历届试题选（方向导数与极值）

八、（本题 12 分，第一小题 3 分，第二小题 9 分） 已知椭球面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=5$ 被平面 $y=z$ 所截，得到的曲线为一椭圆，求：

(1) 该椭圆在 xoy 坐标面的投影曲线方程。

(2) 该椭圆上的点到原点 $(0,0,0)$ 的最长距离和最短距离。

解：(1) 其投影曲线方程为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ z=0 \end{cases}$。

(2) 问题转化为求解 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在限制条件 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=5$ 和 $y=z$ 下的最值。

用 Lagrange 乘数法。令 $L(x,y)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-5)+\mu(y-z)$，则由

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0 \\ L_z=2z+\dfrac{1}{2}\lambda z-\mu \\ x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=5 \\ y=z \end{cases}$$

解得 $x=0, y=z=\pm 2$ 或者 $x=\pm\sqrt{5}, y=z=0$。进一步有 $f(0,\pm 2,\pm 2)=8$，$f(\pm\sqrt{5},0,0)=5$。

因为 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=5$ 和 $y=z$ 的交线为闭曲线，$f(x,y)$ 为连续函数，所以 $f(x,y)$ 在此交线上能取到最大值和最小值，即有最大值为 8，最小值为 5。因此该椭圆上的点到原点 $(0,0,0)$ 的最长距离为 $2\sqrt{2}$，最短距离为 $\sqrt{5}$。

十一、（本题 6 分）设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面 R^2 上有连续的一阶偏导数，且满足：$\lim\limits_{\rho\to+\infty}(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y})=1$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$。证明：$f(x,y)$ 在全平面 R^2 上能取到最小值。

证明：在极坐标下，我们可以把 f 看成是 ρ,θ 的函数，其中 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$。则

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\cos\theta+\dfrac{\partial f}{\partial\theta}(-\dfrac{\sin\theta}{\rho})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\sin\theta+\dfrac{\partial f}{\partial\theta}(\dfrac{\cos\theta}{\rho})$。

因此在极坐标下有 $(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y})=\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}$，从而 $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=\lim\limits_{\rho\to+\infty}(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y})=1$。由极限的保号性，存在 $\rho_0>0$，当 $\rho\ge\rho_0$ 时，有 $\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\ge\dfrac{1}{2}$，即有 $\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\ge\dfrac{1}{2\rho}$，从而有

$$f(\rho,\theta)-f(\rho_0,\theta)=\int_{\rho_0}^{\rho}f_\rho(s,\theta)\,\mathrm{d}s\ge\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{2\rho}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}(\ln\rho-\ln\rho_0),$$

故有 $f(\rho,\theta)\ge f(\rho_0,\theta)+\dfrac{1}{2}(\ln\rho-\ln\rho_0)$。因此当 $\rho\to+\infty$ 时，$f(\rho,\theta)\to+\infty$。

因为 $f(x,y)$ 在全平面 R^2 上有连续的一阶偏导数，所以 $f(x,y)$ 在全平面 R^2 上连续。记 $m=\min\limits_{x^2+y^2\le1}f(x,y)$。又因为 $\rho\to+\infty$ 时，$f(\rho,\theta)\to+\infty$，所以存在 $R>0$，当 $x^2+y^2>R^2$ 时，$f(x,y)>m$，这就说明了 $f(x,y)$ 只能在 $x^2+y^2\le R^2$ 上取得其最小值。

3. 求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿 $\vec{n}=(2,3,1)$ 的方向导数。

解： $\vec{n}=(2,3,1)$ 方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1)$

函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的梯度为

$$(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})=(\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2})\bigg|_{(1,1,1)}=\sqrt{14}(\frac{3}{7},\frac{4}{7},-1)$$

所求的方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{14}}+\dfrac{8}{\sqrt{14}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{14}}-\dfrac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{14}=\dfrac{6}{7}+\dfrac{12}{7}-1=\dfrac{11}{7}$。

六、（12 分）求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$，x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域 D 上的极值与最值。

解：先求区域 D 内部的极值

令 $\begin{cases} f_x=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$，解得唯一内部驻点 $(2,1)$。

$A=f_{xx}(2,1)=(8y-6xy-2y^2)|_{(2,1)}=-6,\ B=f_{xy}(2,1)=(8x-3x^2-4xy)|_{(2.1)}=-4,$

$C=f_{yy}(2,1)=-2x^2|_{(2.1)}=-8$，知 $A<0,\ AC-B^2>0$，因此 $f(x,y)$ 在 $(2,1)$ 取得极大值 4。

当 $x=0(0\le y\le 6)$ 和 $y=0(0\le x\le 6)$ 上 $f(x,y)=0$。由边界方程 $x+y=6$ 解出 $y=6-x$，代入 $f(x,y)$ 中得 $z=2x^3-12x^2(0\le x\le 6)$，令 $\frac{dz}{dx}=6x^2-24x=0$，解得 $x=4$，即 D 边界上点 $(4,2)$.

比较下列函数值 $(0\le x\le 6, 0\le y\le 6)$：

$f(2,1)=4$，$f(x,0)=0, f(0,y)=0, f(4,2)=-64,$

由此知 $f(x,y)$ 在 D 上最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64.$

6. 函数 $u=x^2+y^2+z$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿着椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$ 在该点的外法方向的方向导数为 $\underline{\frac{7}{6}\sqrt{6}}$。

七、**（本题 11 分）**设方程 $x^2+y^2-2yz-z^2+2=0$ 确定了二元函数 $z=z(x,y)$，试求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

解：方程两边分别对 x 和 y 求导，则 $\begin{cases} 2x-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ 2y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$ （*）

在上式中令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$，得 $\begin{cases} x=0 \\ 2y-2z=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=0 \\ z=y \end{cases}$，代入原方程求得

$\begin{cases} x=0 \\ y=z=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=z=-1 \end{cases}$，故所有可能极值点为 $(0,1)$ 或 $(0,-1)$。

由（*）式，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y+z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-z}{y+z},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y+z}-\frac{x}{(y+z)^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-(\frac{\partial z}{\partial x})^2}{y+z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-x}{(y+z)^2}(1+\frac{\partial z}{\partial y})=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(1+\frac{\partial z}{\partial y})}{y+z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1-\frac{\partial z}{\partial y}}{y+z}-\frac{y-z}{(y+z)^2}(1+\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{1-\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}(1+\frac{\partial z}{\partial y})}{y+z},$$

在 $(0,1,1)$， $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,1,1)}=\frac{1}{2}, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,1,1)}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,1,1)}=\frac{1}{2}$,从而

$AC-B^2=\frac{1}{4}>0,\ A>0$,因此， $z=z(x,y)$ 在 $(0,1)$ 取得极小值 1。

在 $(0,-1,-1)$， $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,-1,-1)}=-\frac{1}{2}, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,-1,-1)}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,-1,-1)}=-\frac{1}{2}$,从而

$AC-B^2=\frac{1}{4}>0,\ A<0$,因此， $z=z(x,y)$ 在 $(0,-1)$ 取得极大值-1。

十一、（本题 8 分）抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=4$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值。

解：设椭圆上点 M 的坐标为 $(x,\ y,\ z)$，要求点 M 到原点距离的最大值和最小值，可以转化为求 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值。

引入辅助函数 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$。

令 $\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x+\mu=0 \\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0 \\ L_z=2z-\lambda+\mu=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-z=0 \\ L_\mu=x+y+z-4=0 \end{cases}$，由第一、第二式得 $x=y$，代入后两式得 $\begin{cases} z=2x^2 \\ z=4-2x \end{cases}$.

于是，$\begin{cases} x=y=-2或1 \\ z=8或2 \end{cases}$，即得 $M_1(-2,-2,8)$ 和 $M_2(1,1,2)$.

因为 $g(M_1)=72$，$g(M_2)=6$，所以,点 M_1 到原点距离最大，值为 $6\sqrt{2}$，点 M_2 到原点距离最小，值为 $\sqrt{6}$.

4. 求点 $(1,1,\frac{1}{2})$ 到曲面 $z=x^2+y^2$ 的最短距离.

解：作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\frac{1}{2})^2+\lambda(x^2+y^2-z)$.

令 $\begin{cases} L_x=2(x-1)+2\lambda x=0 \\ L_y=2(y-1)+2\lambda y=0 \\ L_z=2(z-\frac{1}{2})-\lambda=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$，$x=y=\frac{1}{1+\lambda}$，$z=\frac{1+\lambda}{2}=\frac{1}{2x}$，由 $z=x^2+y^2$ 可知 $\frac{1}{2x}=2x^2$，即 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$，

所以得到唯一驻点 $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$，根据实际情况，最短距离一定存在，故该点为所求，最短距离为

$$\sqrt{(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-1)^2+(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-1)^2+(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}}.$$

1．**求**函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 的方向导数.

解：$\overrightarrow{AB}=\{2,-2,1\}$，$\overrightarrow{AB^0}=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\{2,-2,1\}=\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}$. 因此，所求的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,0,1)}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{(1,0,1)}$$

$$=\left.\left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{y^2+z^2}}\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2z}{2\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{1}{3}\right)\right|_{(1,0,1)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

1．求曲面 $\Sigma: x^2+y^2-2z=0$ 上的点到点 $P(2,2,0)$ 的最短距离.

解：作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-2z)$，令

$$L_x=2(x-2)+2\lambda x=0 \qquad (1)$$

$$L_y=2(y-2)+2\lambda y=0 \qquad (2)$$

$$L_z=2z-2\lambda=0 \qquad (3)$$

$x^2+y^2-2z=0$ （4）

由（1）和（2）得$(x-2)y=x(y-2)$，即$x=y$．代入（4），由（3）得$x^2=z=\lambda$．

将$\lambda=x^2$代入（1），有$x^3+x-2=0$解得$x=1$，于是$y=1$，$z=1$．故求得唯一驻点$(1,1,1)$

实际问题最短距离一定存在，故曲面$\Sigma: x^2+y^2-2z=0$上的点$(1,1,1)$到点$P(2,2,0)$的距离最短，最短距离为$d=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{3}$．

十二、(6 分) 求$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在球面$x^2+y^2+z^2=1$上的点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处沿外法线方向的方向导数.

解: 设$F=x^2+y^2+z^2-1$,则球面上点(x,y,z)处的外法线向量为

$$\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}=2\{x,y,z\},$$

因点P_0在球面上,故$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$. 记球面在点P_0处的单位外法线方向为$\overrightarrow{n_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,则

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=x_0,\cos\beta=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=y_0,\cos\gamma=\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=z_0,$$

又因为 grad $f=2(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=2\{x,y,z\}$,故 grad $f\,|_{P_0}=2\{x_0,y_0,z_0\}$,因此

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n_0}}=2\{x_0,y_0,z_0\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}=2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=2.$$

2. 求曲线$C:\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$上到$xoy$平面距离最近的点。

解: **解法一**: 令$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$，可得:

$$\begin{cases}\lambda+2\mu x=0\\\lambda+2\mu y=0\\2z+\lambda+2\mu z=0\\x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}。$$

（1）$\mu=0$的情形，此时λ=0， $z=0$，解得$x=0,y=1$或者$x=1,y=0$；因为$z=0$，所以$(1,0,0)$和$(0,1,0)$为所求的点；

（2）$\mu\neq0$的情形，则$x=y$。代入后两个方程解得:

$(x,y,z)=(0,0,1)$ 或 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3})$， 但这两点距离 xoy 平面的距离分别为 1 和 $\frac{1}{3}$。

综上，距离 xoy 平面的距离的点应为 $(1,0,0)$ 和（$0,1,0$）.

解法二：题目求点 $(x,y,z)\in C$，使得 $|z|$ 最小. 因 $|z|\geq 0$，故若曲线 C 与平面 $z=0$ 有交点，则这些交点即为所求. 由 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 得所求点为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$.

注：若所作拉格朗日函数为

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=|z|+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$$

或

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=\sqrt{z^2}+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$$

则需注明 $z\neq 0$.否则 L_z' 在竖坐标 $z=0$ 的点处偏导数不存在,也就无法通过求 L 的驻点的方式得到本题的所求点(1,0,0)和(0,1,0). 但若考虑 $z=0$ 的情况，则就是第二种解法,可直接求出所求的点，也就用不上拉格朗日乘数法了.