概率论与数理统计

两点分布与二项分布

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

一、（0-1）分布（也称两点分布）

随机变量 X 只可能取 0 与 1 两个值，其分布律为：

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1\quad (0<p<1)$$

$$\text{或 } X\sim\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

1 伯努利（Bernoulli）试验

（1） n 次独立重复试验

- 将试验 E 重复进行n次，若各次试验的结果互不影响，则称这 n 次试验是相互独立的。

（2） n 重伯努利试验

- 满足下列条件的试验称为伯努利（Bernoulli）试验：

①每次试验都在相同的条件下重复进行；

②每次试验只有两个可能的结果：A及 $\overline{A}$ 且 $P(A)=p$.

③每次试验的结果相互独立。

若满足上述条件的试验重复进行n次，则称这一串试验为 n 重伯努利(Bernoulii)试验。

若用 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则n次试验中事件 A 发生 k 次的概率为：

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,...,n$$

证明：在 n 重贝努利试验中，事件 A 在前 k 次出现，而在后 n-k 次不出现的概率为：

$$P(\overbrace{A A \cdots A}^{k}\ \overbrace{\bar{A}\ \bar{A} \cdots \bar{A}}^{n-k}) = p^{k}(1-p)^{n-k}$$

而事件 A 在 n 次试验中发生 k 次的方式为： C_n^k

$$\therefore P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad k=0,1,2,\cdots n.$$

由于 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1,$

而 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 为二项展开式中的一项，所以

称 X 从参数为 n , p 的二项分布，记作：

$$X \sim B(n, p)$$

二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

2 二项分布

用X表示n重Bernoulli试验中事件A发生的次数，$P(A)=p$，则X的分布律为:

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad k=0,1,2\ldots,n;$$

此时称X服从参数为 n,p 的二项分布,记为 $X\sim B(n,p)$.

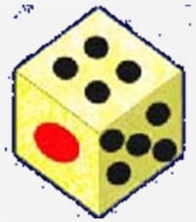
二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

3 伯努利试验和二项分布

看一个试验：将一枚均匀骰子抛掷 3 次。

令 X 表示 3 次中出现“4”点的次数

X 的分布律是：



$$P\{X = x_k\} = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}, k = 0,1,2,3.$$

二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

③ 伯努利试验和二项分布

一般地，设在一次试验 E 中我们只考虑两个互逆的结果：A 或 $\overline{A}$ 。

- 掷骰子：“掷出4点”，“未掷出4点”
- 抽验产品：“是正品”，“是次品”

… … … …

这样的试验 E 称为伯努利试验。

二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

3 伯努利试验和二项分布

将伯努利试验 E 独立地重复地进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 n **重伯努利试验**。

"**重复**"是指这 n 次试验中 $P(A)=p$ 保持不变。

"**独立**"是指各次试验的结果互不影响。

例6：已知100个产品中有5个次品，现从中**有放回**地取3次，每次任取1个，求在所取的3个中恰有2个次品的概率。

解：因为这是有放回地取3次，因此这3 次试验的条件完全相同且独立，它是贝努里试验。

依题意，每次试验取到次品的概率为0.05。

设 X 为所取的3个中的次品数，则 $X \sim b(3,0.05)$，

于是，所求概率为：

$$P(X=2)=C_3^2(0.05)^2(0.95)=0.007125$$

二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

请注意：

- **若将本例中的“有放回”改为”无放回”，那么各次试验条件就不同了，此试验就不是伯努利试验。此时，只能用古典概型求解。**

$$P(X=2)=\frac{C_{95}^{1}C_{5}^{2}}{C_{100}^{3}}\approx 0.005588$$

二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

伯努利试验对试验结果没有等可能的要求，但有下述要求：

（1）每次试验条件相同；

（2）每次试验只考虑两个互逆结果 A 或 $\overline{A}$,

且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p$；

（3）各次试验相互独立。

可以简单地说，

二项分布描述的是 n重伯努利试验中事件 A 出现的次数 X 的分布律。

二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

例2： 设有80台同类型设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是0.01，且一台设备的故障能有一个人处理。

考虑两种配备维修工人的方法：

1. 由4个人维护，每人负责20台；
2. 由3个人共同维护80台。

试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小。

二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

解：第一种方法：

- **以 X 记“第一人维护的20台中同一时刻发生故障的台数“，以 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示事件“第 i 人维护的20台中发生故障不能及时维修”，故80台中发生故障而不能及时维修的概率为**

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\right) \geq P\left(A_1\right) = P\left\{X \geq 2\right\}$$

而 $X \sim b\,(20,0.01)$，故有

$$P\left\{X \geq 2\right\} = 1 - \sum_{k=0}^{1} P\left\{X = k\right\} = 1 - \sum_{k=0}^{1}\left(C_{20}^{k}\right)(0.01)^{k}(0.99)^{20-k} = 0.0169$$

即有：$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\right) \geq 0.0169$

二、伯努利（Bernoulli）试验及二项分布

第二种方法：

- **以Y记80台中同一时刻发生故障的台数，此时，$Y\sim b(80,0.01)$，故80台中发生故障而不能及时维修的概率为**

$$P\{Y\geq 4\}=1-\sum_{k=0}^{3}\left(C_{80}^{k}\right)(0.01)^{k}(0.99)^{80-k}=0.0087$$

谢 谢 大 家