概率论与数理统计

离散型随机变量的独立性

主讲人：郑旭玲

信息科学与技术学院

01

随机变量相互独立的定义

一、随机变量相互独立的定义

两事件A,B独立的定义是：

若$P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A,B独立 .

用随机变量来刻画事件

令事件$A=\{X\leq x\}$，$B=\{Y\leq y\}$

$$P(X\leq x,Y\leq y)=P(X\leq x)P(Y\leq y)$$

就可以得到随机变量X和Y相互独立的定义.

一、随机变量相互独立的定义

随机变量相互独立的定义

设*X*, *Y*是两个随机变量，若对任意的*x*，*y*，有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称***X*和 *Y*相互独立**。

用分布函数表示，即 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

表明：两个随机变量相互独立时，它们的联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积 。

一般地，边缘分布不能确定联合分布；

但当*X*和*Y*相互独立时，边缘分布可以确定联合分布。

02

离散型随机变量独立性的判定

二、离散型随机变量独立性的判定

若 (X, Y)是离散型随机变量，

则上述独立性的定义等价于：

对(X, Y)的所有可能取值(x_i, y_j)，都有

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

则称X和Y相互独立。

二、离散型随机变量独立性的判定

例 盒内有 n 个白球，m 个黑球，有放回地摸球两次。

设 $X=\begin{cases}1, & \text{第1次摸到白球} \\ 0, & \text{第1次摸到黑球}\end{cases}$

$Y=\begin{cases}1, & \text{第2次摸到白球} \\ 0, & \text{第2次摸到黑球}\end{cases}$

试求：(1) (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律；

(2) 判断 X,Y 的相互独立性；

(3) 若改为无放回摸球，解上述两个问题。

二、离散型随机变量独立性的判定

解：(1) (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律

如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$m^2/(m+n)^2$	$mn/(m+n)^2$	$m/(m+n)$
1	$mn/(m+n)^2$	$n^2/(m+n)^2$	$n/(m+n)$
$p_{\cdot j}$	$m/(m+n)$	$n/(m+n)$	

(2) 由上表可知

$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \ (i,j=0,1)$ 故 X,Y 的相互独立。

二、离散型随机变量独立性的判定

（3）无放回时，(X,Y) 的联合分布律及边缘分布律如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\dfrac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{m}{m+n}$
1	$\dfrac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{n}{m+n}$
$p_{\cdot j}$	$\dfrac{m}{m+n}$	$\dfrac{n}{m+n}$	

二、离散型随机变量独立性的判定

由上表知：

$$P(X=0,Y=0)=\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)},$$

$$P(X=0)=\frac{m}{m+n},\quad P(Y=0)=\frac{m}{m+n}.$$

可见

$$P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)\cdot P(Y=0).$$

故无放回摸球时，X,Y 不是相互独立的。

二、离散型随机变量独立性的判定

例 已知随机变量X和Y各自的分布律为：

X	-1	0	1
p_i	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
p_j	1/2	1/2

并且$P\{XY=0\}=1$。

求： (1) X和Y的联合分布；

(2) 判断X,Y是否相互独立。

解： (1) 由$P\{XY=0\}=1$，可得$P\{XY\neq 0\}=0$,

则有$P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0$

二、离散型随机变量独立性的判定

(X,Y)的联合分布律及边缘分布律如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	?	0	$\frac{1}{4}$
0	?	?	$\frac{1}{2}$
1	?	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

二、离散型随机变量独立性的判定

(X,Y)的联合分布律及边缘分布律如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

二、离散型随机变量独立性的判定

(2) 由上表知：

$$P\{X=0\}\times P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\neq 0$$

$$P\{X=0,Y=0\}=0$$

故 X,Y 不是相互独立的。

二、离散型随机变量独立性的判定

此外，由条件分布律的定义：

$$\begin{cases} P\{X=x_i|Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \\ P\{Y=y_j|X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \end{cases}$$

可知，当X与Y相互独立时，

$$P\{X=x_i\,|\,Y=y_j\}=p_{i\cdot} \qquad P\{Y=y_j\,|\,X=x_i\}=p_{\cdot j}$$

也可用此条件判别离散型随机变量(X,Y)的两个分量X与Y是否相互独立.