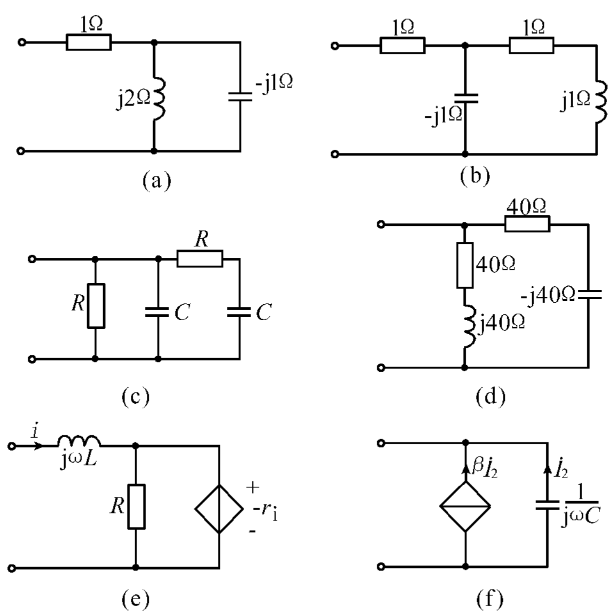
1. 深刻理解和掌握阻抗 Z 与导纳 Y 的定义及其物理意义，并会计算；能对阻抗 Z 与导纳 Y 进行相互等效变换；会求解单口电路的输入阻抗 Z。
2. 会画简单电路的相量图，并会应用相量图对电路进行定性或定量的分析计算。
3. 会用相量法对正弦稳态电路进行分析计算；包括阻抗的串联与并联，叠加定理法，网孔法，回路法，结点法，等效电源定理法，各种等效变换原理，互易定理，特勒根定理的应用等。
4. 会计算正弦稳态电路中的功率，包括平均功率，无功功率，视在功率，复功率。
5. 深刻理解和掌握最大功率传输定理的内容与意义，并会求解与应用。
6. 了解电路谐振的定义、条件、固有谐振频率以及谐振时电路的性质，并会应用。

知识网络图

- 正弦稳态电路的分析
  - 基本概念
    - 阻抗
    - 导纳
    - 向量图
  - 阻抗导纳的连接形式
    - 串联
    - 并联
  - 正弦稳态电路
    - 分析
    - 功率问题
      - 瞬时功率
      - 平均功率
      - 无功功率
      - 视在功率
  - 复功率和最大功率传输
  - 谐振
    - 串联电路谐振
    - 并联电路谐振

课后习题全解

○9－1　**试求题 9－1 图所示各电路的输入阻抗 Z 和导纳 Y。**



题 9－1 图

解　(a)$Z=1+\dfrac{j2(-j1)}{j2+(-j1)}=1-j2\Omega$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{1-j2}=\frac{1}{5}+j\ \frac{2}{5}=0.2+j0.4\text{S}$$

(b)$Z=1+\dfrac{(-j1)(1+j)}{-j1+1+j1}=2-j\Omega$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{2-j}=\frac{2}{5}+j\ \frac{1}{5}=0.4+j0.2\text{S}$$

(c)$Y=\dfrac{1}{R}+j\omega C+\dfrac{1}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}=\dfrac{1}{R}+j\omega C+\dfrac{j\omega C}{1+j\omega RC}\text{S}$

$$Z=\frac{1}{Y}=\frac{1}{\dfrac{1}{R}+j\omega C+\dfrac{j\omega C}{1+j\omega RC}}=\frac{R-j\ \dfrac{1}{\omega C}}{3+j(\omega RC-\dfrac{1}{\omega RC})}\Omega$$

(d)$Z=\dfrac{(40+j40)(40-j40)}{40+j40+40-j40}=40\Omega$

$$Y=\frac{1}{Z}=0.025\text{S}$$

(e)**用外施激励法，如题解** 9－1 **图**(a)**所示。**

列 KVL **方程**　$\dot{I}j\omega L+(-r\dot{I})=\dot{U}$　**即**$(j\omega L-r)\dot{I}=\dot{U}$

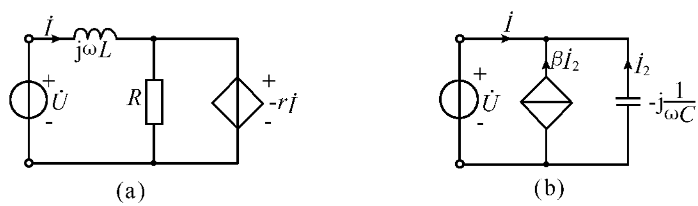
所以 $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=(j\omega L-r)\Omega$，　$Y=\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{j\omega L-r}=\dfrac{-j\omega L-r}{r^2+(\omega L)^2}\text{S}$

(f)**用外施激励法，如题解** 9－1 **图**(b)**所示。**

列 KCL **方程** $\dot{I}=-\beta\dot{I}_2-\dot{I}_2$　**得** $\dot{I}_2=\dfrac{1}{-(1+\beta)}\dot{I}$

所以 $\dot{U}=-\dot{I}_2\cdot(-j\dfrac{1}{\omega C})=\dfrac{1}{1+\beta}\cdot(-j\dfrac{1}{\omega C})\dot{I}=\dfrac{-j}{\omega C(1+\beta)}\dot{I}$

即有 $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=-\dfrac{j}{\omega C(1+\beta)}\Omega$，　$Y=\dfrac{1}{Z}=j\omega C(1+\beta)\text{S}$



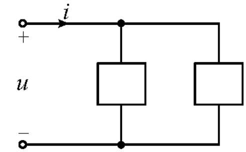
题解 9－1 **图**

◯9－2　已知题 9－2 图所示电路中 $u=50\sin(10t+\pi/4)\text{V}$，$i=400\cos(10t+\pi/6)$ A。试求电路中合适的元件值(等效)。

解　由已知条件，知

$$\dot{U}=\frac{50}{\sqrt{2}}(\angle 45^\circ-\angle 90^\circ)=\frac{50}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ\ \text{V},\quad \dot{I}=\frac{400}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ\ \text{A}$$

$$Y_{\text{in}}=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=8\angle 75^\circ=2.07+\text{j}7.73\text{S}=G+\text{j}X_C$$



题 9－2 图

即题 9－2 图所示的两并联元件为电导和电容，其参数为

$$G=2.07\text{S},\quad X_C=7.73=\frac{1}{\omega C}$$

所以

$$C=\frac{7.73}{\omega}=0.773\text{F}$$

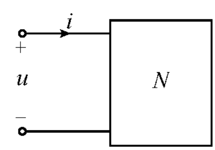
◯9－3　题 9－3 图中 N 为不含独立源的一端口，端口电压 u、电流 i 分别如下列各式所示。试求每一种情况下的输入阻抗 Z 和导纳 Y，并给出等效电路图(包括元件的参数值)。

(1) $\begin{cases} u=200\cos(314t)\text{V} \\ i=10\cos(314t)\text{A} \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} u=10\cos(10t+45^\circ)\text{V} \\ i=2\cos(10t-90^\circ)\text{A} \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} u=100\cos(2t+60^\circ)\text{V} \\ i=5\cos(2t-30^\circ)\text{A} \end{cases}$；

(4) $\begin{cases} u=40\cos(100t+17^\circ)\text{V} \\ i=8\sin(100t+\pi/2)\text{A} \end{cases}$。



题 9－3 图

解　(1) $\dot{U}=200/\sqrt{2}\angle 0^\circ$，　$\dot{I}=10/\sqrt{2}\angle 0^\circ$ A

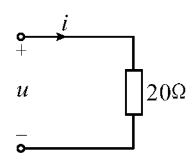
$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=20\Omega=Z_{\text{in}},\quad Y_{\text{in}}=\frac{1}{Z_{\text{in}}}=0.05\text{S}$$

即等效电路为 20Ω 的电阻，如题解 9－3 图(a)所示。

(2) $\dot{U}=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ$，　$\dot{I}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ$ A

$$Z_{\text{in}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=5\angle 135^\circ=-3.536+\text{j}3.536\Omega$$

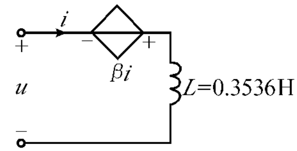
$$Y_{\text{in}}=\frac{1}{Z_{in}}=\frac{1}{5}\angle -135^\circ=-0.141-\text{j}0.141\text{S}$$



题解 9－3 图(a)

因为 Z_{in} 的实部为负值，不可能为电阻，只由受控源所致。
等效电路如题解 9－3 图(b)所示。

其中 $\beta=3.536$，　$L=\dfrac{3.536}{\omega}=0.3536\text{H}$



题解 9－3 图(b)

(3)$\dot{U}=\dfrac{100}{\sqrt{2}}\angle 60^\circ$ V，　$\dot{I}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\angle -30^\circ$ A

$Z_{in}=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=20\angle 90^\circ=\text{j}20\Omega$，　$Y_{in}=\dfrac{1}{Z_{in}}=-\text{j}0.05\text{S}$

等效电路为一电感，$L=\dfrac{20}{\omega}=\dfrac{20}{2}=10\text{H}$，如题解 9－3 图(c)所示。

(4)$\dot{U}=\dfrac{40}{\sqrt{2}}\angle 17^\circ$，$\dot{I}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}(\angle 90^\circ-\angle 90^\circ)=\dfrac{8}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ$ A

$Z_{in}=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=5\angle 17^\circ=4.78+\text{j}1.46\Omega$

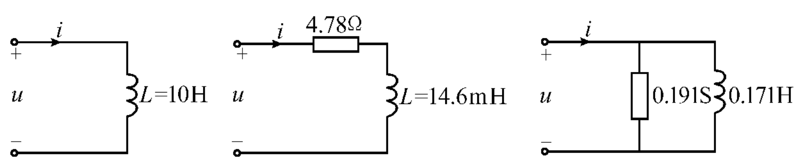
$Y_{in}=\dfrac{1}{Z_{in}}=\dfrac{1}{5}\angle -17^\circ=0.191-\text{j}0.0585\text{S}$

等效电路为 $R=4.78\Omega$ 的电阻和 $X_L=1.46\Omega$ 的电感串联，如题解 9－3 图(d1)所示。

$$L=\frac{1.46}{\omega}=\frac{1.46}{100}=14.6\text{mH}$$

也可看做是由 $G=0.191\text{S}$ 和一电感并联等效，如题解 9－3 图(d2)所示。
即

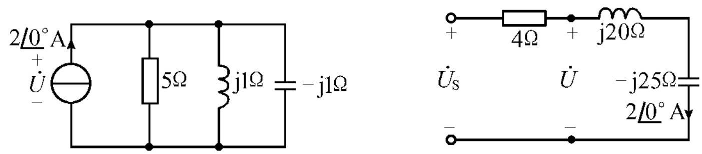
$$\frac{1}{\omega L}=0.0585,\quad L=\frac{1}{100\times 0.0585}=0.171\text{H}$$



(c)　(d1)　(d2)

题解 9－3 图

$\boxed{◯9-4}$ **求题 9－4 图中的电压 $\dot{U}$，并画出电路的相量图。**



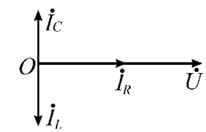
(a)　　　　　　　　(b)

题 9－4 图

解　(a)
$$Y=\frac{1}{5}+\frac{1}{\mathrm{j}1}+\frac{1}{-\mathrm{j}1}=0.2\mathrm{S}$$

所以

$$\dot{U}=\frac{\dot{I}}{Y}=\frac{2\angle 0^\circ}{0.2}=10\mathrm{V}$$



(a)

以 $\dot{U}=U\angle 0^\circ$ **为参考方向，**

由 KCL **方程**　$\dot{I}_S=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C$

作相量图如题解 9－4 **图**(a)**所示。**

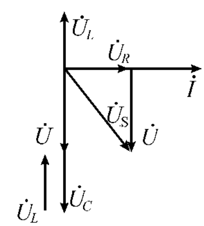
(b)**由** KVL **得**

$\dot{U}=2\angle 0^\circ\times(\mathrm{j}20-\mathrm{j}25)=-\mathrm{j}10\mathrm{V}$

以 $\dot{I}=2\angle 0^\circ$ A **为参考方向，**

由 KVL **方程**　$\dot{U}_S=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C$ **或** $\dot{U}_S=\dot{U}_R+\dot{U}$

作相量图如题解 9－4 **图**(b)**所示。**



(b)

题解 9－4 图

◯9－5　**已知题** 9－5 **图所示电路图** $\dot{I}=2\angle 0^\circ$ A，**求电压** $\dot{U}_S$，**并作电路的相量图。**

分析　$\dot{U}_R=\dot{I}R$，$\dot{U}_L=\mathrm{j}\dot{I}X_L$，$\dot{U}_C=-\mathrm{j}\dot{I}X_C$，**根据公式求解即可。**

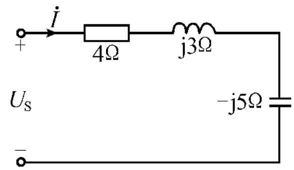
解　**由** KVL **得**
$$\begin{aligned}\dot{U}_S&=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=\dot{I}(R+\mathrm{j}X_L-\mathrm{j}X_C)\\&=2\angle 0^\circ{}^\circ\times(4+\mathrm{j}3-\mathrm{j}5)=2\angle 0^\circ\times(4-\mathrm{j}2)\\&=2\angle 0^\circ\times4.47\angle -26.565^\circ=8.94\angle -26.565^\circ\mathrm{V}\end{aligned}$$

以 $\dot{I}=2\angle 0^\circ$ **为参考向量，作相量图如题解** 9－5 **图所示。**

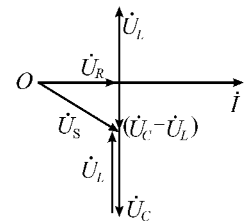
◯9－6　**题** 9－6 **图电路中，**$I_2=10\mathrm{A}$，$U_S=\dfrac{10}{\sqrt{2}}\mathrm{V}$，**求电流** $\dot{I}$ **和电压** $\dot{U}_S$，**并画出电路的相量图。**

分析　**根据相位关系，应用相量法求解即可。**

解　**如题解** 9－6 **图**(a)**所示，**



题 9—5 图



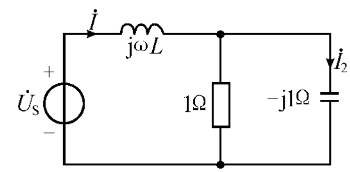
题解 9—5 图

设

$$\dot{U}=U\angle 0^\circ\ \text{V}=10\times 1\angle 0^\circ=10\angle 0^\circ\ \text{V}$$

则

$$\dot{I}_2=10\angle 90^\circ\ \text{A},\quad \dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{1}=10\angle 0^\circ\ \text{A}$$



题 9—6 图

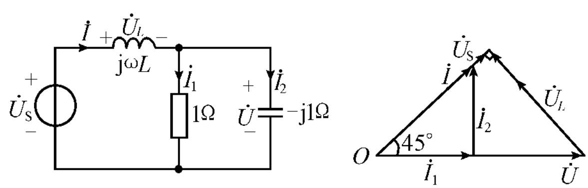
相量图如题解 9—6 图(b)所示。

$$\dot{I}=\sqrt{10^2+10^2}\angle 45^\circ=10\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \text{A}$$

又

$$U_L=\sqrt{U^2-U_S^2}=\sqrt{10^2-\frac{10^2}{2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}\text{V}=U_S$$

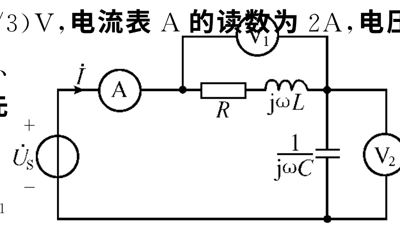
可见 $\dot{U}_S$ 与 $\dot{I}$ 同相位,所以 $\dot{U}_S=\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \text{V}$。



(a)　　(b)

题解 9—6 图

◎9—7　题 9—7 图中已知 $u_S=200\sqrt{2}\cos(314+\pi/3)\text{V}$,电流表 A 的读数为 2A,电压表 V_1、V_2 的读数均为 200V。求参数 R、L、C,并作出该电路的相量图(提示:可先作相量图辅助计算)。



题 9—7 图

分析　电流表、电压表的读数均为有效值 $\dot{U}_S=\dot{U}_1+\dot{U}_2$,根据向量关系求解即可。

解　以 $\dot{I}$ 为参考向量作相量图如题解 9—7 图所示。

$$U_1=U_2=U_S=200\text{V}$$

所以由 $\dot{U}_S=\dot{U}_1+\dot{U}_2$ 组成的向量三角形为等边三角形。

可见 $U_R=U_1\cos30°=200\cos30°=100\sqrt{3}\text{V}$

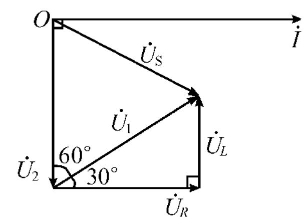
$$R=\frac{U_R}{I}=\frac{100\sqrt{3}}{2}=86.6\Omega$$

$$X_L=\frac{U_L}{I}=\frac{U_1\cos30°}{2}=50\Omega$$

$$L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{50}{314}=0.159\text{H}$$

$$X_C=\frac{U_2}{I}=\frac{200}{2}=100\Omega$$

$$C=\frac{1}{\omega X_C}=\frac{1}{314\times100}=31.85\mu\text{F}$$



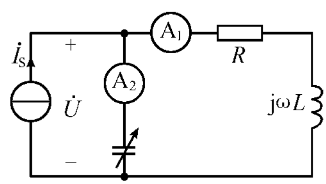
题解 9－7 图

○9－8　题 9－8 图中 $i_S=14\sqrt{2}\cos(\omega t+\psi)\text{mA}$，调节电容，使电压 $\dot{U}=U\angle\psi$，电流表 A_1 的读数 50mA。求电流表 A_2 的读数。

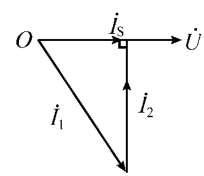
解　相量图如题解 9－8 图所示（由题意，$\dot{U}$ 与 $\dot{I}_S$ 同相位）

$$I_2=\sqrt{I_1^2-I_S^2}=\sqrt{50^2-14^2}=48\text{mA}$$

即 A_2 的读数为 48mA。

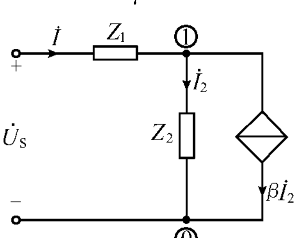


题 9－8 图

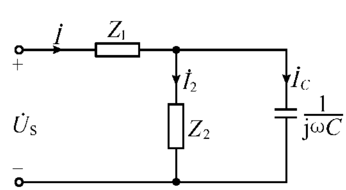


题解 9－8 图

○9－9　题 9－9 图中 $Z_1=(10+\text{j}50)\Omega$，$Z_2=(400+\text{j}1000)\Omega$，如果要使 $\dot{I}_2$ 和 $\dot{U}_S$ 的相位差为 90°（正交），β 应等于多少？如果把图中 CCCS 换为可变电容 C，求 ωC。



题 9－9 图



题解 9－9 图

解　由 KCL，可得

$$\dot{I}=\dot{I}_2+\beta\dot{I}_2=(1+\beta)\dot{I}_2$$

由 KVL，可得

$$\dot{U}_S=Z_1\dot{I}+Z_2\dot{I}_2=Z_1(1+\beta)\dot{I}_2+Z_2\dot{I}_2=[Z_1(1+\beta)+Z_2]\dot{I}_2$$

$$=\{10(1+\beta)+400+\mathrm{j}[50(1+\beta)+1000]\}\dot{I}_2$$

要使 $\dot{I}_2$ 和 $\dot{U}_S$ 的相位差为 90°，则 $10(1+\beta)+400=0$

$$\beta=-41$$

此时 $$\dot{U}_S=-\mathrm{j}1000\dot{I}_2$$

如果把 CCCS 换成可变电容，如题解 9－9 图所示。

$$\dot{I}=\dot{I}_2+\dot{I}_C=\dot{I}_2+(\dot{I}_2Z_2)\mathrm{j}\omega C=(1+\mathrm{j}\omega CZ_2)\dot{I}_2$$

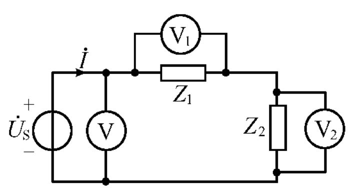
$$\dot{U}_S=Z_1\dot{I}+Z_2\dot{I}_2=Z_1(1+\mathrm{j}\omega CZ_2)\dot{I}_2+Z_2\dot{I}_2=(Z_1+Z_2+\mathrm{j}\omega CZ_1Z_2)\dot{I}_2$$

$$=[410-3\times10^4\omega C+\mathrm{j}(1050-46\times10^3\omega C)]\dot{I}_2$$

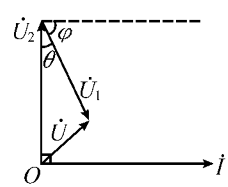
要使 $\dot{I}_2$ 和 $\dot{U}_S$ 的相位差为 90°，则 $410-3\times10^4\omega C=0$

得 $$\omega C=\frac{410}{3\times10^4}=1.37\times10^{-2}\mathrm{S}$$

○9－10　已知题 9－10 图电路中 $Z_2=\mathrm{j}60\Omega$，各交流电表的读数分别为 V：100V；V_1：171V；V_2：240V。求阻抗 Z_1。



题 9－10 图



题解 9－10 图

解　以 $\dot{I}$ 为参考向量，由 KVL 方程 $\dot{U}_S=\dot{U}_1+\dot{U}_2$ 即 $\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$，作相量图如题解 9－10 图所示。

根据余弦定量：$$U^2=U_1^2+U_2^2-2U_1U_2\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{U_1^2+U_2^2-U^2}{2U_1U_2}=\frac{171^2+240^2-100^2}{2\times171\times240}=0.936$$

$$\theta=\arccos(0.936)=20.58°,\quad \varphi=90°-\theta=69.42°$$

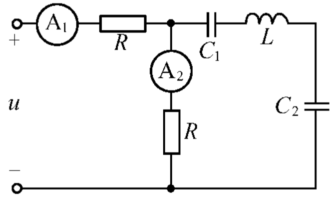
所以 $$\dot{U}_1=171\angle-69.42°\ \mathrm{V}$$

又 $$\dot{I}=\frac{\dot{U}_2}{Z_2}=\frac{\mathrm{j}240}{\mathrm{j}60}=4\angle0°\ \mathrm{A}$$

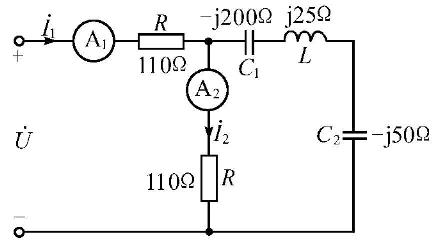
所以

$$Z_1=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}}=\frac{171\angle-69.42^\circ}{4\angle 0^\circ}=42.75\angle-69.42^\circ=15.03-j40.02\Omega$$

●9－11　**已知题 9－11 图电路中**，$u=220\sqrt{2}\cos(250t+20^\circ)\text{V}$，$R=110\Omega$，$C_1=20\mu\text{F}$，$C_2=80\mu\text{F}$，$L=1\text{H}$。**求电路中各电流表的读数和电路的输入阻抗，画出电路的相量图。**



题 9－11 图



题解 9－11 图(a)

分析　根据各元件的伏安特性求解即可。

解　$X_{C1}=\frac{1}{\omega C_1}=200\Omega$，$X_L=\omega L=250\Omega$，$X_{C2}=\frac{1}{\omega C_2}=50\Omega$

由题解 9－11 图(a)可见，LC 串联支路 $Z_{LC}=-j200+j250-j50=0$

所以 LC 支路相当于短路，那么有 $I_2=0$，即 A2 的读数为 0。

$I_1=\frac{U}{R}=\frac{220}{110}=2\text{A}$，即 A1 的读数为 2A。

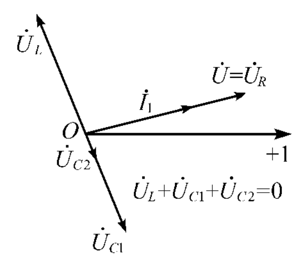
$$Z_{\text{in}}=R=110\Omega$$

各向量为 $\dot{U}=220\angle 20^\circ\ \text{V}$，　$\dot{I}_1=2\angle 20^\circ\ \text{V}$

$\dot{U}_{C1}=-j200\times\dot{I}_1=400\angle-17^\circ\ \text{V}$

$\dot{U}_{C2}=-j50\times\dot{I}_1=100\angle-17^\circ\ \text{V}$

$\dot{U}_L=j250\times\dot{I}_1=500\angle 110^\circ\ {}^\circ\text{V}$

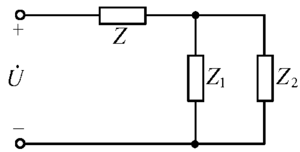


题解 9－11 图(b)

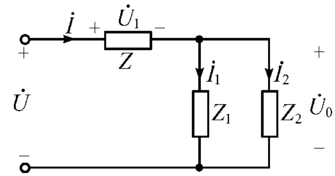
相量图如题解 9－11 图(b)所示。

小结　$X_C=\frac{1}{\omega C}$，$X_L=\omega L$ 分别为电容、电感的阻抗，电路中各电流表的读数均为有效值。

○9－12　**已知题 9－12 图电路中** $U=8\text{V}$，$Z=(1-j0.5)\Omega$，$Z_1=(1+j1)\Omega$，$Z_2=(3-j1)\Omega$。**求各支路的电流和电路输入导纳，画出电路的相量图。**



题 9－12 图



题解 9－12 图(a)

解　设电路电压、电流的参考方向如题解 9－12 图(a)所示。

$$Z_{12}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{(1+\mathrm{j})(3-\mathrm{j})}{1+\mathrm{j}+3-\mathrm{j}}=1+\mathrm{j}0.5\Omega$$

$$Z_{in}=Z+Z_{12}=1-\mathrm{j}0.5+1+\mathrm{j}0.5=2\Omega,\quad Y_{in}=\frac{1}{Z_{in}}=0.5\mathrm{S}$$

设 $\dot{U}=8\underline{/0^\circ}$ V　　则 $\dot{I}=\dfrac{\dot{U}}{Z_{in}}=4\underline{/0^\circ}$ A

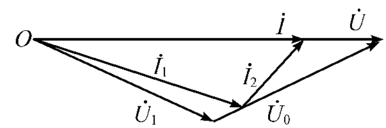
$$\dot{I}_1=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{I}=\sqrt{10}\underline{/-18.435^\circ}\ \mathrm{A}(\text{分流公式})$$

$$\dot{I}_2=\dot{I}-\dot{I}_1=4\underline{/0^\circ}-\sqrt{10}\underline{/-18.435^\circ}=\sqrt{2}\underline{/45^\circ}$$
A

$$\dot{U}_0=\dot{I}Z_{12}=4\underline{/0^\circ}\times(1+\mathrm{j}0.5)=4.47\underline{/26.565^\circ}\ \mathrm{V}$$

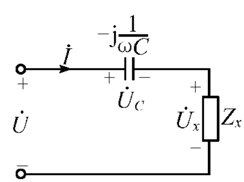
$$\dot{U}_1=\dot{I}Z=4\underline{/0^\circ}\times(1-\mathrm{j}0.5)=4.47\underline{/-26.565^\circ}\ \mathrm{V}$$

相量图如题解 9－12 图(b)所示。



题解 9－12 图(b)

○9－13　**已知题 9－13 图电路中**，$U=100\mathrm{V}$，$U_C=100\sqrt{3}\mathrm{V}$，$X_C=-100\sqrt{3}\Omega$，**阻抗** Z_x **的阻抗角** $|\varphi_x|=60^\circ$。**求** Z_x **和电路的输入阻抗。**



题 9－13 图

解　设以电流 $\dot{I}$ 作为参考向量，且有

$$\dot{I}=\frac{U_C}{|X_C|}\underline{/0^\circ}=1\underline{/0^\circ}\ \mathrm{A}$$

又因为 $\dot{U}=\dot{U}_C+\dot{U}_x$，且知 $U=100<U_C=100\sqrt{3}$

所以，可知 Z_x 应为电感性阻抗，即有 $\varphi_x=60^\circ$

作相量图如题解 9－13 图所示。

根据余弦定理，有 $U^2=U_C^2+U_x^2-2U_CU_x\cos30^\circ$

即

$$100^2=(100\sqrt{3})^2+U_x^2-2\times100\sqrt{3}U_x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

整理，得

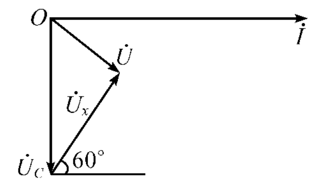
$$U_x^2-300U_x+20\ 000=0$$

解得

$$U_{x1}=200\text{V},\quad U_{x2}=100\text{V}$$

即有

$$200\angle 60°=Z_{x1}\cdot \dot{I}=Z_x\cdot 1\angle 0°$$



题解 9－13 图

得

$$Z_{x1}=200\angle 60°=100+\text{j}100\sqrt{3}\Omega$$

同理

$$100\angle 60°=Z_x\cdot 1\angle 0°$$

得

$$Z_{x2}=100\angle 60°=50+\text{j}50\sqrt{3}\Omega$$

电路的输入阻抗为

$$Z_{\text{in}1}=-\text{j}X_C+Z_{x1}=-\text{j}100\sqrt{3}+200\angle 60°=100\Omega$$

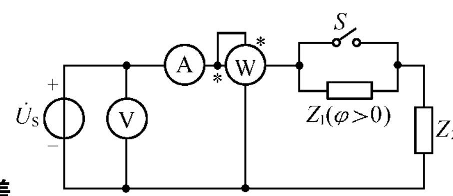
$$Z_{\text{in}2}=-\text{j}X_C+Z_{x2}=-\text{j}100\sqrt{3}+100\angle 60°=50-\text{j}50\sqrt{3}\Omega$$

◯9－14　题 9－14 图电路中，当 S 闭合时，各表读数如下：V 为 220V、A 为 10A、W 为 1000W；当 S 打开时，各表读数依次为 220V、12A 和 1600W。求阻抗 Z_1 和 Z_2，设 Z_1 为感性。

解　开关闭合时，由 $P=UI\cos\varphi$，得

$$\cos\varphi=\frac{P}{UI}=\frac{1000}{220\times 10}=\frac{5}{11}=0.4545$$

$$\varphi=\arccos 0.4545=\pm 62.964°$$



题 9－14 图

φ 为 Z_2 的阻抗角（φ 为 $\dot{U}$ 和 $\dot{I}$ 的相位差角）

所以

$$Z_2=\frac{U}{I}\angle\varphi=\frac{220}{10}\angle\pm 62.964°=10\pm\text{j}19.596\Omega$$

当开关 S 打开后，有

$$\cos\varphi'=\frac{P}{UI}=\frac{1600}{220\times 12}=0.606$$

$$\varphi'=\pm 52.695°$$

即总阻抗

$$Z=Z_1+Z_2=\frac{U}{I}\angle\varphi=\frac{220}{12}\angle\pm 52.695°=11.11\pm\text{j}14.58\Omega$$

所以，有　$$Z_1=Z-Z_2$$

又因 Z_1 为感性，即　　$Z_1=R_1+\mathrm{j}X_1$，　$X_1>0$

所以 Z_2 只能取　　$Z_2=10-\mathrm{j}19.596\Omega$

因此

$$Z_1=11.11\pm\mathrm{j}14.58-(10-\mathrm{j}19.596)$$

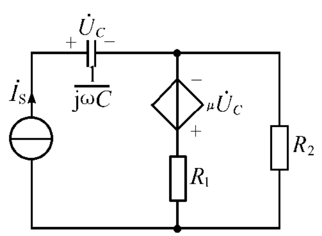
即

$$Z_1=1.11+\mathrm{j}5.016=5.137\angle 77.52^\circ\ \Omega$$

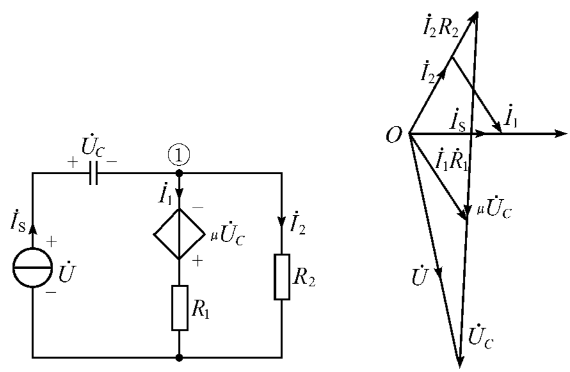
或

$$Z_1=1.11+\mathrm{j}34.176=34.194\angle 88.14^\circ\ \Omega$$

○9－15　已知题 9－15 图电路中，$I_S=10\mathrm{A}$，$\omega=5000\mathrm{rad/s}$，$R_1=R_2=10\Omega$，$C=10\mu\mathrm{F}$，$\mu=0.5$。求各支路电流并作出电路的相量图。



题 9－15 图



(a)　　　　(b)

题解 9－15 图

解　应用结点电压法如题解 9－15 图(a)所示，列结点电压方程如下：(设 $\dot{I}_S=10\angle 0^\circ$ A)

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)\dot{U}_{n1}=\dot{I}_S-\dfrac{\mu\dot{U}_C}{R_1}\\[2ex]\dot{U}_C=-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}_S\end{cases}$$

解得

$$\dot{U}_{n1}=\frac{\left(\mathrm{j}\dfrac{\mu}{R_1}\cdot\dfrac{1}{\omega C}+1\right)\dot{I}_S}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$$

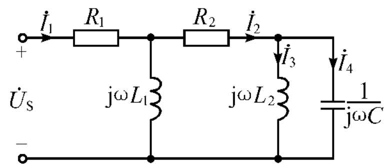
代入已知条件，得　　$\dot{U}_{n1}=50+\mathrm{j}50=50\sqrt{2}\angle 45^\circ$ V

各支路电流为

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}_{n1}}{R_2}=5+j5A,\quad \dot{I}_1=\dot{I}_S-\dot{I}_2=5-j5A$$

电路的相量图如题解 9—15 图(b)所示。

○9—16 已知题 9—16 图电路中，$R_1=100\Omega$，$L_1=1H$，$R_2=200\Omega$，$L_2=1H$，电压 $U_S=100\sqrt{2}V$，$\omega=100rad/s$，$I_2=0$。求其他各支路电流。



题 9—16 图

解 $X_{L1}=\omega L_1=100\Omega$， $X_{L2}=\omega L_2=100\Omega$

令 $\dot{U}_S=100\sqrt{2}\angle 0^\circ$ V

由 $I_2=0$，知 $U_{R2}=0$，那么 R_2 可看做短接线(也可看做开路)，故有

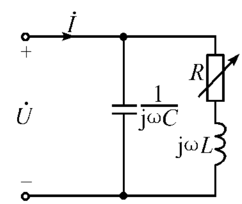
$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S}{R_1+jX_{L1}}=\frac{100\sqrt{2}\angle 0^\circ}{100+j100}=1\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{L1}=\dot{U}_{L2}=jX_{L1}\dot{I}_1=j100\times 1\angle -45^\circ=100\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{U}_{L2}}{jX_{L2}}=\frac{100\angle 45^\circ}{j100}=1\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_4=-\dot{I}_3=-1\angle -45^\circ=1\angle -45^\circ \text{ A}$$

○9—17 如果题 9—17 图所示电路中 R 改变时电流 I 保持不变，L、C 应满足什么条件？



题 9—17 图

解 输入导纳为

$$Y_{in}=j\omega C+\frac{1}{R+j\omega L}=\frac{1+j\omega CR-\omega^2LC}{R+j\omega L}$$

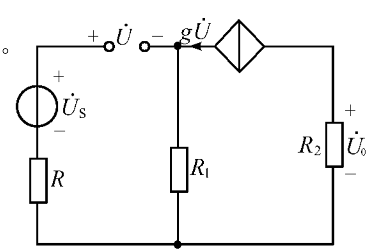
$$=\frac{j\omega C(R-j\dfrac{1}{\omega C}+j\omega L)}{R+j\omega L}=j\omega C\cdot\frac{R+j(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}{R+j\omega L}$$

$\dot{I}=Y_{in}\dot{U}$，要使 $\dot{I}$ 不随 R 改变，则 Y_{in} 不随 R 改变

所以有 $$j(\omega L-\frac{1}{\omega C})=j\omega L$$

即 $\omega L-\dfrac{1}{\omega C}=\omega L$，从而 $LC=\dfrac{1}{2\omega^2}$，此时 $Y_{in}=j\omega C$。

○9—18 求题 9—18 图电路电阻 R_2 的端电压 $\dot{U}_o$



题 9—18 图

解 如题 9—18 图由 KVL 知，$\dot{U}+g\dot{U}R_1=\dot{U}_S$

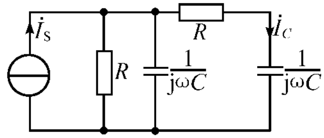
得 $$\dot{U}=\frac{\dot{U}_S}{1+R_1g}$$

$$\dot{U}_o=-g\dot{U}\cdot R_2=-\frac{R_2 g\dot{U}_S}{1+R_1 g}$$

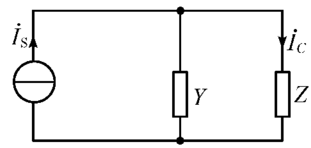
●9－19　题 9－19 图所示电路中，已知 $I_S=60\text{mA}$，$R=1\text{k}\Omega$，$C=1\mu\text{F}$。如果电流源的角频率可变，问在什么频率时，流经最右端电容 C 的电流 $\dot{I}_C$ 为最大？求此电流。

分析　要使电容 C 的电流 $\dot{I}_C$ 最大，先求出 $\dot{I}_C$ 的函数表达式，再进行分析。

解　题 9－19 图等效如题解 9－19 图所示电路。



题 9－19 图



题解 9－19 图

Y 为 RC 并联支路的导纳即　$Y=\dfrac{1}{R}+\text{j}\omega C$

Z 为 RC 串联支路的阻抗即　$Z=R-\text{j}\dfrac{1}{\omega C}$

$$\dot{I}_C=\frac{\dfrac{1}{Y}}{\dfrac{1}{Y}+Z}\dot{I}_S=\frac{\dot{I}_S}{1+YZ}\text{（分流公式）}$$

要使 $\dot{I}_C$ 有效值最大，需使 $1+YZ$ 的模值最小，而

$$1+YZ=1+\left(\frac{1}{R}+\text{j}\omega C\right)\left(R-\text{j}\frac{1}{\omega C}\right)=1+1+1+\text{j}\left(\omega CR-\frac{1}{\omega CR}\right)$$

显然，当 $\omega CR-\dfrac{1}{\omega CR}=0$ 时 $|1+YZ|$ 最小，此时 $\omega=\dfrac{1}{RC}$

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi RC}=\frac{1}{2\pi\times10^3\times10^{-6}}=159.155\text{Hz}$$

$$I_{C\max}=\frac{1}{3}I_S=\frac{1}{3}\times60=20\text{mA}$$

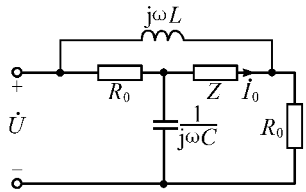
小结　一般复杂电路先进行等效化简，可容易求解。

○9－20　已知题 9－20 图电路中的电压源为正弦量，$L=1\text{mH}$，$R_0=1\text{k}\Omega$，$Z=(3+\text{j}5)\Omega$。试求：(1)当 $I_0=0$ 时，C 值为多少？(2)当条件(1)满足时，试证明输入阻抗为 R_0。

解　(1)题 9－20 图为电桥电路，当 $\dot{I}_0=0$ 时电桥处于平衡状态。

此时　$$R_0^2=\text{j}\omega L\times\frac{1}{\text{j}\omega C}=\frac{L}{C}$$

$$C=\frac{L}{R_0^2}=\frac{1\times10^{-3}}{(10^3)^2}=10^{-9}\text{F}=1000\text{pF}$$



题 9－20 图

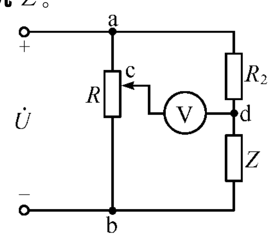
(2)当 $\dot{I}_0=0$ 时,可以看做开路(或把 Z 看做短接线),

输入阻抗为 $Z_{in}=(R_0-j\frac{1}{\omega C})//(R_0+j\omega L)$

$$=\frac{R_0^2+R_0j(\omega L-\frac{1}{\omega C})+\frac{L}{C}}{2R_0+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})}$$

把 $\frac{L}{C}=R_0^2$ 代入上式,得 $Z_{in}=R_0\cdot\frac{2R_0+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})}{2R_0+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})}=R_0$

○9－21 在题 9－21 图电路中,已知 $U=100\text{V}$,$R_2=6.5\Omega$,$R=20\Omega$,当调节触点 C 使 $R_{ac}=4\Omega$ 时,电压表的读数最小,其值为 30V。求阻抗 Z。



题 9－21 图

解 列 KVL 方程 $\dot{U}_{cd}=\dot{U}_{ad}-\dot{U}_{ac}=\frac{\dot{U}}{R_2+Z}R_2-\frac{\dot{U}}{R}\cdot R_{ac}$

设 $\dot{U}=100\angle 0^\circ$ V,当调节触点 C,只改变 R_{ac},对 $\dot{U}_{cd}$ 而言,只改变实部,虚部不变,因此当 $\dot{U}_{cd}$ 的实部为零时,电压表的读数最小,即

$$\pm j30=\frac{100\angle 0^\circ}{6.5+Z}\times6.5-\frac{100\angle 0^\circ}{20}\times4$$

解得

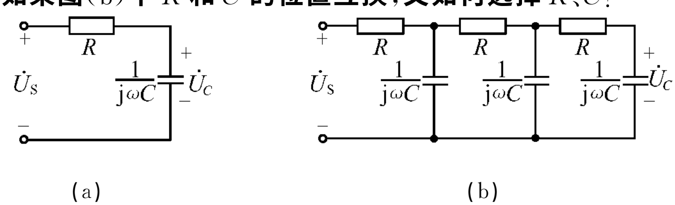
$$Z=\frac{650}{20\pm j30}-6.5=10\mp j15-6.5=3.5\mp j15\Omega$$

●9－22 题 9－22 图(a)和(b)电路是阻容移相装置。

(1)如果要求图(a)中 $\dot{U}_C$ 滞后电压 $\dot{U}_S$ 的角度为 $\pi/3$,参数 R、C 应如何选择?

(2)如果要求图(b)中 $\dot{U}_C$ 滞后 $\dot{U}_S$ 的角度为 π,即反相,R、C 应如何选择。

(3)如果图(b)中 R 和 C 的位置互换,又如何选择 R、C?



题 9－22 图

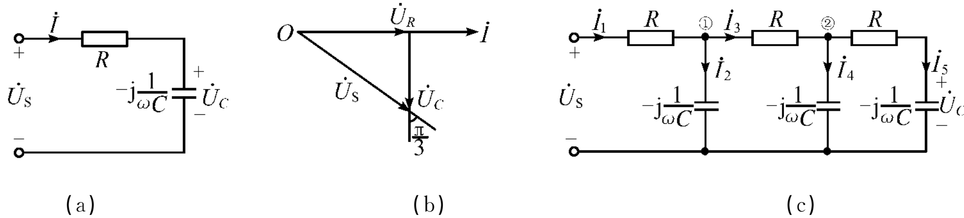
分析　根据相量图求解图(a)即可。对于图(b)，运用倒退法求解即可。

解　(1)如题解 9－22 图(a)所示。

以 $\dot{I}$ 为参考向量，作相量图如题解 9－22 图(b)所示。

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{U_R}{U_C}=\frac{R}{\dfrac{1}{\omega C}}=\omega RC$$

所以
$$\omega RC=\sqrt{3}$$



题解 9－22 图

(2)各支路电流参考方向如题解 9－22 图(c)所示，用倒退法计算。

为计算方便设 $\dot{U}_C=1\angle 0^\circ$ V，则

$$\dot{I}_5=j\omega C\dot{U}_C=j\omega C$$

$$\dot{U}_{n2}=R\dot{I}_5+\dot{U}_C=j\omega RC+1$$

$$\dot{I}_4=j\omega C\cdot\dot{U}_{n2}=j\omega C(1+j\omega RC)=j\omega C-\omega^2C^2R$$

$$\dot{I}_3=\dot{I}_4+\dot{I}_5=2j\omega C-\omega^2C^2R$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{n1}&=\dot{I}_3R+\dot{U}_{n2}=2j\omega RC-\omega^2C^2R^2+j\omega RC+1\\&=3j\omega RC-\omega^2C^2R^2+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_2&=j\omega C\dot{U}_{n1}=j\omega C(3j\omega RC-\omega^2C^2R^2+1)\\&=-3\omega^2C^2R-j\omega^3C^3R^2+j\omega C\end{aligned}$$

$$\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3=-4\omega^2C^2R-j\omega^3C^3R^2+3j\omega C$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_S&=\dot{I}_1R+\dot{U}_{n1}=-jR^3\omega^3C^3-5R^2\omega^2C^2+j6R\omega C+1\\&=(1-5R^2\omega^2C^2)+j[6R\omega C-(R\omega C)^3]\end{aligned}$$

若使 $\dot{U}_C$ 滞后 $\dot{U}_S$ 的角度 π，则上式中的虚部为零，实部为负值，则 $\dot{U}_S$ 超前 $\dot{U}_C$ 的角度为 π，故

$$6R\omega C-(R\omega C)^3=0$$

解得
$$\begin{cases}\omega RC=0\\\omega RC=\sqrt{6}\end{cases}$$

当 $\omega RC=0$ 时，有 $\dot{U}_S=1$ 不合题意，舍去；

当 $\omega RC=\sqrt{6}$时，有 $\dot{U}_S=-29$ 满足要求。

所以
$$\omega RC=\sqrt{6}$$

(3)若(2)中 R 和 C 互换位置，采用与(2)同样的方法，得到

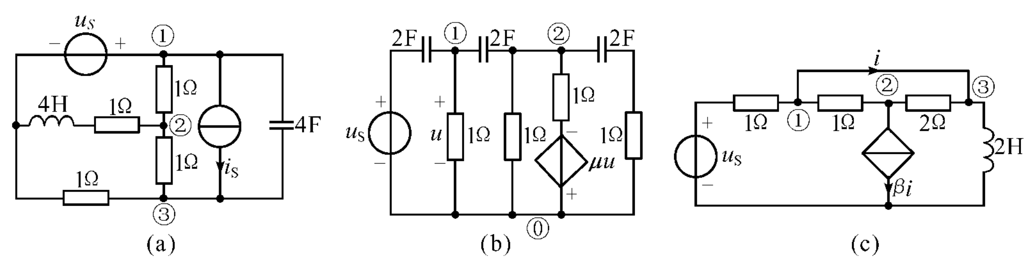
$$\dot{U}_S=1-\frac{5}{(\omega RC)^2}+\mathrm{j}\left[\left(\frac{1}{\omega RC}\right)^3-\frac{6}{\omega RC}\right]$$

令虚部为零，解得
$$\begin{cases}\omega RC\to\infty \text{ 舍去}\\ \omega RC=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{cases}$$

当 $\omega RC=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$时，$\dot{U}_S=-29$ 满足要求。

小结 求解相位关系问题，只要尽量列出二者之间的函数表达式之间的关系，再进行分析即可。

○9－23 列出题 9－23 图所示电路的回路电流方程和结点电压方程。已知 $u_S=14.14\cos(2t)\text{V}$，$i_S=1.414\cos(2t+30^\circ)\text{A}$。



题 9－23 图

解 (a)
$$\dot{U}_S=10\angle 0^\circ\ \text{V},\quad \dot{I}_S=1\angle 30^\circ\ \text{A}$$

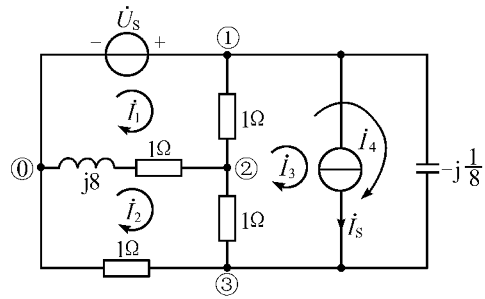
题 9－23 图(a)对应的相量模型如题解 9－23 图(a)所示，结点编号如题解 9－23 图(a)所示。结点电压方程为

$$\begin{cases}\dot{U}_{n1}=\dot{U}_S=10\angle 0^\circ\ \text{V}\\ -\dot{U}_{n1}+\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{j}8}+1+1\right)\dot{U}_{n2}-\dot{U}_{n3}=0\\ -\mathrm{j}8\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n2}+(1+1+\mathrm{j}8)\dot{U}_{n3}=1\angle 30^\circ\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}\dot{U}_{n1}=10\angle 0^\circ \\ \left(2+\dfrac{1}{1+j8}\right)\dot{U}_{n2}-\dot{U}_{n3}=10\angle 0^\circ \\ -\dot{U}_{n2}+(2+j8)\dot{U}_{n3}=1\angle 30^\circ+j80(80\angle 90^\circ)\end{cases}$$

回路电流方程为（回路电流的参考方向如题解 9－23 **图**(a)**所示）**



题解 9－23 **图**(a)

$$\begin{cases}(2+j8)\dot{I}_1-(1+j8)\dot{I}_2-\dot{I}_3-\dot{I}_4=\dot{U}_S=10\angle 0^\circ \\ -(1+j8)\dot{I}_1+(3+j8)\dot{I}_2-\dot{I}_3-\dot{I}_4=0 \\ \dot{I}_3=\dot{I}_S=1\angle 30^\circ \\ -\dot{I}_1-\dot{I}_2+2\dot{I}_3+\left(2-j\dfrac{1}{8}\right)\dot{I}_4=0\end{cases}$$

整理，得

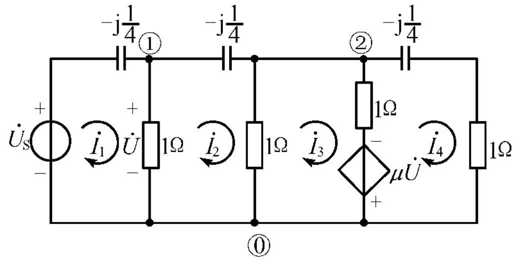
$$\begin{cases}(2+j8)\dot{I}_1-(1+j8)\dot{I}_2-\dot{I}_4=10\angle 0^\circ+1\angle 30^\circ \\ -(1+j8)\dot{I}_1+(3+j8)\dot{I}_2-\dot{I}_4=1\angle 30^\circ \\ \dot{I}_3=1\angle 30^\circ \\ -\dot{I}_1-\dot{I}_2+\left(2-j\dfrac{1}{8}\right)\dot{I}_4=-2\angle 30^\circ\end{cases}$$

(b)　　$\dot{U}_S=10\angle 0^\circ\ \text{V}$

题 9－23 **图**(b)**对应的相量模型如题解** 9－23 **图**(b)**所示，结点编号和回路电流的参考方向如题解** 9－23 **图**(b)**所示。**

回路电流方程为

$$\begin{cases}(1-j0.25)\dot{I}_1-\dot{I}_2=\dot{U}_S=10\angle 0^\circ \\ -\dot{I}_1+(2-j0.25)\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \\ -\dot{I}_2+2\dot{I}_3-\dot{I}_4=\mu\dot{U} \\ -\dot{I}_3+(2-j0.25)\dot{I}_4=-\mu\dot{U}\end{cases}$$



题解 9－23 图(b)

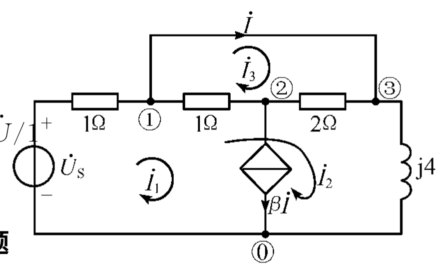
补充方程 $$\dot{U}=1\times(\dot{I}_1-\dot{I}_2)$$

结点电压方程为

$$\begin{cases}(1+j8)\dot{U}_{n1}-j4\dot{U}_{n2}=j4\dot{U}_S=40\angle 90^\circ\\ -j4\dot{U}_{n1}+\left(2+j4+\dfrac{1}{1-j0.25}\right)\dot{U}_{n2}=-\mu\dot{U}/1\end{cases}$$

补充方程 $$\dot{U}=\dot{U}_{n1}$$

(c) 题 9－23 图(c)对应的相量模型如题解 9－23 图(c)所示，回路电流的参考方向和结点编号如题解 9－23 图(c)所示。回路电流方程为



题解 9－23 图(c)

$$\begin{cases}\dot{I}_1=\beta\dot{I}\\ 2\dot{I}_1+(4+j4)\dot{I}_2-3\dot{I}_3=\dot{U}_S=10\angle 0^\circ\\ -\dot{I}_1-3\dot{I}_2+3\dot{I}_3=0\end{cases}$$

补充方程 $$\dot{I}=\dot{I}_3$$

结点电压方程为

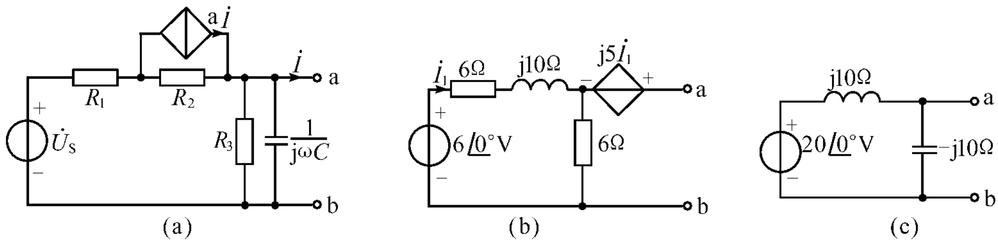
$$\begin{cases}2\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n2}=\dfrac{\dot{U}_S}{1}-\dot{I}=10\angle 0^\circ-\dot{I}\\ -\dot{U}_{n1}+1.5\dot{U}_{n2}-0.5\dot{U}_{n3}=\beta\dot{I}\\ -0.5\dot{U}_{n2}+(0.5-j0.25)\dot{U}_{n3}=\dot{I}\end{cases}$$

补充方程 $$\dot{U}_{n1}-\dot{U}_{n3}=0$$

○9－24 **求题 9－24 图所示一端口的戴维宁(或诺顿)等效电路。**

解 (a)将题 9－24 图(a)作等效变换，如题解 9－24 图(a1)所示。

$$Z=R_3/\!/\frac{1}{j\omega C}=\frac{R_3\times\dfrac{1}{j\omega C}}{R_3+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{R_3}{j\omega CR_3+1}$$



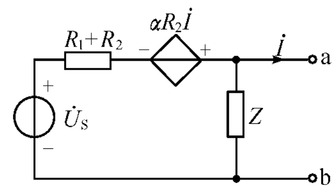
题 9－24 图

①求 $\dot{U}_{oc}$

因为　　$\dot{I}=0$

所以　　$\alpha R_2\dot{I}=0$，　$\dot{U}_{oc}=\dfrac{\dot{U}_S}{R_1+R_2+Z}\cdot Z$

所以　$\dot{U}_{oc}=\dfrac{\dot{U}_S R_3}{R_1+R_2+R_3+j\omega CR_3(R_1+R_2)}$



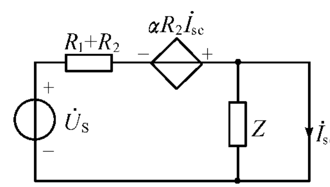
题解 9－24 图(a1)

②求短路电流 $\dot{I}_{sc}$ 如题解 9－24 图(a2)所示。

列 KVL 方程

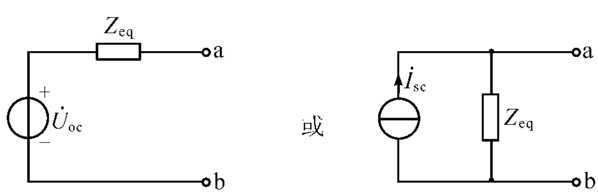
$$(R_1+R_2)\dot{I}_{sc}-\alpha R_2\dot{I}_{sc}=\dot{U}_S$$

$$\dot{I}_{sc}=\frac{\dot{U}_S}{R_1+R_2-\alpha R_2}$$



题解 9－24 图(a2)

③求 Z_{eq}，并画出等效电路如题解 9－24 图(a3)所示。

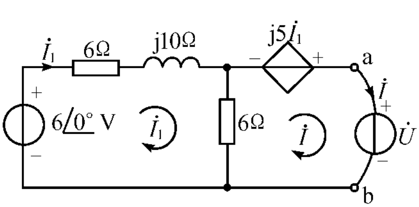


题解 9－24 图(a3)

$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}}=\frac{R_3(R_1+R_2-\alpha R_2)}{R_1+R_2+R_3+j\omega CR_3(R_1+R_2)}$$

(b)通过 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 的关系求 $\dot{U}_{oc}$ 和 Z_{eq}，如题解 9－24 图(b1)所示。

列回路电流方程



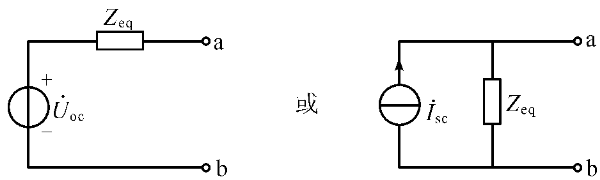
题解 9－24 图(b1)

$$\begin{cases}(12+\mathrm{j}10)\dot{I}_1-6\dot{I}=6\angle 0^\circ\ \mathrm{V}\\ -6\dot{I}_1+6\dot{I}=\mathrm{j}5\dot{I}_1-\dot{U}\end{cases}$$

整理方程，得 $\dot{U}=3\angle 0^\circ-3\dot{I}$

可见 $\dot{U}_{oc}=3\angle 0^\circ\ \mathrm{V},\quad Z_{eq}=3\Omega$

等效电路图如题解 9－24 **图**(b2)**所示**。



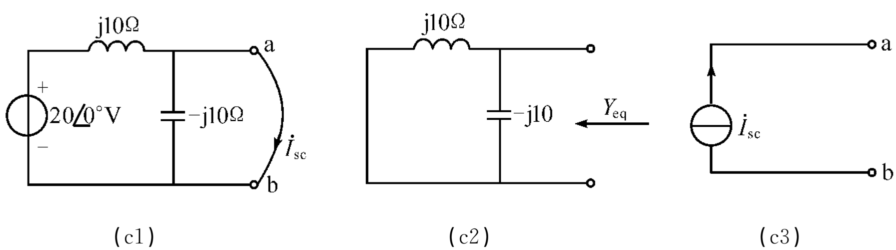
题解 9－24 **图**(b2)

(c)①**求** $\dot{I}_{sc}$ **如题解** 9－24 **图**(c1)**所示**。 $\dot{I}_{sc}=\dfrac{20\angle 0^\circ}{\mathrm{j}10}=-\mathrm{j}2\mathrm{A}$

②**求** Y_{eq}，**如题解** 9－24 **图**(c2)**所示**。

$$Y_{eq}=\frac{1}{\mathrm{j}10}+\frac{1}{-\mathrm{j}10}=0$$

可见该电路的等效电路为理想的电流源，如题解 9－24 **图**(c3)**所示**。



题解 9－24 **图**

◎9－25 **设** $R_1=R_2=1\mathrm{k}\Omega, C_1=1\mu\mathrm{F}, C_2=0.01\mu\mathrm{F}$。**求题** 9－25 **图所示电路的** $\dot{U}_2/\dot{U}_1$。

分析 **根据理想运放虚短、虚断的规则求解即可。**

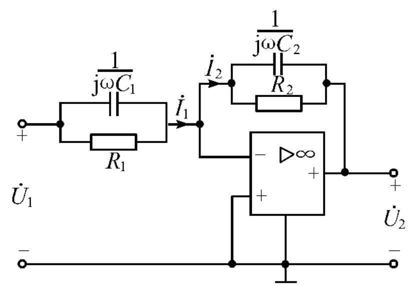
解 **令**$$Z_1=\frac{R_1\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}}{R_1+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}}=\frac{R_1}{1+\mathrm{j}\omega C_1R_1}$$

$$Z_2=\frac{R_2\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{R_2+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}=\frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega C_2R_2}$$

利用理想运放的规则 1,2,有

$$\frac{\dot{U}_1}{Z_1}=-\frac{\dot{U}_2}{Z_2}(\dot{I}_1=\dot{I}_2)$$

则$\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=-\dfrac{Z_2}{Z_1}=-\dfrac{R_2(1+j\omega C_1R_1)}{R_1(1+j\omega C_2R_2)}$代入已知条件,得$\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=-\dfrac{10^5+j100\omega}{10^5+j\omega}$



题 9－25 图

◯9－26　求题 9－26 图所示电路的 $\dot{U}_2/\dot{U}_1$。

解　为了书写方便,R_1,R_2,R_3 用电导 G_1,G_2,G_3 替代($G_1=\dfrac{1}{R_1}$,$G_2=\dfrac{1}{R_2}$,$G_3=\dfrac{1}{R_3}$)。

由题 9－26 图列结点电压方程,并注意到理想运算的规则 1,有

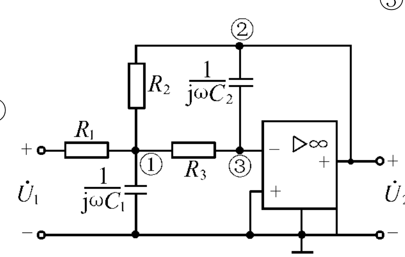
$$\begin{cases}(G_1+G_2+G_3+j\omega C_1)\dot{U}_{n1}-G_2\dot{U}_{n2}-G_3\dot{U}_{n3}=G_1\dot{U}_1 & ① \\ \dot{U}_{n2}=\dot{U}_2 & ② \\ -G_3\dot{U}_{n1}-j\omega C_2\dot{U}_{n2}+(G_3+j\omega C_2)\dot{U}_{n3}=0 & ③\end{cases}$$

利用规则 2,$\dot{U}_{n3}=0$,代入式③,得

$$\dot{U}_{n1}=-\frac{j\omega C_2}{G_3}\dot{U}_{n2} \qquad ④$$

将②④代入①,并整理,得

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{-G_1G_3}{G_2G_3-\omega^2C_1C_2+j\omega C_2(G_1+G_2+G_3)}$$

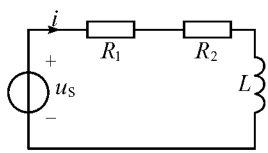


题 9－26 图

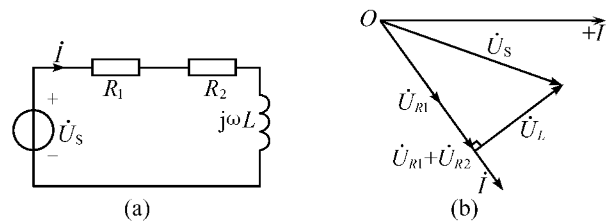
◎9－27　题 9－27 图所示电路中 $u_S=141.4\cos(314t-30°)$V,$R_1=3\Omega$,$R_2=2\Omega$,$L=9.55$mH。试求各元件的端电压并作电路的相量图,计算电源发出的复功率。

分析　电源发出的复功率 $\bar{S}=\dot{U}_S\cdot\dot{I}^*$,进行求解即可。

解　原电路图对应的相量模型如题解 9－27 图(a)所示。



题 9－27 图



题 9－27 图

$$\omega L = 314\times 9.55\times 10^{-3}\approx 3\Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_S}{R_1+R_2+j\omega L}=\frac{100\angle -30^\circ}{3+2+j3}=17.15\angle -60.96^\circ \text{ A}$$

各元件的端电压为

$$\dot{U}_{R1}=R_1\dot{I}=3\times 17.15\angle -60.96^\circ=51.45\angle -60.96^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{R2}=R_2\dot{I}=2\times 17.15\angle -60.96^\circ=34.3\angle -60.96^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}=j3\times 17.15\angle -60.96^\circ=51.45\angle 29.04^\circ \text{ V}$$

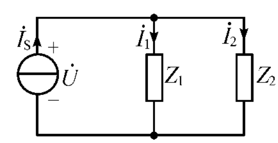
相量图如题解 9－27 图(b)所示。

电源发出的复功率为

$$\overline{S}=\dot{U}_S\cdot\dot{I}^*=100\angle -30^\circ\times 17.15\angle 60.96^\circ=1470.66+j882.26\text{V}\cdot\text{A}$$

○9－28　**题 9－28 图电路中** $i_S=\sqrt{2}\cos(10^4 t)$A，$Z_1=(10+j50)\Omega$，$Z_2=-j50\Omega$。**求** Z_1、Z_2 **吸收的复功率，并验证整个电路复功率守恒，即有** $\sum\overline{S}=0$。

解　用分流公式



题 9－28 图

$$\dot{I}_1=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{I}_S=\frac{-j50}{10+j50-j50}\times 1\angle 0^\circ$$

$$=-j5\text{A}(\dot{I}_S=1\angle 0^\circ \text{ A})$$

$$\dot{I}_2=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\dot{I}_S=\frac{10+j50}{10+j50-j50}=1+j5=\sqrt{26}\angle 87.69^\circ$$

A

Z_1，Z_2 **吸收的复功率为**

$$\overline{S_1}=I_1^2 Z_1=25\times(10+j50)=250+j1250\text{V}\cdot\text{A}$$

$$\overline{S_2}=I_2^2 Z_2=26\times(-j50)=-j1300\text{V}\cdot\text{A}$$

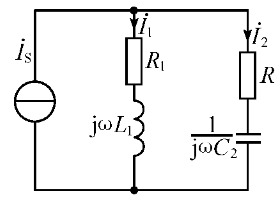
电流源发出的复功率为

$$\overline{S}=\dot{U}\dot{I}_S^*=(\dot{I}\ Z_1)\cdot\dot{I}_S^*=[-j5\times(10+j50)]\times 1\angle 0^\circ=250-j50\text{V}\cdot\text{A}$$

显然　　$\overline{S_1}+\overline{S_2}=\overline{S}$，**复功率守恒**。

○9－29　**题 9－29 图所示电路中** $I_S=10$A，$\omega=1000$rad/s，$R_1=10\Omega$，$j\omega L_1=j25\Omega$，R_2

$=5\Omega$，$-\mathrm{j}\,\dfrac{1}{\omega C_2}=-\mathrm{j}15\Omega$。**求各支路吸收的复功率和电路的功率因数。**



题 9－29 **图**

解
$$\dot I_S=10\,\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$$

令
$$Z_1=R_1+\mathrm{j}\omega L_1=10+\mathrm{j}25\Omega$$
$$Z_2=R_2-\mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C_2}=5-\mathrm{j}15\Omega$$

应用分流公式

$$\dot I_1=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot I_S=\frac{5-\mathrm{j}15}{10+\mathrm{j}25+5-\mathrm{j}15}\times 10$$
$$=8.77\,\angle -105.25^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot I_2=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\dot I_S=\frac{10+\mathrm{j}25}{10+\mathrm{j}25+5-\mathrm{j}15}\times 10=14.936\,\angle 34.51^\circ\ \mathrm{A}$$

各支路吸收的复功率为

$$\overline{S_1}=Z_1I_1^2=(10+\mathrm{j}25)\times 8.77^2=769.13+\mathrm{j}1922.82\mathrm{V\cdot A}$$
$$\overline{S_2}=Z_2I_2^2=(5-\mathrm{j}15)\times 14.936^2=1115.42-\mathrm{j}3346.26\mathrm{V\cdot A}$$

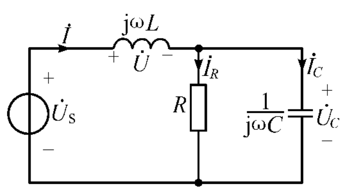
电流源发出的复功率为

$$\overline{S}=\overline{S_1}+\overline{S_2}=1884.55-\mathrm{j}1423.42=2361.7\,\angle -37.064^\circ\ \mathrm{V\cdot A}$$

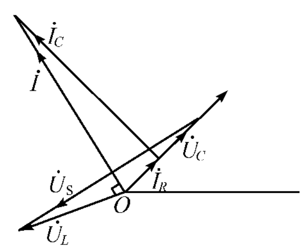
电路的功率因数为

$$\cos\varphi=\cos(-37.064^\circ)=0.798$$

○9－30　**题** 9－30 **图所示电路中** $R=2\Omega$，$\omega L=3\Omega$，$\omega C=2\mathrm{S}$，$\dot U_C=10\,\angle 45^\circ\ \mathrm{V}$。**求各元件的电压、电流和电源发出的复功率。**



题 9－30 **图**



题解 9－30 **图**

解　相量示意图如题解 9－30 **图所示。**

$$\dot I_C=\mathrm{j}\omega C\dot U_C=\mathrm{j}2\times 10\,\angle 45^\circ=20\,\angle 135^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot I_R=\frac{\dot U_C}{R}=\frac{10\,\angle 45^\circ}{2}=5\,\angle 45^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot I=\dot I_R+\dot I_C=5\,\angle 45^\circ+20\,\angle 135^\circ=20.62\,\angle 120.96^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = j3\times 20.62\angle 120.96^\circ = 61.86\angle -149.04^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_S = \dot{U}_L + \dot{U}_C = 61.86\angle -149.04^\circ + 10\angle 45^\circ = 52.217\angle -151.7^\circ\ \text{V}$$

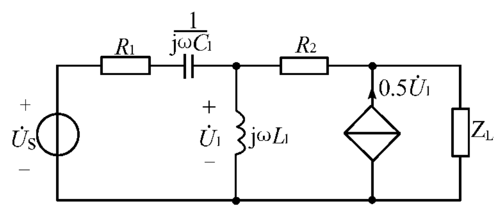
电源发出的复功率为

$$\overline{S} = \dot{U}_S \cdot \dot{I}^* = 52.217\angle -151.7^\circ \times 20.62\angle -120.96^\circ$$
$$= 1076.71\angle 87.34^\circ = 49.97 + j1075.55\text{V}\cdot\text{A}$$

○9—31 $\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_S} = 0.283\angle -98.13^\circ$

$\overline{S} = 120 + j160\text{V}\cdot\text{A}$

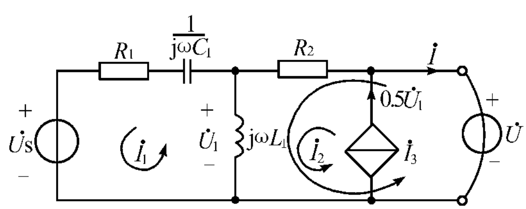
●9—32 **题** 9—32 **图所示电路中** $R_1 = 1\Omega$，$C_1 = 10^3\mu\text{F}$；$L_1 = 0.4\text{mH}$，$R_2 = 2\Omega$，$\dot{U}_S = 10\angle -45^\circ\ \text{V}$，$\omega = 10^3\ \text{rad s}$。**求** Z_L（**可任意变动**）**能获得的最大功率**。



题 9—32 **图**

分析　先求电路的戴维宁等效电路，然后即可容易求解。

解　先求戴维宁等效电路，如题解 9—32 **图**(a)**所示。**



题解 9—32 **图**(a)

$\dfrac{1}{j\omega C_1} = -j\Omega$，　$j\omega L_1 = j0.4\Omega$，　$R_1 = 1\Omega$，　$R_2 = 2\Omega$，　$\dot{U}_S = 10\angle -45^\circ\ \text{V}$

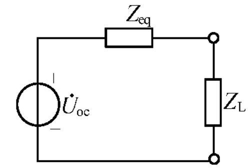
利用 $\dot{U}$ **与** $\dot{I}$ **的关系确定** $\dot{U}_{oc}$ **和** Z_{eq}。

列回路电流方程
$$\begin{cases} (1 - j + j0.4)\dot{I}_1 - j0.4\dot{I}_2 - j0.4\dot{I}_3 = -10\angle -45^\circ \\ \dot{I}_2 = 0.5\dot{U}_1 \\ -j0.4\dot{I}_1 + (2 + j0.4)\dot{I}_2 + (2 + j0.4)\dot{I}_3 = \dot{U} \end{cases}$$

补充方程

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}0.4(\dot{I}_2 + \dot{I}_3 - \dot{I}_1)$$

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}$$



题解 9—32 图(b)

代入上式，并整理，得

$$\dot{U} = -(2+\mathrm{j})\dot{I} + 5\sqrt{2}\mathrm{j}$$

从而

$$\dot{U}_{oc} = 5\sqrt{2}\mathrm{j} = 5\sqrt{2}\angle{-90^\circ}\ \mathrm{V}, Z_{eq} = 2+\mathrm{j}\Omega$$

等效电路如题解 9—32 图(b)所示。

根据正弦交流电路的最大功率传输定理可知，当 $Z_L = Z_{eq}^*$ 时，获最大功率。

从而有

$$Z_L = 2-\mathrm{j}\Omega$$

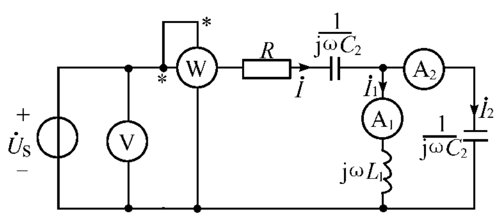
且

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4\times R_{eq}} = \frac{(5\sqrt{2})^2}{4\times 2} = 6.25\mathrm{W}$$

小结　正弦交流电路的最大功率传输定理为 $Z_L = Z_{eq}^*$ 时，获得最大功率，$P_{max} = \dfrac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}$。

○9—33　$P_{max} = 12.5\mathrm{W}$

○9—34　题 9—34 图电路中已知：$\dfrac{1}{\omega C_2} = 1.5\omega L_1$，$R = 1\Omega$，$\omega = 10^4\ \mathrm{rad/s}$，电压表的读数为 10V，电流表 A_1 的读数为 30A。求图中电流表 A_2、功率表 W 的读数和电路的输入阻抗 Z_{in}。



题 9—34 图

解　令 $\dot{I}_1 = 30\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$

由图知　　$\mathrm{j}\omega L_1 \cdot \dot{I}_1 = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\cdot \dot{I}_2$　　又 $\dfrac{1}{\omega C_2} = 1.5\omega L_1$（已知）

所以 $\dot{I}_2 = -\dfrac{\dot{I}_1}{1.5} = -20\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$，即表 A_2 的读数为 20A。

总电流　　$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 30\angle 0^\circ - 20\angle 0^\circ = 10\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$

所以功率表的读数为 $P=I^2R=10^2\times1=100\text{W}$

又 $U=10\text{V},\quad P=UI\cos\varphi$

得

$$\cos\varphi=\frac{100}{10\times10}=1$$

从而 $\varphi=0$，说明 $\dot{U}_S$ 和 $\dot{I}$ 同相位，则输入阻抗为

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}}=\frac{10\angle0^\circ}{10\angle0^\circ}=1\Omega$$

◎9－35 题 9－35 图中的独立电源为同频正弦量，当 S 打开时，电压表的读数为 25V。电路中的阻抗为 $Z_1=(6+\text{j}12)\Omega$，$Z_2=2Z_1$。求 S 闭合后电压表的读数。

分析 先将电路等效为戴维宁电路即可，电压表的读数为有效值。

解 将 S 打开的状态作戴维宁等效。

①当 S 打开时，电压表的读数是实际开路电压 U_{oc}，设

$$\dot{U}_{oc}=25\angle0^\circ\ \text{V}$$

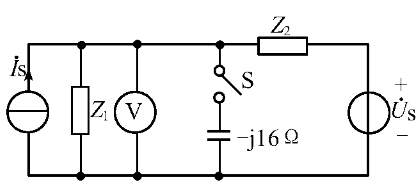
②求 Z_{eq}（将独立源置零）

$$Z_{eq}=Z_1/\!/Z_2=\frac{Z_1\cdot Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{2}{3}Z_1=\frac{2}{3}(6+\text{j}12\Omega)=4+\text{j}8\Omega$$

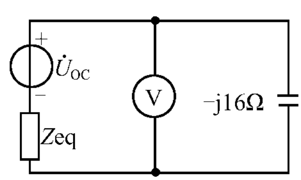
③开关 S 闭合后的等效电路如题解 9－35 图所示。

$$\dot{U}=\frac{\dot{U}_{oc}}{Z_{eq}-\text{j}16}\times(-\text{j}16)=\frac{25\angle0^\circ}{4+\text{j}8-\text{j}16}\times(-\text{j}16)=44.72\angle-26.5650^\circ\ \text{V}$$

即电压表的读数为 44.72V。

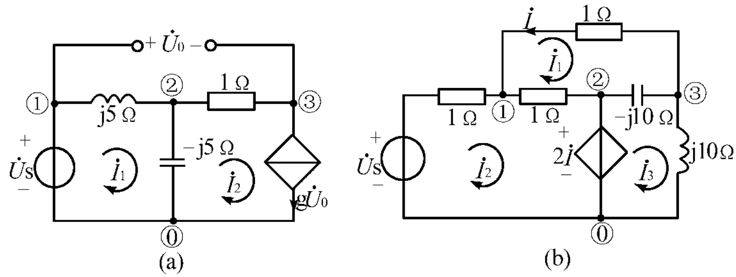


题 9－35 图



题解 9－35 图

○9－36 列出题 9－36 图电路的结点电压方程和网孔电流（顺时针）方程。



题 9－36 图

解　结点的编号和网孔电流的参考方向如题 9－36 图所示。

(a)结点电压方程

$$\begin{cases}\dot U_{n1}=\dot U_S\\ -\dfrac{1}{j5}\dot U_{n1}+(\dfrac{1}{j5}+j\ \dfrac{1}{5}+1)\dot U_{n2}-\dot U_{n3}=0\\ -\dot U_{n2}+\dot U_{n3}=-g\dot U_0\end{cases}$$

补充方程

$$\dot U_0=\dot U_{n1}-\dot U_{n3}$$

网孔电流方程

$$\begin{cases}j5\dot I_2=\dot U_S\\ \dot I_2=g\dot U_0\end{cases}$$

补充方程

$$\dot U_0=j5\dot I_1+\dot I_2$$

(b)结点电压方程

$$\begin{cases}3\dot U_{n1}-\dot U_{n2}-\dot U_{n3}=\dot U_S\\ \dot U_{n2}=2\dot I\\ -\dot U_{n1}-j0.1\dot U_{n2}+\dot U_{n3}=0\end{cases}$$

补充方程

$$\dot I=\frac{\dot U_{n3}-\dot U_{n1}}{1}=\dot U_{n3}-\dot U_{n1}$$

网孔电流方程

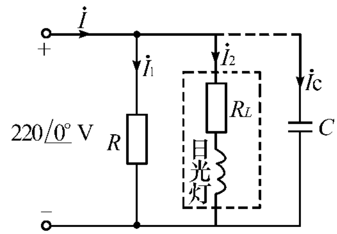
$$\begin{cases}(2-j10)\dot I_1-\dot I_2+j10\dot I_3=0\\ -\dot I_1+2\dot I_2=\dot U_S-2\dot I\\ j10\dot I_1=2\dot I\end{cases}$$

补充方程

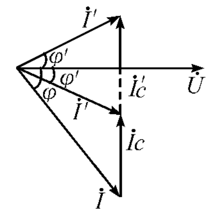
$$\dot I=-\dot I_1$$

○9－37　$\dot I=91.79\angle -11.31^\circ$ A，　$\cos\varphi=0.981$

◎9－38　**如题 9－38 图所示，功率为 60W，功率因数为 0.5 的日光灯（感性）负载与功率为 100W 的白炽灯各 50 只并联在 220V 的正弦电源上（$f=50$Hz）。如果要把电路的功率因数提高到 0.92，应并联多大电容？**



题 9－38 图



题解 9－38 图

分析 功率因数 $\lambda=\cos\varphi$，根据元件的伏安特性及功率定义求解即可。

解 由题解 9－38 图可知，当 $\dot{I}'$ 超前 $\dot{U}$ 时，电路呈容性，而此时电容 C 也较大，一般从经济的角度选 C 较小值（指达到同样的功率因数时）。即 $\cos\varphi'=0.92$

取 $\varphi'=-23.07^\circ$

从题解 9－38 图的几何关系知

$$I_C=I\sin\varphi-I'\sin\varphi'=\omega CU$$

又 $I=\dfrac{P}{U\cos\varphi}$，$I'=\dfrac{P}{U\cos\varphi'}$（并电容前后有功功率 P 不变），代入上式，得

$$C=\frac{P}{\omega U_2}(\tan\varphi-\tan\varphi')$$

并电容前：$\tan\varphi=\dfrac{Q}{P}=\dfrac{50\times60\tan\varphi_1}{50\times(60+100)}$（$\cos\varphi_1$

$$=0.5)=\frac{50\times60\times\tan60^\circ}{50\times(60+100)}=0.6495$$

并电容后：$\tan\varphi'=\tan23.07^\circ=0.4259$

$\omega=2\pi f=314\text{rad/s}$，$U=220\text{V}$，代入上式，得

$$C=\frac{50\times(60+100)}{314\times220^2}(0.6495-0.4259)=117.7\times10^{-6}\text{F}=117.7\mu\text{F}$$

○9－39 已知题 9－39 图电路 $I_1=10\text{A}$，$I_2=20\text{A}$，其功率因数分别为 $\lambda_1=\cos\varphi_1=0.8(\varphi_1<0)$，$\lambda_2=\cos\varphi_2=0.5(\varphi_2>0)$，端电压 $U=100\text{V}$，$\omega=1000\text{rad/s}$。(1)求图中电流表、功率表的读数和电路的功率因数；(2)若电源的额定电流为 30A，那么还能并联多大的电阻？求并联该电阻后功率表的读数和电路的功率因数；(3)如使原电路的功率提高到 $\lambda=0.9$，需要并联多大电容？

解 (1)令 $\dot{U}=100\underline{/0^\circ}$ V

由已知条件，知：$\varphi_1=\arccos(0.8)=-36.87^\circ$（容性）

$\varphi_2=\arccos(0.5)=60^\circ$（感性）

则 $\dot{I}_1=10\underline{/36.87^\circ}$ A， $\dot{I}_2=20\underline{/-60^\circ}$ A

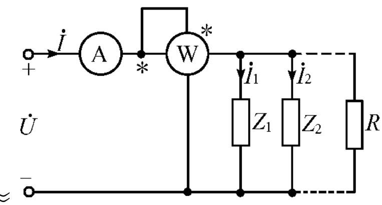
KCL：$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=10\angle 36.87^\circ+20\angle -60^\circ$

$=21.264\angle -32.166^\circ$ A

即电流表的读数为 21.264A；

电路的功率因数 $\lambda=\cos -32.166^\circ=0.847$；

功率表的读数为 $P=100\times 21.264\times 0.847\approx$ 1800W。



题 9－39 图

(2)并联电阻 R 后

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_R=10\angle 36.87^\circ+20\angle -60^\circ+\frac{100}{R}=18+\frac{100}{R}-\mathrm{j}11.32$$

当 $I=30$A 时，
$$30^2=\left(18+\frac{100}{R}\right)^2+11.32^2$$

解得
$$R=10.22\Omega$$

即电源的额定电流为 30A，还能并联 10.22Ω 的电阻。

则
$$\dot{I}=18+\frac{100}{10.22}-\mathrm{j}11.32=30\angle -22.167^\circ \text{ A}$$

功率因数
$$\lambda=\cos(-22.167^\circ)=0.926$$

此时功率表的读数为
$$P=100\times 30\times 0.926=2778\text{W}$$

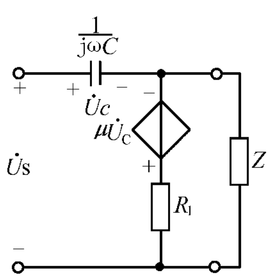
(3)原电路 $\cos\varphi=0.847$，即 $\tan\varphi=0.627$

现 $\cos\varphi'=0.9$，即 $\tan\varphi'=0.484$

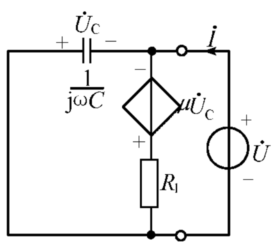
需并电容 C 为

$$C=\frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi-\tan\varphi')=\frac{1800}{10^3\times 100^2}\times(0.627-0.484)=25.8\mu\text{F}$$

◎9－40　求题 9－40 图电路中 Z 的最佳匹配值。



题 9－40 图



题解 9－40 图

分析　最佳匹配时，$Z=Z_{eq}^*$，利用此公式求解即可。

解　求 Z 的最佳匹配值，实际上是求将 Z 支路断开后的等效阻抗值，最佳匹配时

$$Z=Z_{eq}^*$$

用外施激励法求 Z_{eq}（Z 支路断开，独立源置零，外加激励），如题解 9－40 图所

示。

$$\dot{I}=\mathrm{j}\omega\dot{C}U+\frac{\dot{U}+\mu\dot{U}_C}{R_1}=(\mathrm{j}\omega C+\frac{1-\mu}{R_1})\dot{U}(\dot{U}_C=-\dot{U})$$

所以 $Z_{eq}=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C+\dfrac{1-\mu}{R_1}}=\dfrac{R_1}{1-\mu+\mathrm{j}\omega CR_1}=\dfrac{R_1(1-\mu-\mathrm{j}\omega CR_1)}{(1-\mu)^2+(\omega CR_1)^2}$

故 Z 的最佳匹配值为 $\quad Z=Z_{eq}^{*}=\dfrac{R_1(1-\mu+\mathrm{j}\omega CR_1)}{(1-\mu)^2+(\omega CR_1)^2}$

○9—41
$$C=\frac{1}{(5\times10^3)^2\times400\times10\ -3)}=0.1\mu\mathrm{F}.$$

$$i=0.2\sqrt{2}\cos(5000t)\mathrm{A},u_R=\sqrt{2}\cos(5000t)\mathrm{V}$$

$$u_L=400\sqrt{2}\cos(5000t+90^\circ)\mathrm{V},u_C=400\sqrt{2}\cos(5000t-90^\circ)\mathrm{V}$$

○9—42 RLC 串联电路的端电压 $u=10\sqrt{2}\cos(2500t+10^\circ)\mathrm{V}$，当 $C=8\mu\mathrm{F}$ 时，电路中吸收的功率为最大，$P_{max}=100\mathrm{W}$。(1)求电感 L 和 Q 值；(2)作出电路的相量图。

解 由题意知，电路吸收的最大功率为 $P_{max}=UI$ 即 $\cos\varphi=1$，此时电路发生了串联谐振。

(1)根据谐振的条件 $\omega_0 L=\dfrac{1}{\omega_0 C}$得 $L=\dfrac{1}{\omega_0^2 C}$ ，代入已知条件，得

$$L=\frac{1}{(2500)^2\times8\times10^{-6}}=0.02\mathrm{H}$$

又 $P_{max}=I^2R=\dfrac{U^2}{R}=100\mathrm{W}$

得 $\qquad R=\dfrac{U^2}{100}=\dfrac{10^2}{100}=1\Omega$(谐振时 $U_R=U=10\mathrm{V}$)

则电路的品质因数 $Q=\dfrac{\omega_0 L}{R}=\dfrac{2500\times0.02}{1}=50$

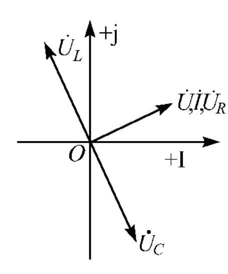
(2)各元件的电压和电路的电流为

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R}=10\underline{/10^\circ}\ \mathrm{A}(\dot{U}=10\underline{/10^\circ}\ \mathrm{A})$$

$$\dot{U}_R=\dot{U}=10\underline{/10^\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}Q\dot{U}=\mathrm{j}50\times10\underline{/10^\circ}=500\underline{/100^\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_C=-\dot{U}_L=500\underline{/-80^\circ}\ \mathrm{V}$$



题解 9—42 图

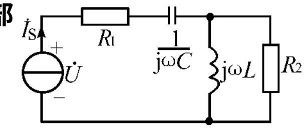
电路的相量图如题解 9—42 图所示。

○9—43 $\dot{I}=10\underline{/0^\circ}\ \mathrm{A}$， $\dot{I}_C=0.318\underline{/-90^\circ}\ \mathrm{A}$， $\dot{I}_C=0.318$

$\angle 90°$ A

◎9－44　**题 9－44 图电路中，**$I_S=1\text{A}$**，当** $\omega_0=1\ 000\text{rad/s}$ **时电路发生谐振，**$R_1=R_2=100\Omega$，$L=0.2\text{H}$。**求** C **值和电流源端电压** $\dot{U}$。

分析　**先求解电路的输入阻抗** Z_{in}**，电路谐振时** Z_{in} **的虚部为** 0**，求解即可。**



题 9－44 **图**

解　**电路的输入端阻抗为**

$$Z_{in}=R_1-j\frac{1}{\omega C}+\frac{R_2\cdot j\omega L}{R_2+j\omega L}$$

$$=[R_1+\frac{(\omega L)^2R_2}{R_2^2+(\omega L)^2}]+j[\frac{\omega LR_2^2}{R_2^2+(\omega L)^2}-\frac{1}{\omega C}]$$

当电路发生谐振时，Z_{in} **的虚部为零，即**

$$\frac{\omega_0LR_2^2}{R_2^2+(\omega_0L)^2}-\frac{1}{\omega_0C}=0$$

得 $C=\frac{R_2^2+(\omega_0L)^2}{\omega_0^2LR_2^2}$**，将已知条件代入，得**

$$C=\frac{100^2+(10^3\times0.2)^2}{(10^3)^2\times0.2\times100^2}=25\times10^{-6}=25\mu\text{F}$$

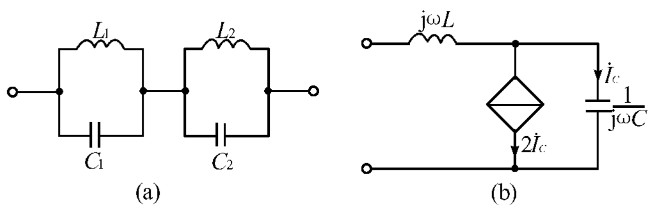
则　$$Z_{in}=R_1+\frac{(\omega_0L)^2R_2}{R_2^2+(\omega_0L)^2}=100+\frac{(10^3\times0.2)^2\times100}{100^2+(10^3\times0.2)^2}=180\Omega$$

从而　$$\dot{U}=\dot{I}_S\times180$$

设 $\dot{I}_S=1\angle0°$ A　**则**　$\dot{U}=180\angle0°$ V

○9－45　**略**

●9－46　**求题** 9－46 **图电路的谐振频率。**



题 9－46 **图**

分析　**根据谐振定义求解即可。**

解　**由题** 9－46 **图**(a)**可知，**

当 $Y_1=j(\omega C_1-\frac{1}{\omega L_1})=0$，$Y_2=j(\omega C_2-\frac{1}{\omega L_2})=0$

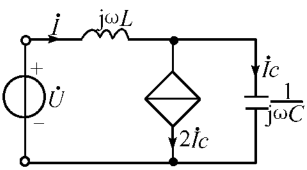
即 $\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$,$\omega_2=\dfrac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$时,电路发生并联谐振。

电路的总阻抗为 $Z=\dfrac{1}{Y_1}+\dfrac{1}{Y_2}=\dfrac{Y_1+Y_2}{Y_1Y_2}=\dfrac{\mathrm{j}\left[\omega(C_1+C_2)-\dfrac{1}{\omega L_1}-\dfrac{1}{\omega L_2}\right]}{-(\omega C_1-\dfrac{1}{\omega L_1})(\omega C_2-\dfrac{1}{\omega L_2})}$

即当 $\omega(C_1+C_2)-\dfrac{1}{\omega L_1}-\dfrac{1}{\omega L_2}=0$,$Z=0$,电路发生串联谐振,

此时
$$\omega=\sqrt{\frac{L_1+L_2}{(C_1+C_2)L_1L_2}}$$

(b)用外施激励法,先求输入阻抗 Z_{in},如题解 9-46 图所示。



题解 9-46 图

由 KCL,知 $\dot{I}=2\dot{I}_C+\dot{I}_C=3\dot{I}_C$ ①

由 KVL,知 $\mathrm{j}\omega L\dot{I}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C=\dot{U}$ ②

式①代入式②并整理,得 $\dot{U}=\mathrm{j}(\omega L-\dfrac{1}{3\omega C})\dot{I}$

所以
$$Z_{\text{in}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{3\omega C})$$

当电路发生谐振时,有
$$\omega L-\frac{1}{3\omega C}=0$$

所以
$$\omega=\frac{1}{\sqrt{3LC}}$$

小结 LC 并联发生谐振时,$\omega C=\dfrac{1}{\omega L}$。电路发生谐振时,输入阻抗 Z_{in} 的虚部为 0。

第十章

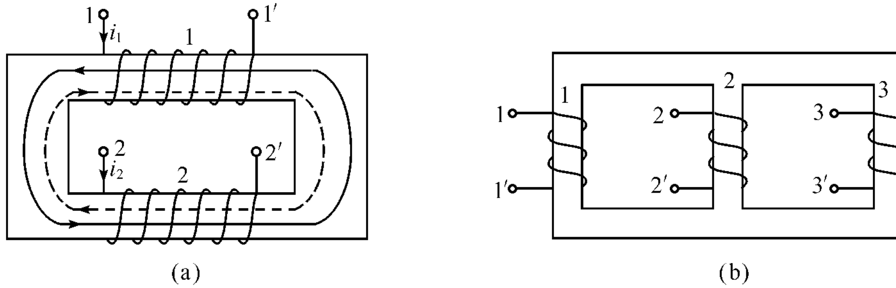
含有耦合电感的电路

知识网络图

- 含有耦合电感的电路
  - 互感的基本概念
  - 耦合电感
    - 电路分析计算
    - 典型电路
      - 空心变压器
      - 理想变压器

课后习题全解

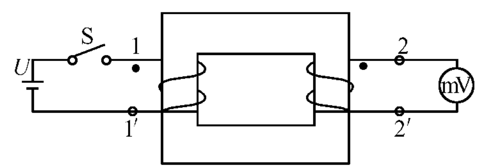
○10—1　**试确定题 10—1 图所示耦合线圈的同名端。**



题 10—1

解　根据同名端的定义，图(a)中，假设电流 i_1，i_2 分别从端子 1 和端子 2 中流入，按右手螺旋法则可得，i_1 产生的磁通链（用实线表示）方向与 i_2 产生的磁通链（用虚线表示）方向相反如图(a)所示，显然它们相互“削弱”，所以判定端子 1 与端子 2 为异名端，那么，同名端即为(1，2′)或(1′，2)。

对图(b)，分析过程同图(a)。判断出同名端为：(1，2′)(1，3′)(2，3′)。



题 10—2

○10—2　**两个具有耦合的线圈如题 10—2 图所示。**

(1)标出它们的同名端；(2)当图中开关 S 闭合时或闭合后再打开时，试根据毫伏表的偏转方向确定同名端。

解　(1)根据同名端定义和两个线圈的绕向，采用题 10—1 中的分析方法，判定同名端为(1，2)，如题 10—2 图中所标示。

(2)图示电路是测试耦合线圈同名端的实验线路。当开关 S 迅速闭合时，线圈 1 中有随时间增大的电流 i_1 从电源正极流入线圈端子 1，这时 $\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}>0$，则毫伏表的高电位端与端子 1 为同名端。当开关 S 闭合后再打开时，电流 i_1 减小，毫伏表的低电位端与端子 1 为同名端。

○10—3　**若有电流 $i_1=2+5\cos(10t+30°)\,\mathrm{A}$，$i_2=10\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{A}$，各从题 10—1 图(a)所示线圈的 1 端和 2 端流入，并设线圈 1 的电感 $L_1=6\mathrm{H}$，线圈 2 的电感 $L_2=3\mathrm{H}$，互感为 $M=4\mathrm{H}$。试求：(1)各线圈的磁通链；(2)端电压 $u_{11'}$ 和 $u_{22'}$；(3)耦合因数 k。**

解　如上面题 10—1 图(a)所示的耦合线圈，设电流 i_1 和 i_2 分别从各自线圈的 1 端和 2 端流入，按右手螺旋法则有，i_1 产生的磁通链（用实线表示）方向和 i_2 产生

的磁通链（用虚线表示）方向如题 10－1 图(a)所示。

(1)耦合线圈中的磁通链是自感磁通链和互感磁通链的代数和，所以根据题 10－1图(a)所示的磁通链方向，有

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \Psi_{11}-\Psi_{12}=L_1 i_1-Mi_2\\ &=12+30\cos(10t+30^\circ)-4\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{Wb}\\ \Psi_2 &= -\Psi_{21}+\Psi_{22}=-Mi_1+L_2 i_2\\ &=-8-20\cos(10t+30^\circ)+30\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{Wb}\end{aligned}$$

(2)由上述可得端电压

$$u_{11'}=\frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t}=L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=-300\sin(10t+30^\circ)+200\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{V}$$

$$u_{22'}=\frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=200\sin(10t+30^\circ)-150\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{V}$$

(3)根据耦合因数 k 的定义，有 $$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=0.943$$

○10－4　能否使两个耦合线圈的耦合系数 $k=0$。

解　可以。因为两个线圈之间的耦合系数 $k=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$是反映两线圈耦合的松紧程度的，由 k 的表达式可以看出：(1)$0\leqslant k\leqslant 1$，若 $k=0$，说明两线圈之间没有耦合；若 $k=1$，称两线圈全耦合。(2)k 的大小与线圈的结构、两线圈的相互位置以及周围磁介质有关。因此，若把两个线圈相距很远，或相互垂直放置，则 k 值就可很小，甚至接近于零。由此可见，当电感 L_1 和 L_2 一定时，改变或调整两个线圈的相互位置可以改变 k 的大小，也就是改变了互感 M 的大小。

○10－5　题 10－5 图所示电路中 $L_1=6\mathrm{H}$，$L_2=3\mathrm{H}$，$M=4\mathrm{H}$。试求从端子 1—1′看进去的等效电感。

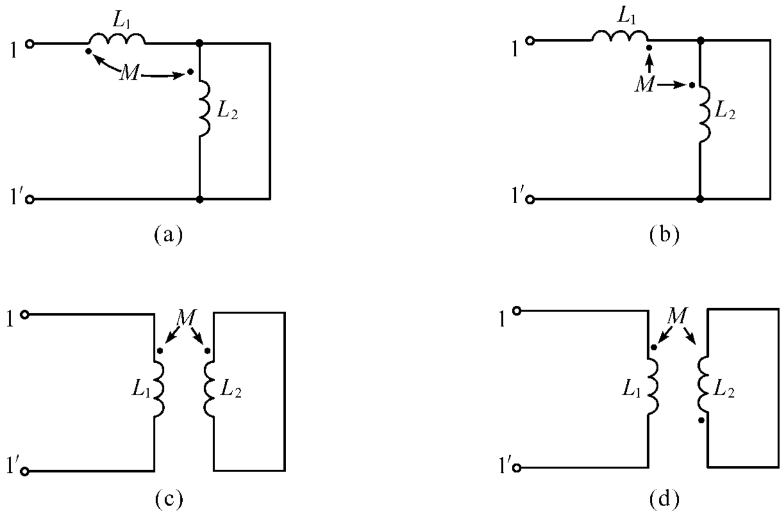
解　(1)题解 10－5 图(a)所示的去耦等效电路（原电路异名端相连），可求得从端子 1—1′看进去的等效电感为

$$L_{\mathrm{eq}}=(L_1+M)+(L_2+M)/\!/(-M)=10+7/\!/(-4)=0.667\mathrm{H}$$

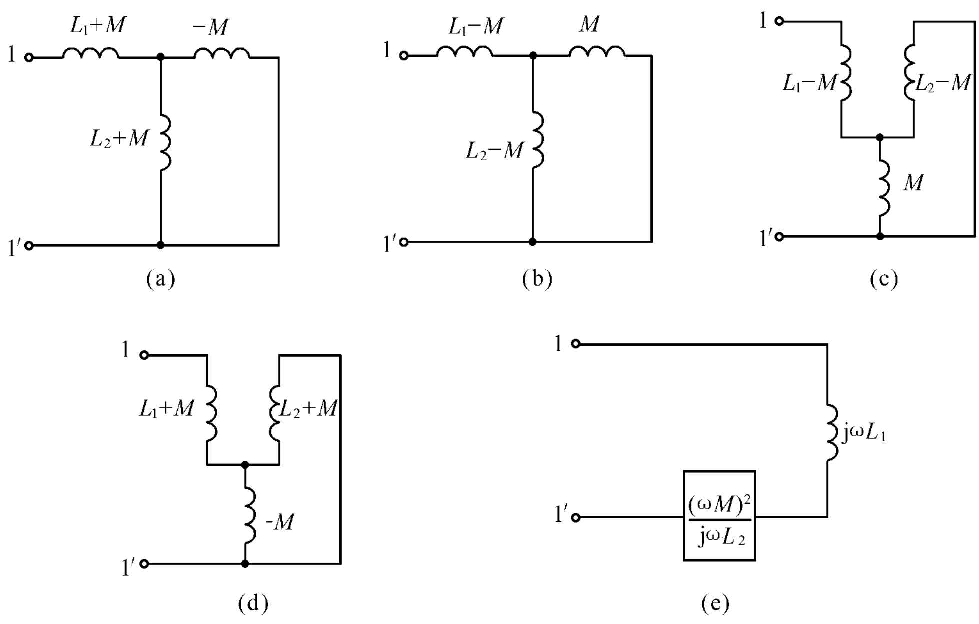
(2)由题解 10－5 图(b)所示的去耦等效电路（原电路同名端相连），可求得从端子 1—1′看进去的等效电感为

$$L_{\mathrm{eq}}=(L_1-M)+(L_2-M)/\!/M=2+(-1)/\!/4=0.667\mathrm{H}$$

(3)题 10－5 图(c)所示电路可有两种等效电路，一是如题解 10－5 图(c)所示的去耦等效电路；二是如题解 10－5 图(e)所示的原边等效电路。分别求解如下：



题 10－5



题解 10－5

题解 10－5 **图**(c)**电路，有**

$$L_{eq}=(L_1-M)+M/\!/(L_2-M)=2+4/\!/(-1)=0.667\mathrm{H}$$

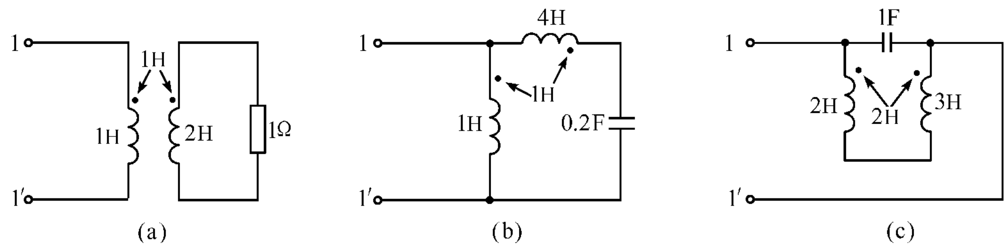
题解 10－5 **图**(e)**电路中，**$\dfrac{(\omega M)^2}{\mathrm{j}\omega L_2}=-\mathrm{j}\omega\dfrac{M^2}{L_2}$**，则等效电感为**

$$L_{eq}=L_1-\frac{M^2}{L_2}=6-\frac{16}{3}=0.667\text{H}$$

(4)同理,原题 10—5 图(d)所示电路也有两种等效电路,一是如题解 10—5 图(d)所示的去耦等效电路;二是同上面(3)中的题解 10—5 图(e)所示的原边等效电路,故求解结果相同。对图(d)去耦等效电路,求得从端子 1—1′看进去的等效电感为

$$L_{eq}=(L_1+M)+(-M)/\!/(L_2+M)=10+(-4)/\!/7=0.667\text{H}$$

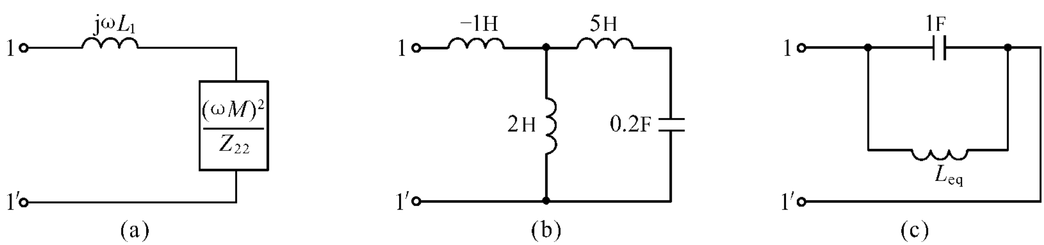
◎10—6　求题 10—6 图所示电路的输入阻抗 $Z(\omega=1\text{rad/s})$。



题 10—6 图

分析　对电路进行原边等效和去耦等效求解即可。

解　题 10—6 图所示电路的原边等效电路和去耦等效电路如题解 10—6 图所示。



题解 10—6 图

(1)题解图 10—6 图(a)所示的原边等效电路中,$Z_{22}=1+\text{j}2\Omega$,故输入阻抗为

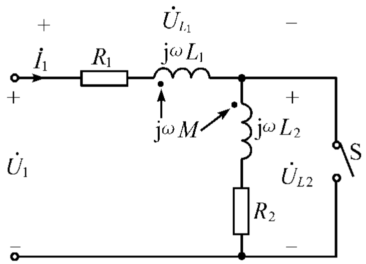
$$Z=\text{j}\omega L_1+\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}=\text{j}+\frac{1}{1+\text{j}2}=(0.2+\text{j}0.6)\Omega$$

(2)由题解 10—6 图(b)所示的去耦等效电路,可得

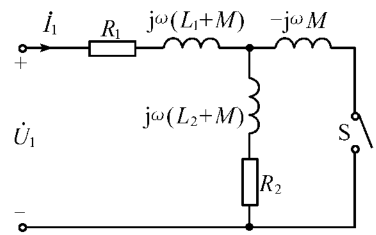
$$Z=-\text{j}1+(\text{j}2)/\!/(\text{j}5-\text{j}\frac{1}{0.2})=-\text{j}1\Omega$$

(3)题解 10—6 图(c)所示的串联去耦等效电路中,等效电感为:$L_{eq}=2+3-4=1\text{H}$,且 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{L_{eq}C}}=1\text{rad/s}$,故此电路处于并联谐振状态,则输入阻抗为 $Z=\infty$。

○10－7 题 10－7 图所示电路中 $R_1=R_2=1\Omega,\omega L_1=3\Omega,\omega L_2=2\Omega,\omega M=2\Omega,U_1=100\text{V}$。求:(1)开关 S 打开和闭合时的电流 $\dot{I}_1$;(2)S 闭合时各部分的复功率。



题 10－7 图



题解 10－7 图

解 本题可用去耦等效电路计算。等效电路如题解 10－7 图所示,设 $\dot{U}_1=100\angle 0^\circ$ V 则,

(1)开关 S 打开时

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{R_1+R_2+\text{j}\omega(L_1+L_2+2M)}$$
$$=\frac{100\angle 0^\circ}{2+\text{j}9}=\frac{100}{9.22\angle 88.47^\circ}=10.85\angle -77.47^\circ\ \text{A}$$

开关 S 闭合时

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{R_1+\text{j}\omega(L_1+M)+[R_2+\text{j}\omega(L_2+M)]/\!/(-\text{j}\omega M)}$$
$$=\frac{100\angle 0^\circ}{1+\text{j}5+(1+\text{j}4)/\!/(-\text{j}2)}=43.85\angle -37.88^\circ\ \text{A}$$

(2)开关 S 闭合时,电源发出的复功率为

$$\overline{S}=\dot{U}_1\dot{I}_1^*=100\times 43.85\angle 37.88^\circ=4385\angle 37.88^\circ\ \text{V}\cdot\text{A}$$

因此时线圈 2 被短路,其上的电压 $\dot{U}_{L2}=0$,则线圈 1 上的电压 $\dot{U}_{L1}=\dot{U}_1$,故线圈 2 吸收的复功度率为:$\overline{S}_{L2}=0$;线圈 1 吸收的复功率为:$\overline{S}_{L1}=\overline{S}=4385\angle 37.88^\circ$ V·A。

○10－8 把两个线圈串联起来接到 50Hz,220V 的正弦电源上,顺接时得电流 $I=2.7$A,吸收的功率为 218.7W;反接时电流为 7A。求互感 M。

解 按题意知:$U_\text{S}=220\text{V},\omega=2\pi f=314\text{rad/s}$,则当两个线圈顺接时,等效电感为:$L_1+L_2+2M$,等效电阻为

$$R=\frac{P}{I^2}=\frac{218.7}{2.7^2}=30\Omega$$

则总阻抗为

$$\sqrt{R^2+\omega^2(L_1+L_2+2M)^2}=\frac{U_S}{I}=\frac{220}{2.7}$$

故

$$\omega(L_1+L_2+2M)=\sqrt{(\frac{220}{2.7})^2-30^2}=75.758 \quad ①$$

而当两个线圈反接时，等效电感为：

$$L_1+L_2-2M$$

则总阻抗为

$$\sqrt{R^2+\omega^2(L_1+L_2-2M)^2}=\frac{U_S}{I}=\frac{220}{7}$$

故

$$\omega(L_1+L_2-2M)=\sqrt{(\frac{220}{7})^2-30^2}=9.368$$

②

用式①减去式②可得

$$M=\frac{75.758-9.368}{4\omega}=52.86\text{mH}$$

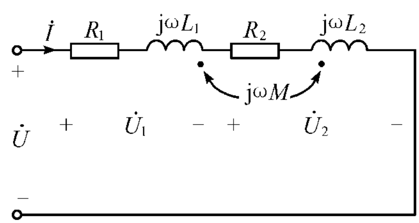
●10－9 电路如题 10－9 图所示，已知两个线圈的参数为：$R_1=R_2=100\Omega$，$L_1=3\text{H}$，$L_2=10\text{H}$，$M=5\text{H}$，正弦电源的电压 $U=220\text{V}$，$\omega=100\text{rad/s}$。

(1)试求两个线圈端电压，并作出电路的相量图；

(2)证明两个耦合电感反接串联时不可能有 $L_1+L_2-2M\leqslant 0$；

(3)电路中串联多大的电容可使电路发生串联谐振；

(4)画出该电路的去耦等效电路。



题 10－9 图

分析 画出相量图，根据相量图求解即可。

解 题 10－9 图所示电路中的两个耦合线圈为反接串联，所以其等效电感为：

$$L_{eq}=L_1+L_2-2M=3\text{H}$$

令 $\dot{U}=220\angle 0^\circ$ V，故电流 $\dot{I}$ 为

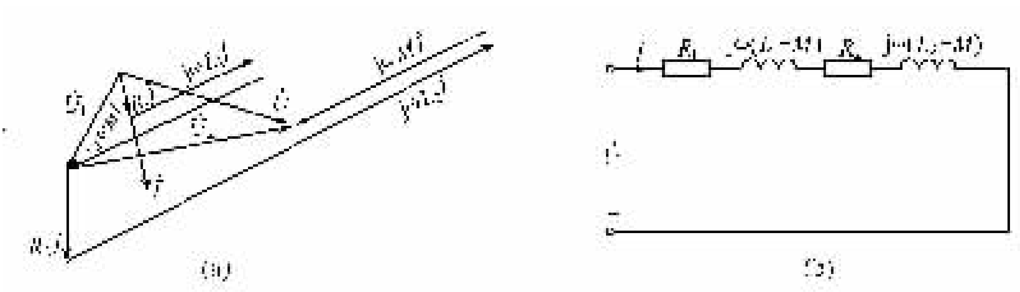
$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_{eq}}=\frac{220\angle 0^\circ}{200+\mathrm{j}300}=0.61\angle -56.31^\circ\ \mathrm{A}$$

(1)两端线圈端电压 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{U}_2$ 的参考方向如题 10－9 图所示，则

$$\begin{aligned}\dot{U}_1&=[R_1+\mathrm{j}\omega(L_1-M)]\dot{I}\\&=(100-\mathrm{j}200)\times 0.61\angle -56.31^\circ=136.4\angle -119.74^\circ\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_2&=[R_2+\mathrm{j}\omega(L_2-M)]\dot{I}\\&=(100+\mathrm{j}500)\times 0.61\angle -56.31^\circ=311.04\angle 22.38^\circ\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

电路相量图如题解 10－9 图(a)所示。



题解 10－9 图

(2)只要证明两个耦合电感反接串联时，有 $L_1+L_2-2M\geqslant 0$ 即可。证明如下：

因为

$$(\sqrt{L_1}-\sqrt{L_2})^2\geqslant 0$$

故

$$L_1+L_2-2\sqrt{L_1L_2}\geqslant 0$$

即

$$L_1+L_2\geqslant 2\sqrt{L_1L_2}$$

又根据耦合因数 $k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}\leqslant 1$，即 $M\leqslant\sqrt{L_1L_2}$

所以

$$L_1+L_2\geqslant 2M\quad \text{或}\quad L_1+L_2-2M\geqslant 0$$

(3)因为串联谐振的条件是：

$$\omega L_{eq}-\frac{1}{\omega C}=0$$

即

$$\omega^2=\frac{1}{L_{eq}C}$$

所以

$$C=\frac{1}{\omega^2 L_{eq}}=\frac{1}{100^2\times 3}=33.33\mu\text{F}$$

(4)该电路两个耦合线圈是反接串联，所以去耦等效电路如题解 10－9 图(b)所示。

小结　证明 $L_1+L_2-2M\leqslant 0$ 时，应用到耦合因数 k，k 是一个不大于 1 的数，电路发生串联谐振时，$\omega C=\frac{1}{\omega L}$，即 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$。

○10－10　把题 10－9 中的两个线圈改为同侧并连接至相同的电源上。

(1)此时要用两个功率表分别测量两个线圈的功率，试画出它们的接线图，求出功率表的读数，并作必要的解释，作出电路的相量图；

(2)求电路的等效阻抗。

解　(1)按题意，可画出题解 10－10 图(a)所示的电路接线图。功率表的读数即为每个线圈所吸收的有功功率 P。

令 $\dot{U}=220\underline{/0^\circ}$ V，设各支路电流相量如题解 10－10 图(a)所示，列出 KVL 方程为

$$(R_1+\text{j}\omega L_1)\dot{I}_1+\text{j}\omega M\dot{I}_2=\dot{U}$$

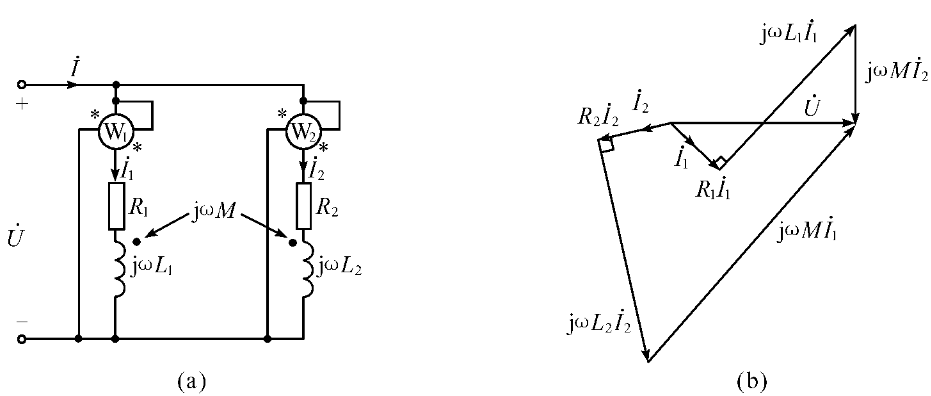
$$\text{j}\omega M\dot{I}_1+(R_2+\text{j}\omega L_2)\dot{I}_2=\dot{U}$$

代入参数值，得

$$(100+\text{j}300)\dot{I}_1+\text{j}500\dot{I}_2=220\underline{/0^\circ}$$

$$\text{j}500\dot{I}_1+(100+\text{j}1000)\dot{I}_2=220\underline{/0^\circ}$$

解之



题解 10－10 图

$$\dot{I}_1=\frac{\begin{vmatrix}220 & \mathrm{j}500\\ 220 & 100+\mathrm{j}1000\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}100+\mathrm{j}300 & \mathrm{j}500\\ \mathrm{j}500 & 100+\mathrm{j}1000\end{vmatrix}}=0.825\underline{/-28.41^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2=\frac{220-(100+\mathrm{j}300)\dot{I}\dot{I}_1}{\mathrm{j}500}=0.362\underline{/-170.56^\circ}\ \mathrm{A}$$

两功率表的读数分别为

$$P_1=UI_1\cos\varphi_1=220\times0.825\times\cos28.41^\circ=159.64\mathrm{W}$$

$$P_2=UI_2\cos\varphi_2=220\times0.362\times\cos170.56^\circ=-78.56\mathrm{W}$$

两功率表的读数中出现一负值，这是由于互感的相互作用，使得某一支路出现了电压与电流之间的相位差角大于 90°，故会出现有功功率为负值的情况。

电路相量图如题解 10－10 图(b)所示。

(2)电路的等效阻抗 Z_{eq} 为：

$$Z_{\mathrm{eq}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_1+\dot{I}_2}=\frac{220}{0.583\underline{/-50.8^\circ}}=377\underline{/\ 50.8^\circ}\ \Omega$$

◎10－11　题 10－11 图所示电路中 $M=0.04\mathrm{H}$。求此串联电路的谐振频率。

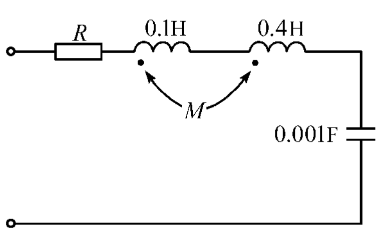
分析　$L_{\mathrm{eq}}=L_1+L_2+2M$，串联谐振电路 $\omega C=\frac{1}{\omega L}$ 即 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$。

解　该电路的耦合电感为顺接串联，所以其等效电感 L_{eq} 为

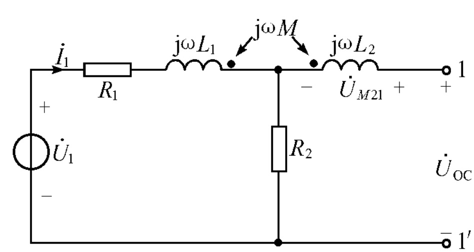
$$L_{\mathrm{eq}}=L_1+L_2+2M=0.1+0.4+0.08=0.58\mathrm{H}$$

故，此串联电路的谐振频率为

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{eq}}C}}=\frac{1}{\sqrt{0.58\times0.001}}=41.52\ \mathrm{rad/s}$$



题 10－11 图



题 10－12 图

○10－12　求题 10－12 图所示一端口电路的戴维宁等效电路。已知 $\omega L_1=\omega L_2=10\Omega$，$\omega M=5\Omega$，$R_1=R_2=6\Omega$，$U_1=60\mathrm{V}$(正弦)。

解
$$\dot{U}_{\mathrm{oc}}=\dot{U}_{M21}+R_2\dot{I}_1=\mathrm{j}\omega \dot{M}I_1+R_2\dot{I}_1=(R_2+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_1$$

式中第一项是电流 $\dot{I}_1$ 在 L_2 中产生的互感电压，第二项为电流 $\dot{I}_1$ 在电阻 R_2 上

的电压。而电流

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1}$$

若令 $\dot{U}_1=U_1\angle 0^\circ=60\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$，则可得

$$\dot{U}_{\mathrm{oc}}=\frac{R_2+\mathrm{j}\omega M}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1}\dot{U}_1=\frac{6+\mathrm{j}5}{12+\mathrm{j}10}\times 60\angle 0^\circ=30\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

对于含有耦合电感的一端口，它的戴维宁等效阻抗的求法与具有受控源的电路完全一样。这里采用题解 10—12 图(a)所示的方法，先将原端口中的独立电压源以短路线代替，再在端口 1—1′ 处置一电压源 $\dot{U}$，用网孔电流法，其方程为

$$(R_2+\mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_{\mathrm{m1}}-(R_2+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_{\mathrm{m2}}=\dot{U}$$

$$-(R_2+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_{\mathrm{m1}}+(R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_{\mathrm{m2}}=0$$

解得电流

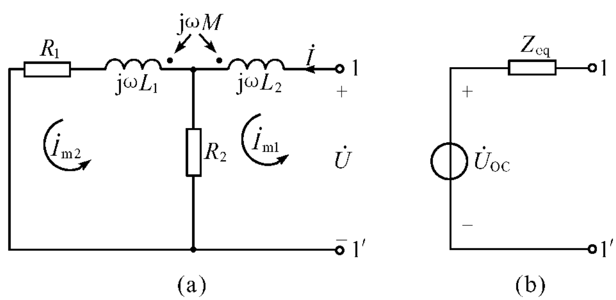
$$\dot{I}_{\mathrm{m1}}=\frac{(R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{U}}{(R_2+\mathrm{j}\omega L_2)(R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1)-(R_2+\mathrm{j}\omega M)^2}$$

且有 $\dot{I}=\dot{I}_{\mathrm{m1}}$，根据等效阻抗的定义，则有

$$Z_{\mathrm{eq}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_{\mathrm{m1}}}=R_2+\mathrm{j}\omega L_2-\frac{(R_2+\mathrm{j}\omega M)^2}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1}$$

$$=6+\mathrm{j}10-\frac{(6+\mathrm{j}5)^2}{12+\mathrm{j}10}=3+\mathrm{j}7.5\Omega$$

该一端口的戴维宁等效电路如题解 10—12 图(b)所示。



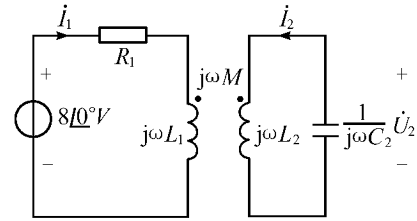
题解 10—12 图

◎10—13　题 10—13 图所示电路中 $R_1=1\Omega$，$\omega L_1=2\Omega$，$\omega L_2=32\Omega$，$\omega M=8\Omega$，$\frac{1}{\omega C}=32\Omega$。求电流 $\dot{I}_1$ 和电压 $\dot{U}_2$。

分析　对电路分别进行原边等效，幅边等效求解即可。

解　用题解 10—13 图(a)所示的原边等效电路求电流 $\dot{I}_1$，其中

$$Z_{22}=\mathrm{j}\omega L_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}=\mathrm{j}32-\mathrm{j}32=0$$



题 10－13 图

即副边电路处于谐振状态。故，反映阻抗为

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}=\infty$$

所以，电流 $\dot{I}_1=0$

用题解 10－13 图(b)所示的副边等效电路求电压 $\dot{U}_2$，其中

$$Z_{11}=R_1+\mathrm{j}\omega L_1=(1+\mathrm{j}2)\Omega$$

则反映阻抗为

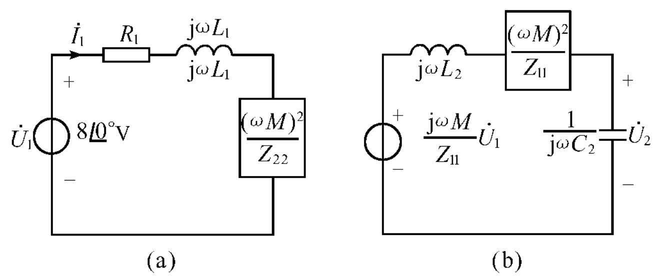
$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}=\frac{64}{1+\mathrm{j}2}=28.62\angle -63.43°\ \Omega$$

等效电源电压为

$$\frac{\mathrm{j}\omega M}{Z_{11}}\dot{U}_1=\frac{\mathrm{j}8}{1+\mathrm{j}2}\times 8\angle 0°=28.62\angle 26.57°\ \mathrm{V}$$

故，电压 $\dot{U}_2$ 为

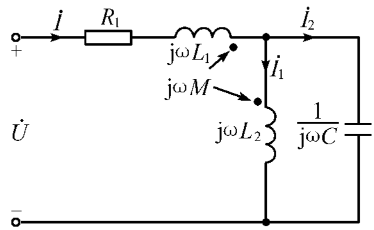
$$\dot{U}_2=\frac{-\mathrm{j}32}{\mathrm{j}32+28.62\angle -63.43°-\mathrm{j}32}\times 28.62\angle 26.57°=32\angle 0°\ \mathrm{V}$$



题解 10－13 图

○10－14　略

●10－15　题 10－15 图所示电路中 $R_1=50\Omega$，$L_1=70\mathrm{mH}$，$L_2=25\mathrm{mH}$，$M=25\mathrm{mH}$，$C=1\mu\mathrm{F}$，正弦电源的电压 $\dot{U}=500\angle 0°\ \mathrm{V}$，$\omega=10^4\,\mathrm{rad/s}$。求各支路支流。



题 10－15 图

分析　利用公式将电路进行去耦等效，再进行求解即可。

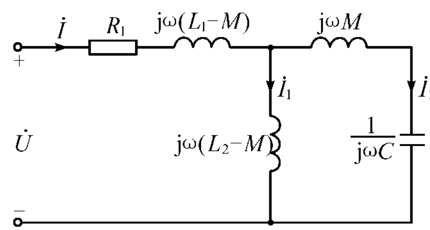
解　采用如题解 10－15 图所示的去耦等效电路求解。设各支路电流 $\dot{I}$，$\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$ 参考方向如图所示。图中各阻抗计算如下

$$j\omega(L_1-M)=j450\Omega$$

$$j\omega(L_2-M)=0$$

$$j\omega M=j250\Omega$$

$$\frac{1}{j\omega C}=-j100\Omega$$



题解 10－15 图

故，可求得各支路电流为

$$\dot{I}=\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{R_1+j\omega(L_1-M)}$$

$$=\frac{500\angle 500^\circ}{50+j450}=1.104\angle -83.66^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_2=0$$

小结　出现这种耦合情况，一般情况先进行去耦等效。

○10－16　**列出题 10－16 图示电路的回路电流方程。**

解　按题 10－16 图所示电路中的回路电流参考方向，可列出该电路的回路电流方程。

$$(R+j\omega L_1+j\omega L_2)\dot{I}_{11}-j\omega L_2\dot{I}_{12}-j\omega M_{12}(\dot{I}_{11}-\dot{I}_{12})$$

$$-j\omega M_{31}\dot{I}_{12}-j\omega M_{12}\dot{I}_{11}+j\omega M_{23}\dot{I}_{12}=\dot{U}_{S1} \qquad ①$$

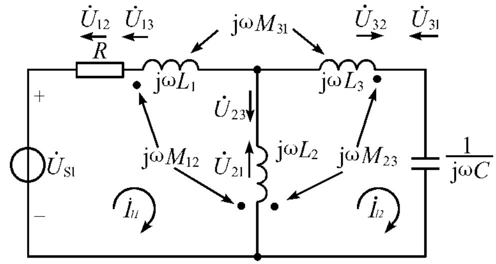
$$-j\omega L_2\dot{I}_{11}+(j\omega L_2+j\omega L_3+\frac{1}{j\omega C})\dot{I}_{12}+j\omega M_{12}\dot{I}_{11}-j\omega M_{23}\dot{I}_{12}$$

$$-j\omega M_{31}\dot{I}_{11}+j\omega M_{23}(\dot{I}_{11}-\dot{I}_{12})=0 \qquad ②$$

○10－17　(1)$i_1=0.1106\cos(314t-64.85^\circ)$A

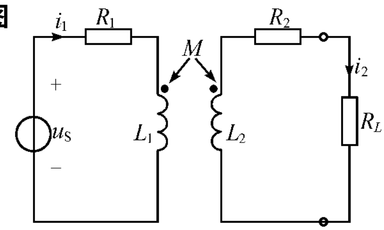
(2)$i_2=0.3502\cos(314t+1.033^\circ)$A

○10－18　**题 10－18 图所示电路中的理想变压器的变比为 10∶1。求电压 $\dot{U}_2$。**



题 10—16 图

解 题解 10—18 图为理想变压器原边等效电路，图中等效电阻 R_{eq} 为



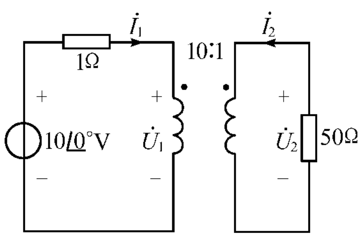
题 10—17 图

$$R_{eq}=n^2R_L=100\times 50=5000\Omega$$

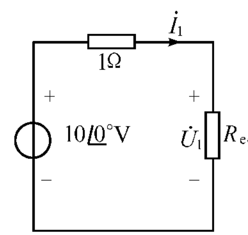
故 $\dot{U}_1=\dfrac{R_{eq}}{1+R_{eq}}\times 10\angle 0^\circ=9.998\angle 0^\circ\ \text{V}$

又根据理想变压器 VCR 中的电压方程

$$\dot{U}_1=10\dot{U}_2$$



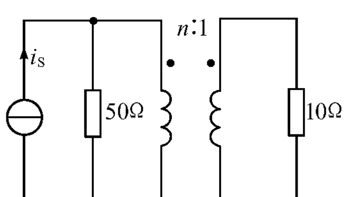
题 10—18



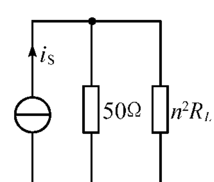
题解 10—18

可求得电压 $\dot{U}_2$ 为 $\dot{U}_2=\dfrac{1}{10}\dot{U}_1=0.9998\angle 0^\circ\ \text{V}$

◎10—19 如果使 10Ω 电阻能获得最大功率，试确定题 10—19 图所示电路中理想变压器的变比 n。



题 10—19 图



题解 10—19 图

分析　将负载电阻折算到初级求解即可。

解　应用理想变压器的变阻抗性质，把负载电阻折算到初级，即

$$R_{in}=n^2R_L=n^2\times10$$

初级等效电路如题解 10－19 图所示。根据最大功率传输定理，显然当

$$n^2\times10=50$$

即变比 $n=\sqrt{\frac{50}{10}}=\sqrt{5}=2.236$ 时，10Ω 电阻获得最大功率。

◯10－20　$Z=\mathrm{j}1\Omega$

第十一章

三 相 电 路

学习要求

1. 正确理解和掌握三相电路的连接方式。
2. 熟练掌握三相电路的电压、电流和功率的计算。
3. 了解不对称三相电路的概念。
4. 熟练掌握三相功率的计算,测量及功率表读数的计算。

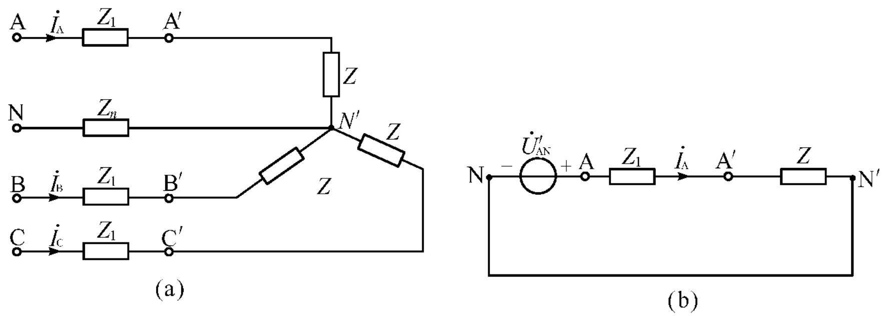
知识网络图

- 三相电路
  - 三相电源
    - △形连接
    - Y 形连接
  - 三相电路
    - 对称三相电路
      - 概念
      - 电压(电流)的相值和线值之间的关系
      - 计算
      - 功率问题和测量
    - 不对称三相电路(简单概念介绍)

课后习题全解

○11－1　**已知对称三相电路的星形负载阻抗** $Z=(165+j84)\Omega$，**端线阻抗** $Z_1=(2+j1)\Omega$，**中线阻抗** $Z_N=(1+j1)\Omega$，**线电压** $U_1=380V$。**求负载端的电流和线电压，并作电路的相量图。**

解　**题解** 11－1 **图**(a)**为** Y **形接的对称三相电路。由于是对称电路可归结为一相计算，如题解** 11－1 **图**(b)**所示。**



题解 11－1 **图**

设
$$\dot{U}_{AN}=\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ\ \text{V}$$

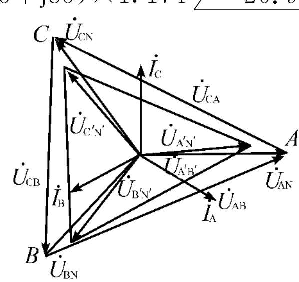
由题解 11－1 **图**(b)**有** $\dot{I}_A=\dfrac{\dot{U}_{AN}}{Z_1+Z}=\dfrac{220\angle 0^\circ}{167+j85}=1.174\angle -26.98^\circ\ \text{A}$

利用对称性，知

$$\dot{I}_B=1.174(\angle -26.98^\circ-\angle 120^\circ)=1.174\angle -146.98^\circ\ \text{A}$$
$$\dot{I}_C=1.174(\angle -26.98^\circ+\angle 120^\circ)=1.174\angle 93.02^\circ\ \text{A}$$

负载端的相电压为

$$\dot{U}_{A'N'}=Z\dot{I}_A=(165+j85)\times 1.174\angle -26.98^\circ=217.90\angle 0.275^\circ\ \text{V}$$



题解 11－1 **图**(c)

从而,负载的线电压为 $\dot{U}_{A'B'}=\sqrt{3}\dot{U}_{A'N'}\angle 30^\circ=377.41\angle 30^\circ\ \mathrm{V}$

根据对称性,知

$$\dot{U}_{B'C'}=377.41\angle -30^\circ-120^\circ=377.41\angle -90^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_{C'A'}=377.41\angle -30^\circ+120^\circ=377.41\angle 150^\circ\ \mathrm{V}$$

电路的相量图如题解 11－1 图(c)所示。

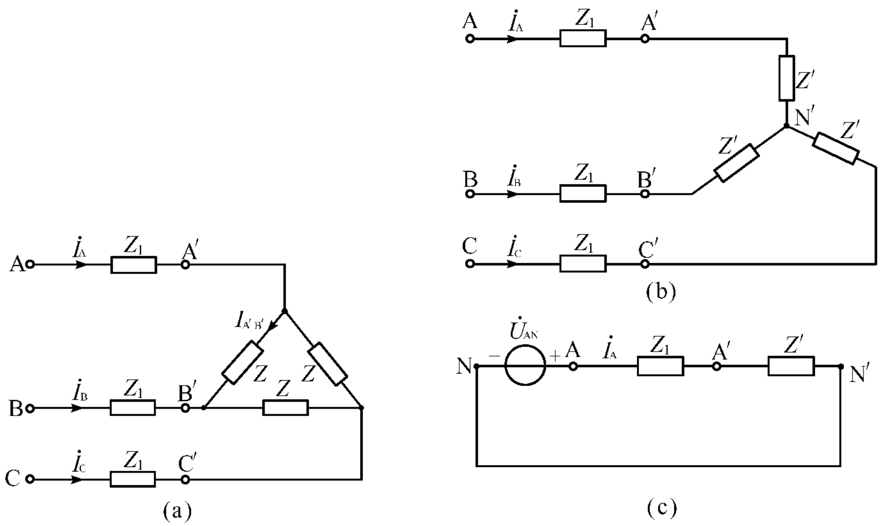
◎11－2 已知对称三相电路的线电压 $U_1=380\mathrm{V}$(电源端),三角负载阻抗 $Z=(4.5+\mathrm{j}14)\Omega$,端线阻抗 $Z_1=(1.5+\mathrm{j}2)\Omega$。求线电流和负载的相电流,并作相量图。

分析 对电路中的△连接,等效为 Y—Y 连接,求解即可。

解 如题解 11－2 图(a)所示为△连接的对称三相电路。等效为 Y－Y 连接,如题解 11－2 图(b)所示。

其中 $$Z'=\frac{Z}{3}=\frac{1}{3}\times(4.5+\mathrm{j}14)=1.5+\mathrm{j}4.67\Omega$$

由于是对称电路可归结为一相计算,如题解 11－2 图(c)所示。



题解 11－2 图

令 $\dot{U}_{AN}=\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$

$$\dot{I}_A=\frac{\dot{U}_{AN}}{Z_1+Z'}=\frac{220\angle 0^\circ}{1.5+\mathrm{j}2+1.5+\mathrm{j}4.67}=30.08\angle -65.78^\circ\ \mathrm{A}$$

根据对称性:$\dot{I}_B=30.08(\angle -65.78^\circ-\angle 120^\circ)=30.08\angle -185.78^\circ\ \mathrm{A}$

$$\dot{I}_{\mathrm{C}}=30.08(\angle -65.78^{\circ}+\angle 120^{\circ})=30.08\angle 54.22^{\circ}\ \mathrm{A}$$

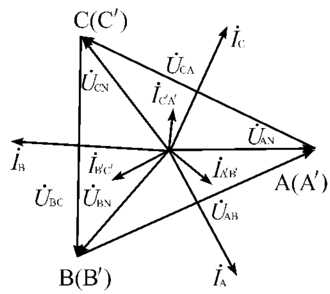
利用三角形连接的线电流与相电流的关系，可求得题解 11－2 图(a)中负载的相电流，有

$$\dot{I}_{\mathrm{A'B'}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{I}_{\mathrm{A}}\angle 30^{\circ}=17.37\angle -35.78^{\circ}\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{B'C'}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{I}_{\mathrm{B}}\angle 30^{\circ}=17.37\angle -155.78^{\circ}\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{C'A'}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{I}_{\mathrm{C}}\angle 30^{\circ}=17.37\angle 84.22^{\circ}\ \mathrm{A}$$

电路的相量图如题解 11－2 图(d)所示。



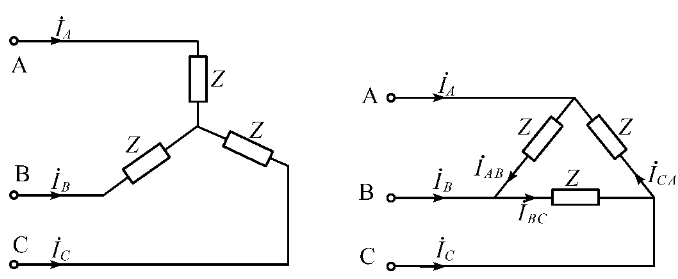
题解 11－2 图(d)

◯11－3　对称三相电路的线电压 $U_1=230\mathrm{V}$，负载阻抗 $Z=(12+\mathrm{j}16)\Omega$。试求：

(1)星形连接负载时的线电流及吸收的总功率；

(2)三角形连接负载时的线电流、相电流和吸收的总功率；

(3)比较(1)和(2)的结果能得到什么结论？



(a)　　　　(b)

题解 11－3 图

解　(1)负载星形连接时如题解 11－3 图(a)所示。

令
$$\dot{U}_{\mathrm{AN}}=\frac{U_1}{\sqrt{3}}\angle 0^{\circ}=132.79\angle 0^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_A=\frac{\dot{U}_{AN}}{Z}=\frac{132.79\angle 0^\circ}{12+j16}=6.64\angle -53.13^\circ\ \text{A}$$（对称电路一相计算，图略）

根据对称性

$$\dot{I}_B=6.64(\angle -53.13^\circ-120^\circ)=6.64\angle -173.13^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C=6.64(\angle -53.13^\circ+120^\circ)=6.64\angle 66.87^\circ\ \text{A}$$

星形连接负载吸收的总功率为

$$P=\sqrt{3}U_l1_l\cos\varphi_2=\sqrt{3}\times 230\times 6.64\cos 53.13^\circ=1587.11\text{W}$$

(2)负载三角形连接时，如题解 11－3 图(b)所示。

令 $$\dot{U}_{AB}=230\angle 0^\circ\ \text{V},\dot{I}_{AB}=\frac{\dot{U}_{AB}}{Z}=11.5\angle -53.13^\circ\ \text{A}$$

利用对称性

$$\dot{I}_{BC}=11.5(\angle -53.13^\circ-120^\circ)=11.5\angle -173.13^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{CA}=11.5(\angle -53.13^\circ+120^\circ)=11.5\angle 66.87^\circ\ \text{A}$$

从而，有 $\dot{I}_A=\sqrt{3}\dot{I}_{AB}\angle -30^\circ=19.92\angle -83.13^\circ\ \text{A}$

利用对称性

$$\dot{I}_B=19.92(\angle -83.13^\circ-120^\circ)=19.92\angle -203.13^\circ=19.92\angle 156.87^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C=19.92(\angle -53.13^\circ+120^\circ)=19.92\angle 36.87^\circ\ \text{A}$$

三角形连接负载吸收的总功率为

$$P=\sqrt{3}U_lI_l\cos\varphi_2=\sqrt{3}\times 230\times 19.92\cos 53.13^\circ=4761.34\text{W}$$

(3)比较(1)和(2)的结果可以得到以下结论：

在相同的电源线电压作用下，负载由 Y 连接改为 △ 连接，线电流增加到原来的 3 倍，功率也增加到原来的 3 倍。即 $I_{l\Delta}=3I_{lY},P_\Delta=3P_Y$。

◎11－4 题 11－4 图所示对称工频三相耦合电路接于对称三相电源，线电压 $U_l=380\text{V},R=30\Omega,L=0.29\text{H},M=0.12\text{H}$。求相电流和负载吸收的总功率。

分析 先对电路进行去耦等效，然后再进行求解即可。

解 去耦等效电路如题解 11－4 图所示。

电路为对称三相电路，单相分析。

令 $$\dot{U}_{AN}=\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ\ \text{V}=220\angle 0^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_A=\frac{\dot{U}_{AN}}{R+j\omega(L-M)}=\frac{220\angle 0^\circ}{30+j314\times(0.29-0.12)}$$（工频 $f=50\text{Hz},\omega=314\text{rad/s}$）

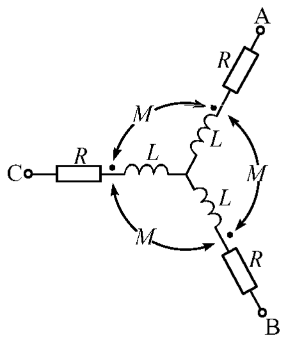
$$=3.593\angle -60.66^\circ\ \text{A}$$

利用对称性

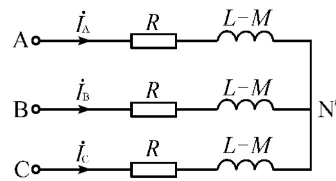
$$\dot{I}_B = 3.593\angle{-180.66°}\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C = 3.593\angle{59.34°}\ \text{A}$$

负载吸收的总功率为　$P = 3I_A^2R = 3\times 3.593^2\times 30 = 1161.78\text{W}$

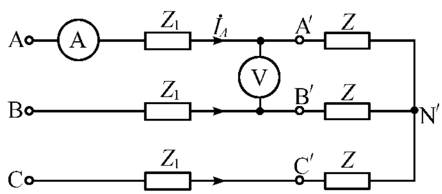


题 11－4 图



题解 11－4 图

○11－5　题 11－5 图所示对称 Y－Y 三相电路中，电压表的读数为 1143.16V，$Z=(15+\text{j}15\sqrt{3})\Omega$，$Z_1=(1+\text{j}2)\Omega$。求图示电路电流表的读数和线电压 U_{AB}。



题 11－5 图

解　如题 11－5 图所示，可知电压表的读数实际是负载端的线电压。

即
$$U_{A'B'} = 1143.16\text{V},\quad U_{A'N'} = \frac{1}{\sqrt{3}}U_{A'B'} = 660\text{V}$$

则　$I_A = \dfrac{U_{A'N'}}{|Z|} = \dfrac{660}{30} = 22\text{A}$，即为电流表的读数。

又
$$\dot{U}_{AN} = \dot{I}_A(Z_1+Z),\quad \dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\dot{U}_{AN}\angle{30°}$$

所以
$$U_{AB} = \sqrt{3}I_A|Z_1+Z|$$

又
$$|Z_1+Z| = |1+\text{j}2+15+\text{j}15\sqrt{3}| = 32.232\Omega$$

从而
$$U_{AB} = \sqrt{3}\times 22\times 32.232 = 1228.2\text{V}$$

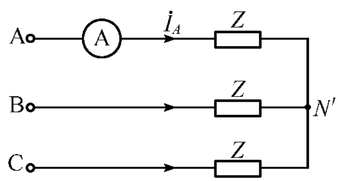
○11－6　题 11－6 图所示为对称的 Y－Y 三相电路，电源相电压为 220V，负载阻抗 $Z=(30+\text{j}20)\Omega$。求：

(1)图中电流表的读数；

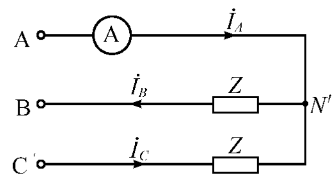
(2)三相负载吸收的功率；

(3)如果 A 的负载阻抗等于零(其他不变)，再求(1)、(2)；

(4)如果 A 相负载开路，再求(1)、(2)。



题 11－6 图



题解 11－6 图(a)

解 (1)令 $$\dot{U}_{AN}=220\angle 0°\ \text{V}$$

则 $$\dot{I}_A=\frac{\dot{U}_{AN}}{Z}=\frac{220\angle 0°}{30+\mathrm{j}20}=6.1\angle -33.69°\ \text{A}$$

即电流表的读数为 6.1A。

(2)三相负载吸收的功率为 $P=3I_A^2R=3\times 6.1^2\times 30=3349\text{W}$

(3)如果 A 相的负载阻抗为零，则 $U'_{AN'}=0$，即 A 与 N′等电位，如题解 11－6 图(a)所示。

则 $\dot{U}_{BN'}=\dot{U}_{BA}$ 即 $\dot{U}_{N'B}=\dot{U}_{AB}=\sqrt{3}\dot{U}_{AN}\angle 30°=380\angle 30°\ \text{V}$

$\dot{U}_{CN'}=\dot{U}_{CA}$ 即 $\dot{U}_{CN'}=\dot{U}_{AB}\angle 120°=380\angle 150°\ \text{V}$

$$\dot{I}_B=\frac{\dot{U}_{N'B}}{Z}=\frac{380\angle 30°}{30+\mathrm{j}20}=10.54\angle -3.69°\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_{CA}}{Z}=10.54\angle 116.31°\ \text{A}$$

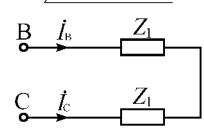
$$\dot{I}_A=\dot{I}_B-\dot{I}_C=10.54\angle -3.69°-10.54\angle 116.31°=18.26\angle -33.7°\ \text{A}$$

即电流表的读数为 18.26A。

此时，三相负载吸收的功率变为

$P=I_B^2R+I_C^2R=2I_B^2R=2\times 10.54^2\times 30$

$=6665.5\text{W}\ (I_B=I_C)$



图解 11－6 图(b)

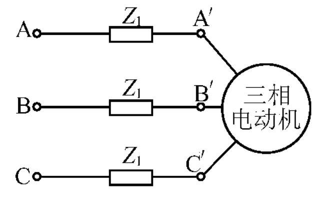
(4)如果 A 相负载开路，则变为单相电路，如题解 11－6 图(b)所示。此时电流表读数为零。

$$\dot{U}_{BC}=\dot{U}_{AB}\angle -120°=\sqrt{3}\dot{U}_{AN}\angle 30°\cdot\angle -120°=380\angle -90°\ \text{V}$$

$$\dot{I}_B=-\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_{BC}}{2Z}=\frac{380\angle -90°}{2(30+\mathrm{j}20)}=5.27\angle -123.69°\ \text{A}$$

三相负载吸收的功率为 $P=2I_B^2R=2\times5.27^2\times30=1666.4\text{W}$

○11－7　题 11－7 图所示对称三相电路中，$U_{A'B'}=380\text{V}$，三相电动机吸收的功率为 1.4kW 其功率因数 $\lambda=0.866$（滞后），$z=-\text{j}55\Omega$ 。求 U_{AB} 和电源端的功率因数 λ'。



题 11－7 图

解　将三相电动机看做三相感性负载，其等效电路为如题解 11－7 图(a)所示。

题解 11－7 图(a)为三相对称电路，负载端 Y 连接，可作一相计算(以 A 相为例)，如题解 11－7 图(b)所示。

令 $$\dot{U}_{A'N'}=\frac{380}{\sqrt{3}}\angle0^\circ=220\angle0^\circ\ \text{V}$$

由已知条件知 $$P=1.4\text{kW}$$

又 $$P=3U_{A'N}I_A\cos\varphi_Z$$

得 $$I_A=\frac{P}{3U_{A'N}\cos\varphi_Z}=\frac{1.4\times10^3}{3\times220\times0.866}=2.45\text{A}$$

又知 $$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=\arccos0.866=30^\circ$$

得 $$\varphi_i=-30^\circ$$

所以 $$\dot{I}_A=2.45\angle-30^\circ\ \text{A}$$

由题解 11－7 图(b)知

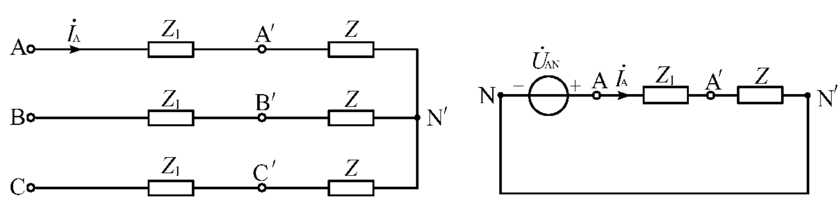
$$\dot{U}_{AN}=\dot{I}_A(Z_1+Z)=\dot{I}_AZ_1+\dot{U}_{A'N'}=2.45\angle-30^\circ\times(-\text{j}55)+220\angle0^\circ$$
$$=192.13\angle-37.4^\circ\ \text{V}$$

则 $$\dot{U}_{AB}=\sqrt{3}\dot{U}_{AN}\angle30^\circ=332.78\angle-7.4^\circ\ \text{V}$$

电源端的功率因数为

$\lambda'=\cos[-37.4^\circ-(-30^\circ)]=\cos(-7.4^\circ)=0.9917(\varphi_u=-37.4^\circ,\varphi_i=-30^\circ)$

本题中感性阻抗 $\lambda=0.866$，若为滞后，那么电流应超前电压 7.4°。



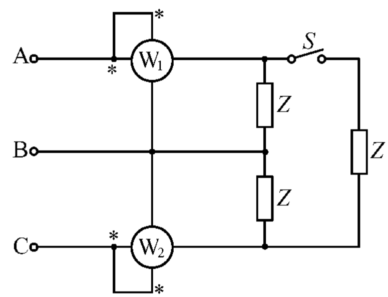
(a)　　　　(b)

题解 11－7 图

○11－8　题 11－8 图所示对称的 Y－△三相电路，$U_{AB}=380\text{V}$，$Z=(27.5+\text{j}47.64)\Omega$。求：(1)图中功率表的读数及其代数和有无意义？(2)若开关 S 打开，再

求(1)。

解 (1)
$$P_1=\mathrm{Re}[\dot{U}_{AB}\overset{*}{\dot{I}}_A]$$
$$P_2=\mathrm{Re}[\dot{U}_{CB}\overset{*}{\dot{I}}_C]$$
$$P_1+P_2=\mathrm{Re}[\dot{U}_{AB}\overset{*}{\dot{I}}_A+\dot{U}_{CB}\overset{*}{\dot{I}}_C]$$
$$=\mathrm{Re}[(\dot{U}_A-\dot{U}_B)\overset{*}{\dot{I}}_A+(\dot{U}_C-\dot{U}_B)\overset{*}{\dot{I}}_C]$$
$$=\mathrm{Re}[\dot{U}_A\overset{*}{\dot{I}}_A-\dot{U}_B(\overset{*}{\dot{I}}_A+\overset{*}{\dot{I}}_C)+\dot{U}_C\overset{*}{\dot{I}}_C]$$



题 11－8 图

因为 $\dot{I}_A+\dot{I}_B+\dot{I}_C=0$

所以 $P_1+P_2=\mathrm{Re}[\dot{U}_A\overset{*}{\dot{I}}_A+\dot{U}_B\overset{*}{\dot{I}}_B+\dot{U}_C\overset{*}{\dot{I}}_C]$
$=P$

可以看出，P_1 和 P_2 的读数没有什么意义，但 P_1 和 P_2 的代数和代表了三相电路负载吸收的总功率，这就是二瓦计法。

$P_1=\mathrm{Re}[\dot{U}_{AB}\overset{*}{\dot{I}}_A]=U_{AB}I_A\cos(\varphi_{uAB}-\varphi_{iA})$
$=U_1I_1\cos(\varphi_{uA}+30°-\varphi_{iA})=U_1I_1\cos(\varphi_Z+30°)$

同理，
$$P_2=U_1I_1\cos(\varphi_Z-30°)$$

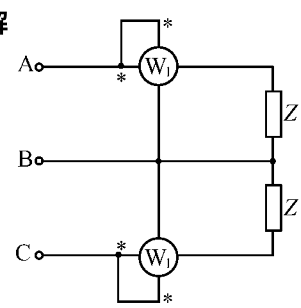
其中
$$U_1=380\mathrm{V},\quad Z=(27.5+\mathrm{j}47.64)\Omega=55.0\angle 60°\ \Omega$$
$$\varphi_Z=\arctan\frac{47.64}{27.5}=60°,\quad I_1=\sqrt{3}I_{AB}=\sqrt{3}\times\frac{380}{|Z|}=11.967\mathrm{A}$$

所以两功率表的读数为
$$W_1=P_1=U_1I_1\cos(\varphi_Z+30°)=0$$
$$W_2=P_2=U_1I_1\cos(\varphi_Z-30°)=380\times 11.967\cos(60°-30°)=3937.558\mathrm{W}$$

负载吸收的总功率为 $P=P_1+P_2=3937.558\mathrm{W}$

(2)开关 S 打开时，电路变为不对称三相电路如题解 11－8 图所示，但电源端仍为对称三相电源。

$$\dot{U}_{AB}=380\angle 30°\ \mathrm{V}$$
$$\dot{U}_{CB}=380\angle 90°\ \mathrm{V}$$
$$\dot{I}_A=\dot{I}_{AB}=\frac{\dot{U}_{AB}}{Z}=6.91\angle -30°\ \mathrm{A}$$
$$\dot{I}_C=\dot{I}_{CB}=\frac{\dot{U}_{CB}}{Z}=6.91\angle 30°\ \mathrm{A}$$



题解 11－8 图

此时，两功率表的读数为

$$W_1=P_1=\mathrm{Re}(\dot{U}_{AB}\overset{*}{I}_A)=\mathrm{Re}[380\angle 30^\circ\times 6.91\angle 30^\circ]$$
$$=380\times 6.91\cos 60^\circ=1312.9\mathrm{W}$$
$$W_2=P_2=\mathrm{Re}(\dot{U}_{CB}\overset{*}{I}_C)=\mathrm{Re}[380\angle 90^\circ\times 6.91\angle -30^\circ]$$
$$=380\times 6.91\cos 60^\circ=1312.9\mathrm{W}$$

所以，负载所吸收的总功率为 $P_1=P_1+P_2=2625.8\mathrm{W}$

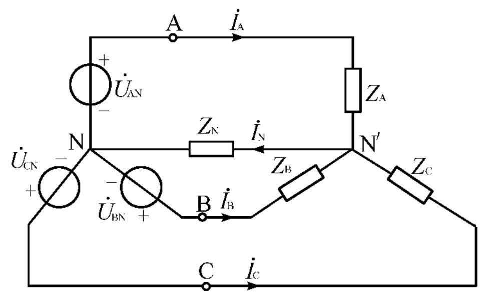
◎11－9　**已知不对称三相四线制电路中的端线阻抗为零，对称电源端的线电压** $U_1=380\mathrm{V}$，**不对称的星形连接负载分别是** $Z_A=(3+j2)\Omega$，$Z_B=(4+j4)\Omega$，$Z_C=(2+j1)\Omega$。**试求**：

(1)**当中线阻抗** $Z_N=(4+j3)\Omega$ **时的中点电压、线电流和负载吸收的总功率**；

(2)**当** $Z_N=0$ **且** A **相开路时的线电流。如果无中线（即** $Z_N=\infty$**）又会怎样**？

分析　**列写结点电压方程，进行求解即可。**

解　**如题解** 11－9 **图为不对称三相四线制电路。**



题解 11－9 **图**

(1)**设**
$$\dot{U}_{AN}=\frac{U_1}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

则
$$\dot{U}_{BN}=220\angle -120^\circ\ \mathrm{V},\quad \dot{U}_{CN}=220\angle 120^\circ\ \mathrm{V}$$

列结点电压方程为
$$\left(\frac{1}{Z_A}+\frac{1}{Z_B}+\frac{1}{Z_C}+\frac{1}{Z_N}\right)\dot{U}_{N'N}=\frac{\dot{U}_{AN}}{Z_A}+\frac{\dot{U}_{BN}}{Z_B}+\frac{\dot{U}_{CN}}{Z_C}$$

代入已知条件，得
$$\dot{U}_{N'N}=50.09\angle 115.52^\circ\ \mathrm{V}$$

从而有
$$\dot{I}_A=\frac{\dot{U}_{AN}-\dot{U}_{N'N}}{Z_A}=\frac{220\angle 0^\circ-50.09\angle 115.52^\circ}{3+j2}=68.17\angle -44.29^\circ\ \mathrm{A}$$
$$\dot{I}_B=\frac{\dot{U}_{BN}-\dot{U}_{N'N}}{Z_B}=\frac{220\angle -120^\circ-50.09\angle 115.52^\circ}{4+j4}=44.51\angle 115.52^\circ\ \mathrm{A}$$
$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_{CN}-\dot{U}_{N'N}}{Z_C}=\frac{220\angle 120^\circ-50.09\angle 115.52^\circ}{2+j1}=76.07\angle 94.76^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{N}=\frac{\dot{U}_{N'N}}{Z_{N}}=\frac{50.09\angle 115.52^\circ}{4+j3}=10.02\angle 78.65^\circ\ \text{A}$$

负载吸收的总功率为

$$P=I_A^2R_A+I_B^2R_B+I_C^2R_C=68.17^2\times 3+44.51^2\times 4+76.07^2\times 2=33.439\text{kW}$$

(2)**当** $Z_N=0$ **且** A **相开路时,有** $\dot{U}_{N'N}=0,\dot{I}_A=0$,B **相和** C **相不受影响。**

$$\dot{I}_{B}=\frac{\dot{U}_{BN}}{Z_{B}}=\frac{220\angle -120^\circ}{4+j4}=38.89\angle -165^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{C}=\frac{\dot{U}_{CN}}{Z_{C}}=\frac{220\angle 120^\circ}{2+j1}=98.39\angle 93.43^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{N}=\dot{I}_{B}+\dot{I}_{C}=38.89\angle -165^\circ+98.39\angle 93.43^\circ=98.28\angle 116.43^\circ\ \text{A}$$

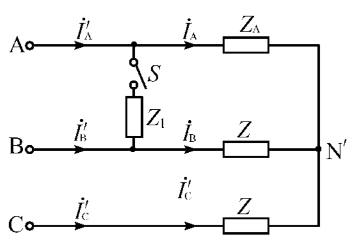
如果无中线,且 A **相开路时,有** $\dot{I}_N=0,\dot{I}_A=0$,**则**

$$\dot{I}_{B}=-\dot{I}_{C}=\frac{\dot{U}_{BN}-\dot{U}_{CN}}{Z_B+Z_C}=\frac{380\angle -90^\circ}{6+j5}=48.66\angle -129.81^\circ\ \text{A}$$

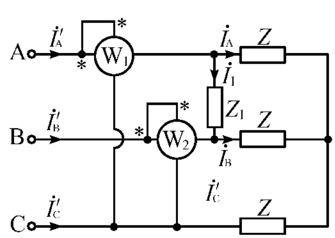
○11-10 **题** 11-10 **图所示电路中,对称三相电源端的线电压** $U_1=380\text{V}$,$Z=(50+j50)\Omega$,$Z_1=(100+j100)\Omega$,Z_A **为** R、L、C **串联组成** $R=50\Omega$,$X_L=314\Omega$,$X_C=-264\Omega$。**试求:**

(1)**开关** S **打开时的线电流;**

(2)**若用二瓦计法测量电源端三相功率,试画出接线图,并求两个功率表的读数**(S **闭合时**)。



题 11-10 **图**



题解 11-10 **图**

解 (1)**开关** S **打开时,各电流参考方向如题** 11-10 **图所示。**

$$Z_A=50+j(314-264)=(50+j50)\Omega=Z$$

可见 S **打开时,为对称三相电路,可归为一相计算。**

令 $$\dot{U}_{AN}=\frac{1}{\sqrt{3}}U_1\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ$$

则 $$\dot{I}'_{A}=\dot{I}_{A}=\frac{220\angle 0^\circ}{50+j50}=3.11\angle -45^\circ\ \text{A}$$

根据对称性：

$$\dot I'_{\rm B}=\dot I_{\rm B}=3.11\angle -165^\circ\ {\rm A}$$

$$\dot I'_{\rm C}=3.11\angle 75^\circ\ {\rm A}$$

(2)开关 S 闭合时，用二瓦计法测量电源端三相功率的接线图如题解 11－10 图所示。

其中 $W_1=P_1={\rm Re}(\dot U_{\rm AC}\overset{*}{\dot I'_{\rm A}})=U_{\rm AC}I'_A\cos(\varphi_{\dot U_{\rm AC}}-\varphi_{\dot I'_{\rm A}})$

$W_2=P_2={\rm Re}(\dot U_{\rm BC}\overset{*}{\dot I'_{\rm B}})=U_{\rm BC}I'_{\rm B}\cos(\varphi_{\dot U_{\rm BC}}-\varphi_{\dot I'_{\rm B}})$

开关 S 闭合后，负载端不对称　$I'_{\rm A}=\dot I_1+\dot I_{\rm A}$，　$\dot I'_{\rm B}=-\dot I_1+\dot I_{\rm B}$

又　$\dot U_{\rm AB}=380\angle 30^\circ\ {\rm V}(\dot U_{\rm AN}=220\angle 0^\circ\ {\rm V})$

$\dot U_{\rm BC}=380\angle -90^\circ\ {\rm V}$

$\dot U_{\rm AC}=-\dot U_{\rm CA}=380\angle -30^\circ\ {\rm V}$

$\dot I_1=\dfrac{\dot U_{\rm AB}}{Z_1}=\dfrac{380\angle 30^\circ}{100+{\rm j}100}=2.687\angle -15^\circ\ {\rm A}$

$\dot I_{\rm A}=3.11\angle -45^\circ\ {\rm A}$

$\dot I_{\rm B}=3.11\angle -165^\circ\ {\rm A}$

从而　$\dot I'_{\rm A}=\dot I_1+\dot I_{\rm A}=2.687\angle -15^\circ+3.11\angle -45^\circ=5.60\angle -31.12^\circ\ {\rm A}$

$\dot I'_{\rm B}=-\dot I_1+\dot I_{\rm B}=-2.687\angle -15^\circ+3.11\angle -165^\circ=5.60\angle -178.87^\circ\ {\rm A}$

所以　$W_1=U_{\rm AC}I'_{\rm A}\cos(\varphi_{\dot U_{\rm AC}}-\varphi_{\dot I'_{\rm A}})=380\times 5.60\cos[-30^\circ-(-31.12^\circ)]$

$=380\times 5.60\cos 1.12^\circ=2127.6{\rm W}$

$W_2=U_{\rm BC}I'_B\cos(\varphi_{\dot U_{\rm BC}}-\varphi_{\dot I'_{\rm B}})=380\times 5.60\cos[-90^\circ-(-178.87^\circ)]$

$=380\times 5.60\cos 88.87^\circ=41.97{\rm W}$

○11－11　略

○11－12　已知对称三相电路的负载吸收的功率为 2.4kW，功率因数为 0.4(感性)。试求：

(1)两个功率表的读数(用二瓦计法测量功率时)；

(2)怎样才能使负载端的功率因数提高到 0.8？并再求出两个功率表的读数。

解　(1)用二瓦计法测量功率时的接线图见课本 P257，且有

$$P_1=U_1I_1\cos(\varphi-30^\circ),\quad P_2=U_1I_1\cos(\varphi+30^\circ)$$

由题意，知　$\varphi=\arccos 0.4=66.422^\circ$(感性)

由 $P=\sqrt{3}U_1I_1\cos\varphi=2.4\times 1000{\rm W}$ 可得

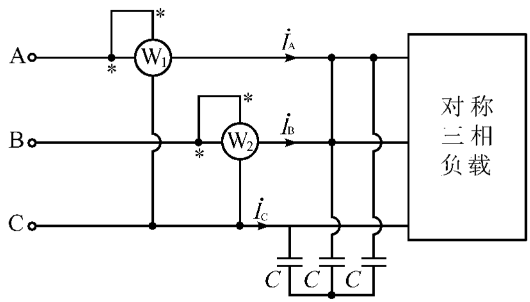
$$U_1I_1=\frac{P}{\sqrt{3}\cos\varphi}=\frac{2.4\times1000}{\sqrt{3}\times0.4}=3.464\times10^3$$

所以，两功率表的读数为

$W_1=P_1=U_1I_1\cos(\varphi-30°)=3.464\times10^3\cos(66.422°-30°)=2.787\text{kW}$

$W_2=P_2=U_1I_1\cos(\varphi+30°)=3.464\times10^3\cos(66.422°+30°)=-0.387\text{kW}$

(2)欲提高三相负载的功率因数，可在负载端并联对称三相星形连接的电容器组以补偿无功功率(原理同单相电路分析)，如题解 11—12 图所示。



题解 11—12 图

并联电容前，　　$\varphi=\arccos0.4=66.422°$

并联电容后，　　$\varphi'=\arccos0.8=36.87°$

三相负载的总有功功率 $P=2.4\times10^3$ W 在并联电容前后保持不变。

设并联电容后两功率表的读数分别为 P'_1 和 P'_2，则有

$$P'_1+P'_2=2.4\times10^3 \quad ①$$

$$\frac{P'_1}{P'_2}=\frac{\cos(\varphi'-30°)}{\cos(\varphi'+30°)}=2.53 \quad ②$$

联立式①式②，得　$W_2=P'_2=\dfrac{2.4\times10^3}{1+2.53}=0.68\text{kW}$

$$W_1=P'_1=2.4-0.68=1.72\text{kW}$$

并联电容所补偿的无功功率为

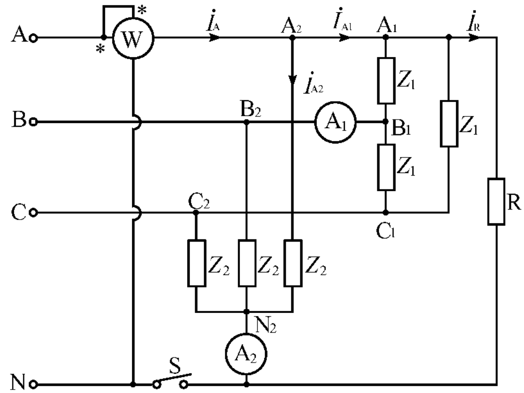
$$Q_C=P(\tan\varphi'-\tan\varphi)=2.4(\tan36.87°-\tan66.422°)=-3.699\text{kvar}$$

●11—13　题 11—13 图所示三相(四线)制电路中，$Z_1=-\text{j}10\Omega$，$Z_2=(5+\text{j}12\Omega)$，对称三相电源的线电压为 380V，图中电阻 R 吸收的功率为 24 200W(S 闭合时)。试求：

(1)开关 S 闭合时图中各表的读数。根据功率表的读数能否求得整个负载吸收的总功率；

(2)开关 S 打开时图中各表的读数有无变化，功率表的读数有无意义？

分析　根据线电压、相电压关系及功率公式求解即可。



题 11－13 图

解　(1)开关 S 闭合时，三角形连接的负载端 A_1，B_1，C_1 和星形连接的负载端 A_2，B_2，C_2 处的线电压均为电源端的线电压。

从电路图中可知，电流表 A_1 的读数为三角形连接的线电流；电流表 A_2 的读数为星形连接中的线电流，因星形连接为对称电路，所以 $A_2=0$。

令
$$\dot U_{AN}=\frac{U_1}{\sqrt3}\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ\ \text{V}$$

则
$$\dot U_{AB}=380\angle 30^\circ\ \text{V}$$

所以
$$\dot I_{A1B1}=\frac{\dot U_{AB}}{Z_1}=\frac{380\angle 30^\circ}{-\text{j}10}=38\angle 120^\circ\ \text{A}$$

$$\dot I_{A1}=\sqrt3\dot I_{A1B1}\angle -30^\circ=65.82\angle 90^\circ\ \text{A}$$

利用对称性：$\dot I_{B1}=65.82\angle -30^\circ$ A，即 $A_1=65.82\text{A}$

又　$$\dot I_{A2}=\frac{\dot U_{AN}}{Z_2}=\frac{220\angle 0^\circ}{5+\text{j}12}=16.92\angle -67.38^\circ\ \text{A}$$

$$\dot I_R=\frac{\dot U_{AN}}{R}=\frac{P_R}{U_{AN}}\angle 0^\circ=\frac{24200}{220}\angle 0^\circ=110\angle 0^\circ\ \text{A}$$

所以　$$\begin{aligned}\dot I_A&=\dot I_{A1}+\dot I_{A2}+\dot I_R\\&=65.82\angle 90^\circ+16.92\angle -67.38^\circ+110\angle 0^\circ=126.86\angle 23.31^\circ\ \text{A}\end{aligned}$$

功率表的读数为 $$\begin{aligned}W&=P_A=U_{AN}I_A\cos(\varphi_{\dot U_{AN}}-\varphi_{\dot I_A})\\&=220\times126.86\cos(0^\circ-23.31^\circ)=25.63\text{kW}\end{aligned}$$

从电路图中知
$$P_A=\frac13P_Y+\frac13P_\Delta+P_R \qquad ①$$

而整个负载吸收的功率为　$P=P_Y+P_\Delta+P_R$　②

由此可见,根据功率表的读数 P_A 的值可求得整个负载吸收的总功率。

由式①得　$P_Y+P_\Delta=3(P_A-P_R)$

代入式②得　$P=3(P_A-P_R)+P_R=3P_A-2P_R$

$=3\times25.63-2\times24.2=28.49\text{kW}$

(2)开关 S 打开时,N 点与 N_2 点无中线,可见阻抗 Z_1 的三角形连接的对称电路不受影响,所以Ⓐ₁的读数不变仍为 65.82A;而阻抗为 Z_2 构成的星形连接由于在 A 相处并联了电阻 R,从而构成不对称三相星形连接,Ⓐ₂的读数发生变化,而不为零。即Ⓐ₂的值等于 I_R,如题解 11－13 图所示。

由题解 11－13 图知

$$\dot{U}_{N_2N}=\frac{(\dot{U}_{AN}+\dot{U}_{BN}+\dot{U}_{CN})/Z_2+\dot{U}_{AN}/R}{\dfrac{3}{Z_2}+\dfrac{1}{R}}=\frac{220\angle0^\circ/2}{\dfrac{3}{5+\text{j}12}+\dfrac{1}{2}}$$

$$=175.72\angle19.89^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_R=\frac{\dot{U}_{AN}-\dot{U}_{N2N}}{R}=\frac{220\angle0^\circ-175.72\angle19.89^\circ}{2}$$

$$=40.54\angle-47.51^\circ\ \text{A}$$

即　$I_{A2}=40.54\text{A}$

又　$$\dot{I}_{A2}=\frac{\dot{U}_{AN}-\dot{U}_{N_2N}}{Z_2}=\frac{220\angle0^\circ-175.72\angle19.89^\circ}{5+\text{j}12}$$

$$=6.24\angle-114.89^\circ\ \text{A}$$

由题 11－13 图知,

$$\dot{I}_A=\dot{I}_{A1}+\dot{I}_{A2}+\dot{I}_R$$

$$=65.82\angle90^\circ+6.24\angle-114.89^\circ+40.54\angle-47.51^\circ=39.10\angle50.72^\circ\ \text{A}$$

所以,功率表的读数为

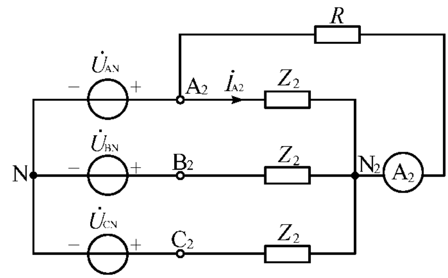
$$W=U_{AN}I_A\cos(\varphi_{\dot{U}_{AN}}-\varphi_{\dot{I}_A})=220\times39.10\cos(0-50.72^\circ)=5.45\text{kW}$$

从 W 的计算过程可知,功率表的读数不是对称三相电路中的 A 相负载的有功功率,而只是 A 相电源的功率。

小结　功率表的读数非负载功率,而是电源功率。

●11－14　题 11－14 图所示的对称三相电路,线电压为 380V,$R=200\Omega$,负载吸收的无功功率为 $1520\sqrt{3}$var。试求:(1)各线电流;(2)电源发出的复功率。

分析　根据线电压、线电流关系及复功率定义求解即可。



题解 11－13 图

解　令　$\dot{U}_{AN}=\frac{U_1}{\sqrt{3}}\angle 0°=220\angle 0°\ \text{V}$

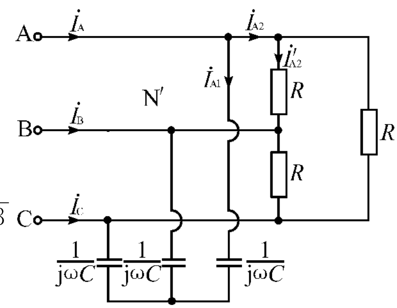
则　$\dot{U}_{AB}=380\angle 30°\ \text{V}$

$$\dot{I}'_{A2}=\frac{\dot{U}_{AB}}{R}=\frac{380}{200}\angle 30°=1.9\angle 30°\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{A2}=\sqrt{3}\dot{I}'_{A2}\angle -30°=3.29\angle 0°\ \text{A}$$

又已知　$Q=\sqrt{3}U_1 I_{A1}\sin(-90°)=-1520\sqrt{3}$ var

所以　$I_{A1}=\frac{-1520\sqrt{3}}{\sqrt{3}U_1\sin(-90°)}=\frac{-1520\sqrt{3}}{-\sqrt{3}\times 380}=$ 4A



题 11－14 图

$$\dot{I}_{A1}=j\omega \dot{C}U_{AN}=4\angle 90°\ \text{A}$$

因此　$\dot{I}_A=\dot{I}_{A1}+\dot{I}_{A2}=4\angle 90°+3.29\angle 0°=5.18\angle 50.56°\ \text{A}$

利用对称性，知　$\dot{I}_B=5.18\angle -69.44°\ \text{A}$，$\dot{I}_C=5.18\angle 170.56°\ \text{A}$

(2)**由于是对称三相电路，所以三相电源发出的复功率为**

$$\overline{S}=3\overline{S}_A=3(\dot{U}_{AN}\overset{*}{I}_A)=3\times 220\angle 0°\times 5.18\angle -50.56°$$

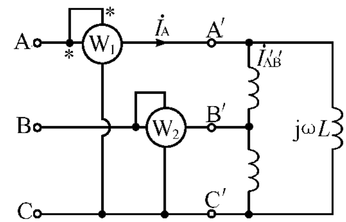
$$=3418.8\angle -50.56°\ \text{V}\cdot\text{A}=(2171.9-\text{j}2640.3)\text{V}\cdot\text{A}$$

小结　**对于对称三相电路，三相电源发出的复功率** $\overline{S}$ **为各电源发出的复功率的** 3 **倍。**

○11－15　**题** 11－15 **图所示为对称三相电路，线电压为** 380V，**相电流** $I_{A'B'}=2\text{A}$。**求图中功率表的读数。**

解　设　$\dot{U}_{AB}=380\angle 0°\ \text{V}=\dot{U}_{A'B'}$

则　$\dot{U}_{AC}=-\dot{U}_{CA}=380\angle -60°\ \text{V}$



题 11－15 图

又 $$\dot{I}_{A'B'}=-j\frac{\dot{U}_{A'B'}}{\omega L}$$

所以 $$\dot{I}_{A'B'}=2\angle -90^\circ\ \text{A}$$

因此，$\dot{I}_A=\sqrt{3}\dot{I}_{A'B'}\angle -30^\circ=3.464\angle -120^\circ\ \text{A}$

从而，$W_1=\mathrm{Re}[\dot{U}_{AC}\overset{*}{I}_A]=380\times 3.464\cos(-60^\circ+120^\circ)=658.2\text{W}$

又 $W_1+W_2=0$（对称负载为纯电感，不吸收有功功率。）

所以 $$W_2=-658.2\text{W}$$

○11－16　$L=110.32\text{mH}$，　$C=91{,}94\mu\text{F}$

第十二章

非正弦周期电流电路和信号的频谱

学习要求

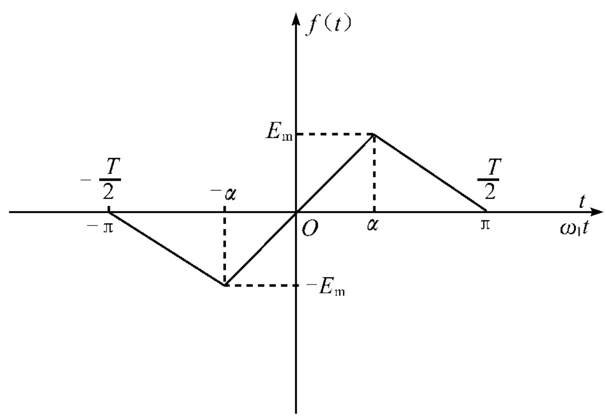
1. 知道什么叫非正弦周期信号，会求非正弦周期信号的周期 T、频率 f、角频率 ω。
2. 了解傅里叶级数的意义，能将简单常用的非正弦周期信号展开成三角函数形式或指数形式的傅里叶级数；知道什么叫谐波分析。
3. 了解非正弦周期信号有效值与平均值的定义，并会求 X 非正弦周期电压与电流的有效值。
4. 深刻理解非正弦周期电流电路中平均功率的定义并会求解。
5. 会根据叠加定理对非正弦周期电流稳态电路进行分析计算，包括电压、电流与平均功率的计算。
6. 知道什么叫线性失真（幅度失真，相位失真）及线性失真产生的原因。
7. 了解对称三相电路中高次谐波的基本概念；了解非周期信号的正、反傅里叶变换；知道什么叫信号的频谱及频谱的意义。

知识网络图

- 非正弦周期电流电路和信号的频谱
  - 非正弦周期信号
    - 周期函数分解为傅里叶级数
    - 有效值
    - 平均值
  - 非正弦周期信号电路
    - 电路的分析计算
      - 谐波分析法
      - 对称三相非正弦稳态电路
    - 平均功率问题
    - 傅里叶积分

课后习题全解

○ 12－1　**求题 12－1 图所示波形的傅里叶级数的系数。**



题 12－1 图

解　$f(t)$ **在第一个周期**($\omega_1 T = 2\pi$) **内的表达式为**

$$f(t)=\begin{cases} -\dfrac{E_m}{\pi-\alpha}(\omega_1 t+\pi) & -\pi \leqslant \omega_1 t < -\alpha \\ \dfrac{E_m}{\alpha}(\omega_1 t) & -\alpha \leqslant \omega_1 t < \alpha \\ -\dfrac{E_m}{\pi-\alpha}(\omega_1 t-\pi) & \alpha \leqslant \omega_1 t \leqslant \pi \end{cases}$$

显然,$f(t)$ **为奇函数。**$f(t)$ **展开为傅里叶级数为**

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega_1 t)+b_k\sin(k\omega_1 t)]$$

由于 $f(t)$ 为奇函数。所以，有 $a_0=0, a_k=0$。而

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\left[\frac{E_m}{\alpha}(\omega_1 t)\sin(k\omega_1 t)\right]\mathrm{d}(\omega_1 t)+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi}\frac{E_m}{\alpha-\pi}(\omega_1 t-\pi)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{E_m}{\alpha}\left[-\frac{\omega_1 t}{k}\cos(k\omega_1 t)+\frac{1}{k^2}\sin(k\omega_1 t)\right]\Bigg|_0^{\alpha}\right.$$

$$\left.+\frac{E_m}{\alpha-\pi}\left[\frac{\pi}{k}\cos(k\omega_1 t)-\frac{\omega_1 t}{k}\cos(k\omega_1 t)+\frac{1}{k^2}\sin(k\omega_1 t)\right]\Bigg|_{\alpha}^{\pi}\right\}$$

$$=\frac{2E_m}{k^2\alpha(\pi-\alpha)}\sin(k\alpha)\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

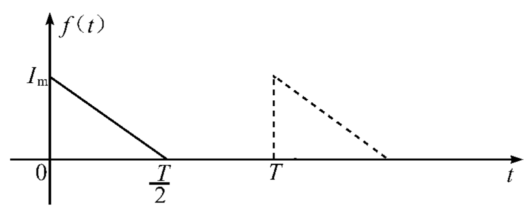
○ 12－2　已知某信号半周期的波形如题 12－2 图所示。试在下列各不同条件下画出整个周期的波形：

(1)$a_0=0$；

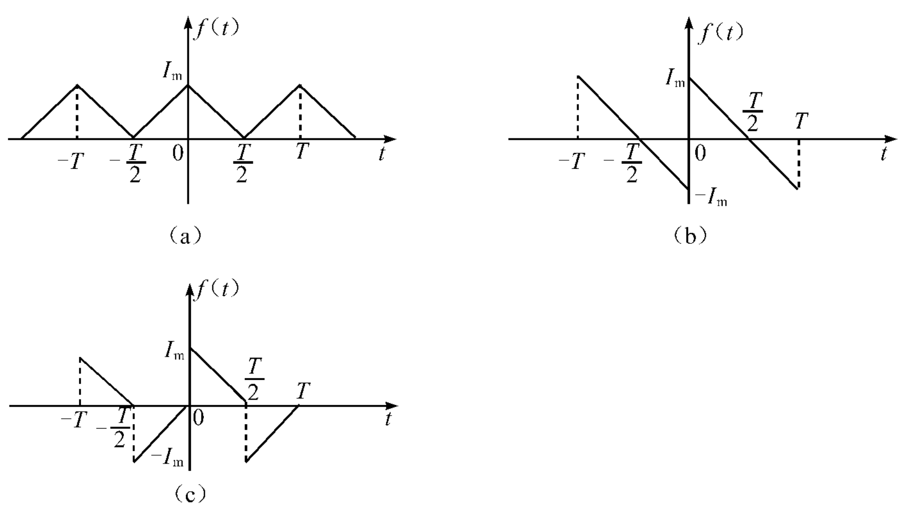
(2) 对所有 k，$b_k=0$；

(3) 对所有 k，$a_k=0$；

(4)a_k 和 b_k 为零，当 k 为偶数时。



题 12－2 图



题解 12－2 图

解 (1) 当 $a_0 = 0$ 时,在后半个周期上,只要画出 $f(t)$ 的负波形与横轴(t 轴)所围面积与已给出的前半个周期波形所围面积相等即可。题解 12－2 图中的(b),(c) 图均满足此条件。

(2) 对所有 $k, b_k = 0, f(t)$ 应为偶函数,即有 $f(t) = f(-t)$,波形如题解 12－2 图(a) 所示,波形对称于纵轴。

(3) 对所有 $k, a_k = 0, f(t)$ 应为奇函数,即 $f(t) = -f(-t)$,波形如题解 12－2 图(b) 所示,波形对称于原点。

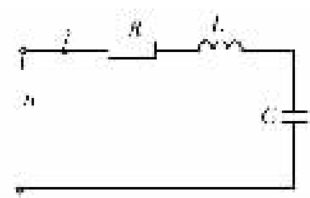
(4) a_k 和 b_k 为零,当 k 为偶数时,此时,$f(t)$ 称为奇谐波函数,即 a_k 和 b_k 只出现在 k 为奇数时,函数 $f(t)$ 满足镜像对称性质,即有 $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$,波形如题解 12－2 图(c) 所示。

◎12－3 一个 RLC 串联电路,其 $R = 11\Omega, L = 0.015H, C = 70\mu F$ 外加电压为

$$u(t) = [11 + 141.4\cos(1000t) - 35.4\sin(2000t)]\text{V}$$

试求电路中的电流 $i(t)$ 和电路消耗的功率。

分析 根据相量关系,即可求解出 $\dot{I}$,既而可得 $i(t)$,电路消耗的功率为各个功率之和。



题解 12－3 图

解 RLC 串联电路如题解 12－3 图所示,电路中的非正弦周期电压 $u(t)$ 为已知,分别有直流分量、基波和二次谐波分量。可写出电流相量的一般表达式

$$\dot{I}_{(k)} = \frac{\dot{U}_{(k)}}{R + \text{j}(k\omega L - \frac{1}{k\omega C})}$$

其中,$\omega L = 15\Omega, \frac{1}{\omega C} = 14.286\Omega$。

电压分量分别作用产生的电流和功率分量为:

(1) 直流 $U_0 = 11\text{V}$ 作用时,电感 L 为短路,电容 C 为开路,故,$I_0 = 0, P_0 = 0$。

(2) 基波($k = 3$) 作用时,令 $\dot{U}_{(1)} = 100\angle 0^\circ \text{ V}$

$$Z_{(1)} = R + \text{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = (11 + \text{j}0.714)\Omega = 11.023\angle 3.71^\circ \text{ A}$$

故

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{100\angle 0^\circ}{11.023\angle 3.71^\circ} = 9.072\angle -3.71^\circ \text{ A}$$

$$P_{(1)} = I_{(1)}^2 R = 905.28\text{W}$$

(3) 二次谐波($k = 2$) 作用时,令

$$\dot{U}_{(2)}=\frac{35.4}{\sqrt{2}}\angle 90^{\circ}=25.032\angle 90^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$Z_{(2)}=R+\mathrm{j}(2\omega L-\frac{1}{2\omega C})=11+\mathrm{j}(30-\frac{1}{2}\times 14.286)=25.366\angle 64.3^{\circ}\ \Omega$$

故

$$\dot{I}_{(2)}=\frac{\dot{U}_{(2)}}{Z_{(2)}}=\frac{25.032\angle 90^{\circ}}{25.366\angle 64.3^{\circ}}=0.987\angle 25.7^{\circ}\ \mathrm{A}$$

$$P_{(2)}=I_{(2)}^{2}R=(0.987)^{2}\times 11=10.716\mathrm{W}$$

所以，电路中的电流 $i(t)$ 为

$$\begin{aligned}i(t)&=0+\sqrt{2}\times 9.072\cos(1000t-3.71^{\circ})+\sqrt{2}\times 0.987\cos(2000t+25.7^{\circ})\\&=12.83\cos(1000t-3.71^{\circ})-1.396\sin(2000t-64.3^{\circ})\mathrm{A}\end{aligned}$$

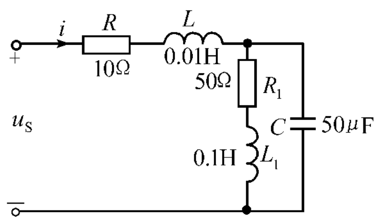
电路消耗的功率

$$P=P_{0}+P_{(1)}+P_{(2)}=905.28+10.716=916\mathrm{W}$$

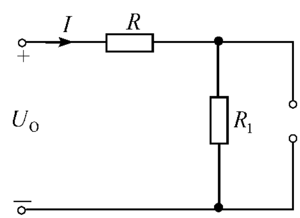
○ 12－4　电路如题 12－4 图所示，电源电压为

$$u_{\mathrm{S}}(t)=[50+100\sin(314t)-40\cos(628t)+10\sin(942t+20^{\circ})]\mathrm{V}$$

试求电流 $i(t)$ 和电源发出的功率及电源电压和电流的有效值。



题 12－4 图



题解 12－4 图

解　设电流 $i(t)$ 第 k 次谐波的相量为 $\dot{I}_{\mathrm{m}}(k)$（采用振幅相量）。

(1) 当 $k=0$，直流分量 $U_0=50\mathrm{V}$ 作用时，电路如题解 12－4 图所示，有

$$Z_0=R+R_1=60\Omega$$

故

$$I_0=\frac{U_0}{Z_0}=\frac{50}{60}=\frac{5}{6}\mathrm{A}$$

$$P_{\mathrm{S}(0)}=U_0I_0=50\times\frac{5}{6}=41.667\mathrm{W}$$

(2) 当 $k=1$，即 $\omega=\omega_1=314\mathrm{rad/s}$，基波相量 $\dot{U}_{\mathrm{Sm}(1)}=100\angle-90^{\circ}\ \mathrm{V}$ 作用时，有

$$Z_{(1)} = 10 + j3.14 + \frac{1}{j0.0157 + \frac{1}{50 + j31.4}} = 71.267 \angle -19.31^\circ \ \Omega$$

故

$$\dot{I}_{m(1)} = \frac{\dot{U}_{Sm(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{100 \angle -90^\circ}{71.267 \angle -19.31^\circ} = 1.403 \angle -70.69^\circ \ A$$

$$P_{S(1)} = \frac{1}{2}U_{Sm(1)} I_{m(1)} \cos(-19.31^\circ) = \frac{1}{2} \times 100 \times 1.403\cos(19.31^\circ)$$

$$= 66.2W$$

(3) 当 $k=2$，即 $\omega = 2\omega_1 = 628\text{rad/s}$，二次谐振相量 $\dot{U}_{Sm(2)} = -40 \angle 0^\circ$ V 作用时，有

$$Z_{(2)} = 10 + j6.28 + \frac{1}{j0.0314 + \frac{1}{50 + j62.8}} = 42.528 \angle -54.552^\circ \ \Omega$$

故

$$\dot{I}_{m(2)} = \frac{\dot{U}_{Sm(2)}}{Z_{(2)}} = \frac{-40 \angle 0^\circ}{42.528 \angle -54.552^\circ} = 0.941 \angle -125.448^\circ \ A$$

$$P_{S(2)} = \frac{1}{2}U_{Sm(2)} I_{Sm(2)} \cos(-54.552^\circ) = \frac{1}{2} \times 40 \times 0.941 \times \cos(54.552^\circ)$$

$$= 10.915W$$

(4) 当 $k=3$，即 $\omega = 3\omega_1 = 942\text{rad/s}$，三次谐波相量 $\dot{U}_{Sm(3)} = 10 \angle -70^\circ$ V 作用时，有

$$Z_{(3)} = 10 + j9.42 + \frac{1}{j0.0471 + \frac{1}{50 + j94.2}} = 20.552 \angle -51.19^\circ \ \Omega$$

故

$$\dot{I}_{m(3)} = \frac{\dot{U}_{Sm(3)}}{Z_{(3)}} = \frac{10 \angle -70^\circ}{20.552 \angle -51.19^\circ} = 0.487 \angle -18.81^\circ \ A$$

$$P_{S(3)} = \frac{1}{2}U_{Sm(3)} I_{m(3)} \cos(-51.19^\circ) = \frac{1}{2} \times 10 \times 0.487\cos 51.19^\circ = 1.526W$$

所以，电流 $i(t)$ 为

$$i(t) = 0.833 + 1.403\sin(314t + 19.31^\circ) - 0.941\cos(628t + 54.552^\circ) + 0.487\sin(942t + 71.19^\circ)A$$

电源发出的平均功率 P_S 为

$$P_S = P_{S(0)} + P_{S(1)} + P_{S(2)} + P_{S(3)} = 41.667 + 66.2 + 10.915 + 1.526 =$$

120.308W

电源电压有效值

$$U_S=\sqrt{U_0^2+\frac{U_{Sm(1)}^2}{2}+\frac{U_{Sm(2)}^2}{2}+\frac{U_{Sm(3)}^2}{2}}=\sqrt{50^2+\frac{100^2}{2}+\frac{40^2}{2}+\frac{10^2}{2}}$$
$$=91.378V$$

电源电流有效值

$$I=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1.403^2}{2}+\frac{0.941^2}{2}+\frac{0.487^2}{2}}=1.497A$$

○ 12－5　**有效值为** 100V **的正弦电压加在电感** L **两端时，得电流** $I=10A$**，当电压有** 3 **次谐波分量，而有效值仍为** 100V **时，得电流** $I=8A$**。试求这一电压的基波和** 3 **次谐振电压的有效值。**

解　根据题意得，可求得基波时的感抗为

$$|Z_{L1}|=\omega L=\frac{100}{10}=10\Omega$$

故，三次谐波时的感抗为

$$|Z_{L3}|=3\omega L=30\Omega$$

所以，含基波和三次谐波的电压和电流有效值应满足下列关系式

$$U_1^2+U_3^2=100^2$$
$$\left(\frac{U_1}{|Z_{L1}|}\right)^2+\left(\frac{U_3}{|Z_{L3}|}\right)^2=8^2$$

代入参数值并整理得

$$U_1^2+U_3^2=100^2$$
$$9U_1^2+U_3^2=64\times 900$$

解之，得

$$U_1=\sqrt{\frac{64\times 900-100^2}{8}}=77.14V$$
$$U_3=\sqrt{100^2-77.14^2}=63.64V$$

◎12－6　**已知一** RLC **串联电路的端口电压和电流为**

$$u(t)=[100\cos(314t)+50\cos(942t-30^\circ)]V$$
$$i(t)=[10\cos(314t)+1.775\cos(942t+\theta_3)]A$$

试求：(1)R,L,C **的值；**

(2)θ_3 **的值；**

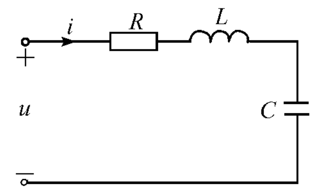
(3) **电路消耗的功率。**

分析　运用相量法求解即可。

解　RLC 串联电路如题解 12－6 图所示，电路中的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 均为已知，分别含有基波和三次谐波分量。

(1) 由于基波的电压和电流同相位，所以，RLC 电路在基波频率下发生串联谐振。故有

$$R=\frac{U_{m1}}{I_{m1}}=\frac{100}{10}=10\Omega$$



题解 12－6 图

且

$$X_{L1}=X_{C1}=X_1$$

即

$$\omega_1 L=\frac{1}{\omega_1 C}=X_1 \qquad (\omega_1=314\text{rad/s})$$

而三次谐波的阻抗为

$$Z_3=R+\mathrm{j}3\omega_1 L-\mathrm{j}\,\frac{1}{3\omega_1 C}=10+\mathrm{j}(3X_1-\frac{1}{3}X_1)=10+\mathrm{j}\,\frac{8}{3}X_1$$

Z_3 的模值为

$$|\,Z_3\,|=\sqrt{10^2+(\frac{8}{3}X_1)^2}=\frac{U_{m3}}{I_{m3}}=\frac{50}{1.755}=28.49\Omega$$

解得 X_1 为

$$X_1=\sqrt{(28.49^2-10^2)\times\frac{9}{64}}=10.004\Omega$$

故

$$L=\frac{X_1}{\omega_1}=\frac{10.004}{314}=31.86\text{mH}$$

$$C=\frac{1}{X_1\omega_1}=\frac{1}{314\times 10.004}=318.34\mu\text{F}$$

(2) 三次谐波时，Z_3 的阻抗角为

$$\varphi_3=\arctan\frac{\frac{8}{3}\times 10.004}{10}=\arctan 2.668=69.45^\circ$$

而

$$\varphi_3=\varphi_{Um3}-\varphi_{Im3}=-30^\circ-\theta_3$$

则

$$\theta_3=-30^\circ-\varphi_3=-99.45^\circ$$

(3) 电路消耗的功率 P 为

$$P=\frac{1}{2}\times 100\times 10+\frac{1}{2}\times 50\times 1.775\cos 69.45^\circ=515.4\text{W}$$

○ 12－7　题 12－7 图所示电路各电源的电压为

$$U_0 = 60\text{V}$$

$$u_1 = [100\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) + 20\sqrt{2}\cos(5\omega_1 t)]\text{V}$$

$$u_2 = 50\sqrt{2}\cos(3\omega_1 t)\text{V}$$

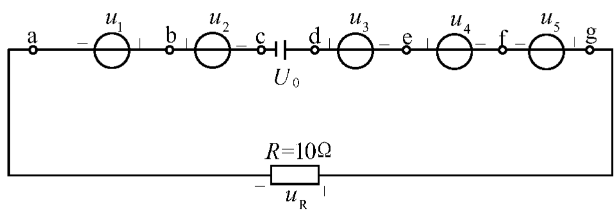
$$u_3 = [30\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) + 20\sqrt{2}\cos(3\omega_1 t)]\text{V}$$

$$u_4 = [80\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) + 10\sqrt{2}\cos(5\omega_1 t)]\text{V}$$

$$u_5 = 10\sqrt{2}\sin(\omega_1 t)\text{V}$$

(1) 试求 U_{ab}、U_{ac}、U_{ad}、U_{ae}、U_{af}；

(2) 如将 U_0 换为电流源 $i_S = 2\sqrt{2}\cos(7\omega_1 t)$，试求电压 U_{ac}、U_{ad}、U_{ae}、U_{ag}（U_{ab} 等为对应电压的有效值）。



题 12－7 图

解　本题各电压含有的各次谐波分量为：恒定分量和 4 个奇次（ω_1，$3\omega_1$，$5\omega_1$ 和 $7\omega_1$）谐波分量，各电压的有效值计算如下：

(1) $U_{ab} = \sqrt{100^2 + 20^2} = 101.98\text{V}$

$$U_{ac} = \sqrt{100^2 + 50^2 + 20^2} = 113.578\text{V}$$

$$U_{ad} = \sqrt{60^2 + 100^2 + 50^2 + 20^2} = 128.45\text{V}$$

$$U_{ae} = \sqrt{60^2 + (100+30)^2 + (50-20)^2 + 20^2} = 147.648\text{V}$$

$$U_{af} = \sqrt{60^2 + (100+30-80)^2 + (50-20)^2 + (20-10)^2} = 84.261\text{V}$$

(2) 设电压 U_R 参考方向如图中所示，当将 U_0 换为电流源 i_S（其方向设为从 c 点指向 d 点）时，有

$$U_R = Ri_S = 20\sqrt{2}\cos(7\omega_1 t)\text{V}$$

各电压有效值分别为

$$U_{ac} = \sqrt{100^2 + 50^2 + 20^2} = 113.578\text{V}$$

$$U_{ad} = \sqrt{[(80-30)^2 + 10^2] + 20^2 + 10^2 + 20^2} = 59.16\text{V}$$

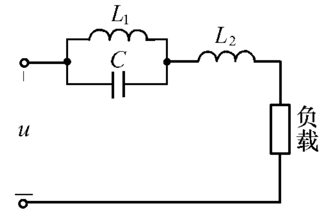
$$U_{ae} = \sqrt{(80^2 + 10^2) + 10^2 + 20^2} = 83.666\text{V}$$

$$U_{ag} = u_R = 20\text{V}$$

○ 12－8　题 12－8 图所示为滤波电路，要求负载中不含基波分量，但 $4\omega_1$ 的谐波分量

能全部传送至负载。如 $\omega_1 = 1000\text{rad/s}, C = 1\mu\text{F}$，求 L_1 和 L_2。

解 欲使负载中不含基波分量，即在此时负载中的电流的基波分量为零，则有 L_1 和 C 在 ω_1 处发生并联谐振，由谐振条件得



题 12－8 图

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}} = 1000\text{rad/s}$$

故

$$L_1 = \frac{1}{\omega_1{}^2 C} = \frac{1}{1000^2 \times 10^{-6}} = 1\text{H}$$

若要求 4 次（$4\omega_1$）谐振分量能全部传送至负载端，需使此电路在 $4\omega_1$ 处发生串联谐振，因

$$X_{L_2} = 4\omega_1 L_2 = 4000 L_2$$

而 L_1 与 C 并联的阻抗为

$$X_{L_1 C} = \frac{1}{4\omega_1 C - \dfrac{1}{4\omega_1 L_1}} = \frac{4\omega_1 L_1}{16\omega_1^2 C L_1 - 1} = \frac{800}{3}\Omega$$

串联谐振时，有

$$\text{j}(X_{L_2} - X_{L_1 C}) = \text{j}(4000 L_2 - \frac{800}{3})\Omega = 0$$

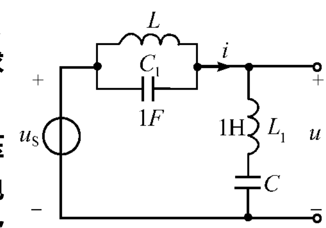
即

$$4000 L_2 = \frac{800}{3}$$

$$L_2 = \frac{800}{3} \times \frac{1}{4000} = \frac{1}{15} = 66.67\text{mH}$$

◎ 12－9 题 12－9 图所示电路中，$u_S(t)$ 为非正弦周期电压，其中含有 $3\omega_1$ 和 $7\omega_1$ 的谐波分量。如果要求在输出电压 $u(t)$ 中不含这两个谐波分量，问 L，C 应为多少？

分析 不含 $3\omega_1$ 和 $7\omega_1$ 谐振分量表示电路在 $3\omega_1$ 和 $7\omega_1$ 处发生谐振，根据串联谐振，并联谐振条件求解即可。



题 12－9 图

解 根据题 12－9 图所示电路结构知，欲使输出电压 $u(t)$ 中不含 $3\omega_1$ 和 $7\omega_1$ 的谐波分量，就要求该电路在这两个频率时，输出电压 $u(t)$ 中的 3 次谐波分量和 7 次谐波分量分别为零。

若在 $3\omega_1$ 处 $1H$ 电感与电容 C 发生串联谐振，输出电压的三次谐波 $U_3 = 0$，由谐振条件，得

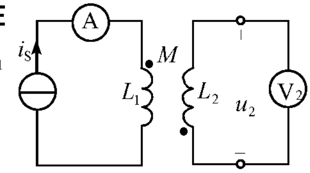
$$3\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}, \qquad C = \frac{1}{9\omega_1^2 L_1} = \frac{1}{9\omega_1^2}$$

若在 $7\omega_1$ 处 $1F$ 电容与电感 L 发生并联谐振，则电路中 7 次谐波的电流 $I_7 = 0$，电压 $U_7 = 0$，由谐振条件，得

$$7\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}, \quad L = \frac{1}{49\omega_1^2 C_1} = \frac{1}{49\omega_1^2}$$

将上述两个频率处发生谐振的次序调换一下，即在 $3\omega_1$ 处，使 L 与 C_1 发生并联谐振，而在 $7\omega_1$ 处，使 L_1 与 C 发生串联谐振，则得

$$L = \frac{1}{9\omega_1^2}, \qquad C = \frac{1}{49\omega_1^2}$$



题 12－10 图

○ 12－10　题 12－10 图所示电路中，$i_S = [5 + 10\cos(10t - 20°) - 5\sin(30t + 60°)]\text{A}$，$L_1 = L_2 = 2\text{H}$，$M = 0.5\text{H}$。求图中交流电表的读数和 u_2。

解　由题 12－10 图所示电路可知，电流表读数为电流 i_S 的有效值，即

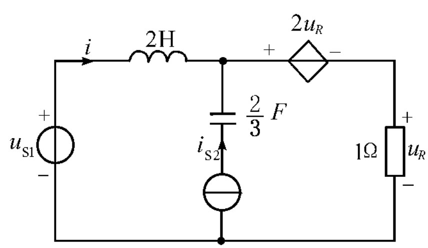
$$A = \sqrt{5^2 + \frac{10^2}{2} + \frac{5^2}{2}} = 9.354\text{A}$$

而电压 $u_2(t)$ 为

$$u_2(t) = -M\frac{\mathrm{d}i_S}{\mathrm{d}t}$$
$$= [50\sin(10t - 20°) + 75\cos(30t + 60°)]\text{V}$$

电压表读数为电压 u_2 的有效值为

$$V_2 = \sqrt{\frac{50^2}{2} + \frac{75^2}{2}} = 63.738\text{V}$$



题 12－11 图

● 12－11　题 12－11 图所示电路中

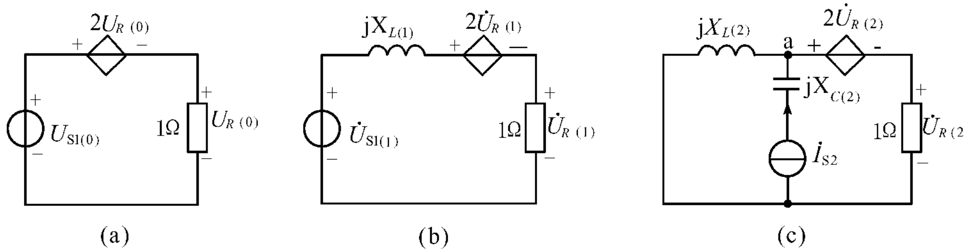
$$u_{S1} = [1.5 + 5\sqrt{2}\sin(2t + 90°)]\text{V}$$

电流源电流 $i_{S2} = 2\sin(1.5t)\text{A}$。求 u_R 及 u_{S1} 发出的功率。

分析　运用叠加定理，先求直流，再求交流即可求解各响应，然后再根据功率公式求解即可。

解　电路各响应的求解，可以看作是电压源 u_{S1} 的各频率分量和电流源 i_{S2} 单独作用时，所得各响应分量的叠加，具体计算如下：

(1) 直流 $U_{S1(0)} = 1.5\text{V}$ 单独作用时，电感短路，电容开路，电路如题解 12－11 图(a) 所示，根据 KVL 有



题解 12－11 图

$$U_{S1(0)}=2U_{R(0)}+U_{R(0)}=3U_{R(0)}$$

故
$$U_{R(0)}=\frac{1}{3}U_{S1(0)}=0.5\text{V}$$

$$I_{(0)}=U_{R(0)}=0.5\text{A}$$

$$P_{S1(0)}=U_{S1(0)}I_{(0)}=1.5\times0.5=0.75\text{W}$$

(2) $u_{S1(1)}=5\sqrt{2}\sin(2t+90^\circ)\text{A}(\omega_1=2\text{rad/s})$ 的电压分量单独作用时，电路如题解 12－11 图(b) 所示，令

$$\dot{U}_{S1(1)}=5\angle 0^\circ\ \text{V},\ \text{j}X_{L(1)}=\text{j}\omega_1 L=\text{j}4\Omega$$

根据 KVL，有

$$\dot{U}_{S1(1)}=\text{j}X_{L(1)}\dot{I}_{(1)}+2\dot{U}_{R(1)}+\dot{U}_{R(1)}=\text{j}4\dot{I}_{(1)}+3\dot{U}_{R(1)}$$

且
$$\dot{U}_{R(1)}=\dot{I}_{(1)}$$

解之，得

$$\dot{U}_{R(1)}=\frac{\dot{U}_{S1(1)}}{3+\text{j}4}=\frac{5\angle 0^\circ}{5\angle 53.13^\circ}=1\angle -53.13^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_{(1)}=\dot{U}_{R(1)}=1\angle -53.13^\circ\ \text{A}$$

$$P_{S1(1)}=U_{S1(1)}I_{(1)}\cos 53.13^\circ=5\times1\times0.6=3\text{W}$$

(3) 电流源

$$i_{S2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ=\sqrt{2}\angle -90^\circ\ \text{A}$$

$$\text{j}X_{L(2)}=\text{j}\omega_2 L=\text{j}3\Omega$$

$$\text{j}X_{C(2)}=-\text{j}\frac{1}{\omega_2 C}=-\text{j}1\Omega$$

对独立结点 a，列出结点电压方程

$$\left(\frac{1}{\text{j}X_{L(2)}}+1\right)\dot{U}_{a(2)}=\dot{I}_{S2}+2\dot{U}_{R(2)}/1$$

$$\dot{U}_{a(2)}=3\dot{U}_{R(2)}$$

代入参数值并消去 $\dot{U}_{a(2)}$，有

$$(-\mathrm{j}\frac{1}{3}+1)\times 2\dot{U}_{R(2)}=\dot{I}_{S2}+2\dot{U}_{R(2)}$$

$$\dot{U}_{R(2)}=\frac{\dot{I}_{S2}}{1-\mathrm{j}1}=\frac{\sqrt{2}\angle -90^\circ}{\sqrt{2}\angle -45^\circ}=1\angle -45^\circ\ \mathrm{V}$$

所以，电压 u_R 为

$$u_R(t)=0.5+\sqrt{2}\cos(2t-53.13^\circ)+\sqrt{2}\cos(1.5t-45^\circ)\mathrm{V}$$

电压源 u_{S1} 发出的功率为

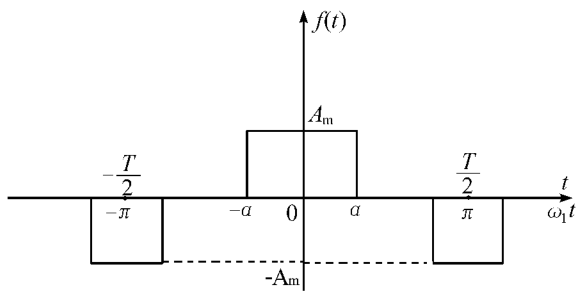
$$P_{S1}=P_{S1(0)}+P_{S1(1)}=0.75+3=3.75\mathrm{W}$$

小结　求解功率既可用有效值直接求解，也可用直流功率与交流功率的和来求解。

○12－12　略

○12－13　略

○ 12－14　求题 12－14 图所示波形的傅里叶级数的指数形式的系数。



题 12－14 图

解　图示波形 $f(t)$ 在一个周期($\omega_1 T=2\pi$)的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}-A_m & -\dfrac{T}{2}\leqslant t<-\dfrac{\pi-\alpha}{\omega_1}\\ 0 & -\dfrac{\pi-\alpha}{\omega_1}\leqslant t<-\dfrac{\alpha}{\omega_1}\\ A_m & -\dfrac{\alpha}{\omega_1}\leqslant t<\dfrac{\alpha}{\omega_1}\\ 0 & \dfrac{\alpha}{\omega_1}\leqslant t<\dfrac{\pi-\alpha}{\omega_1}\\ -A_m & \dfrac{\pi-\alpha}{\omega_1}\leqslant t<\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

$f(t)$ 展开为傅里叶级数的指数形式为

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\omega_1 t}$$

由于 $f(t)$ 为偶函数，且具有镜对称性质，所以，有 $C_0=0$ 和 $C_{2k}=0$。

而

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{\pi-\alpha}{\omega_1}}(-A_{\mathrm{m}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\alpha}{\omega_1}}^{\frac{\alpha}{\omega_1}}A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi-\alpha}{\omega_1}}^{\frac{T}{2}}(-A_{\mathrm{m}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{2A_{\mathrm{m}}}{k\pi}\sin k\alpha \qquad (k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots)$$

第十三章

拉普拉斯变换

学习要求

1. 深刻理解拉普拉斯变换的定义式与基本性质;能根据定义式与基本性质,求一些常用时间函数的拉普拉斯变换。
2. 会用部分分式法求一些象函数的拉普拉斯反变换。
3. 深刻理解和掌握 KCL,KVL 的 s 域形式及电路元件的 s 域伏安关系;能根据时域电路模型正确地画出相应的 s 域电路模型(即运算电路)。
4. 能用运算法求解线性电路中的响应,包括零输入响应、零状态响应、全响应、单位冲激响应 $h(t)$。

知识网络图

拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换
- 部分分式展开
- 运算电路
- 应用拉普拉斯变换分析线性电路

课后习题全解

○ 13－1　**求下列各函数的象函数：**

(1)$f(t)=1-e^{-at}$；　(2)$f(t)=\sin(\omega t+\varphi)$；　(3)$f(t)=e^{-at}(1-at)$；

(4)$f(t)=\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$；　(5)$f(t)=t^2$；　(6)$f(t)=t+2+3\delta(t)$；

(7)$f(t)=t\cos(at)$；　(8)$f(t)=e^{-at}+at-1$。

解　(1)$F(s)=\mathscr{L}[1-e^{-at}]=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+a}=\dfrac{a}{s(s+a)}$

(2)$F(s)=\mathscr{L}[\sin(\omega t+\varphi)]=\mathscr{L}[\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi]$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\varphi+\frac{s}{s^2+\omega^2}\sin\varphi=\frac{\omega\cos\varphi+s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$$

(3)$F(s)=\mathscr{L}[e^{-at}(1-at)]=\mathscr{L}[e^{-at}-at\,e^{-at}]=\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{a}{(s+a)^2}=\dfrac{s}{(s+a)^2}$

(4)$F(s)=\mathscr{L}[\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})]=\mathscr{L}[\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}e^{-at}]=\dfrac{1}{as}-\dfrac{1}{a(s+a)}=\dfrac{1}{s(s+a)}$

(5)$F(s)=\mathscr{L}[t^2]=\mathscr{L}[2\cdot\dfrac{1}{2}t^2]=2\cdot\dfrac{1}{s^3}=\dfrac{2}{s^3}$

(6)$F(s)=\mathscr{L}[t+2+3\delta(t)]=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s}+3=\dfrac{3s^2+2s+1}{s^2}$

(7)$F(s)=\mathscr{L}[t\cos(at)]=\mathscr{L}[\dfrac{1}{2}t(e^{-jat}+e^{jat})]=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{(s+ja)^2}+\dfrac{1}{(s-ja)^2}]$

$$=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

(8)$F(s)=\mathscr{L}[e^{-at}+at-1]=\dfrac{1}{s+a}+\dfrac{a}{s^2}-\dfrac{1}{s}=\dfrac{a^2}{s^2(s+a)}$

◎ 13－2　**求下列各函数的原函数：**

(1) $\dfrac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$；　(2) $\dfrac{2s^2+16}{(s^2+5s+6)(s+12)}$；

(3) $\dfrac{2s^2+9s+9}{s^2+3s+2}$；　(4) $\dfrac{s^3}{(s^2+3s+2)s}$。

分析　**利用部分分式展开法求解即可。**

解　**拉普拉斯反变换利用部分分式展开法。**

(1)$F(s)=\dfrac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_2}{s+2}+\dfrac{k_3}{s+4}$

则待定系数为

$$k_1=[sF(s)]_{s=0}=\frac{3}{8},\quad k_2=[(s+2)F(s)]_{s=-2}=\frac{1}{4}$$

$$k_3=[(s+4)F(s)]_{s=-4}=\frac{3}{8}$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{8}(3+2e^{-2t}+3e^{-4t})$$

(2) $$F(s)=\frac{2s^2+16}{(s+2)(s+3)(s+12)}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+3}+\frac{k_3}{s+12}$$

确定待定系数

$$k_1=[(s+2)F(s)]_{s=-2}=\frac{12}{5},\quad k_2=[(s+3)F(s)]_{s=-3}=-\frac{34}{9}$$

$$k_3=[(s+12)F(s)]_{s=-12}=\frac{152}{45}$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{12}{5}e^{-2t}-\frac{34}{9}e^{-3t}+\frac{152}{45}e^{-12t}$$

(3) $$F(s)=\frac{2s^2+9s+9}{s^2+3s+2}=2+\frac{3s+5}{s^2+3s+2}$$

令 $$F_1(s)=\frac{3s+5}{s^2+3s+2}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

其中 $k_1=[(s+1)F_1(s)]_{s=-1}=2$，$k_2=[(s+2)F_1(s)]_{s=-2}=1$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=2e^{-t}+e^{-2t}$$

所以 $$f(t)=2\delta(t)+2e^{-t}+e^{-2t}$$

(4) $$F(s)=\frac{s^3}{(s^2+3s+2)s}=\frac{s^2}{s^2+3s+2}=1-\frac{3s+2}{s^2+3s+2}$$

令 $$F_1(s)=\frac{3s+2}{s^2+3s+2}=\frac{3s+2}{(s+1)(s+2)}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

其中 $k_1=[(s+1)F_1(s)]_{s=-1}=-1$，$k_2=[(s+2)F_1(s)]_{s=-2}=4$

$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=-e^{-t}+4e^{-2t}$$

所以 $$f(t)=\delta(t)-f_1(t)=\delta(t)+e^{-t}-4e^{-2t}$$

○13－3　**求下列各函数的原函数：**

(1) $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)^2}$；　(2) $\dfrac{s+1}{s^3+2s^2+2s}$；　(3) $\dfrac{s^2+6s+5}{s(s^2+4s+5)}$；

(4) $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$。

解　(1) $D(s)=(s+1)(s+2)^2$

令 $D(s)=0$ **具有重根，所以，设** $F(s)$ **为**

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_{21}}{s+2}+\frac{k_{22}}{(s+2)^2}$$

其中 $$k_1=[(s+1)F(s)]_{s=-1}=1$$

$$k_{22}=[(s+2)^2F(s)]_{s=-2}=[\frac{1}{s+1}]_{s=-2}=-1$$

$$k_{21}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+2)^2F(s)]_{s=-2}=-1$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t}$$

(2) $$F(s)=\frac{s+1}{s^3+2s^2+2s}=\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}=\frac{s+1}{s[s-(-1+\mathrm{j})][s-(-1-\mathrm{j})]}$$

$$=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1-\mathrm{j}}+\frac{k_3}{s+1+\mathrm{j}}$$

即 $D(s)=0$ 具有共轭复根

各系数为 $$k_1=[sF(s)]_{s=0}=\left.\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right|_{s=0}=0.5$$

$$k_2=\left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=-1+\mathrm{j}}=\left.\frac{s+1}{3s^2+4s+2}\right|_{s=-1+\mathrm{j}}$$

$$=\frac{1}{2}(-1-\mathrm{j})=0.3536\mathrm{e}^{-\mathrm{j}135^\circ}$$

$$k_3=|k_2|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2}=0.3536\mathrm{e}^{\mathrm{j}135^\circ}$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=0.5\varepsilon(t)+2|k_2|\mathrm{e}^{at}\cos(\omega t+\theta_2)$$

$$=0.5\varepsilon(t)+0.707\mathrm{e}^{-t}\cos(t-135^\circ)$$

(3) $$F(s)=\frac{s^2+6s+5}{s(s^2+4s+5)}$$

令 $D(s)=s(s^2+4s+5)=0$，有 $p_1=0$ 为单根，$p_2=-2+\mathrm{j}$，$p_3=-2-\mathrm{j}$ 为共轭复根。

即令 $$F(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+2-\mathrm{j}}+\frac{k_3}{s+2+\mathrm{j}}$$

各系数为

$$k_1=[sF(s)]_{s=0}=\left.\frac{s^2+6s+5}{s^2+4s+5}\right|_{s=0}=1$$

$$k_2=\left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=P_2}=\left.\frac{s^2+6s+5}{3s^2+8s+5}\right|_{s=-2+\mathrm{j}}=-\mathrm{j}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$k_3=|k_2|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\varepsilon(t)+2\mathrm{e}^{-2t}\sin t$$

(4) $$F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}=\frac{s}{(s+\mathrm{j})^2(s-\mathrm{j})^2}$$

令 $$D(s)=(s^2+1)^2=(s+\mathrm{j})^2(s-\mathrm{j})^2=0$$

有 $p_1=-\mathrm{j}$ 和 $p_2=\mathrm{j}$ 分别有二重根，且 p_1、p_2 为共轭复根。

令
$$F(s)=\frac{k_{11}}{(s+\mathrm{j})^2}+\frac{k_{12}}{s+\mathrm{j}}+\frac{k_{22}}{(s-\mathrm{j})^2}+\frac{k_{21}}{(s-\mathrm{j})}$$

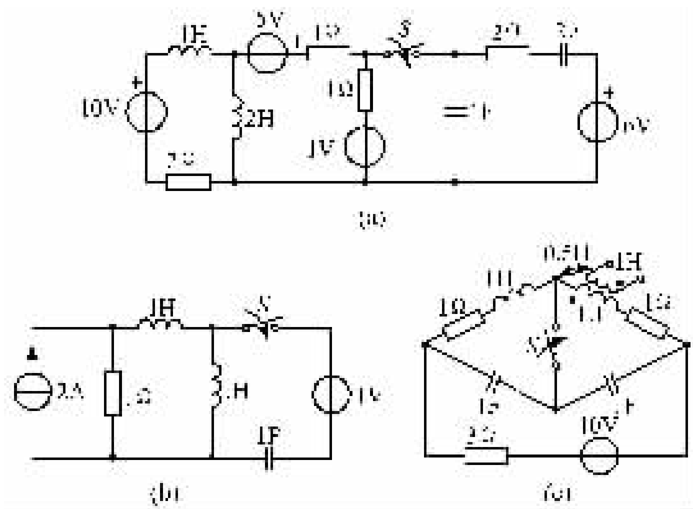
则各系数为

$$k_{11}=[(s+\mathrm{j})^2F(s)]_{s=P_1}=\left.\frac{s}{(s-\mathrm{j})^2}\right|_{s=-\mathrm{j}}=\mathrm{j}\,\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$k_{22}=|\,k_{11}\,|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_1}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}},k_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+\mathrm{j})^2F(s)]_{s=-\mathrm{j}}=0,k_{21}=$$
0

所以有　$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{j}\,\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}-\mathrm{j}\,\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}=\frac{1}{2}t\sin t$

◎ 13－4　题 13－4 图所示电路原已达稳态，$t=0$ 时把开关 S 合上，分别画出运算电路。



题 13－4 图

分析　电路处于稳定状态时，电感相当于短路，电容相当于开路，将各个元件视为运算电路中的元件即可得运算电路。

解　(a) 开关闭合前电路处于稳态，故电感视为短路，电容视为开路，电路如题解 13－4 图(a1) 所示。

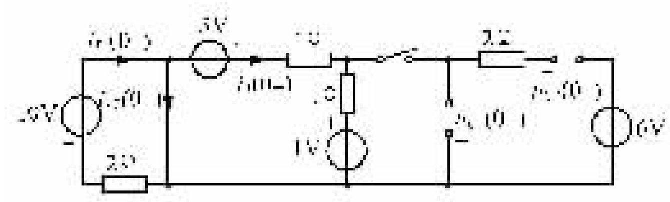
$$i_{L1}(0_-)=\frac{10}{2}=5\mathrm{A}$$

$$i_{L2}(0_-)=i_L(0_-)-i_3(0_-)=5-\frac{5-1}{1+1}=3\mathrm{A}$$

$$u_{C1}(0_-)=\frac{2}{1+2}\times 6=4\mathrm{V}$$

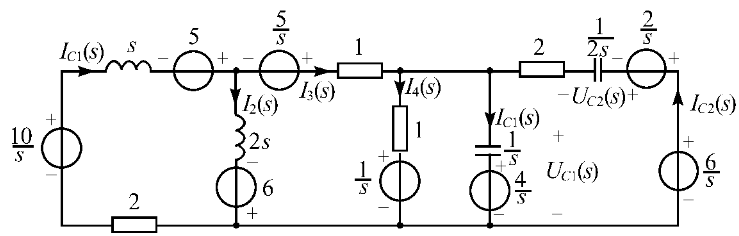
$$u_{C2}(0_-)=6-4=2\mathrm{V}$$

从而
$$L_1 i_{L1}(0_-) = 5\text{V}, \quad L_2 i_{L2}(0_-) = 6\text{V}$$
$$\frac{u_{C1}(0_-)}{s} = \frac{4}{s}, \quad \frac{u_{C2}(0_-)}{s} = \frac{2}{s}$$



题解 13－4 图(a1)

开关闭合后相应的运算电路如题解 13－4 图(a2) 所示。



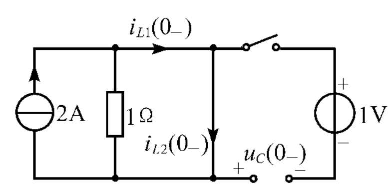
题解 13－4 图(a2)

(b) 开关闭合前电路处于稳态，电感视为短路，电容视为开路，如题解 13－4 图(b1) 所示。

$$i_{L1}(0_-) = i_{L2}(0_-) = 2\text{A}$$
$$u_C(0_-) = 0$$

从而 $\quad L_1 i_{L1}(0_-) = L_2 i_{L2}(0_-) = 2\text{V}$

开关闭合后题 13－4 图(b) 对应的运算电路如题解 13－4 图(b2) 所示。



题解 13－4 图(b1)

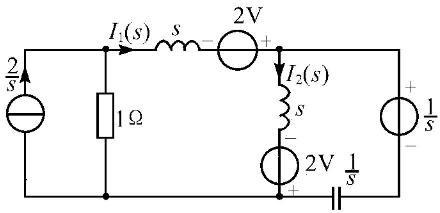
(c) 开关闭合前电路处于稳态，电感视为短路，电容视为开路，如题解 13－4 图(c1) 所示。

$$i_{L1}(0_-) = i_{L2}(0_-) = \frac{10}{3+1+1} = 2\text{A}$$

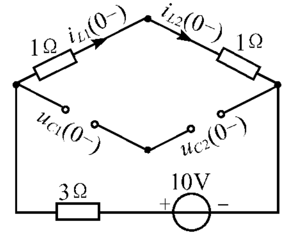
$$u_{C1}(0_-) = u_{C2}(0_-) = \frac{1}{2} \times 2 \times (1+1) = 2\text{V}$$

从而
$$L_1 i_{L1}(0_-) = 2, \quad L_2 i_{L2}(0_-) = 2$$
$$M i_{L2}(0_-) = 1, \quad \frac{u_{C1}(0_-)}{s} = \frac{u_{C2}(0_-)}{s} = \frac{2}{s}$$

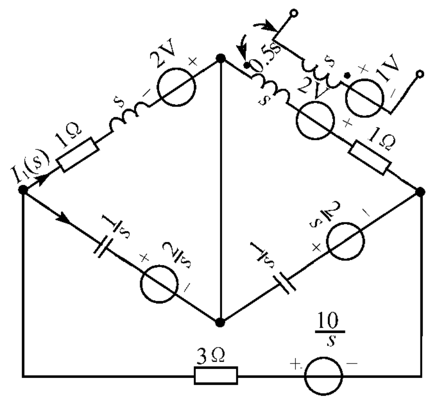
开关闭合后题 13－4 图(c) 对应的运算电路题解 13－4 图(c2) 所示。



题解 13－4 图(b2)

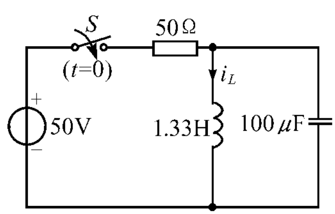


题解 13－4 图(c1)

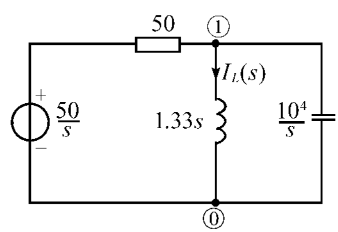


题解 13－4 图(c2)

◎ 13－5　题 13－5 图所示电路原处于零状态，$t=0$ 时合上开关 S，试求电流 i_L。



题 13－5 图



题解 13－5 图

分析　画出运算电路求解 $I_L(s)$，再进行拉氏反变换即可。

解　由于开关闭合前电路已处于零状态，即 $i_L(0_-)=0$，$u_C(0_-)=0$，开关闭合后电路对应的运算电路图如题解 13－5 图所示。

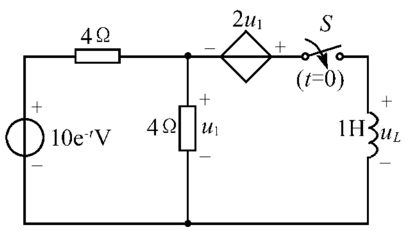
列结点电压方程　$\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{1.33s}+\frac{s}{10^4}\right)U_{n1}(s)=\frac{50}{s}/50$

则
$$U_{n1}(s)=\frac{1}{(\frac{1}{50}+\frac{1}{1.33s}+\frac{s}{10^4})s}$$

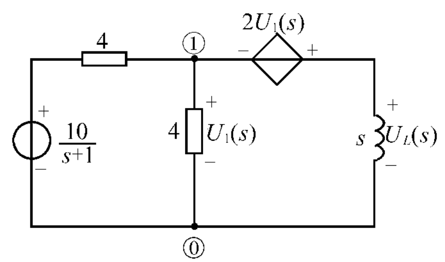
$$I_L(s)=\frac{U_{n1}(s)}{1.33s}=\frac{1}{s(0.0266s+1+1.33\times10^{-4}s^2)}$$
$$=\frac{7500}{s(s^2+200s+7500)}=\frac{7500}{s(s+50)(s+150)}=\frac{1}{s}-$$
$$\frac{1.5}{s+50}+\frac{0.5}{s+150}$$

所以 $i_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_L(s)]=(1-1.5e^{-50t}+0.5e^{-150t})\text{A}$

○ 13－6 **电路如题 13－6 图所示，已知** $i_L(0_-)=0\text{A}$，$t=0$ **时将开关** S **闭合，求** $t>0$ **时的** $u_L(t)$。



题 13－6 图



题解 13－6 图

解 开关闭合后电路对应的运算电路如题解 13－6 图所示。

列结点电压方程 $$(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{s})U_{n1}(s)=\frac{\frac{10}{s+1}}{4}-\frac{2U_1(s)}{s}$$

补充方程 $$U_1(s)=U_{n1}(s)$$

整理，得 $$(\frac{1}{2}+\frac{3}{s})U_{n1}(s)=\frac{5}{2(s+1)}$$

求得 $$U_{n1}(s)=\frac{5s}{(s+1)(s+6)}$$

由 KVL 方程，得 $$U_L(s)=3U_{n1}(s)=\frac{15s}{(s+1)(s+6)}=\frac{-3}{s+1}+\frac{18}{s+6}$$

所以 $$u_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_L(s)]=(-3e^{-t}+18e^{-6t})\text{V}$$

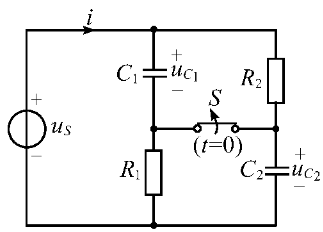
$\boxed{○13－7}$ **题 13－7 图所示电路中** $u_S(t)$ **为直流电压源，开关原闭合，已达稳态。**$t=0$ **时开关断开，求开关断开后总电流** i **和电容上电压** u_{C_1} **和** u_{C_2}。**已知** $u_S(t)=30\text{V}$，$C_1=0.2\mu F$，$C_2=\frac{1}{2}C_1$，$R_1=100\Omega$，$R_2=2R_1$。

解　开关断开前，电路处于稳态，电容视为开路，如题解 13－7 图(a) 所示。

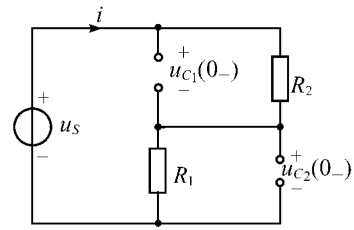
$$u_{C1}(0_-)=\frac{u_S}{R_1+R_2}\cdot R_2=\frac{2}{3}\times 30=20\text{V}$$

$$u_{C2}(0_-)=u_S-u_{C1}(0_-)=10\text{V}$$

开关断开后电路的运算电路如题解 13－7 图(b) 所示。



题 13－7 图



题解 13－7 图(a)

列回路电流方程(回路 ① 的电流为 $I_1(s)$，回路 ② 的电流为 $I_2(s)$)。

$$\begin{cases}(100+\dfrac{5\times 10^6}{s})I_1(s)=\dfrac{30}{s}-\dfrac{20}{s}\\[2ex](200+\dfrac{10^7}{s})I_2(s)=\dfrac{30}{s}-\dfrac{10}{s}\end{cases}$$

求得
$$\begin{cases}I_1(s)=\dfrac{0.1}{s+5\times 10^4}\\[2ex]I_2(s)=\dfrac{0.1}{s+5\times 10^4}\end{cases}$$

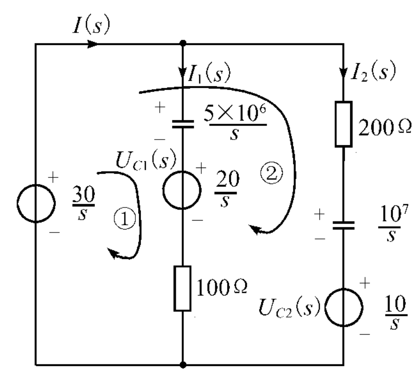
由 KCL，得

$$I(s)=I_1(s)+I_2(s)=\frac{0.2}{s+5\times 10^4}$$

电容上电压为

$$U_{C1}(s)=\frac{5\times 10^6}{s}I_1(s)+\frac{20}{s}$$
$$=\frac{30}{s}-\frac{10}{s+5\times 10^4}$$

$$U_{C2}(s)=\frac{10^7}{s}I_2(s)+\frac{10}{s}=\frac{30}{s}-\frac{20}{s+5\times 10^4}$$

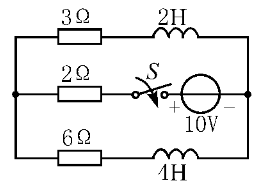


题解 13－7 图(b)

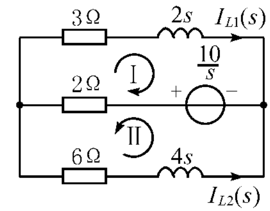
所以有
$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=0.2e^{-5\times 10^4 t}\varepsilon(t)\text{A}$$
$$u_{C1}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{C1}(s)]=(30-10e^{-5\times 10^4 t})\varepsilon(t)\text{V}$$
$$u_{C2}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{C2}(s)]=(30-20e^{-5\times 10^4 t})\varepsilon(t)\text{V}$$

○ 13－8　题 13－8 图所示电路中的电感原无磁场能量，$t=0$ 时，合上开关 S，用运算法求电感中的电流。

解 根据题意知，$i_{L1}(0_-)=0$，$i_{L2}(0_-)=0$，开关闭合后电路的运算电路如题解 13—8 图所示。



题 13—8 图



题解 13—8 图

列回路电流方程
$$\begin{cases}(5+2s)I_{L1}(s)+2I_{L2}(s)=\dfrac{10}{s}\\[2ex]2I_{L1}(s)+(8+4s)I_{L2}(s)=\dfrac{10}{s}\end{cases}$$

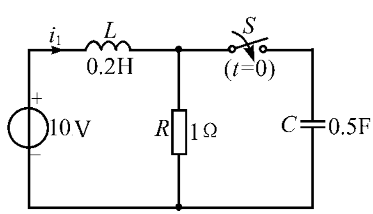
解上式方程，得
$$I_{L1}(s)=\frac{5}{s(s+3)}=\frac{\frac{5}{3}}{s}-\frac{\frac{5}{3}}{s+3}$$
$$I_{L2}(s)=\frac{\frac{5}{2}}{s(s+3)}=\frac{\frac{5}{6}}{s}-\frac{\frac{5}{6}}{s+3}$$

所以
$$i_{L1}(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_{L1}(s)]=\frac{5}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)\,\mathrm{A}$$
$$i_{L2}(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_{L2}(s)]=\frac{5}{6}(1-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)\,\mathrm{A}$$

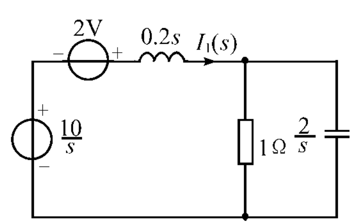
○ 13—9 题 13—9 图所示电路中开关 S 闭合前电路已处于稳定状态，电容初始储能为零，在 $t=0$ 时闭合开关 S，求 $t>0$ 时电流 $i_1(t)$。

解 开关闭合前电路处于稳态，电感视为短路，求得 $i_L(0_-)=\dfrac{10}{1}=10\mathrm{A}$。

由已知条件知，$u_C(0_-)=0$，开关闭合后电路所对应的运算电路如题解 13—9 图所示。



题 13—9 图



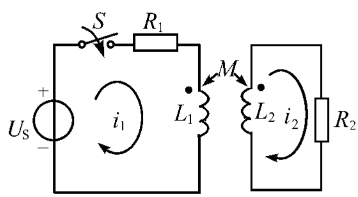
题解 13—9 图

$$I_1(s)=\frac{2+\dfrac{10}{s}}{0.2s+(1\ /\!/\ \dfrac{2}{s})}=\frac{10(s^2+7s+10)}{s(s^2+2s+10)}$$

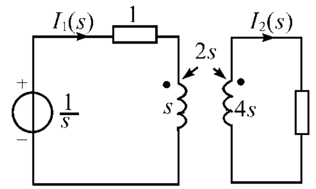
$$=\frac{10}{s}+\frac{\dfrac{25}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}}{s-(-1+j3)}+\frac{\dfrac{25}{3}e^{j\frac{\pi}{2}}}{s-(-1-j3)}$$

所以 $$i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=(10+\frac{50}{3}e^{-t}\sin 3t)\varepsilon(t)\text{A}$$

◎ 13－10　**题 13－10 图所示电路中** $L_1=1\text{H}, L_2=4\text{H}, M=2\text{H}, R_1=R_2=1\Omega$，$U_S=1\text{V}$，**电感中原无磁场能量**。$t=0$ **时合上开关** S，**用运算法求** i_1、i_2。



题 13－10 图



题解 13－10 图

分析　**画出运算电路，列出 KVL 方程求解即可**。

解　**由题意知**：$i_{L1}(0_-)=0, i_{L2}(0_-)=0$，**则该电路的运算电路如题解 13－10 图所示**。

列 KVL 方程
$$\begin{cases}(1+s)I_1(s)-2sI_2(s)=\dfrac{1}{s}\\ -2sI_1(s)+(1+4s)I_2(s)=0\end{cases}$$

解方程，得
$$\begin{cases}I_1(s)=\dfrac{4s+1}{s(5s+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{5(s+\dfrac{1}{5})}\\ I_2(s)=\dfrac{2}{5s+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{5}}\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=(1-\dfrac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t})\varepsilon(t)\text{A}\\ i_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_2(s)]=\dfrac{2}{5}e^{-\frac{1}{5}t}\varepsilon(t)\text{A}\end{cases}$$

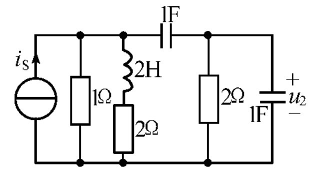
○ 13－11　**题 13－11 图所示电路中** $i_S=2e^{-t}\varepsilon(t)\text{A}$，**用运算法求** $U_2(s)$。

解　**由于电路处于零状态，故** $u_{C1}(0_-)=0, u_{C2}(0_-)=0, i_L(0_-)=0$，**又** $I(s)=\mathscr{L}[2e^{-t}\varepsilon(t)]=\dfrac{2}{s+1}$，**所以原电路对应的运算电路如题解 13－11 图**(a) **所示**。

用戴维宁定理求，将电路从 1，1′ 处断开。

$$U_{oc}(s)=I(s)\cdot\frac{1\times(2+2s)}{1+(2+2s)}=\frac{2+2s}{3+2s}I(s)$$

$$Z_{eq}(s)=\frac{1}{s}+\frac{1\times(2+2s)}{1+(2+2s)}=\frac{1}{s}+\frac{2+2s}{3+2s}$$



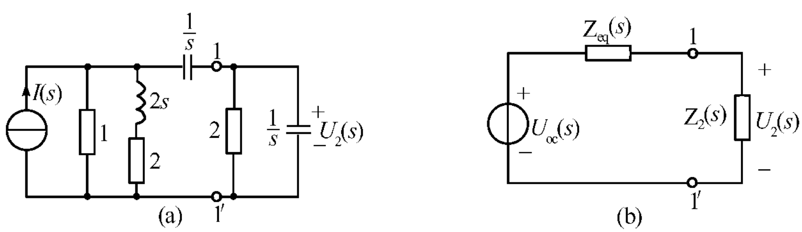
题 13－11 图

等效电路如题解 13－11 图(b) 所示。

$$U_2(s)=\frac{U_{oc}(s)}{Z_{eq}(s)+Z_2(s)}\cdot Z_2(s)$$

其中
$$Z_2(s)=\frac{2\cdot\frac{1}{s}}{2+\frac{1}{s}}=\frac{2}{1+2s}$$

所以有
$$U_2(s)=\frac{\frac{2+2s}{3+2s}\times\frac{2}{s+1}}{\frac{1}{s}+\frac{2+2s}{3+2s}+\frac{2}{1+2s}}\times\frac{2}{1+2s}=\frac{8s}{4s^3+14s^2+16s+3}$$



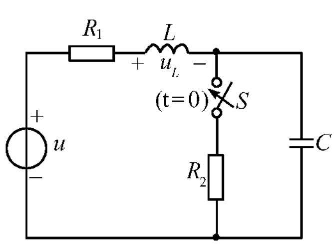
题解 13－11 图

◯ 13－12　题 13－12 图所示电路中 $R_1=10\Omega$，$R_2=10\Omega$，$L=0.15\text{H}$，$C=250\mu F$，$u=150\text{V}$，S 闭合前电路已达稳态。用运算法求合上 S 后的电感电压 u_L。

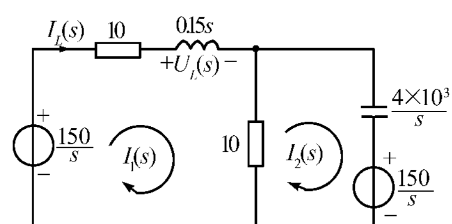
解　开关闭合前电路处于稳态，电感视为短路，电容视为开路，所以有

$$u_C(0_-)=u=150\text{V},\quad i_L(0_-)=0$$

开关闭合后电路对应的运算电路如题解 13－12 所示。



题 13－12 图



题解 13－12 图

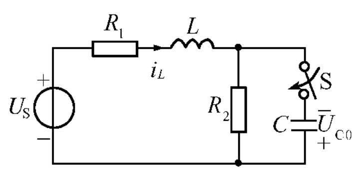
列回路电流方程
$$\begin{cases}(20+0.15s)I_1(s)-10I_2(s)=\dfrac{150}{s}\\ -10I_1(s)+(10+\dfrac{4\times10^3}{s})I_2(s)=-\dfrac{150}{s}\end{cases}$$

解方程，得
$$I_1(s)=\frac{150\times4\times10^3}{s(1.5s^2+700s+8\times10^4)}=I_L(s)$$

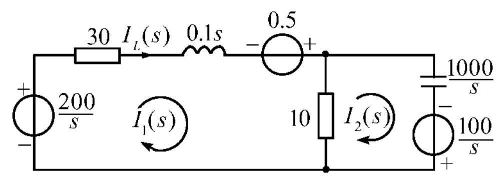
从而有
$$U_L(s)=0.15sI_1(s)=\frac{0.15\times150\times4\times10^3}{1.5s^2+700s+8\times10^4}$$
$$=\frac{0.15\times4\times10^5}{(s+200)(s+\frac{800}{3})}=\frac{900}{s+200}-\frac{900}{s+\frac{800}{3}}$$

所以有
$$u_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_L(s)]=(900\mathrm{e}^{-200t}-900\mathrm{e}^{-\frac{800}{3}t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

○ 13－13　电路如题 13－13 图，设电容上原有电压 $U_{C0}=100\mathrm{V}$，电源电压 $U_S=200\mathrm{V}$，$R_1=30\Omega$，$R_2=10\Omega$，$L=0.1\mathrm{H}$，$C=1000\mu\mathrm{F}$。求 S 合上后电感中的电流 $i_L(t)$。



题 13－13 图



题解 13－13 图

解　开关 S 闭合前电路处于稳态，有
$$i_L(0_-)=\frac{U_S}{R_1+R_2}=5\mathrm{A},\quad u_C(0_-)=U_{C0}=100\mathrm{V}$$

开关 S 闭合后所对应的运算电路如题解 13－13 图所示。

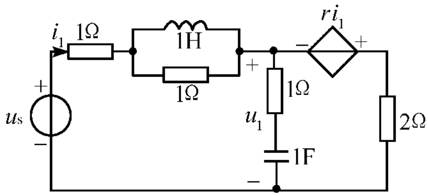
列回路电流方程
$$\begin{cases}(40+0.1s)I_1(s)-10I_2(s)=0.5+\dfrac{200}{s}\\ -10I_1(s)+(10+\dfrac{1000}{s})I_2(s)=\dfrac{100}{s}\end{cases}$$

解方程，得
$$I_1(s)=\frac{0.5s^2+350s+2\times10^4}{s(0.1s^2+40s+4000)}=\frac{5(s^2+700s+40\,000)}{s(s+200)^2}$$
$$=\frac{5}{s}+\frac{1500}{(s+200)^2}=I_L(s)$$

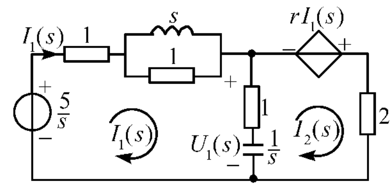
所以
$$i_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_L(s)]=(5+1500t\mathrm{e}^{-200t})\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

○ 13－14　题 13－14 图所示电路中的储能元件均为零初始值，$u_S(t)=5\varepsilon(t)\mathrm{V}$ 在下列条件下求 $U_1(s)$：(1) $r=-3$；(2) $r=3$。

解　题 13－14 图所示电路处于零状态，原电路所对应的运算电路如题解 13－14 图所示。



题 13－14 图



题解 13－14 图

列回路电流方程
$$\begin{cases}(1+\dfrac{s}{1+s}+1+\dfrac{1}{s})I_1(s)-(1+\dfrac{1}{s})I_2(s)=\dfrac{5}{s}\\-(1+\dfrac{1}{s})I_1(s)+(1+\dfrac{1}{s}+2)I_2(s)=rI_1(s)\end{cases}$$

整理，得
$$\begin{cases}(2+\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{1+s})I_1(s)-(1+\dfrac{1}{s})I_2(s)=\dfrac{5}{s}\\-(1+r+\dfrac{1}{s})I_1(s)+(3+\dfrac{1}{s})I_2(s)=0\end{cases}$$

解得
$$I_1(s)=\frac{5(1+s)[1+s(1+r)]}{(3s^2+3s+1)[1+s(1+r)]-(1+s)^2}$$

$$I_2(s)=\frac{s}{1+s(1+r)}I_1(s)$$

$$U_1(s)=[I_1(s)-I_2(s)]\cdot(1+\frac{1}{s})$$

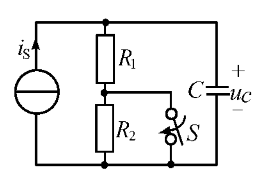
$$=\frac{5(2-r)(s+1)^2}{s[(2-r)(s+1)^2+6s^2+5s+1]}$$

(1) 当 $r=-3$ 时，有 $U_1(s)=\dfrac{25(s+1)^2}{s(11s^2+15s+6)}=\dfrac{25}{11}\cdot\dfrac{(s+1)^2}{s(s^2+\frac{15}{11}s+\frac{6}{11})}$

(2) 当 $r=3$ 时，有 $U_1(s)=\dfrac{-5(s+1)^2}{s^2(5s+3)}=-\dfrac{(s+1)^2}{s^2(s+\frac{3}{5})}$

○ 13－15　题 13－15 图所示电路中，$i_S=2\sin(1000t)A$，$R_1=R_2=20\Omega$，$C=1000\mu F$，$t=0$ 时合上开关 S，用运算法求 $u_C(t)$。

解　开关闭合前，电路处于正弦稳态，先求 $u_C(0_-)$。如题解 13－15 图(a) 所示，



题 13－15 图

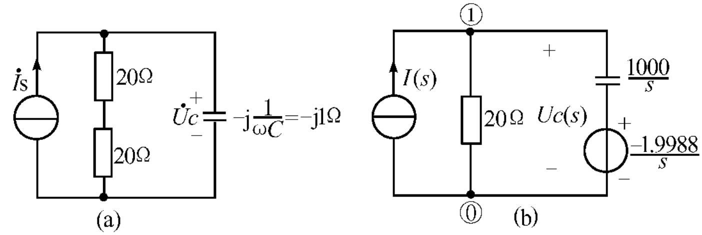
$$\dot{I}_S=\sqrt{2}\angle -90^\circ\ A$$

$$Z_{in}=\frac{(20+20)(-j)}{20+20-j}=\frac{-40j}{40-j}$$

$$=0.9997\angle -88.57^\circ\ \Omega$$

$$\dot{U}_C=Z_{in}\dot{I}_S=0.9997\sqrt{2}\angle -178.57^\circ\ V$$

$$U_C(t)=1.9994\cos(1000t-178.57^\circ)V$$



题解 13－15 图

则 $$u_C(0_-)=1.9994\cos(-178.57°)=-1.9988\text{V}$$

开关闭合后相应的运算电路如题解 13－15 图(b) 所示。

其中 $$I_S(s)=\mathscr{L}[2\sin(1000t)]=\frac{2000}{s^2+1000^2}$$

列结点电压方程 $$\left(\frac{1}{20}+\frac{s}{1000}\right)U_{n1}(s)=I_S(s)+\frac{-1.9988}{s}\Big/\frac{1000}{s}$$

所以 $$U_{n1}(s)=\frac{I_1(s)-1.9988\times10^{-3}}{0.05+0.001s}=\frac{\dfrac{2000}{s^2+1000^2}-1.9988\times10^{-3}}{0.05+0.001s}$$

$$=\frac{2\times10^6-1.9988(s^2+1000^2)}{(s+50)(s^2+1000^2)}$$

$$=\frac{-3.788\times10^{-3}}{s+50}+\frac{0.9988e^{-j177.138°}}{s-j1000}+\frac{0.9988e^{j177.138°}}{s+j1000}=U_C(s)$$

从而有 $$u_C(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_C(s)]$$

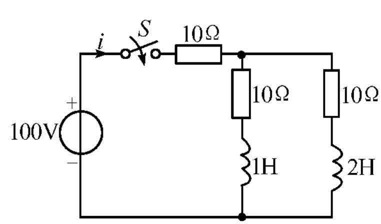
$$=-3.788\times10^{-3}e^{-50t}+1.9976\cos(1000t-177.138°)\text{V}$$

◎ 13－16　题 13－16 图电路在 $t=0$ 时合上开关 S，用结点法求 $i(t)$。

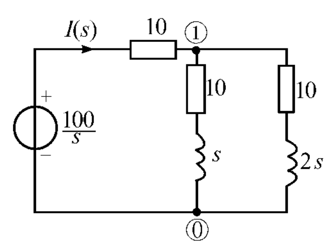
分析　列写结点电压方程求解即可。

解　开关闭合前 $$i_{L1}(0_-)=0,\quad i_{L2}(0_-)=0$$

开关闭合后对应的运算电路如题解 13－16 图所示。



题 13－16 图



题解 13－16 图

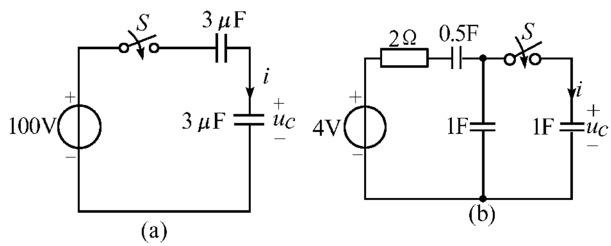
列结点电压方程 $$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10+s}+\frac{1}{10+2s}\right)U_{n1}(s)=\frac{\dfrac{100}{s}}{10}$$

解得 $U_{n1}(s)=\dfrac{10}{s(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10+s}+\dfrac{1}{10+2s})}=\dfrac{50(s+10)(2s+10)}{s(s^2+30s+150)}$

从而
$$I(s)=\frac{1}{10}\left[\frac{100}{s}-U_{n1}(s)\right]=\frac{10}{s}-\frac{5(s+10)(2s+10)}{s(s^2+30s+150)}$$
$$=\frac{150s+1000}{s(s^2+30s+150)}=\frac{150s+1000}{s(s+6.34)(s+23.66)}$$
$$=\frac{6.667}{s}-\frac{0.446}{s+6.34}-\frac{6.22}{s+23.66}$$

所以 $i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=(6.667-0.446e^{-6.34t}-6.22e^{-23.66t})\varepsilon(t)\mathrm{A}$

○ 13－17　题13－17图所示各电路在 $t=0$ 时合上开关 S，用运算法求 $i(t)$ 及 $u_C(t)$。



题13－17图

解　(a) 开关闭合前 $u_C(0_-)=0$，开关闭合后的运算电路如题解13－17图(a)所示。

可见
$$U_C(s)=\frac{\frac{100}{s}}{2}=\frac{50}{s}$$
$$I_C(s)=\frac{\frac{100}{s}}{\frac{1}{sC}+\frac{1}{sC}}=50C=50\times3\times10^{-6}=1.5\times10^{-4}$$

从而有 $i_C(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_C(s)]=1.5\times10^{-4}\delta(t)=0.15\delta(t)\mathrm{mA}$

$u_C(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_C(s)]=50\varepsilon(t)\mathrm{V}$

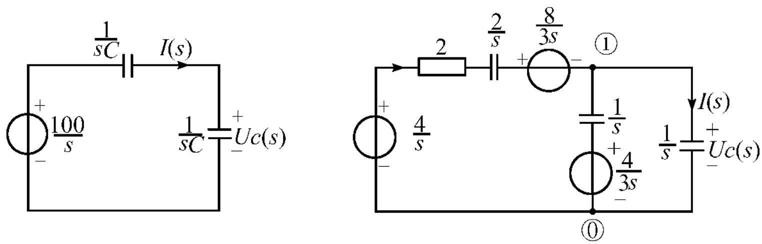
(b) 开关闭合前电路处于稳态

$$u_{C1}(0_-)=\frac{1}{1+0.5}\times4=\frac{8}{3}\mathrm{V},\quad u_{C2}(0_-)=\frac{0.5}{0.5+1}\times4=\frac{4}{3}\mathrm{V}$$

开关闭合后的运算电路如题解13－17图(b)所示。

列结点电压方程$[U_{n1}(s)=U_C(s)]$

$$\left[\frac{1}{2+\frac{2}{s}}+s+s\right]U_C(s)=\frac{\left(\frac{4}{s}-\frac{8}{3s}\right)}{\left(2+\frac{2}{s}\right)}+\frac{\frac{4}{3s}}{\frac{1}{s}}$$



(a)　　　　　　　　　　(b)

题解 13－17 图

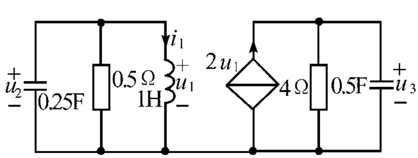
解得
$$U_C(s)=\frac{4(2s+3)}{3s(4s+5)}=\frac{4}{5s}-\frac{2}{15(s+\frac{5}{4})}$$

$$I(s)=sU_C(s)=\frac{4(2s+3)}{3(4s+5)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6(s+\frac{5}{4})}$$

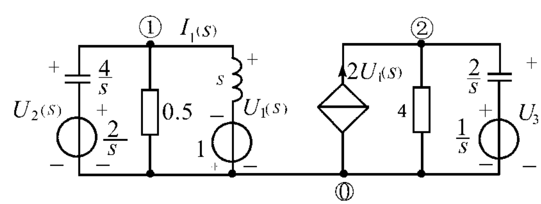
从而
$$u_C(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_C(s)]=\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{15}e^{-\frac{5}{4}t}\right)\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=[\frac{2}{3}\delta(t)+\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{4}t}]\varepsilon(\mathrm{t})\mathrm{A}$$

●13－18　**题 13－18 图所示电路中** $i_1(0_-)=1\mathrm{A}$，$u_2(0_-)=2\mathrm{V}$，$u_3(0_-)=1\mathrm{V}$，**试用拉氏变换法求** $t\geqslant 0$ **时的电压** $u_2(t)$ **和** $u_3(t)$。



题 13－18 图



题解 13－18 图

分析　**画出电路对应的运算电路，列出结点电压方程求解，再进行拉氏反变换即可。**

解　**由已知条件知：**$i_1(0_-)=1\mathrm{A}$，$u_2(0_-)=2\mathrm{V}$，$u_3(0_-)=1\mathrm{V}$

对应的运算电路如题解 13－18 图所示。

列结点电压方程　$[U_{n1}(s)=U_1(s),\quad U_{n2}(s)=U_3(s)]$

$$\begin{cases}(\frac{s}{4}+\frac{1}{0.5}+\frac{1}{s})U_1(s)=\frac{2}{s}/\frac{4}{s}-\frac{1}{s}\\(\frac{1}{4}+\frac{s}{2})U_3(s)=2U_1(s)+\frac{1}{s}/\frac{2}{s}\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}(s^2+8s+4)U_1(s)=2s-4\\(1+2s)U_3(s)=8U_1(s)+2\end{cases}$$

求得

$$U_1(s)=\frac{2s-4}{s^2+8s+4}=\frac{2.732}{s+7.464}-\frac{0.732}{s+0.536}=U_2(s)$$

$$U_3(s)=\frac{8U_1(s)+2}{1+2s}=\frac{2s^2+32s-24}{(s^2+8s+4)(2s+1)}$$

$$=\frac{-1.57}{s+7.464}+\frac{81.35}{s+0.536}-\frac{79}{s+0.5}$$

从而，有

$$u_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_2(s)]=(2.732e^{-7.464t}-0.732e^{-0.536t})\varepsilon(t)\text{V}$$

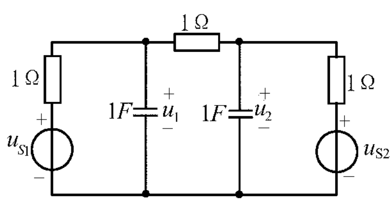
$$u_3(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_3(s)]=(-1.57e^{-7.464t}+81.35e^{-0.536t}-79e^{-0.5t})\varepsilon(t)\text{V}$$

小结　运用拉氏变换求解电路，可以简化求解的复杂性。

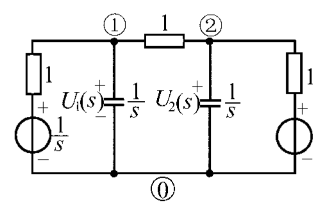
○ 13－19　$u_C(t)=7.212e^{-t}\cos(t+56.31°)\varepsilon(t)\text{V}$

○ 13－20　电路如题 13－20 图所示，已知 $u_{S1}(t)=\varepsilon(t)\text{V}$，$u_{S2}(t)=\delta(t)$，试求 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$。

解　电路对应的运算电路如题解 13－20 图所示。



题 13－20 图



题解 13－20 图

列结点电压方程
$$\begin{cases}(1+1+s)U_1(s)-U_2(s)=\dfrac{1}{s}\\-U_1(s)+(1+s+1)U_2(s)=1\end{cases}$$

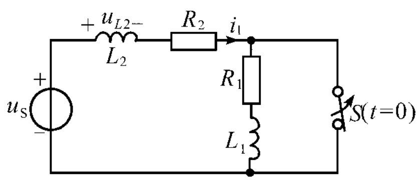
解得
$$\begin{cases}U_1(s)=\dfrac{2}{s(s+3)}=\dfrac{2}{3s}-\dfrac{2}{3(s+3)}\\U_2(s)=\dfrac{s+1}{s(s+3)}=\dfrac{1}{3s}+\dfrac{2}{3(s+3)}\end{cases}$$

从而有 $u_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_1(s)]=(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}e^{-3t})\varepsilon(t)\text{V}$

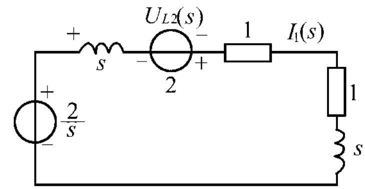
$$u_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_2(s)]=(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t})\varepsilon(t)\text{V}$$

○ 13－21　$i_L(t)=(1-e^{-\frac{1}{6}t})\varepsilon(t)+(1-e^{-\frac{1}{6}(t-1)})\varepsilon(t-1)-2(1-e^{-\frac{1}{6}(t-2)})\varepsilon(t-2)$A

● 13－22　**电路如题 13－22 图所示，开关 S 原是闭合的，电路处于稳态。若 S 在 $t=0$ 时打开，已知 $U_S=2$V，$L_1=L_2=1$H，$R_1=R_2=1\Omega$。试求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_1(t)$ 和 $u_{L_2}(t)$。**



题 13－22 图



题解 13－22 图

分析　S **闭合时，电感被短路，**$i_L(0_-)=0$，**在** $t\geqslant 0$ **后即** S **断开后，**R_1、L_1、R_2、L_2 **串联，画出运算电路求解。**

解　**开关 S 打开前电路处于稳态，所以有** $i_{L2}(0_-)=\dfrac{2}{1}=2$A，$i_{L1}(0_-)=0$。

开关 S 打开后，电路的运算电路如题解 13－22 图所示。

列 KVL **方程**

$$(2+2s)I_1(s)=2+\frac{2}{s}$$

得

$$I_1(s)=\frac{2+\frac{2}{s}}{2+2s}=\frac{1}{s}$$

$$U_{L2}(s)=sI_1(s)-2=s\cdot\frac{1}{s}-2=-1$$

所以　$i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=\varepsilon(t)$A，　$u_{L2}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{L2}(s)]=-\delta(t)$V

小结　$\xi(+)$ **拉氏变换为** $\dfrac{1}{S}$，$\delta(t)$ **拉氏变换为** 1，**这是两个常用的拉氏变换对。**

○ 13－23　$u_{C1}(t)=u_{C2}(t)=U_S(1-\dfrac{C_2}{C_1+C_2}e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$V

$$i_{C1}(t)=\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2}\cdot\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_S\delta(t)\text{A}$$

$$i_{C2}(t)=\frac{C_2^2}{(C_1+C_2)^2}\cdot\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_S\delta(t)\text{A}$$

○13－24　**题 13－24 图所示电路中两电容原来未充电，在 $t=0$ 时将开关 S 闭合，已知 $U_S=10$V，$R=5\Omega$，$C_1=2$F，$C_2=3$F。求 $t\geqslant 0$ 时的 u_{C1}，u_{C2} 及 i_1、i_2、i。**

解　**开关 S 闭合前电路处于零状态，开关 S 闭合后对应的运算电路如题解 13－24 图所示。**

列结点电压方程 $\left(2s+\frac{1}{5}+3s\right)U_{n1}(s)=2s\cdot\frac{U_S}{s}$

得 $$U_{n1}(s)=\frac{10U_S}{25s+1}=\frac{100}{25s+1}=\frac{4}{s+0.04}=U_{C2}(s)$$

$$U_{C1}(s)=\frac{U_S}{s}-U_{n1}(s)=\frac{10}{s}-\frac{4}{s+0.04}$$

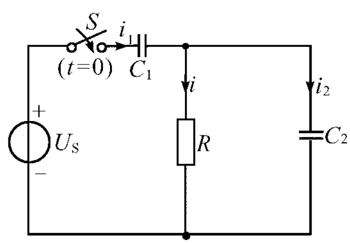
$$I(s)=\frac{1}{5}U_{n1}(s)=\frac{0.8}{s+0.04},$$

$$I_2(s)=3sU_{C2}(s)=\frac{12s}{s+0.04}=12-\frac{0.48}{s+0.04}$$

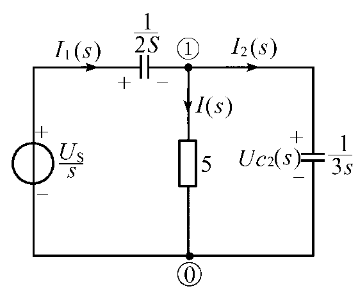
$$I_1(s)=I(s)+I_2(s)=12+\frac{0.32}{s+0.04}$$

从而，有

$$u_{C1}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{C1}(s)]=(10-4e^{-0.04t})\varepsilon(t)\,\text{V}$$
$$u_{C2}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{C2}(s)]=4e^{-0.04t}\varepsilon(t)\,\text{V}$$
$$i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=12\delta(t)+0.32e^{-0.04t}\,\text{A}$$
$$i_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_2(s)]=12\delta(t)-0.48e^{-0.04t}\,\text{A}$$
$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=0.8e^{-0.04t}\varepsilon(t)\,\text{A}$$



题 13－24 图



题解 13－24 图

第十四章

网 络 函 数

学习要求

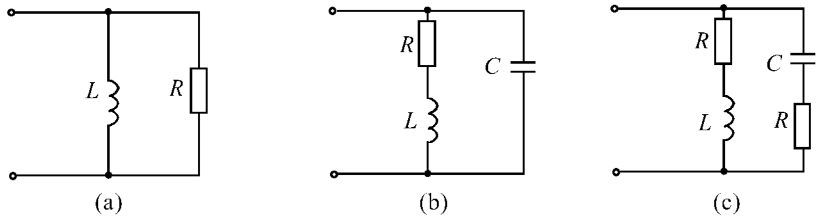
1. 深刻理解网络函数的定义、物理意义与分类，并会用多种方法求 $H(s)$。
2. 了解 $H(s)$ 的一般表示形式；深刻理解 $H(s)$ 的零点与极点概念，并会求解零、极点，会画零、极点图；相反地，会根据零、极点图求 $H(s)$。
3. 深刻理解和掌握电路固有频率（自然频率）的概念，并会求解。
4. 深刻理解零、极点分布对 $H(t)$ 的影响（大小和相位）；深刻理解电路频率响应的定义、物理意义与求解方法，并会根据频率响应求电路的正弦稳态响应。
5. 深刻理解和掌握卷积的定义并会求解；了解时域卷积定理，并会利用卷积法求电路的零状态响应。

知识网络图

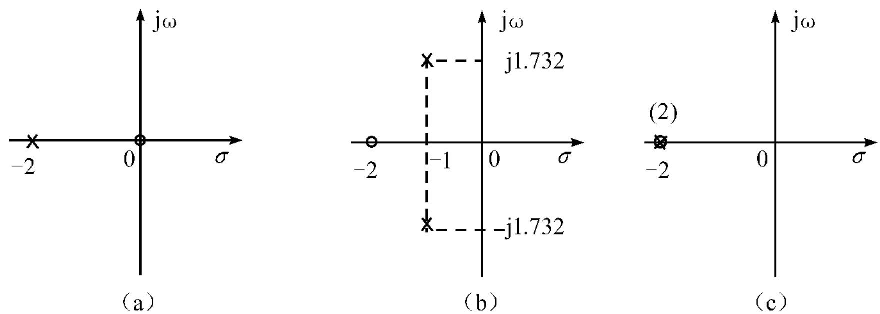
- 网络函数
  - 网络函数
    - 定义
    - 极点和零点及其响应性质
    - 频率特性 $H(j\omega)$
  - 卷积

课后习题全解

○ 14－1　试求题 14－1 图所示线性一端口的驱动点阻抗 $Z(s)$ 的表达式，并在 s 平面上绘出极点和零点。已知 $R = 1\Omega, L = 0.5\mathrm{H}, C = 0.5\mathrm{F}$。



题 14－1 图



题解 14－1 图

解 (1) 图(a) 电路的驱动点阻抗 $Z(s)$ 为

$$Z(s)=\frac{RsL}{R+sL}=\frac{0.5s}{0.5s+1}=\frac{s}{s+2}$$

$Z(s)$ 有一个零点：$z_1=0$；1 个极点 $p_1=-2$，$Z(s)$ 在 s 平面上的极点和零点位置如题解 14－1(a) 所示。

(2) 图(b) 电路的驱动点阻抗为

$$Z(s)=\frac{(R+sL)\dfrac{1}{sC}}{R+sL+\dfrac{1}{sC}}=\frac{sL+R}{LCs^2+RCs+1}=\frac{2(s+2)}{s^2+2s+4}$$

$Z(s)$ 有一个零点：$z_1=-2$；两个极点 $p_1=-1+\mathrm{j}1.732$，$p_2=-1-\mathrm{j}1.732$，$Z(s)$ 的极点、零点图如题解 14－1 图(b) 所示。

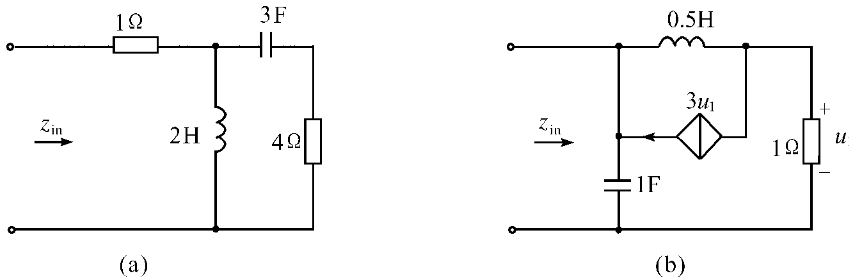
(3) 图(c) 电路的驱动点阻抗为

$$Z(s)=\frac{(R+sL)(\dfrac{1}{sC}+R)}{R+sL+\dfrac{1}{sC}+R}=\frac{(s+2)^2}{s^2+4s+4}=1$$

$Z(s)$ 有两阶零点：$z_1=z_2=-2$；二阶极点：$p_1=p_2=-2$。$Z(s)$ 的零点、极点

图如题解 14－1 图(c) 所示。

◯14－2　求题 14－2 图所示各电路的驱动点阻抗 $Z(s)$ 的表达式，并在 s 平面上绘出极点和零点。



题 14－2 图

解　(1) 图(a) 电路的驱动点阻抗 $Z(s)$ 为

$$Z(s)=1+\frac{2s(\frac{1}{3s}+4)}{2s+\frac{1}{3s}+4}=1+\frac{2s(1+12s)}{6s^2+12s+1}=\frac{30s^2+14s+1}{6s^2+12s+1}$$

可求得 $Z(s)$ 有 2 个零点：$z_1=-0.08804$，$z_2=-0.37863$；2 个极点：$p_1=-0.08713$，$p_2=-1.91288$。在 s 平面上的极点和零点位置如题解 14—2 图(a) 所示。

(2) 为求解方便，将图(b) 电路等效变换为题解 14—2 图(b) 所示的电路，且在端口处加电压 $U(s)$，求出电流 $I(s)$，根据 KCL，KVL，有

$$I(s)=sU(s)+I_1(s)$$
$$U(s)=(0.5s+1)I_1(s)+1.5sI_1(s)$$

解得

$$I_1(s)=\frac{U(s)}{0.5s+1+1.5s}=\frac{U(s)}{2s+1}$$
$$I(s)=sU(s)+\frac{U(s)}{2s+1}=\frac{2s^2+s+1}{2s+1}U(s)$$

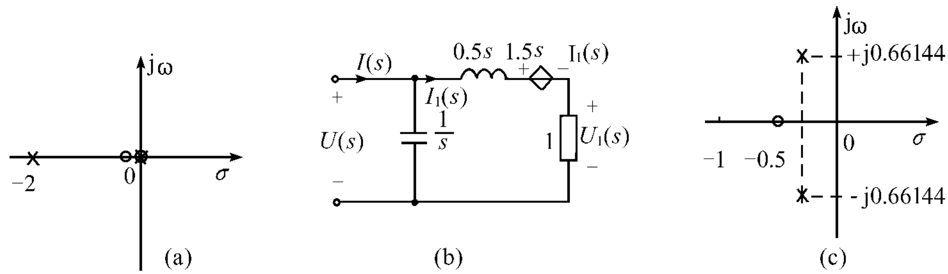
所以，驱动点阻抗为

$$Z_{in}(s)=\frac{U(s)}{I(s)}=\frac{2s+1}{2s^2+s+1}$$

$Z_{in}(s)$ 有 1 个零点：$z=-\frac{1}{2}$；2 个极点：

$$p_1=-0.25+j0.66144,\quad p_2=-0.25-j0.66144$$

其零点、极点图如题解 14－2 图(c) 所示。



题解 14－2 图

○ 14－3　题 14－3 图所示为一线性电路，输入电流源的电流为 i_S。

(1) 试计算驱动点阻抗 $Z_d(s)=\dfrac{U_1(s)}{I_S(s)}$；

(2) 试计算转移阻抗 $Z_t(s)=\dfrac{U_2(s)}{I_S(s)}$；

(3) 在 s 平面上给出 $Z_d(s)$ 和 $Z_t(s)$ 的极点和零点。

解　设输入电流源的电流 $I_S(s)$，计算电压 $U_1(s)$ 和 $U_2(s)$。

(1) 应用结点电压法，结点电压 $U_1(s)$ 满足方程

$$\left(\frac{55}{96}+\frac{125}{96s}+\frac{1}{0.2s+\dfrac{1}{\dfrac{1}{11}s}}\right)U_1(s)=I_S(s)$$

则

$$U_1(s)=\frac{96s(s^2+55)}{55(s^3+11s^2+55s+125)}I_S(s)$$

$$=\frac{96s(s^2+55)}{55(s+5)(s^2+6s+25)}I_S(s)$$

驱动点阻抗 $Z_d(s)$ 为

$$Z_d(s)=\frac{U_1(s)}{I_S(s)}=\frac{96s(s^2+55)}{55(s+5)(s^2+6s+25)}$$

(2) 因为电压 $U_2(s)$ 为

$$U_2(s)=\frac{\dfrac{11}{s}}{0.2s+\dfrac{1}{\dfrac{1}{11}s}}U_1(s)=\frac{55}{s^2+55}U_1(s)$$

把(1)中求出的电压 $U_1(s)$ 代入上式中，得

$$U_2(s)=\frac{96s}{(s+5)(s^2+6s+25)}I_S(s)$$

所以,转移阻抗 $Z_t(s)$ 为

$$Z_t(s)=\frac{U_2(s)}{I_S(s)}=\frac{96s}{(s+5)(s^2+6s+25)}$$

(3) 由以上计算可求得驱动点阻抗 $Z_d(s)$ 有 3 个零点:

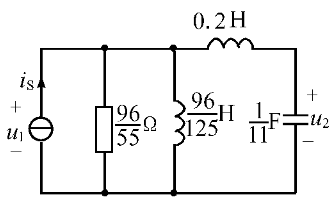
$$z_1=0,\qquad z_2=\mathrm{j}\sqrt{55},\qquad z_3=-\mathrm{j}\sqrt{55}$$

3 个极点:

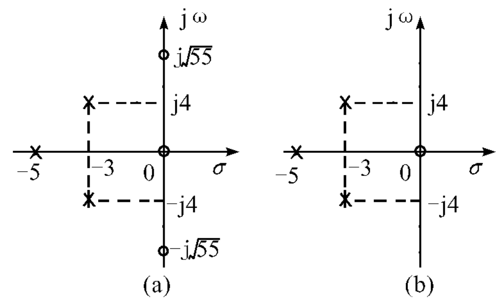
$$p_1=-5,\qquad p_2=-3+\mathrm{j}4,\qquad p_3=-3-\mathrm{j}4$$

其零点、极点图如题解 14—3 图(a) 所示。

同样可求得转移阻抗 $Z_t(s)$ 有 1 个零点:$z=0$;3 个极点与 $Z_d(s)$ 的 3 个极点相同。其零点、极点图如题解 14—3 图(b) 所示。

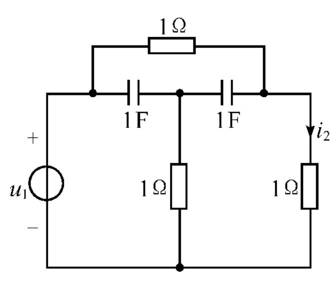


题 14—3 图



题解 14—3 图

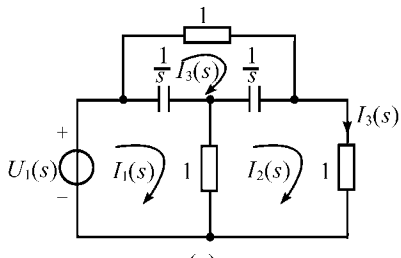
○ 14—4　题 14—4 图试求电路的转移导纳 $Y_{21}(s)=\dfrac{I_2(s)}{U_1(s)}$,并在 s 平面上绘出零点和极点。

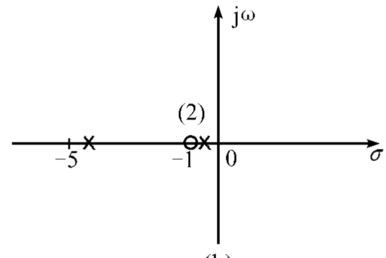


题 14—4 图

解　题 14—4 图所示电路运算电路如题解 14—4 图(a) 所示。应用回路电流法,列出方程为

$$\left(\frac{1}{s}+1\right)I_1(s)-I_2(s)-\frac{1}{s}I_3(s)=U_1(s)\qquad ①$$





题解 14－4 图

$$-I_1(s)+(2+\frac{1}{s})I_2(s)-\frac{1}{s}I_3(s)=0 \qquad ②$$

$$-\frac{1}{s}I_1(s)-\frac{1}{s}I_2(s)+(1+\frac{2}{s})I_3(s)=0 \qquad ③$$

由式 ①,② 和式 ②,③ 分别消去 $I_1(s)$,得

$$(s^2+3s+1)I_2(s)-(2s+1)I_3(s)=s^2U_1(s)$$

$$(3s+1)I_2(s)-(s^2+2s+1)I_3(s)=0$$

解得

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -(s+1)^2 \\ s^2U_1(s) & -(2s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s+1 & -(s+1)^2 \\ s^2+3s+1 & -(2s+1) \end{vmatrix}}=\frac{(s+1)^2U_1(s)}{s^2+5s+2}$$

故,转移导纳 $Y_{21}(s)$ 为

$$Y_{21}(s)=\frac{I_2(s)}{U_1(s)}=\frac{(s+1)^2}{s^2+5s+2}$$

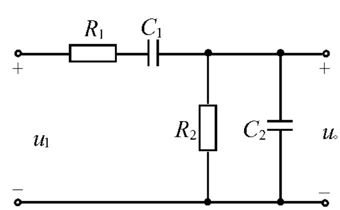
可求得 $Y_{21}(s)$ 有二阶零点:$z_1=z_2=-1$;2 个极点:

$$p_1=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}=-0.43845$$

$$p_2=\frac{-5-\sqrt{17}}{2}=-4.56155$$

其零点、极点图如题解 14－4 图(b) 所示。

○ 14－5　题 14－5 图所示 RC 电路,求它的转移函数 $H(s)=\dfrac{U_0(s)}{U_1(s)}$。



题 14－5 图

解　设电压象函数为 $U_1(s)$ 和 $U_0(s)$,则有

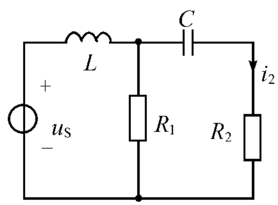
$$U_o(s)=\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2}+sC_2}}{R_1+\dfrac{1}{sC_1}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2}+sC_2}}U_1(s)$$

$$=\frac{R_2 s}{R_1R_2C_2s^2+(R_1+R_2+R_2\dfrac{C_2}{C_1})s+\dfrac{1}{C_1}}U_1(s)$$

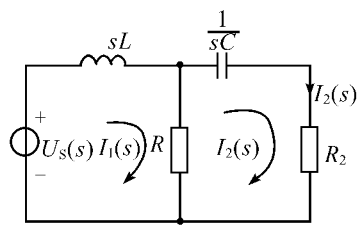
所以，其转移函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{U_0(s)}{U_1(s)}=\frac{\dfrac{1}{R_1C_2}s}{s^2+s(\dfrac{1}{R_2C_2}+\dfrac{1}{R_1C_2}+\dfrac{1}{R_1C_1})+\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

◎ 14－6　题 14－6 图所示电路中 $L=0.2\text{H}$，$C=0.1\text{F}$，$R_1=6\Omega$，$R_2=4\Omega$，$u_S(t)=7e^{-2t}\text{V}$，求 R_2 中的电流 $i_2(t)$，并求网络函数 $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{U_S(s)}$ 及单位冲激响应。



题 14－6 图



题解 14－6 图

分析　画出对应的运算电路，应用回路电流法求解即可，网络函数 $H(s)$ 进行拉氏反变换即可得单位冲激响应 $h(t)$。

解　题 14－6 图所示电路的运算电路如题解 14－6 图所示，其中电压源电压为

$$U_S(s)=\frac{7}{s+2}$$

应用回路电流法，对所选取的回路电流列出方程为

$$(sL+R_1)I_1(s)-R_1I_2(s)=U_S(s)$$

$$-R_1I_1(s)+(R_1+\frac{1}{sC}+R_2)I_2(s)=0$$

代入已知参数值，得

$$(0.2s+6)I_1(s)-6I_2(s)=U_S(s)$$

$$-6I_1(s)+(10+\frac{1}{0.1s})I_2(s)=0$$

解得

$$I_2(s)=\frac{3s}{s^2+13s+30}U_S(s)=\frac{21s}{(s+3)(s+10)(s+2)}$$

$$=\frac{9}{s+3}-\frac{3.75}{s+10}-\frac{5.25}{s+2}$$

故有

$$i_2(t)=(9\mathrm{e}^{-3t}-3.75\mathrm{e}^{-10t}-5.25\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{A}$$

网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{I_2(s)}{U_2(s)}=\frac{3s}{(s+3)(s+10)}=\frac{K_1}{s+3}+\frac{K_2}{s+10}$$

经计算得 $$K_1=-\frac{9}{7},\qquad K_2=\frac{30}{7}$$

故可得单位冲激响应 $$h(t)=-\frac{9}{7}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{30}{7}\mathrm{e}^{-10t}$$

○ 14－7 已知网络函数为

(1) $H(s)=\dfrac{2}{s-0.3}$；　　(2) $H(s)=\dfrac{s-5}{s^2-10s+125}$；

(3) $H(s)=\dfrac{s+10}{s^2+20s+500}$。

试定性作出单位冲激响应的波形。

解 (1) $$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-0.3}\right]=2\mathrm{e}^{0.3t}$$

由于 $H(s)$ 有 1 个极点，$p_1=0.3$，且为正值，所以，单位冲激响应 $h(t)$ 随 t 按指数增长，其波形如题解 14－7 图(a) 所示。

(2) 因为 $H(s)$ 的分母 $D(s)=0$ 的根 $p_1=5+\mathrm{j}10$，$p_2=5-\mathrm{j}10$ 为共轭复根。所以，设 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{s-5}{s^2-10s+125}=\frac{K_1}{s-5-\mathrm{j}10}+\frac{K_2}{s-5+\mathrm{j}10}$$

计算得

$$K_1=\frac{1}{2},\qquad K_2=K_1^*=\frac{1}{2}$$

故

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=2\mid K_1\mid \mathrm{e}^{5t}\cos(10t)=\mathrm{e}^{5t}\cos(10t)$$

由于 $H(s)$ 的极点是一对共轭复根，且实部为正值，所以单位冲激响应 $h(t)$ 是按增长的余弦规律变化，其波形如题解 14－7 图(b) 所示。

(3) 因为 $H(s)$ 的分母 $D(s)=0$ 的根为 $p_1=-10+\mathrm{j}20$，$p_2=-10-\mathrm{j}20$ 是共轭复根。

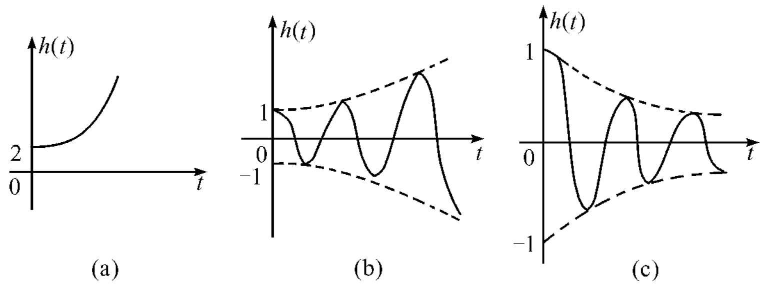
所以，设 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{s+10}{s^2+20s+500}=\frac{K_1}{s+10-j20}+\frac{K_2}{s+10+j20}$$

可求得　　$K_1=\frac{1}{2}$，　$K_2=K_1^*=\frac{1}{2}$

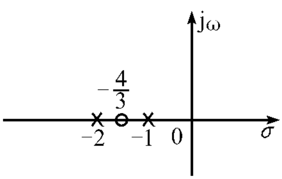
故　　$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=2\mid K_1\mid e^{-10t}\cos(20t)=e^{-10t}\cos(20t)$

由于 $H(s)$ 有一对共轭复根，且实部为负值，所以，单位冲激响应 $h(t)$ 是按衰减的余弦规律变化，其波形如题解 14－7 图(c) 所示。



题解 14－7 图

○ 14－8　设某线性电路的冲激响应 $h(t)=e^{-t}+2e^{-2t}$，试求相应的网络函数并绘出极点、零点图。



题解 14－8 图

解　所求线性电路的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

$$=\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$$

显然，$H(s)$ 有一个零点：$z_1=-\frac{4}{3}$；2 个极点：

$$p_1=-1,\quad p_2=-2$$

其极点、零点图如题解 14－8 图所示。

◎ 14－9　设网络的冲激响应为：

(1) $h(t)=\delta(t)+\frac{3}{5}e^{-t}$；

(2) $h(t)=e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\theta)$；

(3) $h(t)=\frac{3}{5}e^{-t}-\frac{7}{9}te^{-3t}+3t$。

试求相应的网络函数的极点。

分析　冲激函数 $h(t)$ 拉氏变换后即为网络函数 $H(s)$，根据 $H(s)$ 函数表达式即可求出相应极点。

解 (1)$h(t)$ 相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]=1+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{5s+8}{5(s+1)}$$

所以，$H(s)$ 有 1 个极点：$p_1=-1$；1 个零点：$z_1=-\dfrac{8}{5}$。

(2) 因为

$$\begin{aligned}h(t)&=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t+\theta)=\mathrm{e}^{-\alpha t}(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)\\&=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t\cos\theta+\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t\sin\theta\end{aligned}$$

其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]=\frac{\omega\cos\theta+(s+\alpha)\sin\theta}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

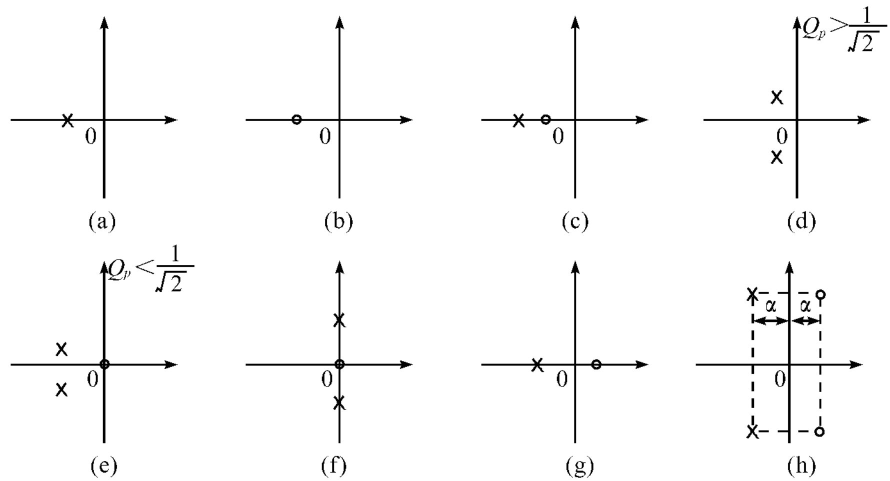
$H(s)$ 有极点：$p_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega$，$p_2=-\alpha-\mathrm{j}\omega$ 为共轭复根；1 个零点：$z_1=-\dfrac{\alpha\sin\theta+\omega\cos\theta}{\sin\theta}$。

(3)$h(t)$ 相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$\begin{aligned}H(s)&=\mathscr{L}[h(t)]=\frac{3}{5}\,\frac{1}{s+1}-\frac{7}{9}\,\frac{1}{(s+3)^2}+\frac{3}{s^2}\\&=\frac{27s^4+262s^3+1153s^2+2025s+1215}{45s^2(s+1)(s+3)^2}\end{aligned}$$

所以，$H(s)$ 有 5 个极点：$p_1=p_2=0$(二阶极点)，$p_3=-1$，$p_4=p_5=-3$。

○ 14－10 画出与题 14－10 图中零、极点分布相应的幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$。



题 14－10 图

解 根据图(a)的零点、极点分布可知，只有 1 个极点：$p_1=-\alpha$，其相应的网络函数 $H(s)$ 可设为

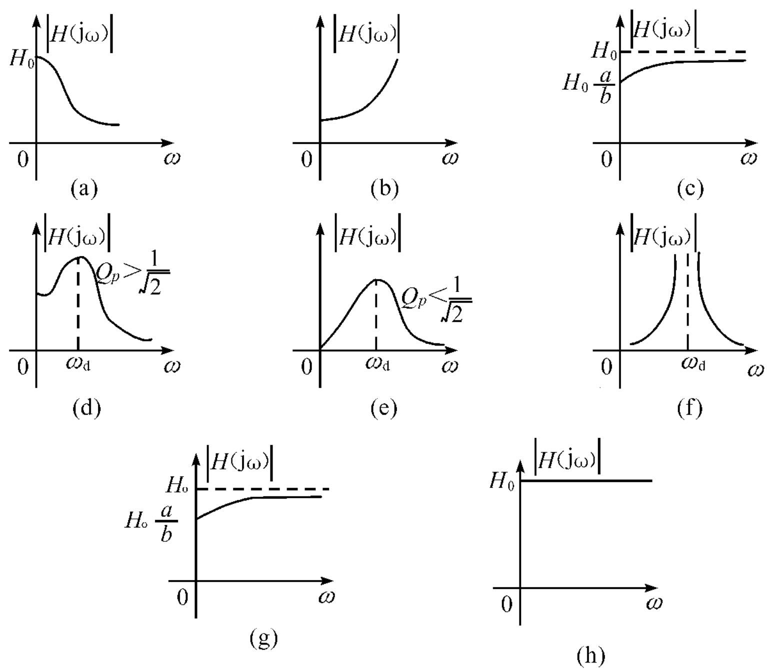
$$H(s) = \frac{H_0}{s+\alpha}$$

对应的幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 随 ω 的增长而单调减小，$|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 的波形如题解 14 — 10 图(a) 所示。

(2) 由图(b) 的零点、极点分布可知，只有 1 个零点：$z_1 = -\alpha$，其相应的网络函数 $H(s)$ 可设为

$$H(s) = H_0(s+\alpha)$$

其幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 如题解 14 — 10 图(b) 所示。



题解 14 — 10 图

(3) 由图(c) 的零点、极点分布可知，有 1 个零点：$z_1 = -a$；1 个极点：$p_1 = -b$ 且 $a < b$，其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = H_0\,\frac{s+a}{s+b}$$

其幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega = 0$ 时，有

$$|H(\mathrm{j}0)| = H_0\,\frac{a}{b} < H_0$$

而当 $\omega \to \infty$ 时，有 $|H(\mathrm{j}\omega)| = H_0$，所以，$|H((\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 的波形如题解 14 — 10 图(c) 所示。

(4) 由图(d) 零点、极点分布可知，有 2 个极点：$p_1 = -\alpha + \mathrm{j}\omega_{\mathrm{d}}$，$p_2 = -\alpha - \mathrm{j}\omega_{\mathrm{d}}$

为共轭复根,其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(S)=\frac{H_0}{(s+\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s+\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}=\frac{H_0}{(s+\alpha)^2+\omega_\mathrm{d}^2}$$

其幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 随 $\omega\to\infty$ 而衰减,但由于 $Q_p>\frac{1}{\sqrt{2}}$,所以,当 $\omega\approx\omega_\mathrm{d}$ 时,$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 将出现峰值,$|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 的波形如题解 14－10 图(d) 所示。

(5) 由图(e) 的零点、极点分布可知,有 2 个极点:$p_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$,$p_2=-\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$ 为共轭复根;1 个零点:$z_1=0$,其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{H_0s}{(s+\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s+\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}=\frac{H_0s}{(s+\alpha)^2+\omega_\mathrm{d}^2}$$

其幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega=0$ 时,有 $|H(\mathrm{j}0)|=0$;当 $\omega\to\infty$ 时,$|H(\mathrm{j}\omega)|=0$;而当 $\omega\approx\omega_\mathrm{d}$ 时,$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 达到最大值。由于此时有 $Q_p<\frac{1}{\sqrt{2}}$,所以,$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 随 ω 的变化较平坦,如题解 14－10 图(e) 所示。

(6) 由图(f) 的零点、极点分布可知,有 2 个极点:$p_1=\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$,$p_2=-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$ 为共轭复根;1 个零点:$z_1=0$,其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{H_0s}{(s-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}=\frac{H_0s}{s^2+\omega_\mathrm{d}^2}$$

幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega=0$ 时,$|H(\mathrm{j}0)|=0$;当 $\omega\to\infty$ 时,$|H(\mathrm{j}\omega)|=0$;当 $\omega=\omega_\mathrm{d}$ 时,$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 达到无穷大,所以,幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 的波形如题解 14－10 图(f) 所示。

(7) 由图(g) 的零点、极点分布可知,有 1 个极点:$p_1=-b$;1 个零点:$z_1=a$,其中 $b>a>0$。相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=H_0\,\frac{s-a}{s+b}$$

其 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega=0$ 时,有 $|H(\mathrm{j}0)|=H_0\,\frac{a}{b}$;当 $\omega\to\infty$ 时,$|H(\mathrm{j}\omega)|=H_0$,所以,幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 如题解 14－10 图(g) 所示。

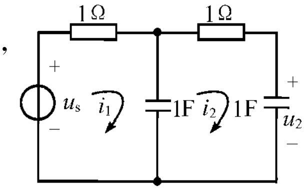
(8) 由图(h) 的零点、极点分布可知,有 2 个极点:$p_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$;$p_2=-\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$ 为共轭复根;2 个零点:$z_1=\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$,$z_1=\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$ 为共轭复根,其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=H_0\,\frac{(s-\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s-\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}{(s+\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s+\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}=H_0\,\frac{(s-\alpha)^2+\omega_\mathrm{d}^2}{(s+\alpha)^2+\omega_\mathrm{d}^2}$$

幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega=0$ 时,$|H(\mathrm{j}0)|=H_0$;当 $\omega\to\infty$ 时,$|H(\mathrm{j}\omega)|=H_0$,所以,$|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 如题解 14－10 图(h) 所示。

○ 14－11　已知电路如题 14－11 图所示,求网络函数 $H(s)=\frac{U_2(s)}{U_\mathrm{S}(s)}$,定性画出幅频

特性和相频特性示意图。



题 14－11 图

解　设电压象函数为 $U_S(s)$ 和 $U_2(s)$。应用回路电流法，根据图示选取的网孔电流列出方程

$$(1+\frac{1}{s})I_1(s)-\frac{1}{s}I_2(s)=U_S(s)$$

$$-\frac{1}{s}I_1(s)+(1+\frac{2}{s})I_2(s)=0$$

解得

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_S(s)}=\frac{1}{s^2+3s+1}$$

显然，$H(s)$ 有 2 个极点：

$$p_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}=-0.38197$$

$$p_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}=-2.61803$$

均为负实数，其零点、极点图如题解 14－11 图(a) 所示。且幅频特性 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 和相频特性 $\theta(\omega)$ 分别为

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{|(\mathrm{j}\omega)^2+3\mathrm{j}\omega+1|}=\frac{1}{|\mathrm{j}\omega-p_1||\mathrm{j}\omega-p_2|}$$

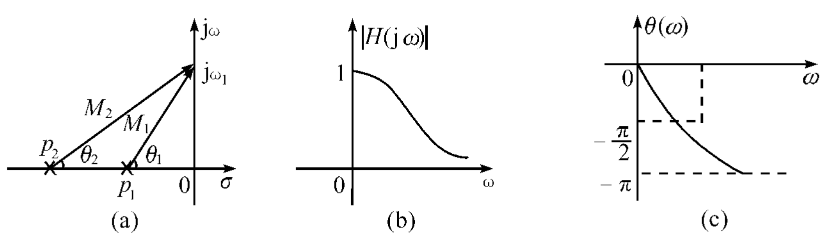
$$\theta(\omega)=\arg[H(\mathrm{j}\omega)]=-[\arg(\mathrm{j}\omega-p_1)+\arg(\mathrm{j}\omega-p_2)]$$

当 $\omega=\omega_1$ 时，有

$$|H(\mathrm{j}\omega_1)|=\frac{1}{|\mathrm{j}\omega-p_1||\mathrm{j}\omega-p_2|}=\frac{1}{M_1M_2}$$

$$\theta(\omega_1)=\arg[H(\mathrm{j}\omega_1)]=-(\theta_1+\theta_2)$$

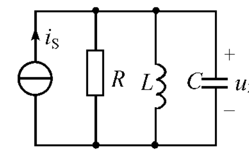
定性的幅频特性和相频特性的图形如题解 14－11 图(b)、(c) 所示。



题解 14－11 图

◎14－12　题 14－12 图所示电路为 RLC 并联电路，试用网络函数的图解法分析 $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{I_S(s)}$ 的频率响应特性。

分析 根据运算电路求解 $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{I_S(s)}$，把 $S=\mathrm{j}\omega$ 代入即可求解频率响应特性。



题 14－12 图

解 图示电路中，网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{I_S(s)}=\frac{1}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{sL}+sC}$$

$$=\frac{\dfrac{s}{C}}{s^2+\dfrac{1}{RC}s+\dfrac{1}{LC}}$$

$$=\frac{1}{C}\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$=H_0\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$，有

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{U_2}{I_S}=H_0\frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega-p_1)(\mathrm{j}\omega-p_2)}$$

显然，$H(\mathrm{j}\omega)$ 在 $\omega=0$ 处，有 1 个零点；设极点为一对共轭复数，即

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{1}{2RC}\right)^2}=-\delta\pm\mathrm{j}\omega_d$$

上式中，$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$，而 $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{\omega_d^2+\delta^2}$。可画出 $H(s)$ 的零点、极点图如题解 14－12 图(a) 所示。当 $\omega=\omega_1$ 时，有

$$|H(\mathrm{j}\omega_1)|=\frac{H_0\,|H(\mathrm{j}\omega)|}{|\mathrm{j}\omega-p_1|\,|\mathrm{j}\omega-p_2|}=\frac{H_0\omega_1}{M_1M_2}$$

$$\theta(\omega_1)=\arg[H(\mathrm{j}\omega_1)]=\frac{\pi}{2}-(\theta_1+\theta_2)$$

当 $\omega=0$ 时，$|H(\mathrm{j}0)|=0$，$\theta(\omega)=\dfrac{\pi}{2}$；当 $\omega\to\infty$ 时，$|H(\mathrm{j}\omega)|=0$，$\theta(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$；当 $\omega\approx\omega_0$ 时，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 达到最大值，$\theta(\omega)=0$。定性绘出的幅频特性和相频特性如题解 14－12 图(b)，(c) 所示。

○14－13 略

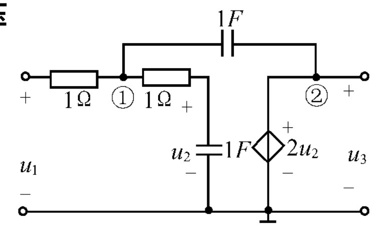
● 14－14 题 14－14 图所示电路，试求：

(1) 网络函数 $H(s)=\dfrac{U_3(s)}{U_1(s)}$，并绘出幅频特性示意图；

(2) 求冲激响应 $h(t)$。

分析 列写结点电压方程求解即可。

解　(1) 对图示电路应用结点电压法，结点电压 $U_{n1}(s)$ 和 $U_3(s)$ 的方程为



题 14－14 图

$$\left(1+s+\frac{s}{s+1}\right)U_{n1}(s)-sU_3(s)=U_1(s)$$

$$U_3(s)=2U_2(s)$$

$$U_2(s)=\frac{1}{s+1}U_{n1}(s)$$

将以上三式中 $U_{n1}(s)$，$U_2(s)$ 消去，可解得

$$H(s)=\frac{U_3(s)}{U_1(s)}=\frac{2}{s^2+s+1}=\frac{2}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

显然，$H(s)$ 有 2 个极点：$p_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$，$p_2=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为共轭复数，其零点、极点图如题解 14－14 图(a) 所示。令 $s=\mathrm{j}\omega$，有

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{U_3}{U_1}=\frac{2}{(\mathrm{j}\omega-p_1)(\mathrm{j}\omega-p_2)}$$

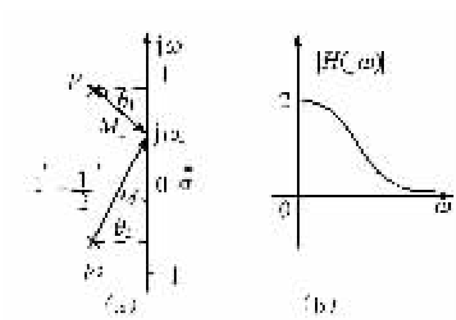
当 $\omega=\omega_1$ 时，则有

$$|H(\mathrm{j}\omega_1)|=\frac{2}{|\mathrm{j}\omega_1-p_1||\mathrm{j}\omega_1-p_2|}=\frac{2}{M_1M_2}$$

定性地绘出幅频特性 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 示意图如题解 14－14 图(b) 所示。

(2) 因为网络函数 $H(s)$ 可展开为

$$H(s)=\frac{2}{s^2+s+1}=\frac{K_1}{s+\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{K_2}{s+\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



题解 14－14 图

经计算，可求得：

$$K_1=1.155\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}},\qquad K_2=K_1^*=1.155\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

故冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = 2 \mid K_1 \mid e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{2})$$

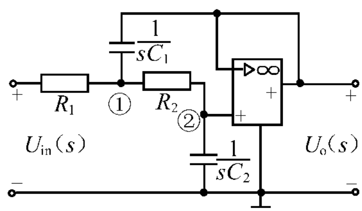
$$= 2.31e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

小结 网络函数 $H(s)$ 进行拉氏反变换即得冲激响应 $h(t)$，二者是一一对应关系。

●14－15 求题 14－15 图所示电路的电压转移函数 $H(s)=\frac{U_0(s)}{U_{in}(s)}$，设运放是理想的。

分析 列写结点电压方程，根据理想运放的虚短、虚断规则求解即可。

解 应用结点电压法，根据选取的结点电压 $U_{n1}(s)$ 和 $U_{n2}(s)$ 可列出方程，并注意到理想运放的规则 1（虚断路），得



题 14－15 图

$$(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+sC_1)U_{n1}(s)-\frac{1}{R_2}U_{n2}(s)-sC_1U_0(s)=\frac{U_{in}(s)}{R_1} \quad ①$$

$$-\frac{1}{R_2}U_{n1}(s)+(\frac{1}{R_2}+sC_2)U_{n2}(s)=0 \quad ②$$

运用理想运放的规则 2（虚短路），得：$U_{n2}(s)=U_0(s)$，代入到方程式 ① 和 ② 中，解得该电路的电压转移函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{U_0(s)}{U_{in}(s)}=\frac{1}{s^2R_1R_2C_1C_2+s(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})R_1R_2C_2+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2+s(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2})+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

小结 理想运放中虚短、虚断规则是极为重要的解题条件。

○ 14－16 (1) $L=\sqrt{2}H, C=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^4}}$

第十五章

电路方程的矩阵形式

学习要求

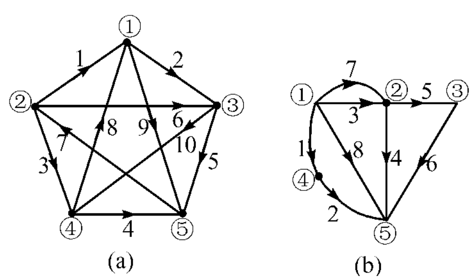
1. 知道什么叫割集、基本回路、基本割集；能写出关联矩阵 A，基本回路矩阵 B、基本割集矩阵 Q，并了解 A，B，Q 之间关系。
2. 能写出用 A，B，Q 表示的 KCL，KVL 方程，能写出矩阵形式的支路伏安关系。
3. 能写出基本回路电流方程、独立结点电位方程、基本割集电压方程，并会求解这些方程。
4. 知道什么叫状态变量、状态向量、初始状态向量、状态方程、输出方程；会选择状态变量；会列写电路的状态方程和输出方程，并写成矩阵形式。

知识网络图

- 电路方程和矩阵形式
  - 图的基本概念
    - 有向图
    - 树
    - 基本回路
    - 基本割集
  - 主要矩阵
    - 关联矩阵
    - 回路矩阵
    - 割集矩阵
  - 用矩阵表示的电路方程
    - KVL、KCL 矩阵方程
    - 回路电流矩阵方程
    - 结点电压矩阵方程
    - 割集电压矩阵方程
    - 列表矩阵方程
  - 状态方程

课后习题全解

○ 15－1　**以结点 ⑤ 为参考，写出题 15－11 图所示有向图的关联矩阵 A。**



题 15－1 图

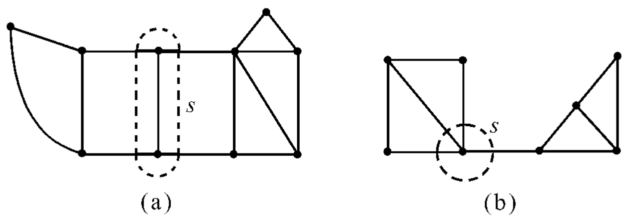
解　(a) 有向图的关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\\ ①\\ ②\\ ③\\ ④\end{array}\left[\begin{array}{cccccccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right]$$

(b) 有向图的关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$
A = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

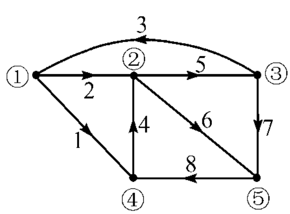
○ 15－2　**对于题15－2图(a)和(b)，与用虚线画出的闭合面 S 相切割的支路集合是否构成割集？为什么？**



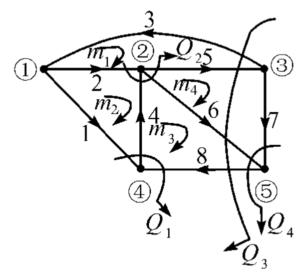
题15－2图

解　对于图(a)和(b)，与用虚线画出的闭合面 S 相切割的支路集合不构成割集。因为连通图 G 的一个割集是 G 的一个支路的集合，把这些支路移去将绕 G 恰好分离为两个部分，但是如果少移去其中一条支路，G 仍将是连通的。而该图中若把与图示中闭合面 S 相切割的支路集合移去，图 G 将分离为三个部分。

◎ 15－3　**对于题15－3图所示有向图，若选支路1、2、3、7为树，试写出基本割集矩阵和基本回路矩阵；另外，以网孔作为回路写出回路矩阵。**



题15－3图



题解15－3图

分析　根据基本割集矩阵与基本回路矩阵的定义求解即可。

解　选(1、2、3、7)为树，基本割集矩阵为单树支割集组即：$Q_1(1,4,8)$，$Q_2(2,4,5,6)$，$Q_3(3,5,6,8)$，$Q_4(7,6,8)$ 如题解15－3图所示。

从而，基本割集矩阵为

$$
\mathbf{Q}_f = \begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 8 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}
$$

基本回路矩阵为选定树支后的单连支回路组。以(1,2,3,7) **为树的单连支回路组为：**$l_1(1,2,4)$，$l_2(2,3,5)$，$l_3(1,3,7,8)$，$l_4(2,3,6,7)$，**与** Q_f **相统一，按先树支，后连支的顺序，可写出基本回路矩阵为（若要体现连支部分为单位矩阵可将** l_3 **与** l_4 **互换）**

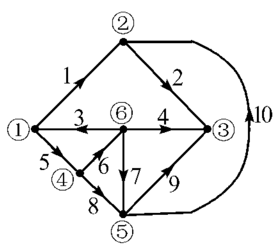
$$
\mathbf{B}_f = \begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 8 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

若以网孔作回路，如题解 15－3 **图所示。回路组为**

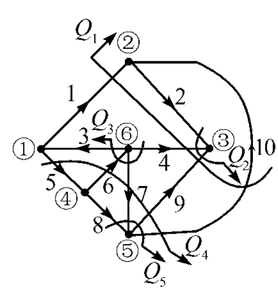
$m_1(2,3,5)$，$m_2(1,2,4)$，$m_3(4,6,8)$，$m_4(5,6,7)$ **则回路矩阵为**

$$
\mathbf{B}_m = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

○15－4　**对于题** 15－4 **图所示有向图，若选支路** 1、2、3、5、8 **为树，试写出基本割集矩阵和基本回路矩阵。**



题 15－4 **图**



题解 15－4 **图**

解　选树为(1,2,3,5,8),如题解 15－4 图所示。

单树支割集组为:$Q_1(1,4,9,10)$,$Q_2(2,4,9)$,$Q_3(3,4,6,7)$,$Q_4(5,6,7,9,10)$,$Q_5(8,7,9,10)$ 其基本割集矩阵 $\boldsymbol{Q}_\mathrm{f}$ 为

$$\boldsymbol{Q}_\mathrm{f}=\begin{array}{c} \\ Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5\end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 & 7 & 9 & 10\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}=[1_\mathrm{t}\ \vdots\ Q_l]$$

单连支回路组为:$l_1(4,1,2,3)$,$l_2(6,3,5)$,$l_3(7,3,5,8)$,$l_4(9,1,2,5,8)$,$l_5(10,1,5,8)$ 其基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}_\mathrm{f}$ 为

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{f}=\begin{array}{c} \\ l_1\\ l_2\\ l_3\\ l_4\\ l_5\end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 & 7 & 9 & 10\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[-Q_l^T\ \vdots\ 1_l]$$

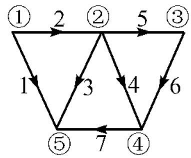
可见,若 $\boldsymbol{B}_\mathrm{f}$、$\boldsymbol{Q}_\mathrm{f}$ 的各列按相同支路编号排列,有关系 $\boldsymbol{B}_\mathrm{f}\boldsymbol{Q}_\mathrm{f}^\mathrm{T}=0$ 或 $\boldsymbol{Q}_\mathrm{f}\boldsymbol{B}_\mathrm{f}^\mathrm{T}=0$

○ 15－5　对题 15－5 图所示有向图,若选结点⑤为参考,并选支路 1、2、4、5 为树。试写出关联矩阵、基本回路矩阵和基本割集矩阵;并验证 $\boldsymbol{B}_\mathrm{t}^\mathrm{T}=-\boldsymbol{A}_\mathrm{t}^{-1}\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_1=-\boldsymbol{B}_\mathrm{t}^\mathrm{T}$。

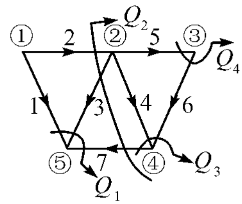
解　以结点⑤为参考,选树为(1,2,4,5)

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ ①\\ ②\\ ③\\ ④\end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=(A_t\ \vdots\ A_l)$$

如题解 15－5 图所示,单树支割集组为:$Q_1(1,3,7)$,$Q_2(2,3,7)$,$Q_3(4,6,7)$,$Q_4(5,6)$。其基本割集矩阵为



题 15－5 图



题解 15－5 图

$$\boldsymbol{Q}_\mathrm{f}=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&4&5&3&6&7\end{matrix}\\ \begin{matrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&-1&0&-1\\0&0&1&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&-1&0\end{bmatrix}\end{array}=[\mathbf{1}_\mathrm{t}\ \vdots\ \boldsymbol{Q}_\mathrm{l}]$$

单连支回路组为：$l_1(3,1,2)$，$l_2(6,4,5)$，$l_3(7,1,2,4)$。其基本回路矩阵为

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{f}=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&4&5&3&6&7\end{matrix}\\ \begin{matrix}l_1\\l_2\\l_3\end{matrix} & \begin{bmatrix}-1&1&0&0&1&0&0\\0&0&-1&1&0&1&0\\-1&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}=[B_t\ \vdots\ 1_l]$$

比较 $\boldsymbol{B}_\mathrm{f}$ 和 $\boldsymbol{Q}_\mathrm{f}$，可得 $\qquad \boldsymbol{Q}_\mathrm{l}=-\boldsymbol{B}_\mathrm{t}^\mathrm{T}$

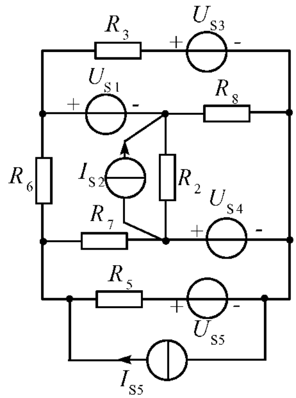
又因 $-\boldsymbol{A}_\mathrm{t}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}_\mathrm{l}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&0&1\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_\mathrm{t}^\mathrm{T}$

所以有 $\qquad \boldsymbol{B}_\mathrm{t}^\mathrm{T}=-\boldsymbol{A}_\mathrm{t}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}_\mathrm{l}$

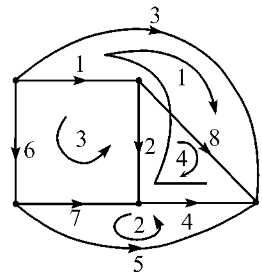
○ 15－6　对题 15－6 图所示电路，选支路 1、2、4、7 为树，用矩阵形式列出其回路电流方程。各支路电阻均为 5Ω，各电压源电压均为 3V，各电流源电流均为 2A。

解　选(1,2,4,7)为树，选基本回路为单连支回路，且选回路电流的方向与有向图题解 15－6 图中相应的连支方向一致。单连支回路组为：$l_1(3,1,2,4)$，$l_2(5,4,7)$，$l_3(6,1,2,7)$，$l_4(8,2,4)$。

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8\end{matrix}\\ \begin{matrix}l_1\\l_2\\l_3\\l_4\end{matrix} & \begin{bmatrix}-1&-1&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&1&0&-1&0\\-1&-1&0&0&0&1&1&0\\0&-1&0&-1&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$



题 15－6 图



题解 15－6 图

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}(0,R_2,R_3,0,R_5,R_6,R_7,R_8)$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_\mathrm{S}=[-\dot{U}_{S1}\quad 0\quad -\dot{U}_{S3}\quad -\dot{U}_{S4}\quad -\dot{U}_{S5}\quad 0\quad 0\quad 0]^\mathrm{T}$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_\mathrm{S}=[0\quad \dot{I}_{S2}\quad 0\quad 0\quad \dot{I}_{S5}\quad 0\quad 0\quad 0]^\mathrm{T}$$

则
$$\boldsymbol{BRB}^\mathrm{T}=\begin{bmatrix} R_2+R_3 & 0 & R_2 & R_2 \\ 0 & R_5+R_7 & -R_7 & 0 \\ R_2 & -R_7 & R_2+R_6+R_7 & R_2 \\ R_2 & 0 & R_2 & R_2+R_8 \end{bmatrix} \qquad ①$$

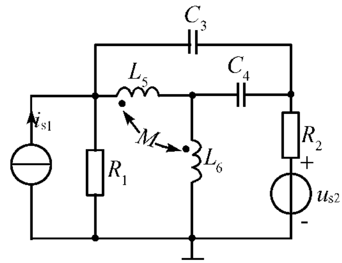
$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{U}}_\mathrm{S}-\boldsymbol{BR}\dot{\boldsymbol{I}}_\mathrm{S}=\begin{bmatrix} \dot{U}_{S1}-\dot{U}_{S2}+\dot{U}_{S4}+R_2\dot{I}_{S2} \\ \dot{U}_{S4}-\dot{U}_{S5}-R_2\dot{I}_{S2} \\ \dot{U}_{S1}+R_2\dot{I}_{S2} \\ \dot{U}_{S4}+R_2\dot{I}_{S2} \end{bmatrix} \qquad ②$$

回路电流方程的矩阵形式为　$\boldsymbol{BRB}^\mathrm{T}\dot{\boldsymbol{I}}_L=\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{U}}_\mathrm{S}-\boldsymbol{BR}\dot{\boldsymbol{I}}_\mathrm{S}$

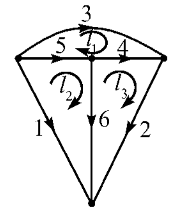
将已知数值入式 ①、**式** ② **可得回路电流方程的矩阵形式为**

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ 5 & -5 & 15 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{I}_{l1} \\ \dot{I}_{l2} \\ \dot{I}_{l3} \\ \dot{I}_{l4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 \\ -10 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

◎ 15－7　**对题** 15－7 **图所示电路，用运算形式（设零值初始条件）在下列** 2 **种不同情况下列出网孔电流方程：**(1) **电感** L_5 **和** L_6 **之间无互感；**(2)L_5 **和** L_6 **之间有互感** M。



题 15－7 图



题解 15－7 图

分析 先列写电路的回路矩阵，再由网孔电流方程 $Z_L(s)I_l(s)=BU_S(s)-BZ(s)I_S(s)$，即可求解。

解 (1) 如题解 15－7 图所示电感 L_5 和 L_6 之间 无互感

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ l_1\\ l_2\\ l_3\end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z}(s)=\mathrm{diag}\left[R_1,R_2,\frac{1}{sC_3},\frac{1}{sC_4},sL_5,sL_6\right]$$

$$\boldsymbol{U}_S(s)=[0\quad -U_{S2}(s)\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

$$\boldsymbol{I}_S(s)=[I_{S1}(s)\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

$$\boldsymbol{Z}_L(s)=\boldsymbol{BZ}(s)\boldsymbol{B}^T=\begin{bmatrix} sL_5+\frac{1}{sC_3}+\frac{1}{sC_4} & -sL_5 & -\frac{1}{sC_4}\\ -sL_5 & R_1+s(L_5+L_6) & -sL_6\\ -\frac{1}{sC_4} & -sL_6 & R_2+\frac{1}{sC_4}+sL_6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{U}}_S(s)-\boldsymbol{BZ}(s)\dot{\boldsymbol{I}}_S(s)=\begin{bmatrix}0\\ R_1\dot{I}_{S1}(s)\\ -\dot{U}_{S2}(s)\end{bmatrix}$$

该电路的网孔电流方程为 $\boldsymbol{Z}_L(s)\dot{\boldsymbol{I}}_l(s)=\boldsymbol{BU}_S(s)-\boldsymbol{BZ}(s)\dot{I}_S(s)$

即
$$\begin{bmatrix} sL_5+\frac{1}{sC_3}+\frac{1}{sC_4} & -sL_5 & -\frac{1}{sC_4}\\ -sL_5 & R_1+s(L_5+L_6) & -sL_6\\ -\frac{1}{sC_4} & -sL_6 & R_2+\frac{1}{sC_4}+sL_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{l1}(s)\\ I_{l2}(s)\\ I_{l3}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ R_1I_{S1}(s)\\ -U_{S2}(s)\end{bmatrix}$$

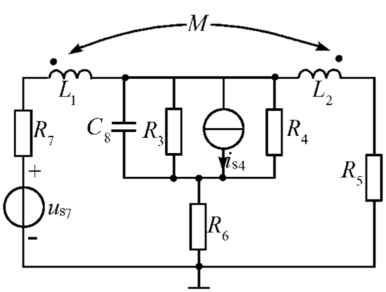
(2) 电感 L_5 和 L_6 之间有互感 M，矩阵 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{U}_S(s)$ 和 $\boldsymbol{I}_S(s)$ 均不变，只有支路运算阻抗 $\boldsymbol{Z}(s)$ 有变化，即

$$\boldsymbol{Z}(s)=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{sC_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{sC_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_5 & sM \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sM & sL_6 \end{bmatrix}$$

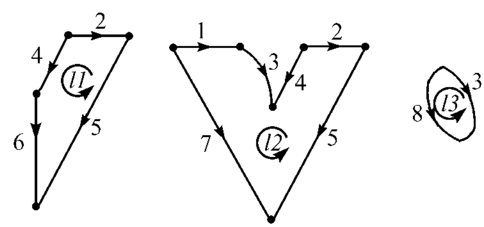
同理，得到电路的网孔电流方程为

$$\begin{bmatrix} sL_5+\dfrac{1}{sC_3}+\dfrac{1}{sC_4} & -s(L_5+M) & -\dfrac{1}{sC_4}+sM \\ -s(L_5+M) & R_1+s(L_5+L_6+2M) & -s(L_6+M) \\ -\dfrac{1}{sC_4} & -s(L_6+M) & R_2+\dfrac{1}{sC_4}+sL_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{l1}(s) \\ I_{l2}(s) \\ I_{l3}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ R_1 I_{S1}(s) \\ -U_{S2}(s) \end{bmatrix}$$

○ 15－8　对题 15－8 图所示电路，选支路 1、2、3、4、5 为树，试写出此电路回路电流方程的矩阵形式。



题 15－8 图



题解 15－8 图

解　选树(1,2,3,4,5)单连支回路组为：$l_1(6,4,2,5)$，$l_2(7,1,2,3,4,5)$，$l_3(8,3)$ 且选回路电流的方向与连支方向一致，如题解 15－8 图所示。

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

支路运算阻抗矩阵为

$$\boldsymbol{Z}(s)=\begin{bmatrix} sL_1 & -sM & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sM & sL_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{sC_8} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}(s)=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad -U_{\mathrm{S7}}(s)\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}}(s)=[0\quad 0\quad 0\quad -I_{\mathrm{S4}}(s)\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

将以上矩阵代入到式 $\boldsymbol{BZ}(s)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_l(s)=\boldsymbol{BU}_{\mathrm{S}}(s)-\boldsymbol{BZ}(s)\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}}(s)$ 中，可得回路电流方程的矩阵形式为

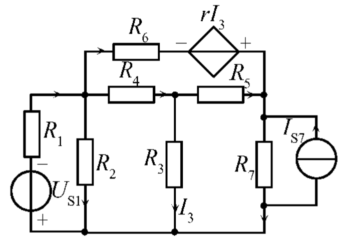
$$\begin{bmatrix} sL_2+R_4+R_5+R_6 & sL_2-sM+R_4+R_5 & 0 \\ sL_2-sM+R_4+R_5 & s(L_1+L_2-2M)+R_3+R_4+R_5+R_7 & R_3 \\ 0 & R_3 & R_3+\dfrac{1}{sC_8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{l1}(s) \\ I_{l2}(s) \\ I_{l3}(s) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} R_4 I_{\mathrm{S4}}(s) \\ -U_{\mathrm{S7}}(s)+R_4 I_{\mathrm{S4}}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

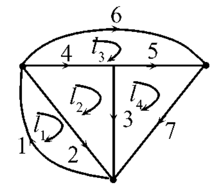
○ 15－9　写出题 15－9 图所示电路网孔电流方程的矩阵形式。

解　电路的有向图如题解 15－9 图所示，网孔电流的编写和方向的选取如图所示。

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



题 15—9 图



题解 15—9 图

支路电阻矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_S=[-\dot{U}_{S1}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_S=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad \dot{I}_{S7}]^T$$

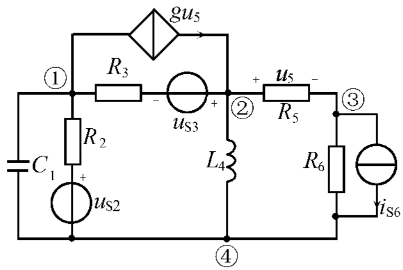
将以上各矩阵代入 $\boldsymbol{BRB}^T\dot{\boldsymbol{I}}_l=\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{U}}_S-\boldsymbol{BR}\dot{\boldsymbol{I}}_S$ 中，可得出网孔电流方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & -R_3 \\ 0 & -(r+R_4) & R_4+R_5+R_6 & r-R_5 \\ 0 & -R_3 & -R_5 & R_3+R_5+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{I}_{l1} \\ \dot{I}_{l2} \\ \dot{I}_{l3} \\ \dot{I}_{l4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dot{U}_{S1} \\ 0 \\ 0 \\ -R_7\dot{I}_{S7} \end{bmatrix}$$

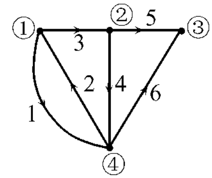
○ 15—10　题 15—10 图所示电路中电源角频率为 ω，试以结点 ④ 为参考结点，列写出该电路结点电压方程的矩阵形式。

解　电路的有向图如题解 15—10 图所示，选结点 ④ 为参考点，其关联矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\end{array}$$



题 15－10 图



题解 15－10 图

支路运算导纳矩阵为

$$\boldsymbol{Y}(s)=\begin{bmatrix} sC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}_S(s)=[0\ -U_{S2}(s)\ U_{S3}(s)\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

$$\boldsymbol{I}_S(s)=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ -I_{S6}(s)\ ]^T$$

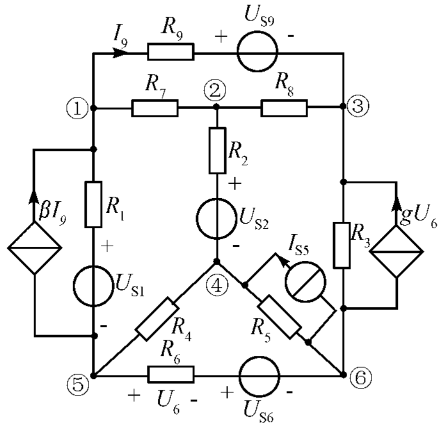
将以上各矩阵代入式 $\boldsymbol{AY}(s)\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{U}_n(s)=\boldsymbol{AI}_S(s)-\boldsymbol{AYU}_S(s)$ 中，便得到结点电压方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} sC_1+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3} & g-\frac{1}{R_3} & -g \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{sL_4}+\frac{1}{R_5}-g & g-\frac{1}{R_5} \\ 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{n1}(s) \\ U_{n2}(s) \\ U_{n3}(s) \end{bmatrix}$$

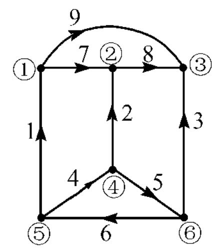
$$=\begin{bmatrix} \frac{U_{S2}(s)}{R_2}-\frac{U_{S3}(s)}{R_3} \\ \frac{U_{S3}(s)}{R_3} \\ -I_{S6}(\mathrm{s}) \end{bmatrix}$$

○ 15－11　试以结点⑥为参考结点，列出题 15－11 图所示电路的矩阵形式的结点电

压方程。



题 15－11 图



题解 15－11 图

解　电路有向图如题解 15－11 图所示，选结点 ⑥ 为参考点，其关联矩阵为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\\ ①\\ ②\\ ③\\ ④\\ ⑤\end{array}\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

又含受控源的支路为

$$I_1=\frac{1}{R_1}(U_1+U_{S1})+\beta I_9=G_1(U_1+U_{S1})+\beta G_9(U_9-U_{S9})$$

$$I_3=\frac{1}{R_3}U_3+gU_6=\frac{1}{R_3}U_3+g(-U_{S6}-U_6)=G_3U_3-g(U_6+U_{S6})$$

所以，支路电导矩阵为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G_9 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_9 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}=[\dot{U}_{\mathrm{S1}}\quad \dot{U}_{\mathrm{S2}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \dot{U}_{\mathrm{S6}}\quad 0\quad 0\quad -\dot{U}_{\mathrm{S9}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad \dot{I}_{\mathrm{S5}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

将以上各矩阵代入式 $\boldsymbol{AGA}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{AG}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}$ 中，则可得到该电路结点电压方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} G_1+G_7+G_9-\beta G_9 & -G_7 & -G_9+\beta G_9 & 0 & -G_1 \\ -G_7 & G_2+G_7+G_8 & -G_8 & -G_2 & 0 \\ -G_9 & -G_8 & G_3+G_8+G_9 & 0 & -g \\ 0 & -G_2 & 0 & G_2+G_4+G_5 & -G_4 \\ -G_1+\beta G_9 & 0 & -\beta G_9 & -G_4 & G_1+G_4+G_6 \end{bmatrix}$$

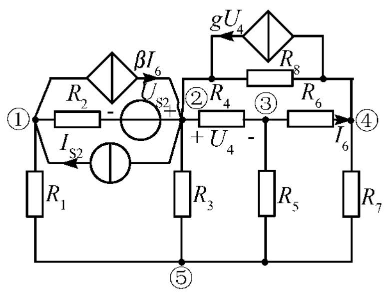
$$\cdot\begin{bmatrix} \dot{U}_{\mathrm{n1}} \\ \dot{U}_{\mathrm{n2}} \\ \dot{U}_{n3} \\ \dot{U}_{\mathrm{n4}} \\ \dot{U}_{n5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1\dot{U}_{\mathrm{S1}}+G_9\dot{U}_{s9}-\beta G_9\dot{U}_{\mathrm{S9}} \\ G_2\dot{U}_{\mathrm{S2}} \\ -g\dot{U}_{\mathrm{S6}}-G_9\dot{U}_{\mathrm{S9}} \\ \dot{I}_{\mathrm{S5}}-G_2\dot{U}_{\mathrm{S2}} \\ -G_1\dot{U}_{\mathrm{S1}}+G_6\dot{U}_{\mathrm{S6}}+\beta G_9\dot{U}_{\mathrm{S9}} \end{bmatrix}$$

● 15－12　对题 15－12 图所示电路，选结点 ⑤ 为参考结点，列出该电路矩阵形式的结点电压方程。

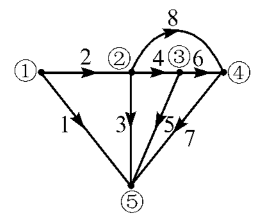
分析　先写出关联矩阵 $\boldsymbol{A}$，然后根据 $\boldsymbol{AGA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{AI}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{AGU}_{\mathrm{S}}$ 求解即可。

解　电路的有向图如题解 15－12 图所示，且选结点 ⑤ 为参考点，则关联矩阵为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\end{array}
$$



题 15－12 图



题解 15－12 图

含受控源支路的支路方程为

$$I_2=\frac{1}{R_2}(U_2+U_{S2})+\beta I_6-I_{S2}=G_2(U_2+U_{S2})+\beta G_6U_6-I_{S2}$$

$$I_8=\frac{1}{R_8}U_8-gU_4=G_8U_8-gU_4$$

支路电导矩阵为

$$
\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & \beta G_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & G_8 \end{bmatrix}
$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_S=[0\quad \dot{U}_{S2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_S=[0\quad \dot{I}_{S2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

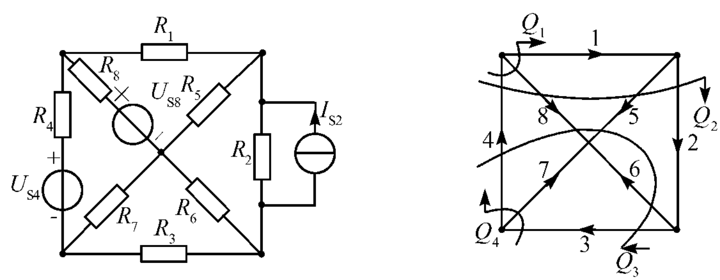
将以上各式代入到式 $\boldsymbol{AGA}^T\dot{\boldsymbol{U}}_n=\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_S-\boldsymbol{AG}\dot{\boldsymbol{U}}_S$ 中，则可得到该电路结点电压方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & \beta G_6 & -\beta G_6 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4+G_8-g & g-G_4-\beta G_6 & \beta G_6-G_8 \\ 0 & -G_4 & G_4+G_5+G_6 & -G_6 \\ 0 & g-G_8 & -g-G_6 & G_6+G_7+G_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \\ \dot{U}_{n3} \\ \dot{U}_{n4} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{S2}-G_2\dot{U}_{S2} \\ -\dot{I}_{S2}+G_2\dot{U}_{S2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

小结 含受控源支路的支路方程要特别对待。

◎ 15—13 **电路如题**15—13**图**(a)**所示,图**(b)**为其有向图,选支路**1、2、6、7**为树,列出矩阵形式的割集电压方程。**



(a) (b)

题 15—13 **图**

分析 选出合适的树,列写基本割集矩阵,再根据 $\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_f^T\boldsymbol{U}_t=\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{I}_S-\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}_S$ 求解即可。

解 **如题**15—13**图**(b)**所示有向图中,选树**(1,2,6,7),**则单树支割集组为**:Q_1(1,4,8),Q_2(2,4,5,8),Q_3(6,3,4,5,8),Q_4(7,3,4) **则基本割集矩阵为**

$$\boldsymbol{Q}_f = \begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

支路电导矩阵为

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}[G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8]$$

其中 $G_k=\dfrac{1}{R_k},k=1,2,\cdots,8$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}=[0\quad 0\quad 0\quad \dot{U}_{\mathrm{S4}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad -\dot{U}_{\mathrm{S8}}]^{\mathrm{T}}$$

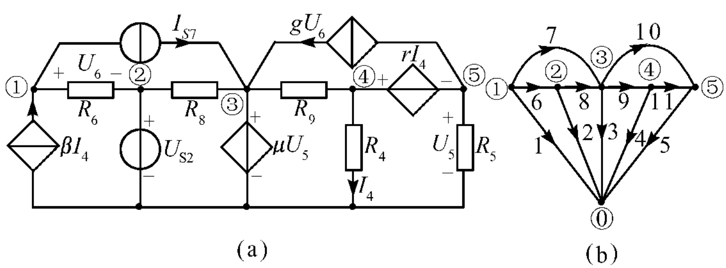
$$\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}=[0\quad \dot{I}_{\mathrm{S2}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

将以上各矩阵代入到式 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}$ 中，则可得到该电路割集电压方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} G_1+G_4+G_8 & G_4+G_8 & G_4+G_8 & -G_4 \\ G_4+G_8 & G_2+G_4+G_5+G_8 & G_4+G_5+G_8 & -G_4 \\ G_4+G_8 & G_4+G_5+G_8 & G_3+G_4+G_5+G_6+G_8 & -(G_3+G_4) \\ -G_4 & -G_4 & -(G_3+G_4) & G_3+G_4+G_7 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{\mathrm{t1}} \\ \dot{U}_{\mathrm{t2}} \\ \dot{U}_{\mathrm{t3}} \\ \dot{U}_{\mathrm{t4}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_4\dot{U}_{\mathrm{S4}}+G_8\dot{U}_{\mathrm{S8}} \\ \dot{I}_{\mathrm{S2}}+G_2\dot{U}_{\mathrm{S4}}+G_8\dot{U}_{\mathrm{S8}} \\ G_4\dot{U}_{\mathrm{S4}}+G_8\dot{U}_{\mathrm{S8}} \\ -G_4\dot{U}_{\mathrm{S4}} \end{bmatrix}$$

○ 15－14　电路如题 15－14 图(a) 所示，图(b) 为其有向图。试写出结点列表法中支路方程的矩阵形式。



题 15－14 图

解　结点列表方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{1}_{\mathrm{b}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{\mathrm{n}} \\ \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}} \end{bmatrix}$$

其中

$$
\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}
\\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{bmatrix}
$$

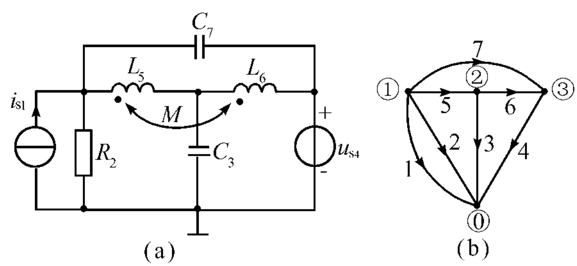
而 F 和 H 满足 $FU+HI=U_S+I_S$，由题 15－14 **图**(a) **的支路方向，可得**

$$
\boldsymbol{F}=\begin{array}{c}
\\ \\ 3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 10 \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 5 & & & & & & \\
0 & & & & \vdots & & & & & & \\
 & 1 & & & \vdots & & & & & & \\
\cdots & \cdots & 1 & & -\mu & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \mathbf{0} & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g & & & & 0 & \\
 & & & & & \vdots & & & & & 1 \\
 & & & & & 6 & & & & &
\end{array}\right]
$$

$$
\boldsymbol{H}=
\begin{array}{rl}
 & \begin{matrix}&&&4&&&&&&&\end{matrix}\\
\begin{matrix}1\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 11\end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & & & \beta & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & & \\
 & & & -R_4 & & & & & & \mathbf{0} & \\
 & & & & -R_5 & & & & & & \\
 & & & & & -R_6 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & \mathbf{0} & & & & & & -R_8 & & & \\
 & & & & & & & & -R_9 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & -r & & & & & & & 0
\end{bmatrix}\\
 & \begin{matrix}&&&4&&&&&&&\end{matrix}
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}}=[0\quad U_{\mathrm{S2}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad I_{\mathrm{s7}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

◎ 15－15　**电路如题 15－15 图(a) 所示,图(b) 为其有向图。写出结点列表方程的矩阵形式。**



题 15－15 图

分析　根据结点列表方程的基本矩阵形式列写结点列表方程即可。

解　结点列表方程的矩阵形式为

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & \boldsymbol{A}\\
-\boldsymbol{A}^{T} & \mathbf{1}_b & 0\\
0 & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{H}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{n}}\\
\dot{\boldsymbol{U}}\\
\dot{\boldsymbol{I}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0\\
0\\
\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}+\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}
\end{bmatrix}
$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\\ ①\\ ②\\ ③\end{array}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&-1&-1\end{bmatrix}$$

而 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足 $\boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{I}}=\dot{\boldsymbol{U}}_S+\dot{\boldsymbol{I}}_S$，由图 15－36(a) **所示 电路，根据图** 15－36(b) **的支路方向可得**

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0&&&&&&\\&1&&&&\boldsymbol{0}&\\&&-j\omega C_3&&&&\\&&&1&&&\\&\boldsymbol{0}&&&1&&\\&&&&&1&\\&&&&&&-j\omega C_7\end{bmatrix},\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&-R_2&&&&\boldsymbol{0}&\\&&1&&&&\\&&&0&&&\\&\boldsymbol{0}&&&-j\omega L_5&-j\omega M&\\&&&&-j\omega M_5&-j\omega L_6&\\&&&&&&1\end{bmatrix}$$

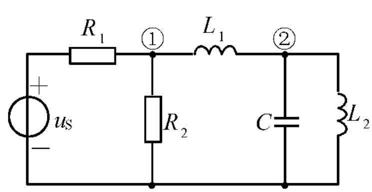
$$\dot{\boldsymbol{U}}_S+\dot{\boldsymbol{I}}_S=[-\dot{I}_{S1}\quad 0\quad 0\quad \dot{U}_{S4}\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

○15－16　**略**

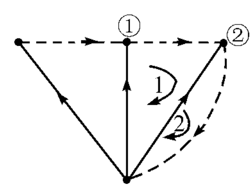
●15－17　**列出题** 15－17 **图所示电路的状态方程。若选结点** ① **和** ② **的结点电压为输出量，写出输出方程。**

分析　**根据** KCL、KVL **列写各微分方程，确定状态变量，即可列状态方程。**

解　**电路的有向图如题解** 15－17 **图所示。选特有树如图中实线所示 。**



题 15－17 **图**



题解 15－17 **图**

特有树：指树支包含了电路中所有电压源支路和电容支路，它的连支包含了电路中所有电流源支路和电感支路。

对只含有树支的结点 ② **列出** KCL **方程：**

$$C\frac{du_C}{dt}=i_{L2}-i_{L1} \qquad ①$$

对由电路 L_1 和 L_2 连支所确定的基本回路 1 **和** 2 **列** KVL **方程**

$$L_1 \frac{\mathrm{d}i_{L_1}}{\mathrm{d}t} = u_C - u_{R2} \qquad ②$$

$$L_2 \frac{\mathrm{d}i_{L_2}}{\mathrm{d}t} = -u_C \qquad ③$$

消去非状态量 u_{R2}，$u_{R2} = R_2(i_{L1} - i_{R1})$，而 $i_{R1} = \dfrac{1}{R_1}(u_S - u_{R2})$

经整理，得 $$u_{R2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_{L1} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_S$$

将 u_{R2} 代入式 ②，并整理得到该电路的状态方程为

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{C} i_{L1} + \frac{1}{C} i_{L2}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L_1} u_C - \frac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)} i_{L1} + \frac{R_2}{L_1(R_1 + R_2)} u_S$$

$$\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L_2} u_C$$

若写成矩阵形式则为：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}$ 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} & \dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)} & 0 \\ -\dfrac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{R_2}{L_1(R_1 + R_2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = [u_C \quad i_{L1} \quad i_{L2}]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{v} = [u_S(t)]$$

若选结点 ① 和 ② 的结点电压为输出量，则

$$u_{n1} = -u_{R2} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_{L1} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_S$$

$$u_{n2} = -u_C$$

若写成矩阵形式，则为：$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}$

其中

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = [u_S(t)]$$

小结　一般情况下选取 u_C 和 i_L 为状态量。

○15－18　略

第十六章

二端口网络

学习要求

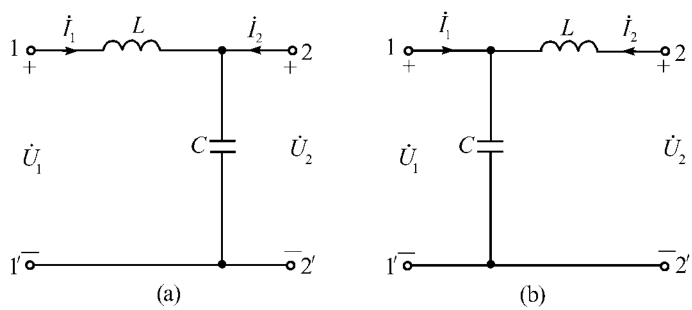
1. 了解二端口网络的定义及应满足的条件(端口条件)。
2. 深刻理解二端口网络方程与参数的物理意义,会用多种方法求解二端口网络的参数,并能写出网络方程。
3. 了解二端口网络等效网络的定义与条件,能画出Z,Y,H参数的等效网络,并会应用。
4. 深刻理解二端口网络函数的定义,并会用一种参数(例如传输参数)表示网络函数。
5. 了解二端口网络的连结方式及其参数的计算公式。
6. 了解回转器、负阻抗变换器的定义、端口伏安关系、性质及其应用。
7. 对有载二端口网络会进行分析计算(电压、电流、功率、最大功率、瞬态过程等)。

知识网络图

- 二端口网络
  - 二端口网络
    - 定义
    - 网络端口特性方程和参数
    - 等效网络
    - 网络函数
    - 连接方式
    - 分析计算
  - 回转器
  - 负阻抗变换器

课后习题全解

○16－1　**求题 16－1 图所示二端口的 Y、Z 和 T 参数矩阵。**



题 16－1 图

解　(1) 对图(a)所示电路，标出端口电压 $\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$ 及其参考方向，由 KVL，KCL 和元件 VCR，得

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{j\omega L}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = -j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_1 + j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{1}{j\omega L}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + j\omega C\dot{U}_2 = j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_1 + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\dot{U}_2$$

所以，Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} -j\dfrac{1}{\omega L} & j\dfrac{1}{\omega L} \\ j\dfrac{1}{\omega L} & j(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}) \end{bmatrix}$$

同理可得

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})\dot{I}_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_2$$

得出 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) & \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\ \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} & \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \end{bmatrix}$$

根据 KCL,KVL 和元件 VCR,可得出端口 $1-1'$ 处电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$ 为

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_1 + \dot{U}_2 \qquad ①$$

$$\dot{I}_1 = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \qquad ②$$

将 ② 代入式 ① 中,得

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L(\mathrm{j}\omega C\dot{U}_2 - \dot{I}_2) + \dot{U}_2 = (1-\omega^2 LC)\dot{U}_2 - \mathrm{j}\omega L\dot{I}_2 \qquad ③$$

将方程式 ③ 与式 ② 联立可得 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1-\omega^2 LC & \mathrm{j}\omega L \\ \mathrm{j}\omega C & 1 \end{bmatrix}$$

以上 Z 和 T 参数矩阵还可以利用它们与 Y 参数之间的关系求得。

(2) 对图(b) 所示电路,指定端口电压 $\dot{U}_1$,$\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_1$,$\dot{I}_2$ 及参考方向,由 KCL,KVL 和元件 VCR,得

$$\dot{I}_1 = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})\dot{U}_1 + \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega L}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega L}\dot{U}_1 - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega L}\dot{U}_2$$

所以,Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) & \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega L} \\ \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega L} & -\mathrm{j}\,\frac{1}{\omega L} \end{bmatrix}$$

同理,可得 Z 参数方程

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L\ \dot{I}_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \frac{1}{\mathrm{j}\ \omega C}\dot{I}_1 + \mathrm{j}\ (\omega L - \frac{1}{\omega C})\dot{I}_2$$

故,Z 参数矩阵为

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \end{bmatrix}$$

又因为端口 $1-1'$ 处的电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$ 为

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 - j\omega L \dot{I}_2 \qquad ①$$

$$\dot{I}_1 = j\omega C \dot{U}_1 - \dot{I}_2 \qquad ②$$

将式 ① 代入到式 ② 中，得

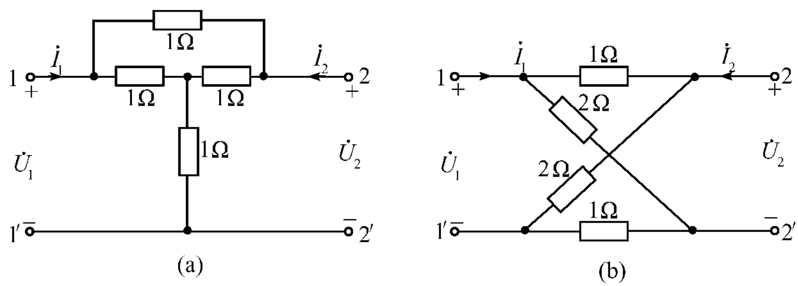
$$\dot{I}_1 = j\omega C(\dot{U}_2 - j\omega L \dot{I}_2) - \dot{I}_2 = j\omega C \dot{U}_2 - (1-\omega^2 LC)\dot{I}_2$$

③

将方程式 ① 与式 ③ 联立，可得出 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega L \\ j\omega C & 1-\omega^2 LC \end{bmatrix}$$

◎ 16－2　求题 16－2 图所示二端口 Y 和 Z 参数矩阵。



题 16－2 图

分析　根据 Y、Z 参数的定义求解即可。

解　(1) 对题 16－2 图(a) 电路，其端口电压 $\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$ 及参考方向如图所示，求它的 Y_{11} 和 Y_{21} 时，把端口 $2-2'$ 短路，在端口 $1-1'$ 处施加电压 $\dot{U}_1$ 则可求得

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 + \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)\dot{U}_1 = \frac{5}{3}\dot{U}_1$$

$$-\dot{I}_2 = \dot{U}_1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\dot{U}_1\right) = \frac{4}{3}\dot{U}_1$$

根据定义可求得 Y_{11} 和 Y_{21} 为

$$Y_{11}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}=\frac{5}{3}\text{S},\qquad Y_{21}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}=-\frac{4}{3}\text{S}$$

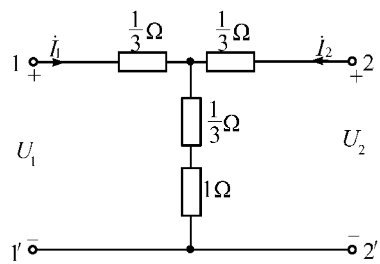
由对称性和互易性分别可得出

$$Y_{22}=Y_{11}=\frac{5}{3}\text{S},\qquad Y_{12}=Y_{21}=-\frac{4}{3}\text{S}$$

所以，Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}\text{S}$$

对图(a) **电路先进行** △—Y **电阻等效变换，如题解** 16－2 **图所示，其端口电压** $\dot{U}_1$ **和** $\dot{U}_2$ **为**



题解 16－2 **图**

$$\dot{U}_1=\frac{1}{3}\dot{I}_1+(\frac{1}{3}+1)(\dot{I}_1+\dot{I}_2)=\frac{5}{3}\dot{I}_1+\frac{4}{3}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2=\frac{1}{3}\dot{I}_2+(\frac{1}{3}+1)(\dot{I}_1+\dot{I}_2)=\frac{4}{3}\dot{I}_1+\frac{5}{3}\dot{I}_2$$

该电路 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}\Omega$$

(2) **对题** 16－2 **图**(b) **电路，设端口电压** $\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$ **和电流** $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$ **及其参考方向如图示，在求** Y_{11} **和** Y_{21} **时，把端口** 2—2′ **短路，即** $\dot{U}_2=0$，**在端口** 1—1′ **处施加电压** $\dot{U}_1$，**则可求得**

$$\dot{I}_1=\frac{1}{\frac{2}{1+2}+\frac{2}{1+2}}\dot{U}_1=\frac{3}{4}\dot{U}_1$$

$$-\dot{I}_2 = \frac{2}{1+2}\dot{I}_1 - \frac{1}{2+1}\dot{I}_1 = \frac{1}{3}\dot{I}_1 = \frac{1}{4}\dot{U}_1$$

根据定义可求得 Y_{11} 和 Y_{21} 为

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\Big|_{\dot{U}_2=0} = \frac{3}{4}\ \mathrm{S},\qquad Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\Big|_{\dot{U}_2=0} = -\frac{1}{4}\ \mathrm{S}$$

由该电路的对称性和互易性可得出

$$Y_{22} = Y_{11} = \frac{3}{4}\mathrm{S},\qquad Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{4}\ \mathrm{S}$$

所以，Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\mathrm{S}$$

同理，在求 Z 参数中的 Z_{11} 和 Z_{21} 时，把端口 $2—2'$ 开路，即 $\dot{I}_2=0$，在端口 $1—1'$ 处施加电流 $\dot{I}_1$，则可求得

$$\dot{U}_1 = (3 \mathbin{/\!/} 3)\,\dot{I}_1 = \frac{3}{2}\,\dot{I}_1$$

$$\dot{U}_2 = \frac{2}{1+2}\,\dot{U}_1 - \frac{1}{2+1}\,\dot{U}_1 = \frac{1}{3}\,\dot{U}_1 = \frac{1}{2}\,\dot{I}_1$$

根据定义可求得 Z_{11} 和 Z_{21} 为

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{3}{2}\Omega,\quad Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{1}{2}\Omega$$

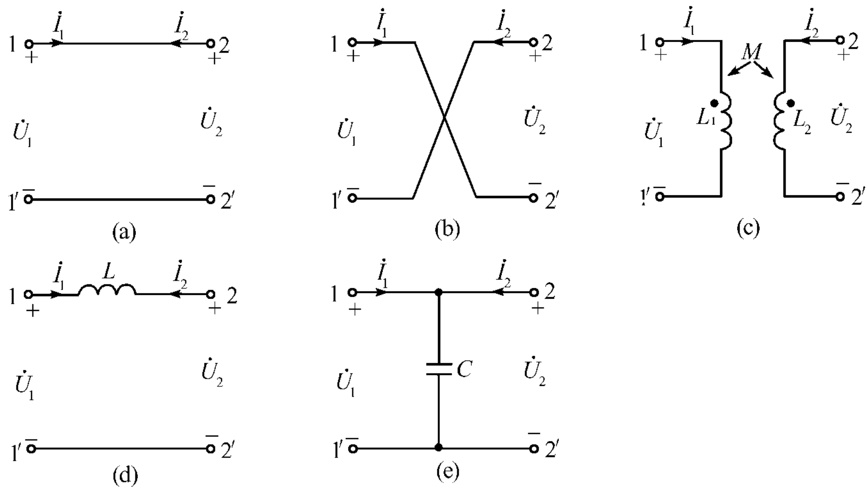
由于该电路是对称和互易的，则分别可得出

$$Z_{22} = Z_{11} = \frac{3}{2}\Omega,\qquad Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{2}\Omega$$

故可写出 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\Omega$$

○ 16－3　求题 16－3 图所示二端口的 T 参数矩阵。



题 16－3 图

解 对题16－3图中的五个二端口电路，标出它们的端口电压$\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$和电流$\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$及其参考方向。

(1) 对图(a) 电路，满足方程

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2, \qquad \dot{I}_1 = -\dot{I}_2$$

所以，T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 对图(b) 电路，有 T 参数方程

$$\dot{U}_1 = -\dot{U}_2, \qquad \dot{I}_1 = \dot{I}_2$$

故可得 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) 图(c) 电路为耦合电感，其端口电压电流满足方程

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \qquad ①$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 \qquad ②$$

由方程式 ② 得

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega M}\dot{U}_2 - \frac{L_2}{M}\dot{I}_2 \qquad ③$$

将式 ③ 代入到式 ① 中，可得

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega M}\dot{U}_2 - \frac{L_2}{M}\dot{I}_2\right) + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 = \frac{L_1}{M}\dot{U}_2 - \mathrm{j}\omega\frac{L_1L_2 - M^2}{M}\dot{I}_2 \qquad ④$$

方程式④和式③,即为 T 参数方程,所以,耦合电感的 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\dfrac{L_1}{M} & \mathrm{j}\omega\dfrac{L_1L_2-M^2}{M}\\ -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega M} & \dfrac{L_2}{M}\end{bmatrix}$$

(4) 对图(d) 电路,其 T 参数方程为

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2-\mathrm{j}\omega L\dot{I}_2,\quad \dot{I}_1=-\dot{I}_2$$

故 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{j}\omega L\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

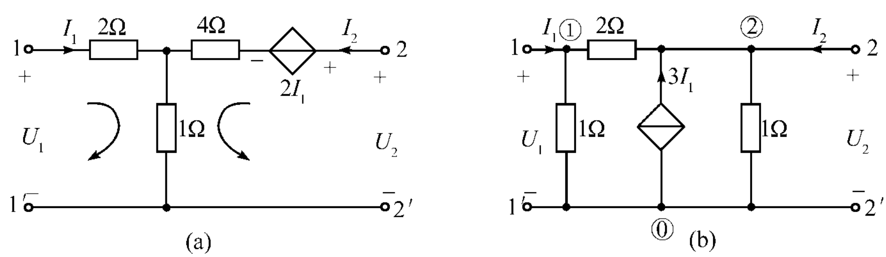
(5) 对图(e) 电路,其 T 参数方程为

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2,\quad \dot{I}_1=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_2-\dot{I}_2$$

所以,T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \mathrm{j}\omega C & 1\end{bmatrix}$$

● 16－4　求题 16－4 图所示二端口的 Y 参数矩阵。



题 16－4 图

分析　可根据网孔电流法列写出方程,求出 Z 参数矩阵,由 Z 参数矩阵同 Y 参数矩阵的关系求解即可。

解　(1) 对图(a) 电路,根据指定的端口电压 U_1,U_2 和电流 I_1,I_2 及参考方向,应用网孔电流法,有

$$U_1=(2+1)I_1+I_2=3I_1+I_2$$
$$U_2=2I_1+(4+1)I_2+I_1=3I_1+5I_2$$

所以,Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}\Omega$$

由 Y 参数与 Z 参数之间的关系,可得 Y 参数矩阵

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{12} & -\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

(2) 对图(b)电路，根据图中的端口电压 U_1，U_2 和电流 I_1，I_2 及参考方向，应用结点电压法，有

$$I_1=(1+\frac{1}{2})U_1-\frac{1}{2}U_2=\frac{3}{2}U_1-\frac{1}{2}U_2 \qquad ①$$

$$I_2=-\frac{1}{2}U_1+(\frac{1}{2}+1)U_2-3I_1=-\frac{1}{2}U_1+\frac{3}{2}U_2-3I_1 \qquad ②$$

将式①代入到式②中，消去 I_1，得

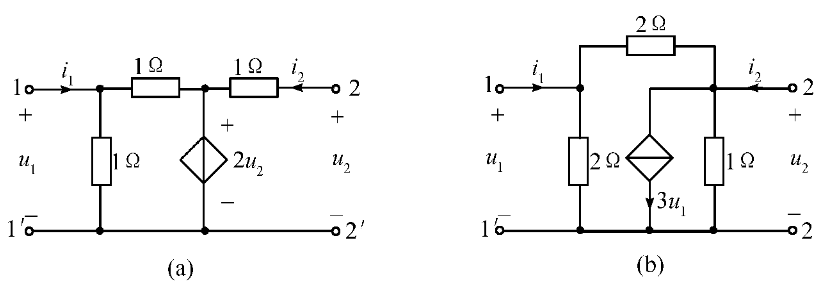
$$I_2=-5U_1+3U_2 \qquad ③$$

将式①与式③联立，即为 Y 参数方程，可写出 Y 参数矩阵

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -5 & 3\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

小结　求解各个参数矩阵时，先求出最易求解的参数矩阵，然后根据各变换关系依次求解。

○ 16－5　求题 16－5 图所示二端口的混合参数(H)矩阵。



题 16－5 图

解　(1) 对图(a)电路，指定端口电压 u_1，u_2 和电流 i_1，i_2 及其参考方向。由 KCL，KVL 和元件 VCR，可得

$$u_1=(i_1-u_1)+2u_2$$

经整理，则有

$$u_1=\frac{1}{2}i_1+u_2$$

而

$$i_2=u_2-2u_2=-u_2$$

故可得出 H 参数矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

(2) 对图(b) 电路，指定端口电压和电流及参考方向，应用结点电压法，有

$$i_1=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})u_1-\frac{1}{2}u_2$$

则有

$$u_1=i_1+\frac{1}{2}u_2 \tag{①}$$

而

$$i_2=-\frac{1}{2}u_1+(\frac{1}{2}+1)u_2+3u_1=\frac{5}{2}u_1+\frac{3}{2}u_2 \tag{②}$$

将式 ① 代入到式 ② 中，得

$$i_2=\frac{5}{2}i_1+\frac{11}{4}u_2 \tag{③}$$

联立式 ① 与式 ③，即得 H 参数方程，所以，可写出 H 参数矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{11}{4}\end{bmatrix}$$

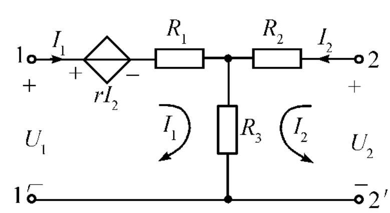
○ 16－6　已知题 16－6 图所示二端口的 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}10 & 8\\ 5 & 10\end{bmatrix}\Omega$$

求 R_1，R_2，R_3 和 r 的值。

解　题 16－6 图所示电路中，标出端口电压 U_1，U_2 和电流 I_1，I_2 及其参考方向，应用网孔电流法，有

$$\begin{aligned}U_1&=(R_1+R_3)I_1+R_3I_2+rI_2\\&=(R_1+R_3)I_1+(R_3+r)I_2\\U_2&=R_3I_1+(R_2+R_3)I_2\end{aligned}$$



题 16－6 图

所以，其 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}R_1+R_3 & R_3+r\\ R_3 & R_2+R_3\end{bmatrix}$$

将它与已知的 Z 参数矩阵比较，可得各元件参数值为

$$R_3=5\Omega,\quad r=3\Omega$$

$$R_2=5\Omega,\quad R_1=5\Omega$$

○ 16－7　已知二端口的 Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1.5 & -1.2\\ -1.2 & 1.8\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

求 H 参数矩阵，并说明该二端口中是否有受控源。

解　因为 Y 参数方程为

$$I_1=Y_{11}U_1+Y_{12}U_2 \quad ①$$

$$I_2=Y_{21}U_1+Y_{22}U_2 \quad ②$$

若 $Y_{11}\neq 0$，由式 ① 可得

$$U_1=\frac{1}{Y_{11}}I_1-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}U_2 \quad ③$$

将式 ③ 代入到式 ② 中，得

$$I_2=\frac{Y_{21}}{Y_{11}}I_1+\frac{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}}U_2 \quad ④$$

以上式 ③ 与式 ④ 即为 H 参数方程，对照 H 参数方程的标准式，可得

$$H_{11}=\frac{1}{Y_{11}},\quad H_{12}=-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$$

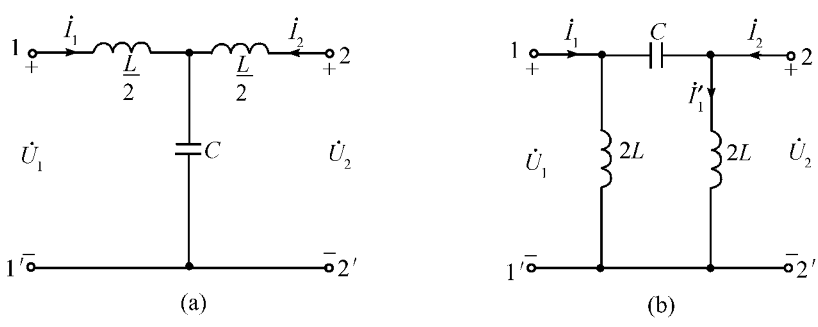
$$H_{21}=\frac{Y_{21}}{Y_{11}},\quad H_{22}=\frac{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}}$$

将已知的 Y 参数代入到以上各式中，可得出 H 参数矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0.667 & 0.8\\ -0.8 & 0.84\end{bmatrix}$$

由于 Y 参数矩阵中的 $Y_{12}=Y_{21}=-1.2\mathrm{S}$，说明该二端口互易性，所以，该二端口网络中不含有受控源。

○ 16－8　求题 16－8 图所示二端口的 Z 参数、T 参数。



题 16－8 图

解　(1) 对图(a) 电路，指定端口电压 $\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$ 及其参考方向，在求 Z_{11}

和 Z_{21} 时，令 $\dot{I}_2=0$，在端口 $1—1'$ 处施加电流 $\dot{I}_1$，则可求得

$$Z_{11}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\mathrm{j}\omega\frac{L}{2}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=\mathrm{j}\left(\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Z_{21}=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

由于电路具有对称性和互易性，所以，有

$$Z_{22}=Z_{11}=\mathrm{j}\left(\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C}\right),\qquad Z_{12}=Z_{21}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

故，其 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\mathrm{j}\left(\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C}\right) & -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\\ -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} & \mathrm{j}\left(\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C}\right)\end{bmatrix}$$

根据 T 参数与 Z 参数之间的关系，可得

$$A=D=\frac{Z_{11}}{Z_{21}}=\frac{\mathrm{j}\omega\frac{L}{2}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=1-\frac{\omega^2LC}{2}$$

$$B=\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}=\frac{Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}=\mathrm{j}\omega L\left(1-\frac{\omega^2LC}{4}\right)$$

$$C=\frac{1}{Z_{21}}=\mathrm{j}\omega C$$

所以，T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1-\frac{\omega^2LC}{2} & \mathrm{j}\omega L\left(1-\frac{\omega^2LC}{4}\right)\\ \mathrm{j}\omega C & 1-\frac{\omega^2LC}{2}\end{bmatrix}$$

(2) 对图(b)电路，标出其端口电压和电流及其参考方向。由于该电路也具有对称性和互易性，所以，有：$Z_{22}=Z_{11}$ 和 $Z_{12}=Z_{21}$，在求 Z_{11} 和 Z_{21} 时，令 $\dot{U}_2=0$，在端口 $1—1'$ 处施加电流 $\dot{U}_1$，由定义可求得

$$Z_{22}=Z_{11}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\frac{(\mathrm{j}2\omega L)\left(\mathrm{j}2\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)}{\mathrm{j}2\omega L+\mathrm{j}2\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{\mathrm{j}2\omega L(1-2\omega^2LC)}{1-4\omega^2LC}$$

$$Z_{12}=Z_{21}=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\frac{\mathrm{j}2\omega LI'_1}{\dot{I}_1}=\frac{\mathrm{j}2\omega L}{\dot{I}_1}\times\frac{\mathrm{j}2\omega L}{\mathrm{j}2\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}+\mathrm{j}2\omega L}\dot{I}_1$$

$$= -\mathrm{j}\,\frac{4\omega^3L^2C}{1-4\omega^2LC}$$

同理，根据 T 参数和 Z 参数之间的关系，可求得

$$A = D = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{\dfrac{\mathrm{j}2\omega L(1-2\omega^2LC)}{1-4\omega^2LC}}{-\mathrm{j}\,\dfrac{4\omega^3L^2C}{1-4\omega^2LC}} = \frac{2\omega L(1-2\omega^2LC)}{-4\omega^3L^2C} = 1-\frac{1}{2\omega^2LC}$$

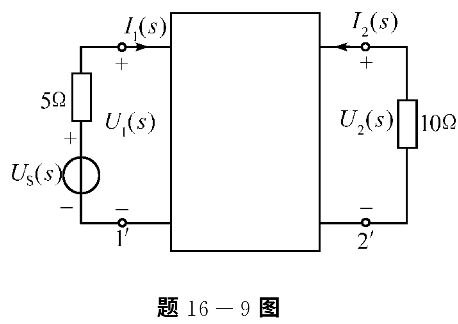
$$B = \frac{\Delta_Z}{Z_{21}} = \frac{Z_{11}^2-Z_{21}^2}{Z_{21}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C}$$

$$C = \frac{1}{Z_{21}} = \frac{1-4\omega^2LC}{-\mathrm{j}4\omega^3L^2C} = \mathrm{j}\,\frac{1-4\omega^2LC}{4\omega^3L^2C}$$

◎ 16－9　电路如题 16－9 图所示，已知二端口的 H 参数矩阵为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 40 & 0.4 \\ 10 & 0.1 \end{bmatrix}$$

求电压转移函数 $U_2(s)/U_S(s)$。



题 16－9 图

分析　根据 H 参数矩阵列写各电压、电流关系方程式，再联立端口所接外电路方程求解即可。

解　题 16－9 图所示电路中，标出端口电压 $U_1(s)$ 及参考方向。由已知的 H 参数矩阵，可写出其对应方程式

$$U_1(s) = 40I_1(s) + 0.4U_2(s) \qquad ①$$

$$I_2(s) = 10I_1(s) + 0.1U_2(s) \qquad ②$$

端口所接外电路满足方程

$$U_1(s) = U_S(s) - 5I_1(s) \qquad ③$$

$$I_2(s) = -\frac{1}{10}U_2(s) \qquad ④$$

将以上式 ③ 和式 ④ 分别代入到式 ① 和式 ② 中，整理后得

$$45I_1(s) + 0.4U_2(s) = U_S(s)$$

$$10I_1(s) + 0.2U_2(s) = 0$$

在以上两式中，消去电流 $I_1(s)$，可得电压转移函数

$$\frac{U_2(s)}{U_S(s)} = \frac{1}{-0.5} = -2$$

○ 16－10　已知二端口参数矩阵为

(a)　$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 60/9 & 40/9 \\ 40/9 & 100/9 \end{bmatrix}\Omega$；　　(b)$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\mathrm{S}$。

试问该二端口是否有受控源，并求它的等效 Π 型电路。

解　(a) 由 Z 参数矩阵知：$Z_{12}=Z_{21}=\frac{40}{9}\Omega$，所以，该二端口中不含有受控源。根据 Z 参数矩阵可求得其 Y 参数矩阵

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{Z_{22}}{\Delta_Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}\\ -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2045 & -0.0818\\ -0.0818 & 0.1227\end{bmatrix}\text{S}$$

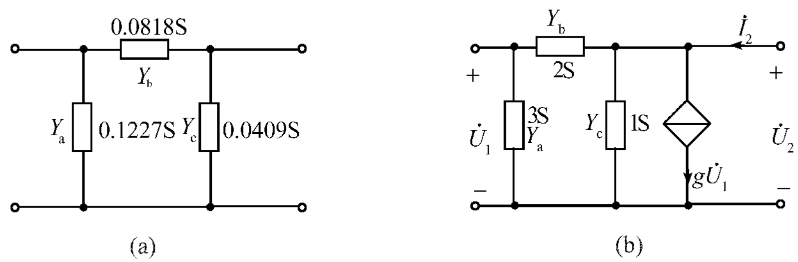
则其等效 Π 形电路如题解 16－10 图(a) 所示，其中有

$$Y_a+Y_b=Y_{11}=0.2045\text{S},\qquad Y_b=-Y_{12}=0.0818\text{S}$$

$$Y_b+Y_c=Y_{22}=0.1227\text{S}$$

解得

$$Y_a=0.1227\text{S},\qquad Y_b=0.0818\text{S},\qquad Y_c=0.0409\text{S}$$



题解 16－10 图

(b) 由 Y 参数矩阵知：$Y_{12}\neq Y_{21}$，所以，该二端口中含有受控源，其等效 Π 形电路如题解 16－10 图(b) 所示。其 Y 参数方程为

$$\dot{I}_1=(Y_a+Y_b)\dot{U}_1-Y_b\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2=(-Y_b+g)\dot{U}_1+(Y_b+Y_c)\dot{U}_2$$

将以上两式的系数与已知 Y 参数矩阵比较，得

$$Y_a+Y_b=5\text{S},\quad -Y_b=-2\text{S},\quad -Y_b+g=0,\quad Y_b+Y_c=3\text{S}$$

可解得

$$Y_b=2\text{S},\quad Y_a=3\text{S},\quad g=Y_b=2\text{S},\quad Y_c=1\text{S}$$

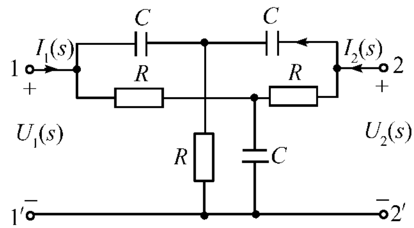
◎ 16－11　求题 16－11 图所示双 T 电路的 Y 参数。

分析　由电路图可知其具有对称性和互易性，再根据 Y 参数定义求解即可。

解　图示电路中，指定其端口电压和电流及其参考方向。由于该电路具有对称性和互易性，所以，有

$$Y_{22}=Y_{11}=\frac{I_1(s)}{U_1(s)}\bigg|_{U_2(s)=0}=\frac{sC\left(s+\frac{1}{RC}\right)}{2\left(s+\frac{1}{2RC}\right)}+\frac{s+\frac{1}{RC}}{R\left(s+\frac{2}{RC}\right)}$$

$$Y_{12}=Y_{21}=\frac{I_2(s)}{U_1(s)}\bigg|_{U_2(s)=0}=-\left(\frac{s^2C}{2\left(s+\frac{1}{2RC}\right)}+\frac{\frac{1}{R^2C}}{s+\frac{2}{RC}}\right)$$



题 16－11 图

○ 16－12　(1) $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}A & B\\ AY+C & BY+D\end{bmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}A & AZ+B\\ C & CZ+D\end{bmatrix}$

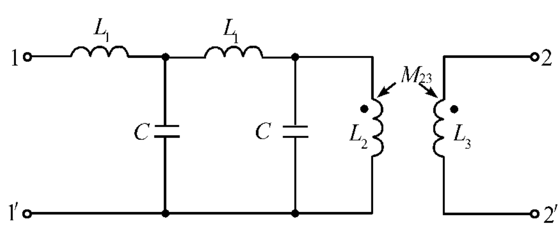
●16－13　**利用题 16－1，16－3 的结果，求出题 16－13 图所示二端口的 T 参数矩阵。设已知 $\omega L_1=10\Omega$，$\frac{1}{\omega C}=20\Omega$，$\omega L_2=\omega L_3=8\Omega$，$\omega M_{23}=4\Omega$。**

分析　图中所示二端口电路可看作三个二端口的级联，级联的 $\boldsymbol{T}$ 参数矩阵关系为 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_3$，根据公式求解即可。

解　题 16－13 图所示二端口电路可看作是三个二端口的级联，利用题 16－1 图(a)，题 16－3 图(c) 的 T 参数结果，可得出该二端口的 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1-\omega^2L_1C & \mathrm{j}\omega L_1\\ \mathrm{j}\omega C & 1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}\frac{L_2}{M} & \mathrm{j}\omega\frac{L_2L_3-M^2}{M}\\ -\mathrm{j}\frac{1}{\omega M} & \frac{L_3}{M}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\frac{10}{20} & \mathrm{j}10\\ \mathrm{j}\frac{1}{20} & 1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}\frac{8}{4} & \mathrm{j}\frac{8^2-4^2}{4}\\ -\mathrm{j}\frac{1}{4} & \frac{8}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.25 & \mathrm{j}27\\ \mathrm{j}0.025 & 0.1\end{bmatrix}$$

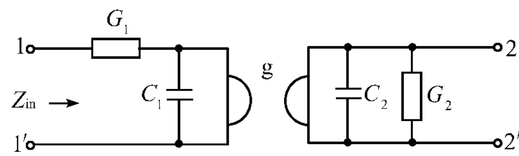


题 16－13 图

小结　级联的端口网络参数矩阵关系是解题的关键。

◯16－14　略

◯ 16－15　试求题16－15图所示电路的输入阻抗 Z_{in}。已知 $C_1 = C_2 = 1\mathrm{F}$，$G_1 = G_2 = 1\mathrm{S}$，$g = 2\mathrm{S}$。



题16－15图

解　题16－15图所示电路中，当回转器输出端口接一导纳 $Y_2(s) = G_2 + sC_2$（端口2—2′开路）时，根据回转器的VCR，可得出从回转器输入端口看进去的输入导纳为

$$Y_1(s) = \frac{g^2}{Y_2(s)} = \frac{g^2}{G_2 + sC_2}$$

所以，该电路的阻抗 $Z_{in}(s)$ 为

$$\begin{aligned} Z_{in}(s) &= \frac{1}{G_1} + \frac{1}{sC_1 + Y_1(s)} \\ &= \frac{1}{G_1} + \frac{1}{sC_1 + \dfrac{g^2}{G_2 + sC_2}} \\ &= \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + s + 4} \end{aligned}$$

第十七章

非线性电路简介

学习要求

1. 了解非线性电阻、电容、电感的定义及其特性的描述与分类；了解静态电阻、电容、电感的意义与应用；了解动态电阻（电导）、电容、电感的意义与应用。
2. 会用图解法、小信号等效电路法、分段线性化法、数值计算：牛顿拉夫逊法，分析计算简单的非线性电阻电路。
3. 会用分段线性化法分析计算简单的非线性动态电路。

知识网络图

- 非线性电路简介
  - 非线性电路元件
    - 非线性电阻
    - 非线性电感
    - 非线性电容
  - 非线性电路分析方法
    - 小信号分析法
    - 分段线性化方法

课后习题全解

○ 17－1　**如果通过非线性电阻的电流为 $\cos(\omega t)$A，要使该电阻两端的电压中含有 4ω 角频率的电压分量，试求该电阻的伏安特性，写出其解析表达式。**

解　由题意知，非线性电阻中的电流为：

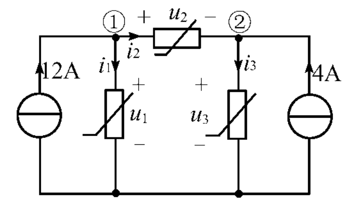
$$i = \cos(\omega t)\mathrm{A}$$

因为 $\cos(4\omega t) = 2\cos^2(2\omega t) - 1 = 2[2\cos^2(\omega t) - 1]^2 - 1$

$= 1 - 8\cos^2(\omega t) + 8\cos^4(\omega t)$

因此当非线性电阻的伏安特性为 $u = 1 - 8i^2 + 8i^4$ 时，该电阻两端的电压中含有 4ω 角频率的电压分量。

○ 17—2　写出题 17—2 图所示电路的结点电压方程，假设电路中各非线性电阻的伏安特性为 $i_1 = u_1^3, i_2 = u_2^2, i_3 = u_3^{3/2}$。



题 17—2 图

解　结点 ① 和 ② 的 KCL 方程为

$$i_1 + i_2 = 12 \qquad ①$$

$$-i_2 + i_3 = 4 \qquad ②$$

将已知伏安特性中的电压用结点电压表示，即

$$i_1 = u_1^3 = u_{n1}^3, \quad i_2 = u_2^2 = (u_{n1} - u_{n2})^2$$

$$i_3 = u_3^{3/2} = u_{n2}^{3/2}$$

将 i_1, i_2, i_3 的表达式代入式 ① 和式 ② 中，得

$$\begin{cases} u_{n1}^3 + (u_{n1} - u_{n2})^2 = 12 \\ -(u_{n1} - u_{n2})^2 + u_{n2}^{3/2} = 4 \end{cases}$$

即为题 17—2 图所示电路的结点电压方程。

◎17—3　一个非线性电容的库伏特性为 $u = 1 + 2q + 3q^2$，如果电容从 $q(t_0) = 0$ 充电至 $q(t) = 1\text{C}$。试求此电容储存的能量。

分析　电容储存能量 $W = \int_{t_0}^{t} P\,\mathrm{d}t, P = ui = u\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，根据公式求解即可。

解　电容充电时，它所吸收的功率为 $p = ui = u\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = (1 + 2q + 3q^2)\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

则此电容储存的能量为 $W = \int_{t_0}^{t} p\,\mathrm{d}t = \int_{q(t_0)}^{q(t)} (1 + 2q + 3q^2)\mathrm{d}q$

$$= \int_0^1 (1 + 2q + 3q^2)\mathrm{d}q = 3\text{J}$$

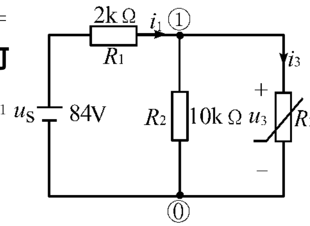
○ 17—4　非线性电感的韦安特性为 $\Psi = i^3$，当有 2A 电流通过该电感时，试求此时的静态电感值。

解　当 $i = 2\text{A}$ 时，静态电感值为 $L = \dfrac{\Psi(i)}{i}\Big|_{i=2\text{A}} = \dfrac{i^3}{i}\Big|_{i=2\text{A}} = 4\text{H}$

动态电感值为

$$L_{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}i}\Big|_{i=2\text{A}} = 3i^2\Big|_{i=2\text{A}} = 12\text{H}$$

○ 17－5　**已知题 17－5 图所示电路中** $U_S = 84\text{V}$，$R_1 = 2\text{k}\Omega$，$R_2 = 10\text{k}\Omega$，**非线性电阻** R_3 **的伏安特性可用下式表示**：$i_3 = 0.3u_3 + 0.04u_3^2$。**试求电流** i_1 **和** i_3。



题 17－5 图

解　**如题 17－5 图所示，列结点电压方程**

$$\begin{cases} u_{n1} = u_3 \\ \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)u_{n1} + i_3 = \dfrac{u_S}{R} \end{cases}$$

代入已知条件 $R_1 = 2 \times 10^3\Omega$，　$R_2 = 10 \times 10^3\Omega$，　$u_S = 84\text{V}$

以及 $i_3 = 0.3u_3 + 0.04u_3^2$

得
$$u_3^2 + 7.515u_3 - 1.05 = 0$$

解得
$$u_3{}' = 0.1372\text{V}，\quad u_3{}'' = -7.6522\text{V}$$

当 $u_3{}' = 0.1372\text{V}$ **时**

$$i_3{}' = 0.3u_3{}' + 0.04(u_3{}')^2 = 0.04192\text{A}$$

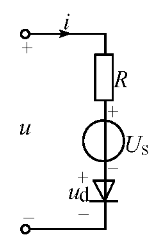
$$i_1{}' = \frac{u_3{}'}{R_2} + i_3{}' = \frac{0.1372}{10 \times 10^3} + 0.04192 \approx 0.04193\text{A}$$

当 $u_3{}'' = -7.6522\text{V}$

$$i_3{}'' = 0.3u_3{}'' + 0.04(u_3{}'')^2 \approx 0.04659\text{A}$$

$$i_1{}'' = \frac{u_3{}''}{R_2} + i_3{}'' \approx 0.04582\text{A}$$

◎17－6　**题 17－6 图所示电路由一个线性电阻** R，**一个理想二极管和一个直流电压源串联组成。已知** $R = 2\Omega$，$U_S = 1\text{V}$ **在** $u - i$ **平面上画出对应的伏安特性。**

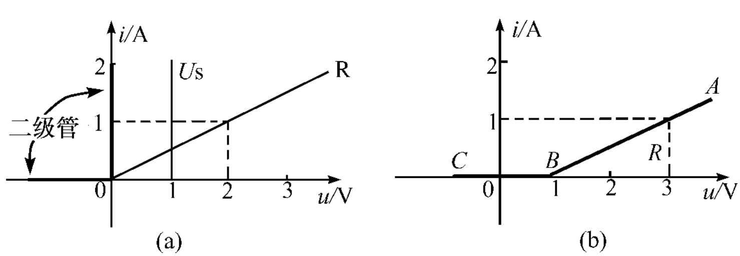


题 17－6 图

分析　**根据各元件的伏安特性即可求解，电阻** R，**电源** U_S **及理想二级管串联。**

解　**各元件的伏安特性如题解 17－6 图(a) 所示，电路方程为**

$$u = Ri + u_d + U_S$$

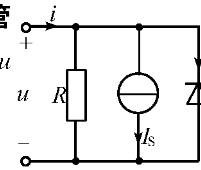


题解 17－6 图

即 $$u = 2i + 1,\quad i > 0$$

需求解的伏安特性可用图解法求得，如题解 17－6 图(b) 的折线$\overline{ABC}$（当 $u < 1$ 时，$i = 0$）。

○ 17－7　题 17－7 图所示电路由一个线性电阻 R，一个理想二极管和一个直流电流源并联组成。已知 $R = 1\Omega$，$I_S = 1\text{A}$，在 $u - i$ 平面上画出对应的伏安特性。



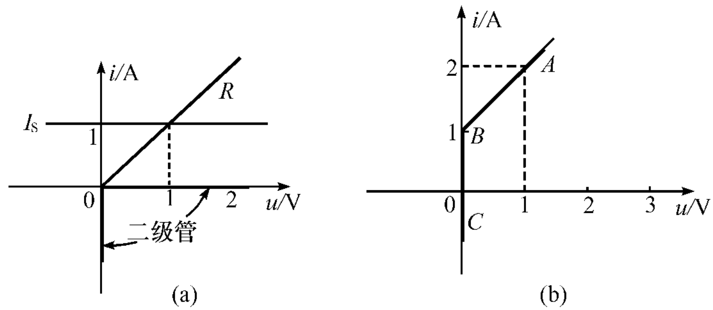
题 17－7 图

解　各元件的伏安特性如题解 17－7 图(a) 所示，电路方程为

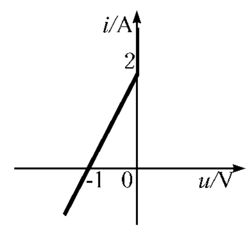
$$i = \frac{u}{R} + I_S + i_d$$

当 $u > 0$ 时，$i_d = 0$，故 $i = u + 1$；

当 $u < 0$ 时，二级管完全导通，电路被短路。当 $u > 0$ 时，用图解法求得的伏安特性如题解 17－7 图(b) 中的折线$\overline{ABC}$。



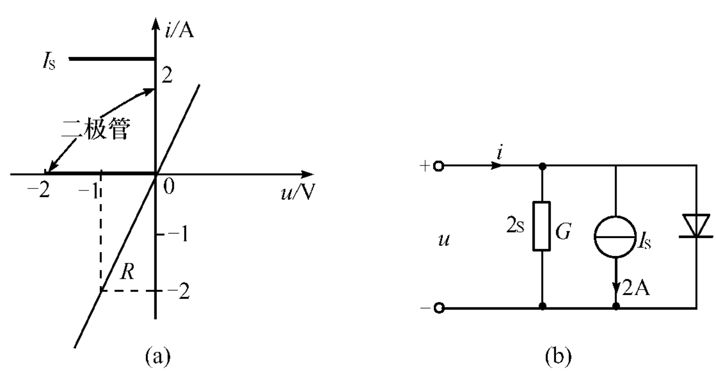
题解 17－7 图



题 17－8 图

○ 17－8　试设计一个由线性电阻，独立电源和理想二极管组成的一端口，要求它的伏安特性具有题 17－8 图所示特性。

解　由图示的伏安特性可得出



题解 17－8 图

$$u=\begin{cases}0 & i\geqslant 2\text{A}\\ \dfrac{1}{2}i-1 & i<2\text{A}\end{cases}$$

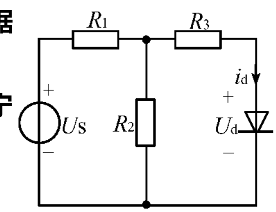
所以 $$i=2u+2=Gu+I_S,\quad u<0$$

当 $i>2\text{A}=I_S$ 时，$u=0$。这样，可以分解为题解 17－8 图(a) 所示的三条伏安特性曲线。由此可以构成题解 17－8 图(b) 所示电路。

● 17－9　设题 17－9 图所示电路中二极管的伏安特性可用下式表示

$$i_d=10^{-6}(e^{40u_d}-1)\text{A}$$

式中 u_d 为二极管的电压，其单位为 V。已知 $R_1=0.5\Omega$，$R_2=0.5\Omega$，$R_3=0.75\Omega$，$U_S=2\text{V}$。试用图解法求出静态工作点。



题 17－9 图

分析　先将电路左边部分等效为戴维宁等效电路，然后根据 $u-i$ 关系，用图解法求解即可。

解　将题 17－9 图中二级管左边部分的线性电路作戴维宁等效，等效电路如题解 17－9 图(a) 所示。

$$u_{oc}=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_S=\frac{1}{2}\times 2=1\text{V}$$

其中

$$R_{eq}=R_3+R_1\;/\!/\;R_2=0.75+0.25=1\Omega$$

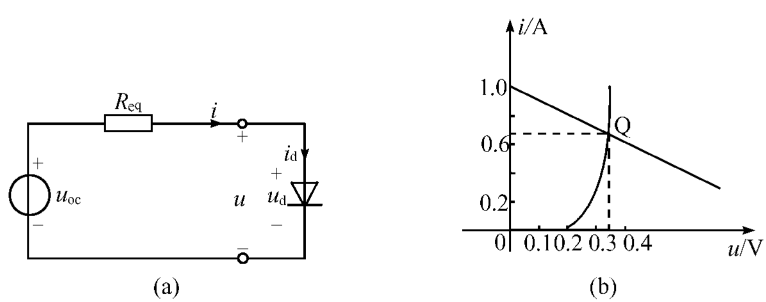
图中线性电路一端口的伏安特性为

$$u=u_{oc}-R_{eq}i=1-i$$

而二极管的伏安特性为 $$i_d=10^{-6}(e^{40u_d}-1)\text{A}$$

其中 $u_d=u$，$i_d=i$。在 $u-i$ 平面上分别作出线性电路的 $i-u$ 特性曲线和二极管的 i_d-u_d 曲线如题解 17－9 图(b) 所示。从图中可得出，静态工作点 Q 的值为

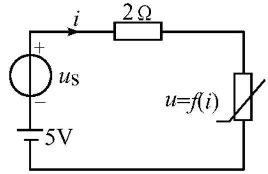
$$U_Q\approx 0.33\text{V},\quad I_Q\approx 0.66\text{A}$$



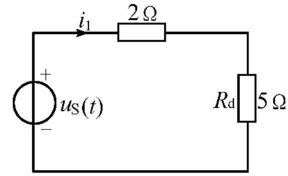
题解 17－9 图

小结　用图解法求解静态工作点是常用的方法。

○ 17－10 **题 17－10 图所示非线性电阻电路中，非线性电阻的伏安特性为** $u = 2i + i^3$**，现已知当** $u_S(t) = 0$ **时，回路中的电流为** 1A**。如果** $u_S(t) = \cos(\omega t)$V **时，试用小信号分析法求回路中的电流** i**。**



题 17－10 图



题解 17－20 图

解 **根据题意，题 17－10 图所示电路的静态工作点为** $I_Q = 1\text{A}$

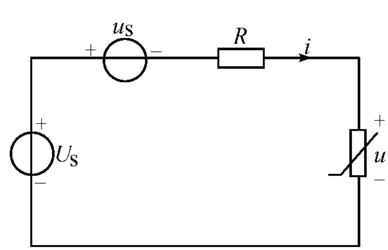
则工作点处的动态电阻为 $R_d = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}i}\Big|_{i=1\text{A}} = 2 + 3i^2\Big|_{i=1\text{A}} = 5\Omega$

可作出小信号等效电路如题解 17－10 图所示。

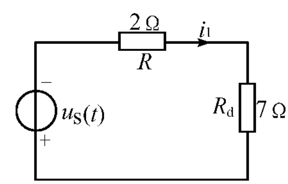
当 $u_S(t) = \cos(\omega t)$V **时，小信号电流为：**$i_1 = \dfrac{u_S(t)}{2+5} = \dfrac{1}{7}\cos(\omega t)\text{A}$

所以，原电路中的回路电流为 $i = I_Q + i_1 = 1 + \dfrac{1}{7}\cos(\omega t)\text{A}$

● 17－11 **题 17－11 图所示电路中** $R = 2\Omega$**，直流电压源** $U_S = 9$V**，非线性电阻的安伏特性** $u = -2i + \dfrac{1}{3}i^3$**，若** $u_S(t) = \cos t$V**，试求电流** i**。**



题 17－11 图



题解 17－11 图

分析 **先求出静态工作点，然后根据动态电阻** $R_d = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}i}$ **可将电路进行等效变换，即可求解。**

解 **先求电路的静态工作点，令** $u_S(t) = 0$

列 KVL **方程** $Ri + u = U_S$

而 $u = -2i + \dfrac{1}{3}i^3$**，并代入已知值** $R = 2\Omega$，$U_S = 9$V

从而，有 $$2i-2i+\frac{1}{3}i^3=9$$

解得 $I_Q=3\text{A},U_Q=3\text{V}$ 为静态工作点。

所以，工作点处的动态电阻为 $R_d=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}i}\Big|_{i=3\text{A}}=-2+i^2\Big|_{i=3\text{A}}=7\Omega$

作小信号等效电路如题解 17—11 图所示，当 $u_S=\cos t\text{V}$ 时，

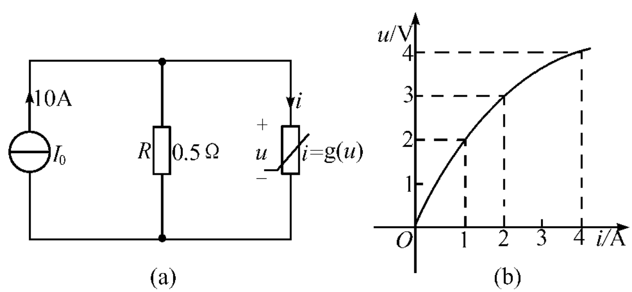
$$i_1=\frac{-u_S(t)}{2+7}=-\frac{1}{9}\cos t\text{A}$$

所以，原电路中的电流 i 为 $=I_Q+i_1=3-\frac{1}{9}\cos t\text{A}$

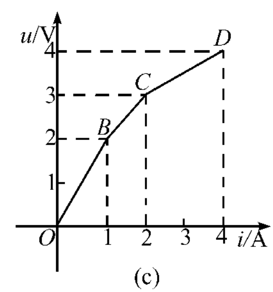
小结 求解小信号电路时先确定静态工作点，再求解动态电阻，然后进行等效电路变换即可求解。

○17—12 略

◎17—13 非线性电阻的伏安特性曲线如题 17—13 图(b)所示，试用分段线性化法给出相应直线段的线性化模型，并求静态工作点。



题 17—13 图



题解 17—13 图

分析 根据电阻的伏安特性可知此电阻在各个分段内部仍是线性的，分段求解即可。

解 如题 17—13 图(a)所示，非线性电阻左侧的线性一端口电路的伏安特性为

$$i=I_0-\frac{u}{R}=10-2u \quad ①$$

将题 17—13 图(b)所示的非线性电阻的伏安曲线分段线性化，如题解 17—13 图所示，分成 OB,BC 和 CD 三段折线，其相应直线段的线性方程为

OB 直线段：$u=2i(0\leqslant i<1\text{A},0\leqslant u<2\text{V})$ ②

BC 直线段：$u=i+1\quad(1\text{A}\leqslant i<2\text{A},2\leqslant u<3\text{V})$ ③

CD 直线段：$u=\frac{1}{2}i+2(2\text{A}\leqslant i\leqslant 4\text{A},3\leqslant u\leqslant 4\text{V})$ ④

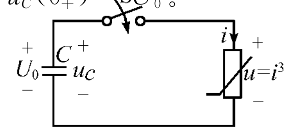
将式②、③、④分别与式①联立求解，解的结果只有式④与式①联立后求得

的解在其相应的区域内，即

$$\begin{cases} i = 10 - 2u \\ u = \dfrac{1}{2}i + 2 \end{cases}$$

求得　$U_Q = 3.5\text{V},\quad I_Q = 3\text{A}$

○ 17－14　**非线性电阻的伏安特性为 $u = i^3$，如将此电阻突然与一个充电的电容接通，如题 17－14 图，试求电容两端的电压 u_C，设 $u_C(0_+) = U_0$。**



题 17－14 图

解　开关闭合后，有　$u_C = u = i^3$

即 $i = (u_C)^{1/3}$　　又 $i = i_C = -C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

所以 $-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = (u_C)^{1/3}$　　即 $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{C}(u_C)^{1/3}$

用分离变量法求解微分方程有

$$\int (u_C)^{-1/3}\mathrm{d}u_C = -\frac{1}{C}\int \mathrm{d}t$$

$$[u_C(t)]^{\frac{2}{3}} = -\frac{2t}{3C} + A$$

又已知 $u_C(0_+) = U_0$，所以　$A = U_0^{2/3}$

从而得　$$u_C(t) = \left(-\frac{2t}{3C} + U_0^{2/3}\right)^{\frac{3}{2}}\text{V}$$

○ 17－15　略

第十八章

均匀传输线

学习要求

1. 知道什么叫分布参数电路；什么叫均匀传输线；什么是均匀传输线的固有参数。
2. 会建立均匀传输线的偏微分方程；会求解均匀传输线的正弦稳态解；深刻理解行波的概念，会计算行波的速度。
3. 深刻理解均匀传输线特性参数（特性阻抗 Z_C，传输常数 γ）的物理意义及其单位，并会计算 Z_C 和 γ；了解无畸变线的定义与条件。
4. 深刻理解均匀传输线反射系数与输入阻抗的定义与计算；了解均匀传输线终端接各种不同负载（匹配、开路、短路、任意负载）时的效应。
5. 知道什么叫无损耗均匀传输线；会计算无损耗均匀传输线的特性参数（Z_C，γ，α，β，v）和输入阻抗 $Z_{in}(x)$；了解无损耗均匀传输线上电压 $\dot{U}$、电流 $\dot{I}$ 的分布规律。
6. 深刻理解无损耗均匀传输线终端接各种不同负载（匹配、短路、开路、纯感抗、纯容抗、任意负载）时的效应；了解驻波的概念；理解长度 $l<\lambda/4$ 的短路与开路无损耗均匀传输线的应用，并会计算；了解长度 $l=\lambda/4$ 的无损耗均匀传输线的阻抗变换作用，并会计算。
7. 一般性的了解无损耗均匀传输线上的瞬态过程。

知识网络图

均匀传输线
- 分布参数电路
- 均匀传输线及其方程
- 均传输线方程的正弦稳态解
- 均匀传输线的原参数和副参数
- 终端接特性阻抗的传输线
- 终端接任意阻抗的传输线
- 无损耗传输线
- 无损耗线方程的通解
- 无损耗线的波过程

课后习题全解

◎18－1　**一对架空传输线的原参数是 $L_0 = 2.89\times10^{-3}\,\mathrm{H/km}$，$C_0 = 3.85\times10^{-9}\,\mathrm{F/km}$，$R_0 = 0.3\Omega/\mathrm{km}$，$G_0 = 0$。试求当工作频率为 50Hz 时的特性阻抗 Z_c，传播常数 γ，相位速度 v_φ 和波长 λ。如果频率为 10^4Hz，重求上述各参数。**

分析　根据各参数定义公式求解即可。

解　当 $f = 50\mathrm{Hz}$ 时有

$$Z_0 = R_0 + \mathrm{j}\omega L_0 = 0.3 + \mathrm{j}0.908 = 0.9562\angle 71.715^\circ\ \Omega/\mathrm{km}$$

$$Y_0 = G_0 + \mathrm{j}\omega C_0 = \mathrm{j}100\pi\times3.85\times10^{-9} = \mathrm{j}1.2095\times10^{-6}\,\mathrm{S/km}$$

根据传输线副参数与原参数的关系，可得特性阻抗

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{0.9562\angle 71.715^\circ}{1.2095\times10^{-6}\angle 90^\circ}} = 889.138\angle -9.143^\circ\ \Omega$$

传播常数

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{Z_0Y_0} = \sqrt{0.9562\angle 71.715^\circ\times1.2095\times10^{-6}\angle 90^\circ}\\ &= 1.075\times10^{-3}\angle 80.858^\circ = (0.171\times10^{-3} + \mathrm{j}1.062\times10^{-3})1/\mathrm{km}\end{aligned}$$

即

$$\alpha = 0.171\times10^{-3}\,\mathrm{Np/km},\qquad \beta = 1.062\times10^{-3}\,\mathrm{rad/km}$$

相位速度

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{100\pi}{1.062\times10^{-3}} = 2.958\times10^5\,\mathrm{km/s}$$

波长

$$\lambda = \frac{v_\varphi}{f} = \frac{2.958 \times 10^5}{50} = 5.916 \times 10^3 \text{km}$$

当 $f = 10^4$ Hz 时，有

$$Z_0 = 0.3 + j181.584 = 181.58 \angle 81.91^\circ \ \Omega/\text{km}$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0 = j2\pi \times 10^4 \times 3.85 \times 10^{-9} = j2.419 \times 10^{-4} \text{S/km}$$

则

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{181.58 \angle 81.91^\circ}{2.419 \times 10^{-4} \angle 90^\circ}} = 8.664 \times 10^2 \angle -0.045^\circ \ \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{181.58 \angle 81.91^\circ \times 2.419 \times 10^{-4} \angle 90^\circ}$$

$$= 20.958 \times 10^{-2} \angle 89.955^\circ = (1.646 \times 10^{-4} + j20.958 \times 10^{-2})1/\text{km}$$

即

$$\alpha = 1.646 \times 10^{-4} \text{Np/km}, \qquad \beta = 20.958 \times 10^{-2} \text{rad/km}$$

相位速度

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^4}{20.958 \times 10^{-2}} = 2.998 \times 10^5 \text{km/s}$$

波长

$$\lambda = \frac{v_\varphi}{f} = \frac{2.998 \times 10^5}{10^4} = 29.98 \text{km}$$

○ 18－2　**一同轴电缆的原参数为**：$R_0 = 7\Omega/\text{km}$，$L_0 = 0.3\text{mH/km}$，$C_0 = 0.2\mu\text{F/km}$，$G_0 = 0.5 \times 10^{-6}\text{S/km}$。**试计算当工作频率为** 800Hz **时，此电缆的特性阻抗** Z_c，**传播常数** γ，**相位速度** v_φ **和波长** λ。

解　$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 = 7 + j2\pi \times 800 \times 0.3 \times 10^{-3} = 7.1606 \angle 12.157^\circ \ \Omega/\text{km}$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0 = 0.5 \times 10^{-6} + j2\pi \times 800 \times 0.2 \times 10^{-6}$$

$$= 1.0053 \times 10^{-3} \angle 89.97^\circ \ \text{S/km}$$

则

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{7.1606 \angle 12.157^\circ}{1.0053 \times 10^{-3} \angle 89.97^\circ}} = 84.397 \times \angle -38.91^\circ \ \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{7.1606 \angle 12.157^\circ \times 1.0053 \times 10^{-3} \angle 89.97^\circ}$$

$$= 8.484 \times 10^{-2} \angle 51.064^\circ = 5.332 \times 10^{-2} + j6.599 \times 10^{-2} 1/\text{km}$$

即

$$\alpha = 5.332 \times 10^{-2} \text{Np/km}, \qquad \beta = 6.599 \times 10^{-2} \text{rad/km}$$

相位速度

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 800}{6.599 \times 10^{-2}} = 7.616 \times 10^4 \text{km/s}$$

波长

$$\lambda = \frac{v_\varphi}{f} = \frac{7.616 \times 10^4}{800} = 95.206\text{km}$$

○ 18－3　**传输线的长度** $l = 70.8\text{km}$，**其** $R_0 = 1\Omega/\text{km}$，$\omega C_0 = 4 \times 10^{-4}\text{S/km}$，**而** $G_0 = 0$，$L_0 = 0$。**在线的终端所接阻抗** $Z_2 = Z_C$。**终端的电压** $U_2 = 3\text{V}$。**试求始端的电压** U_1 **和电流** I_1。

解　**先计算传输线的特性阻抗和传播常数**

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + \text{j}\omega L_0}{G_0 + \text{j}\omega C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{\text{j}\omega C_0}} = \sqrt{\frac{1}{\text{j}4 \times 10^{-4}}} = 50 \underline{/-45^\circ}\ \Omega/\text{km}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R_0 + \text{j}\omega L_0)(G_0 + \text{j}\omega C_0)} = \sqrt{R_0 \times \text{j}\omega C_0} = \sqrt{1 \times \text{j}4 \times 10^{-4}} \\ &= 0.02 \underline{/45^\circ} = (1.41 \times 10^{-2} + \text{j}1.41 \times 10^{-2})1/\text{km}\end{aligned}$$

因负载阻抗等于特性阻抗，故传输线工作在匹配状态，传输线中没有反射波。设传输线的终端为坐标起点，则沿线电压波的分布为

$$\dot{U}(x) = \dot{U}^+ \text{e}^{-\gamma x}$$

把 $\dot{U}(0) = U_2 = 3 \underline{/0^\circ}\ \text{V}$ **代入，可得**

$$\dot{U}^+ = U_2 = 3 \underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

始端电压为

$$\dot{U}_1(-l) = 3 \underline{/0^\circ}\ \text{e}^{\gamma \times 70.8} = 3 \underline{/0^\circ}\ \text{e}^{0.02\underline{/45^\circ} \times 70.8} = 8.164\text{e}^{\text{j}1.001}\text{V}$$

始端电流为

$$\dot{I}_1(-l) = \frac{\dot{U}_1(-l)}{Z_c} = \frac{8.164\text{e}^{\text{j}1.001}}{50 \underline{/-45^\circ}} = 0.1633\text{e}^{\text{j}1.786}\text{A}$$

故始端电压、电流的有效值为

$$U_1 = 8.164\text{V}, \quad I_1 = 0.1633\text{A}$$

◎ 18－4　**一高压输电线长** 300km，**线路原参数** $R_0 = 0.06\Omega/\text{km}$，$L_0 = 1.40 \times 10^{-3}\text{H/km}$，$G_0 = 3.75 \times 10^{-8}\text{S/km}$，$C_0 = 9.0 \times 10^{-9}\text{F/km}$。**电源的频率为** 50Hz。**终端为一电阻负载，终端电压为** 220kV，**电流为** 455A。**试求始端的电压和电流。**

分析　**由各特性参数公式求解即可。**

解　**先计算传输线的** Z_c **和** γ：

因
$$\begin{aligned}Z_0 &= R_0 + \text{j}\omega L_0 = 0.06 + \text{j}0.4398 = 0.4439 \underline{/82.3^\circ}\ \Omega/\text{km} \\ Y_0 &= G_0 + \text{j}\omega C_0 = 3.75 \times 10^{-8} + \text{j}100\pi \times 9 \times 10^{-9} \\ &= 2.8277 \times 10^{-6} \underline{/89.24^\circ}\ \text{S/km}\end{aligned}$$

则

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{0.4439\angle 82.3^\circ}{2.8277\times 10^{-6}\angle 89.24^\circ}} = 396.21\angle -3.47^\circ\ \Omega$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{Z_0Y_0} = \sqrt{0.4439\angle 82.3^\circ \times 2.8277\times 10^{-6}\angle 89.24^\circ}\\ &= 1.1204\times 10^{-3}\angle 85.77^\circ\\ &= (8.246\times 10^{-5} + \mathrm{j}1.1173\times 10^{-3})1/\mathrm{km}\end{aligned}$$

设传输线终端电压为 $\dot{U}_2 = 220\angle 0^\circ\ \mathrm{kV}$，$\dot{I}_2 = 455\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$（**因是电阻负载**）**代入电压、电流的通解式中，有**

$$\dot{U}(0) = \dot{U}_2 = \dot{U}^+ + \dot{U}^-$$

$$\dot{I}(0) = \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} - \frac{\dot{U}^-}{Z_c}$$

从以上两式中解得

$$\dot{U}^+ = \frac{\dot{U}_2 + Z_c\dot{I}_2}{2} \qquad \dot{U}^- = \frac{\dot{U}_2 - Z_c\dot{I}_2}{2}$$

所以沿线电压、电流分布为

$$\dot{U}(x) = \frac{\dot{U}_2 + Z_c\dot{I}_2}{2}\mathrm{e}^{+\gamma x} + \frac{\dot{U}_2 - Z_c\dot{I}_2}{2}\mathrm{e}^{-\gamma x} = \dot{U}_2\cosh(\gamma x) + Z_c\dot{I}_2\sinh(\gamma x)$$

$$\begin{aligned}\dot{I}(x) &= \frac{1}{Z_c}\left[\frac{\dot{U}_2 + Z_c\dot{I}_2}{2}\mathrm{e}^{+\gamma x} - \frac{\dot{U}_2 - Z_c\dot{I}_2}{2}\mathrm{e}^{-\gamma x}\right]\\ &= \dot{I}_2\cosh(\gamma x) + \frac{\dot{U}_2}{Z_c}\sinh(\gamma x)\end{aligned}$$

当 $x = 300\mathrm{km}$ **时，有**

$$\cosh(\gamma x) = 0.9446 + \mathrm{j}8.14\times 10^{-3}$$
$$\sinh(\gamma x) = 2.337\times 10^{-2} + \mathrm{j}0.329$$

故传输线始端电压、电流为

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}(300)\\ &= 220\angle 0^\circ \times (0.9446 + \mathrm{j}8.14\times 10^{-3})\\ &\quad + 396.21\times 10^{-3}\angle -3.47^\circ \times 445\times (2.337\times 10^{-2} + \mathrm{j}0.329)\\ &= 223.486\angle 15.452^\circ\ \mathrm{kV}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \dot{I}(300)\\ &= 445\times (0.9446 + \mathrm{j}8.14\times 10^{-3})\\ &\quad + 10^3 \times \frac{220\times (2.337\times 10^{-2} + \mathrm{j}0.329)}{396.21\angle -3.47^\circ}\\ &= 422.242 + \mathrm{j}186.754\end{aligned}$$

$= 461.698 \angle 23.86° \text{ A}$

●18－5 **架空无损耗传输线的特性阻抗** $Z_c = 300\Omega$，**线长** $l = 2\text{m}$。**当频率为** 300MHz **和** 150MHz **时，试分别画出终端开路、短路及接上匹配负载时，电压** u **和** $|\dot{U}|$ **沿线的分布。**

分析　**无损传输线电压** $\dot{U} = \dot{U}_2\cos\beta x + \text{j}Z_C\dot{I}_2\sin\beta x$，**当终端开路时令** $\dot{I}_2 = 0$，**短路时** $\dot{U} = 0$，**接匹配负载时** $Z_c = Z_l$，**求解即可。**

解　**无损耗传输线沿线电压的分布为**

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2\cos\beta x + \text{j}Z_c\dot{I}_2\sin\beta x$$

当频率 $f = 300\text{MHz}$ **时，上式中相位常数** β **为**

$$\beta = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{2\pi f}{v_\varphi} = \frac{2\pi \times 300 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 2\pi\text{rad/m}$$

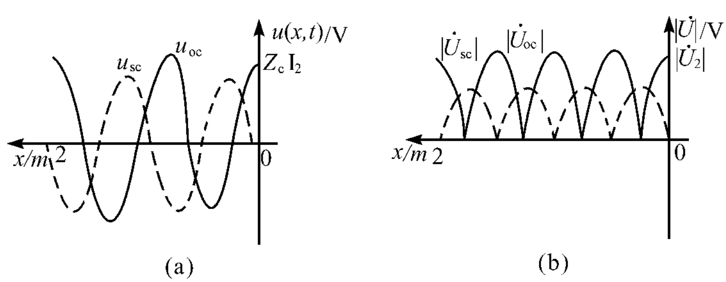
(1) **终端开路，即** $\dot{I}_2 = 0$，**则沿线电压为**

$$\dot{U}_{oc}(x) = \dot{U}_2\cos\beta x = \dot{U}_2\cos 2\pi x$$

其瞬时表示式为

$$u_{oc}(x,t) = \sqrt{2}U_2\cos 2\pi x\cos\omega t$$

即 $u_{oc}(x,t)$ **呈驻波分布，在** $x = 0.25, 0.75, 1.25, 1.75\text{m}$ **处，**$u_{oc}(x,t)$ **总是为零。**$u_{oc}(x,t)$ **的波形如题解** 18－5 **图**(a) **所示，**$|\dot{U}_{oc}|$ **的分布如题解** 18－5 **图**(b) **所示。**



题解 18－5 **图**

(2) **终端短路，即** $\dot{U}_2 = 0$，**沿线电压为**

$$\dot{U}_{sc} = \text{j}Z_c\dot{I}_2\sin\beta x = \text{j}Z_c\dot{I}_2\sin 2\pi x$$

其瞬时表示式为

$$u_{sc}(x,t) = \sqrt{2}Z_cI_2\sin 2\pi x\cos(\omega t - 90°)$$

$u_{sc}(x,t)$ **仍呈驻波分布，在** $|u_{oc}|$ **取最大值处，**$u_{sc}(x,t)$ **为零值，而在** $u_{oc} = 0$

处，$|u_{sc}|$ 取最大值，$u_{sc}(x,t)$ 的波形见题解 18－5 图(a) 中的虚线所示。

(3) 传输线接匹配负载时，即 $Z_L = Z_C$ 上无反射波，故沿线电压分布为

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 e^{+j\beta x} = \dot{U}_2 e^{+j2\pi x}$$

其瞬时表示式为

$$u(x,t) = \sqrt{2}U_2\cos(\omega t + 2\pi x)$$

即传输线工作在行波状态，沿线各处的电压幅值相等。

当频率 $f = 150\text{MHz}$ 时

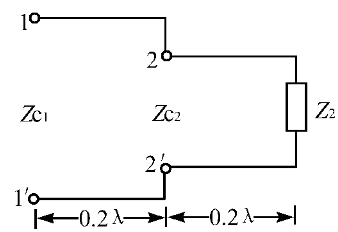
$$\beta = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{2\pi \times 150 \times 10^6}{3 \times 10^8} = \pi\text{rad/m}$$

在各种终端情况下，电压表示式与上述相似，波形反相。这里略去不画。

小结　无损传输线电压的分布为 $\dot{U} = U_2\cos\beta x + jZ_c\dot{I}_x\sin\beta x$，对于特殊情况，特殊对待

○ 18－6　两段特性阻抗分别为 Z_{c1} 和 Z_{c2} 无损耗线连接的传输线如题 18－6 图。已知终端所接负载为 $Z_2 = (50 + j50)\Omega$。设 $Z_{c1} = 75\Omega$，$Z_{c2} = 50\Omega$。两段线的长度都为 0.2λ（λ 为线的工作波长），试求 1－1′ 端的输入阻抗。

解　无损耗传输线的输入阻抗为



题 18－6 图

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = Z_c\frac{Z_2 + jZ_c\tan\beta x}{Z_c + jZ_c\tan\beta x}$$

把 2－2′ 端向负载端看进去的输入阻抗为

$$Z_{in1} = Z_{c2}\frac{Z_2 + jZ_{c2}\tan(\beta \times 0.2\lambda)}{Z_{c2} + jZ_{c2}\tan(\beta \times 0.2\lambda)}$$

把 $\beta = \dfrac{\omega}{v_\varphi} = \dfrac{2\pi f}{\lambda f} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ 代入式中，有

$$Z_{in1} = 50 \times \frac{(50 + j50) + j50\tan0.4\pi}{50 + j(50 + j50)\tan0.4\pi} = 56.5327\underline{/-47.8^\circ}$$

$$= 37.973 - j41.881\Omega$$

把 Z_{in1} 看作传输线 1 的负载，则 1－1′ 端的输入阻抗为

$$Z_{in} = Z_{c1}\frac{Z_{in1} + jZ_{c1}\tan\beta x}{Z_{c1} + jZ_{in1}\tan\beta x}$$

$$= 75 \times \frac{(37.973 - j41.881) + j75\tan0.4\pi}{75 + j(37.973 - j41.881)\tan0.4\pi}$$

$$= 61.503\underline{/48.816^\circ} = 40.498 + j46.287\Omega$$

○ 18－7　特性阻抗为 50Ω 的同轴线，其中介质为空气，终端连接的负载 $Z_2 = (50 + j100)\Omega$。试求终端处的反射系数，距负载 2.5cm 处的输入阻抗和反射系数。已知同轴线的工作波长为 10cm。

解　当频率较高时,同轴线可看作是无损耗的。传输线上任一点的反射系数为该点反射波电压与入射波电压之比。即

$$n=\frac{\dot{U}^{-}\ \mathrm{e}^{-\beta x'}}{\dot{U}^{+}\ \mathrm{e}^{\beta x'}}=\frac{\dot{U}^{-}}{\dot{U}^{+}}\mathrm{e}^{-2\beta x'}=\frac{\dot{U}_2-Z_c\dot{I}_2}{\dot{U}_2+Z_c\dot{I}_2}\mathrm{e}^{-2\beta x'}=\frac{Z_2-Z_c}{Z_2+Z_c}\mathrm{e}^{-2\beta x'}$$

无损耗线有 $\gamma=\mathrm{j}\beta$,因此在 $x'=0$ 的终端,反射系数为

$$n_2=\frac{Z_2-Z_c}{Z_2+Z_c}=\frac{50+\mathrm{j}100-50}{50+\mathrm{j}100+50}=\frac{\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ$$

离负载 2.5cm 处的反射系数为(把 $\beta=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 代入)

$$n=\frac{Z_2-Z_c}{Z_2+Z_c}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta\times 2.5}=n_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ-180^\circ=0.707\angle -135^\circ$$

离负载 2.5cm 处的输入阻抗为

$$Z_{\mathrm{in}}=Z_c\frac{Z_2+\mathrm{j}Z_c\tan(\frac{2\pi}{\lambda}\times 2.5)}{Z_c+\mathrm{j}Z_2\tan(\frac{2\pi}{\lambda}\times 2.5)}=\frac{Z_c^2}{Z_2}=\frac{2500}{50+\mathrm{j}100}$$
$$=10-\mathrm{j}20\angle -63.435^\circ\ \Omega$$

○18－8　**略**