概率论与数理统计

连续型随机变量及其概率密度

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

前言

连续型随机变量 X 所有可能取值充满一个区间，对这种类型的随机变量，不能象离散型随机变量那样，以指定它取每个值概率的方式，去给出其概率分布，而是通过给出所谓“概率密度函数”的方式。

一、连续型随机变量及其概率密度的定义

对于随机变量 X , 如果存在非负可积函数 $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

使得对任意实数 x, 有

连续型随机变量的分布函数在 R 上连续

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X \le x)$$

则称 X为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数,

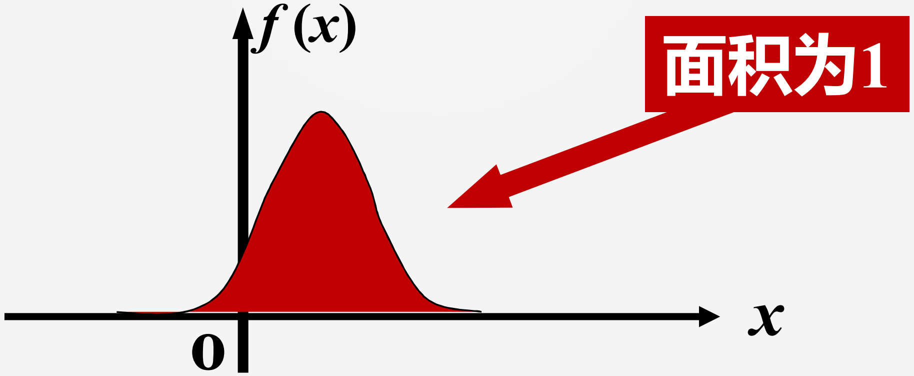
简称为概率密度。

二、概率密度的性质

$1^{o}\quad f(x)\geq 0$

$2^{o}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

这两条性质是判定一个函数 $f(x)$是否为某$r.v\ X$的概率密度的充要条件



二、概率密度的性质

3^{0} 对于任意实数 $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$,

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

利用概率密度可确定随机点落在某个范围内的概率

4^{0} 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有

$$F'(x) = f(x).$$

二、概率密度的性质

对 $f(x)$ 的进一步理解：

若 x 是 $f(x)$ 的连续点，则

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

故 X 的密度 $f(x)$ 在 x 这一点的值，恰好是 X 落在区间 $(x, x+\Delta x]$ 上的概率与区间长度 Δx 之比的极限。这里，如果把概率理解为质量，$f(x)$ 相当于线密度。

二、概率密度的性质

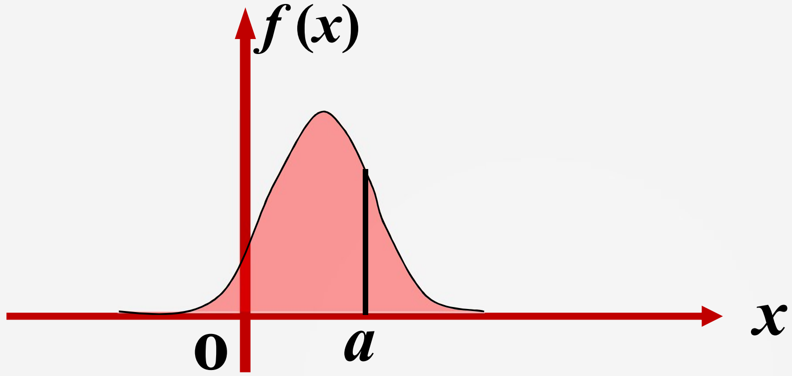
若不计高阶无穷小，有

$$P\{x < X \le x + \Delta x\} = f(x)\Delta x$$

表示随机变量 X 取值于 $(x, x+\Delta x]$ 的概率近似等于 $f(x)\Delta x$。

$f(x)\Delta x$ 在连续型 $r.v$ 理论中所起的作用与 $P(X=x_k)=p_k$ 在离散型 $r.v$ 理论中所起的作用相类似。

二、概率密度的性质



要注意的是，密度函数 $f(x)$ 在某点处 a 的高度，并不反映 X 取值的概率。但是，这个高度越大，则 X 取 a 附近的值的概率就越大。也可以说，在某点密度曲线的高度反映了概率集中在该点附近的程度。

二、概率密度的性质

请注意:

（1）连续型 $r.v$ 取任一指定实数值 a 的概率均为0。即

$$P\{X=a\}=0.$$

这是因为

$$0\le P\{X=a\}\le P\{a-\Delta x<X\le a\}=F(a)-F(a-\Delta x)$$

当 $\Delta x\to 0+$时，得到

$$P\{X=a\}=0.$$

二、概率密度的性质

由$P(A)=0$，不能推出 $A=\varnothing$

由$P(B)=1$，不能推出 $B=S$

（2）对连续型 $r.v\ X$，有

$$P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)$$

$$=P(a\le X<b)$$

$$=P(a<X<b)$$

二、概率密度的性质

例1　设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（1）确定常数k;（2）求X的分布函数$F(x)$;

（3）求$P\left\{1<X\le\dfrac{7}{2}\right\}$

二、概率密度的性质

$$\text{解}\quad f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

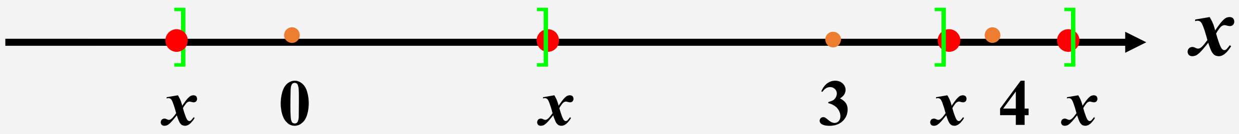
$$(1)\ \text{由}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1\text{得}k=\frac{1}{6}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\ ,-\infty<x<+\infty$$

二、概率密度的性质

(2) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \displaystyle\int_0^x \frac{x}{6}dx, & 0\le x<3\\ \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{6}dx+\int_3^x\left(2-\frac{x}{2}\right)dx, & 3\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$$



即分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3 \\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\le x<4 \\ 1, & x\ge 4\end{cases}$$

（3）$P\left\{1<X\le\frac{7}{2}\right\}=F\left(\frac{7}{2}\right)-F(1)=\frac{41}{48}$

谢 谢 大 家