概率论与数理统计

方 差

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

数学期望

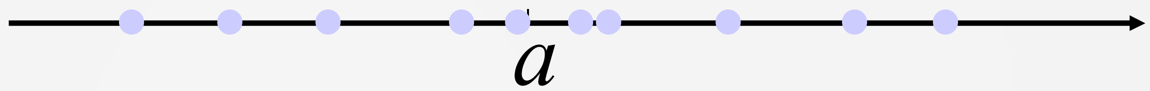
在前面的课程中，我们讨论了随机变量及其分布，如果知道了随机变量 X 的概率分布，那么 X 的全部概率特征也就知道了。

然而，在实际问题中，概率分布一般是较难确定的。而在一些实际应用中，人们并不需要知道随机变量的一切概率性质，只要知道它的某些数字特征就够了。

数学期望

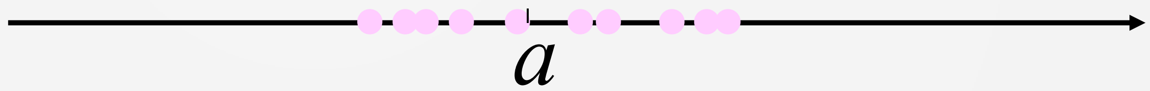
例如，某零件的真实长度为a，现用甲、乙两台仪器各测量10次，将测量结果X用坐标上的点表示如图：

甲仪器测量结果



测量结果的均值都是 a

乙仪器测量结果



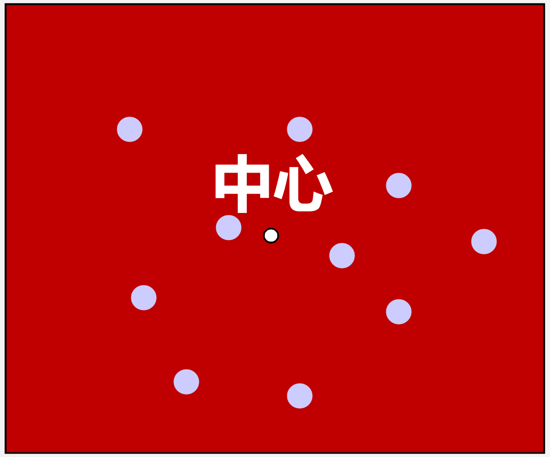
乙较好

你认为哪台仪器好一些呢?

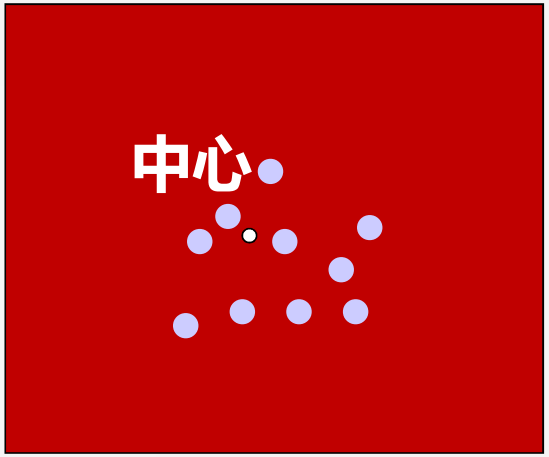
因为乙仪器的测量结果集中在均值附近

数学期望

甲、乙两门炮同时向一目标射击10发炮弹，其落点距目标的位置如图：



甲炮射击结果



乙炮射击结果

乙炮

你认为哪门炮射击效果好一些呢?

因为乙炮的弹着点较集中在中心附近

数学期望

由此可见，研究随机变量与其均值的偏离程度是十分必要的。那么，用怎样的量去度量这个偏离程度呢？容易看到

$$E\{|X-E(X)|\}$$

能度量随机变量与其均值E(X)的偏离程度。但由于上式带有绝对值，运算不方便，通常用量

$$E\{[X-E(X)]^2\}$$

来度量随机变量X与其均值E(X)的偏离程度。

一、方差的定义

设X是一个随机变量，若$E[(X-E(X)]^2$存在，称$E[(X-E(X)]^2$为 X **的方差**。记为D(X)或Var(X)，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E[X-E(X)]^2$$

一、方差的定义

方差刻划了随机变量的取值对于其数学期望的离散程度。

若 X 的取值比较集中，则方差$D(X)$ 较小；

若 X 的取值比较分散，则方差 $D(X)$ 较大。

因此，$D(X)$ 是刻画 X 取值分散程度的一个量，它是衡量 X 取值分散程度的一个尺度。

二、方差的计算

由定义知，方差是随机变量 X 的函数

$$g(X)=[X-E(X)]^2$$

的数学期望。

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k, \\ \int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx,\end{cases}$$

X 为离散型，分布率 $P\{X=x_k\}=p_k$

X为连续型，X概率密度$f(x)$

二、方差的计算

计算方差的一个简化公式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

展开

证：$D(X)=E[X-E(X)]^2$

$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$

$=E(X^2)-2[E(X)]^2+[E(X)]^2$ 利用期望性质

$=E(X^2)-[E(X)]^2$

谢 谢 大 家