概率论与数理统计

条件概率

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

条件概率

1. 条件概率的概念

在解决许多概率问题时，往往需要在有某些附加信息（条件）下求事件的概率。

如在事件B发生的条件下求事件A发生的概率，将此概率记作$P(A|B)$。

一般地 $P(A|B) \neq P(A)$

条件概率

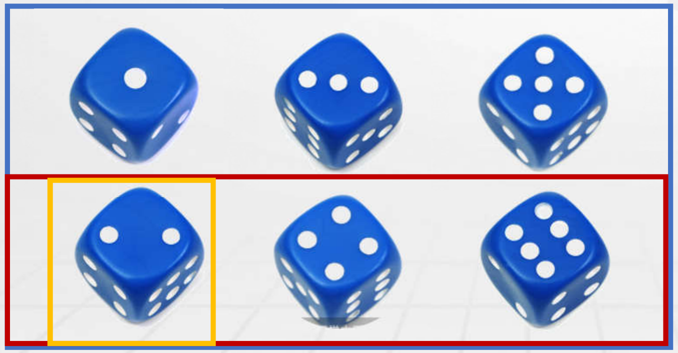
例如，掷一颗均匀骰子，A={掷出2点}， B={掷出偶数点}，

$P(A)=1/6$， $P(A|B)=?$

已知事件 B 发生，此时试验所有可能结果构成的集合就是 B 。

掷骰子

事件 B



事件 A

于是 $P(A|B)= 1/3.$

容易看到

$$P(A\,|\,B)=\frac{1}{3}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

条件概率

B 中共有 3 个元素，它们的出现是等可能的，其中只有 1 个在集 A 中。

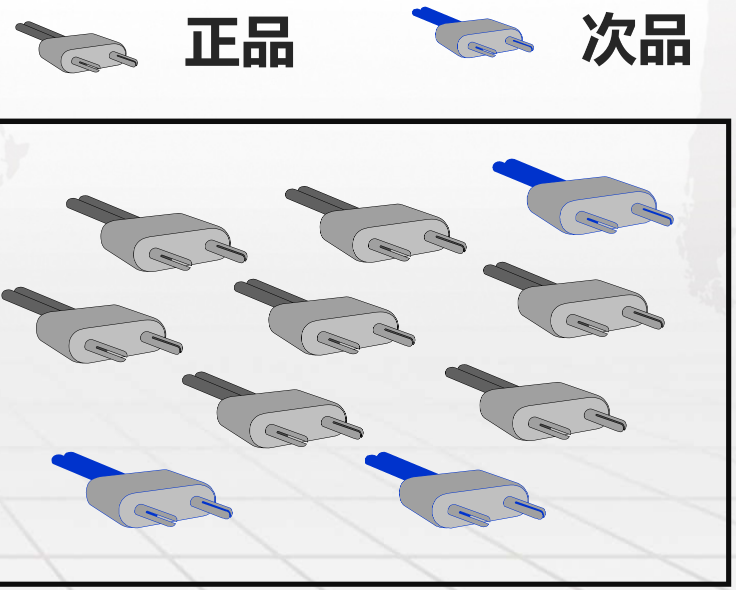
于是 $P(A|B)= 1/3.$

容易看到

$$P(A\mid B)=\frac{1}{3}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

条件概率

又如，10 件产品中有7 件正品，3 件次品，7 件正品中有3 件一等品，4 件二等品。现从这10件中任取一件，记A={取到一等品}，B={取到正品}



则　$P(A)=3/10$

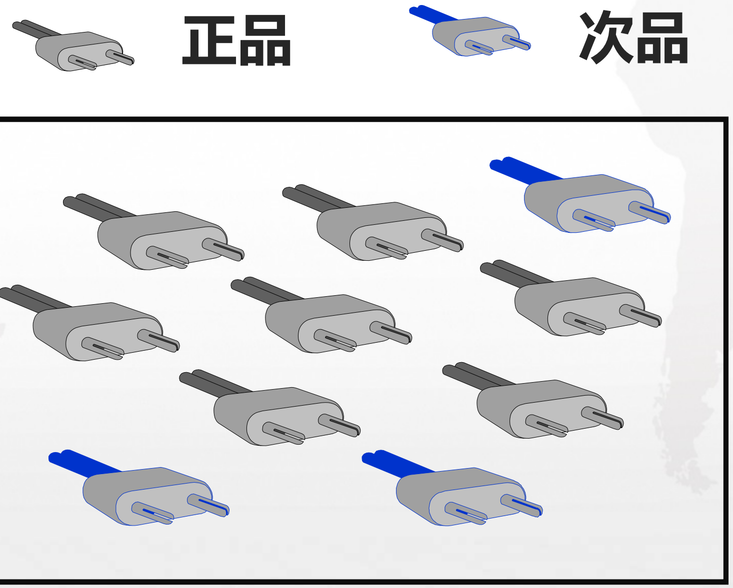
$$P(A\,|\,B)=\frac{3}{7}=\frac{3/10}{7/10}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

条件概率

A={取到一等品}， $P(A)=3/10$

B={取到正品} $P(A|B)=3/7$

本例，计算P(A)时，依据的前提条件是10件产品中一等品的比例。



计算$P(A|B)$时，这个前提条件未变，只是加上“**事件 B 已发生**”这个新的条件。

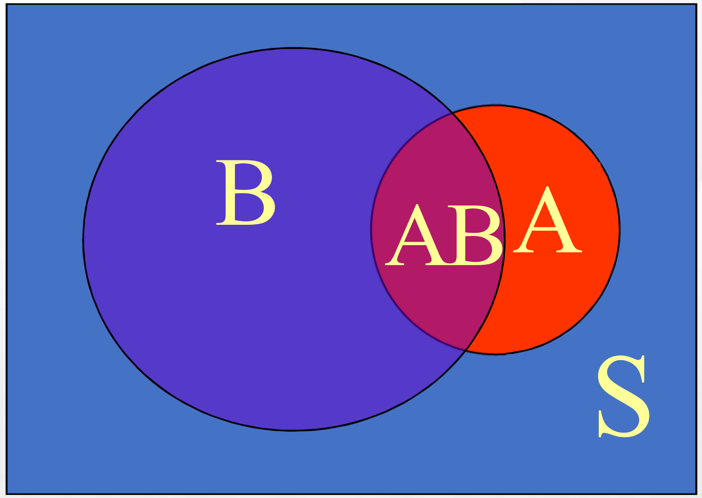
条件概率

2. 条件概率的定义

设A、B是两个事件，且$P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1)$$

在事件B发生的条件下，事件A的条件概率。



条件概率

3. 条件概率的性质(自行验证)

条件概率 $P(\bullet \mid A)$ 具备概率定义的三个条件：

(1) 非负性：对于任意的事件 B ,$P(B \mid A) \geq 0$；

(2) 规范性：$P(S \mid A) = 1$；

(3) 可列可加性：设 $B_1, B_2, \ldots$是两两互斥事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \mid A)$$

所以在第二节中证明的性质对条件概率都成立 .

条件概率

4. 条件概率的计算

1) 用定义计算：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},P(B)>0$$

2)从加入条件后改变了的情况去算

例：A={掷出2 点}， B={掷出偶数点}

$$P(A|B)=\frac{1}{3}$$

在缩减样本空间中A所含样本点个数

B 发生后的缩减样本空间所含样本点总数

条件概率

例1：掷两颗均匀骰子，已知第一颗掷出6点，问“掷出点数之和不小于10“的概率是多少?

解：设 A={掷出点数之和不小于10}

B={第一颗掷出6点}

条件概率

应用定义

解法1

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

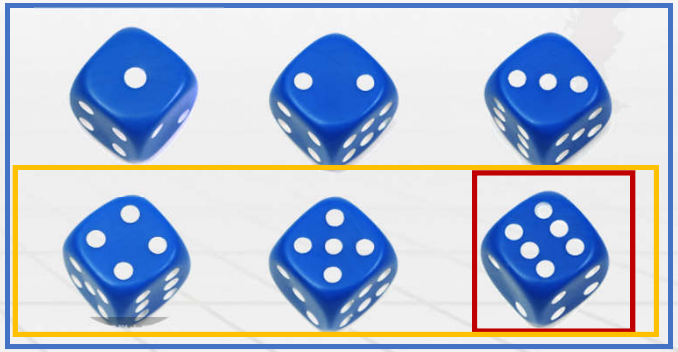
在B发生后的缩减样本空间中计算

解法2

$$P(A|B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

事件B

掷骰子



已掷 6 点

谢 谢 大 家