厦门大学《高等数学Ⅰ-1》期中试题B·答案

考试日期：2013.11　　信息学院自律督导部整理

一、解答题（共 76 分）

1、计算下列各题：（每题 6 分，共 30 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n})$；

解：因为

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

即

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2},$$

故 $$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})=\frac{1}{2}.$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{e}^{-x^2}-\cos\sqrt{2}x}$

解：因为

$$\cos x-\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4)+o(x^4)=\frac{1}{6}x^4+o(x^4),$$

$$\mathrm{e}^{-x^2}-\cos\sqrt{2}x=1-x^2+\frac{x^4}{2}-(1-\frac{2x^2}{2}+\frac{x^4}{6})+o(x^4)=\frac{1}{3}x^4+o(x^4),$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{e}^{-x^2}-\cos\sqrt{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}=\frac{1}{2}.$$

（3）求函数 $y=(2+\cos x)^x+\dfrac{1-x}{1+x}\arcsin\sqrt{1-x^2},(0<x<1)$ 的导数。

解 $y=\mathrm{e}^{x\ln(2+\cos x)}+\dfrac{1-x}{1+x}\arcsin\sqrt{1-x^2}$，于是，

$$y'=(2+\cos x)^x\cdot[\ln(2+\cos x)-\frac{x\sin x}{2+\cos x}]-\frac{2}{(1+x)^2}\arcsin\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{1-x}}{(1+x)^{3/2}}.$$

（4）求函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 。

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$， 故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$；

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos t}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}，\ 故\left.\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-1.$$

（5）设 $f(x)=(x^2+x+1)\cos x$，求 $f^{(10)}(0)$.

解： $f^{(10)}(x)=(x^2+x+1)\cos(x+\dfrac{10\pi}{2})+10\times(2x+1)\cos(x+\dfrac{9\pi}{2})+\dfrac{10\times 9}{2}\times 2\cos(x+\dfrac{8\pi}{2})$，

则 $f^{(10)}(0)=-1+90=89$.

2、(8 分)求函数 $y=\dfrac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型（说明理由）。

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}=\infty$，故 $x=0$ 为函数 $y=\dfrac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的第二类间断点（无穷间断点）；

由于 $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}=\ln 2$，$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}=-\ln 2$，所以，$x=2$ 为函数 $y=\dfrac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的第一类间断点（跳跃间断点）；

而 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2-x)\cdot\ln(1+x-1)}{(x-2)(x-1)}=-1$，故 $x=2$ 为函数 $y=\dfrac{|x-2|\cdot\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的第一类间断点（可去间断点）.

3、(6 分)设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-y\,\mathrm{e}^{xy}=2$ 所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程和法线方程。

解 对方程 $x^2+y^2-y\,\mathrm{e}^{xy}=2$ 两边关于 x 求导数，则有

$$2x+2yy'-\mathrm{e}^{xy}y'-y\,\mathrm{e}^{xy}(y+xy')=0，$$

令 $x=0$， $y=2$，则有 $y'(0)=\dfrac{4}{3}$，于是所求切线斜率 $k=\dfrac{4}{3}$.

于是，所求切线方程为 $y-2=\dfrac{4}{3}x$，即 $4x-3y+6=0$，

法线方程为 $y-2=-\dfrac{3}{4}x$，即 $3x+4y-8=0$.

4、（8 分）设 $f(x)=\begin{cases} a+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ b, & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}, & x<0 \end{cases}$，试问

（1）a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续？（2）$f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导?

解 只须考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

（1）为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0),$$

即 $a=1=b$.

（2）$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1}{x}=0$，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x-\mathrm{e}^x}{2x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x-\mathrm{e}^x}{2}=-\frac{1}{2}.$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

5、（8 分）讨论函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 的单调性，并求出该函数在实数范围内的极值和最值。

解 $f'(x)=(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x}=x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	0	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↓	极小值	↑	极大值	↓

函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(2,+\infty)$ 上单调减少，在 $(0,2)$ 上单调增加. 于是，函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 在 $x=0$ 处取得极小值，极小值为 $f(0)=0$，在 $x=2$ 处取得极大值，极大值为 $f(2)=4\mathrm{e}^{-2}$.

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，因此，函数 $f(x)$ 没有最大值，在 $x=0$ 处取得最小值 0.

6、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x-1}=2$，求：（1）$f'(0)$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\tan x-\sin x)}{x\ln(1+x^2)}$.

解： 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x-1}\cdot(\mathrm{e}^x-1)=0.$$

（1） $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x-1}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=2$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\tan x-\sin x)}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\tan x-\sin x)}{\tan x-\sin x}\cdot\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x^2)}$

$$=f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=1.$$

7、（8 分）设 $x_0=\sqrt{2}$， $x_n=\sqrt{2}+\dfrac{x_{n-1}-1}{\sqrt{2}+x_{n-1}}$ （$n=2,3,\cdots$），证明数列$\{x_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

解： $x_n=\sqrt{2}+\dfrac{x_{n-1}-1}{\sqrt{2}+x_{n-1}}=\sqrt{2}+1-\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+x_{n-1}}$.

先用归纳法证明： $x_n>x_{n-1}(n=2,3,\cdots)$ 且 $\sqrt{2}<x_n<\sqrt{2}+1$

事实上，$x_0=\sqrt{2}$， $x_1=\sqrt{2}+1-\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+x_0}<\sqrt{2}+1$ 且 $x_1=\sqrt{2}+\dfrac{x_0-1}{\sqrt{2}+x_0}>\sqrt{2}=x_0$.

假设结论对 $n=k$ 时成立，即 $\sqrt{2}+1>x_k>x_{k-1}>\sqrt{2}$，那么 $n=k+1$ 时，

$$x_{k+1}=\sqrt{2}+1-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+x_{n-1}}<\sqrt{2}+1,\quad x_{k+1}=\sqrt{2}+\frac{x_k-1}{\sqrt{2}+x_k}>\sqrt{2}$$

且 $x_{k+1}-x_k=\dfrac{(1+\sqrt{2})(x_k-x_{k-1})}{\sqrt{2}+x_k}>0$，即 $x_{k+1}>x_k$.

故数列$\{x_n\}$单调增加，且有上界，于是极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

由 $x_n=\sqrt{2}+\dfrac{x_{n-1}-1}{\sqrt{2}+x_{n-1}}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{2}+\dfrac{a-1}{\sqrt{2}+a}$，解得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，因为 $x_n>\sqrt{2}$，所以，

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

二、应用题（10 分）

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P，使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积最小。

解： 过椭圆上任意点(x_0, y_0)的切线斜率$y'(x_0)$满足$\dfrac{2x_0}{a^2}+\dfrac{2y_0 y'(x_0)}{b^2}=0$，则$y'(x_0)=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，

$(y_0\neq 0)$，切线方程为$y-y_0=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$．分别令$y=0$与$x=0$，求得$x, y$轴上的截距为：

$y=\dfrac{b^2}{y_0}, x=\dfrac{a^2}{x_0}$，于是该切线与椭圆及两坐标轴所围图形的面积为：$S(x_0)=\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2b^2}{x_0y_0}-\dfrac{1}{4}\pi ab$

其中$y_0=b\sqrt{1-\dfrac{x_0^2}{a^2}}=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$，代入得$S(x_0)=\dfrac{1}{2}\dfrac{a^3b}{x_0\sqrt{a^2-x_0^2}}-\dfrac{1}{4}\pi ab,\quad x_0\in(0,a)$．

问题是求：$S(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{a^3b}{x\sqrt{a^2-x^2}}-\dfrac{1}{4}\pi ab\,(0<x<a)$ 的最小值，

此问题又与求函数$f(x)=x^2(a^2-x^2)$在闭区间$[0,a]$上最大值等价。

由$f'(x)=2x(a^2-x^2)-2x^3=0$，得$a^2-2x^2=0$，即 $x=x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a, x=0$（舍去），

注意到$f(0)=f(a)=0, f(x_0)>0$，故$x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$是$f(x)$在$[0,a]$上最大值点，因此$(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\dfrac{\sqrt{2}}{2}b)$即为所求的点$P$。

三、证明题（每题 7 分，共 14 分）

（1）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，并且对$[0,1]$上任意一点x有$0\leq f(x)\leq 1$，证明在$[0,1]$中必存在一点c，使得$f(c)=c$.

证明： 作辅助函数$F(x)=f(x)-x$，由于对$[0,1]$上任意一点x有$0\leq f(x)\leq 1$，则

$$F(0)=f(0)\geq 0,\quad F(1)=f(1)-1\leq 0.$$

若$F(0)=0$，则取$c=0$；若$F(1)=0$，则取$c=1$；

若$F(0)>0$且$F(1)<0$，利用零点定理，知在$(0,1)$内至少存在一点c，使得$F(c)=0$.

综上，在$[0,1]$上至少存在一点c，使得$F(c)=0$，即$f(c)=c$.

（2）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$，证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$4f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明：做辅助函数$F(x)=x^4 f(x)$，由已知条件知$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且

$F(0)=0$，$F(1)=f(1)=0$，即$F(1)=F(0)$.

由罗尔定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$，即$4\xi^3 f(\xi)+\xi^4 f'(\xi)=0$，也即

$4f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.