

# 概率论与数理统计

## 泊松分布

主讲人：曾华琳



信息科学与技术学院

## 泊松分布

---

设随机变量  $X$  所有可能取的值为  $0, 1, 2, \dots$ , 且概率分布为:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中  $\lambda > 0$  是常数, 则称  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布,  
记作  $X \sim \pi(\lambda)$ 。

## 泊松分布

---

**例6：**某公交公司有车辆300台，每台出故障的概率是0.01，求至少有295辆车能正常运行的概率。

**解：**令 $X$ ="出故障的车辆数"，则 $X \sim B(300, 0.01)$ 。

至少有295辆车能正常运行，即至多有5辆车出故障。

至多有5辆车出故障的概率为：

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^5 C_{300}^k 0.01^k \times 0.99^{300-k}$$

## Poisson定理及泊松分布

考虑到直接计算上式较麻烦，当n很大p很小时，有下列

近似计算公式：
$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (\lambda = np)$$

### 1. Poisson定理

设  $\lambda > 0$  为一常数，n 是任意正整数。设  $np_n = \lambda$ ，则对任一固定的非负整数k，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

## Poisson定理及泊松分布

### 2. 泊松分布

**定义：**若随机变量  $X$  所有可能的取值为  $0, 1, 2, \dots$ , 而取每个值

的概率为：
$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

则称 $X$ 服从参数为  $\lambda$  的**泊松分布**(Poisson), 记为： $X \sim \pi(\lambda)$ .

**说明：**

1) 泊松分布与二项分布的关系：这两个分布的

## Poisson定理及泊松分布

### 2. 泊松分布

**数学模型都是Bernoulli概型。Poisson分布是二项分布当n很大p 很小时的近似计算。**

**二项分布与泊松分布有以下近似公式：**

**当  $n \geq 20$ ,  $p \leq 0.05$  时,**

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \text{ 其中 } \lambda = np$$

## Poisson定理及泊松分布

### 3. Poisson分布的应用

**上述例2的解答：** 求解  $P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^5 C_{300}^k 0.01^k \times 0.99^{300-k}$

$$\lambda = np = 300 \cdot 0.01 = 3$$

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^5 C_{300}^k 0.01^k \times 0.99^{300-k}$$

$$\approx \sum_{k=0}^5 \frac{3^k e^{-3}}{k!} \overset{\text{查表}}{\approx} 0.9161$$

谢谢大家