概率论与数理统计

二维均匀分布和二维正态分布

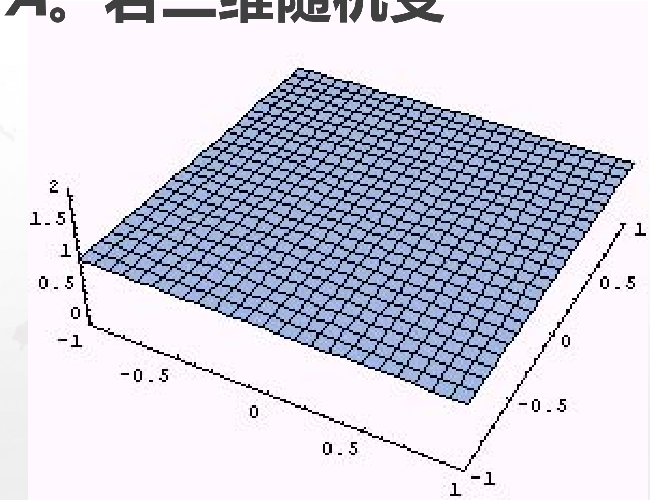
主讲人：郑旭玲

信息科学与技术学院

两个常见的二维分布

二维均匀分布

设G 是平面上的有界区域，其面积为A。若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称 (X, Y)在G 上服从均匀分布。

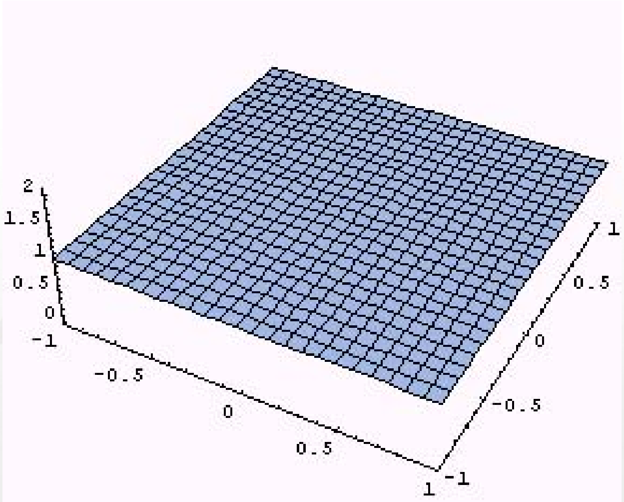
$$\because \iint_G dxdy = A$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{A}dxdy=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dxdy=1$$

两个常见的二维分布

二维均匀分布

几何含义：向平面上有界区域G上任投一质点，若质点落在G内任一小区域B的概率与B的面积成正比，而与B的形状及位置无关，则称质点的坐标(X,Y)在G上服从均匀分布。

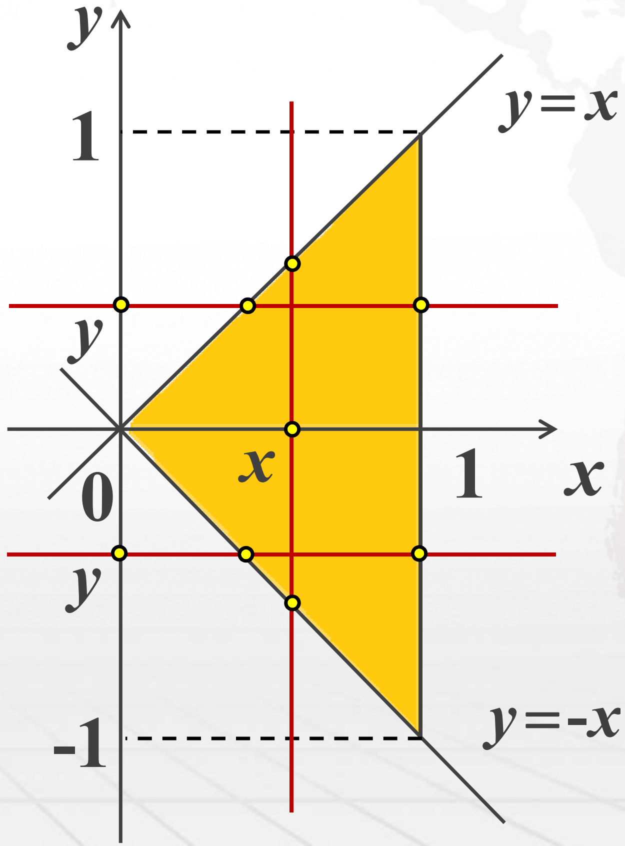


两个常见的二维分布

例 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求两个边缘密度。



解：$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x, 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{y}^{1}1dx=1-y, & 0<y<1,\\ \int_{-y}^{1}1dx=1+y, & -1<y\le 0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

两个常见的二维分布

二维正态分布

若二维随机变量（*X*, *Y*）具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},\quad (-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty)$$

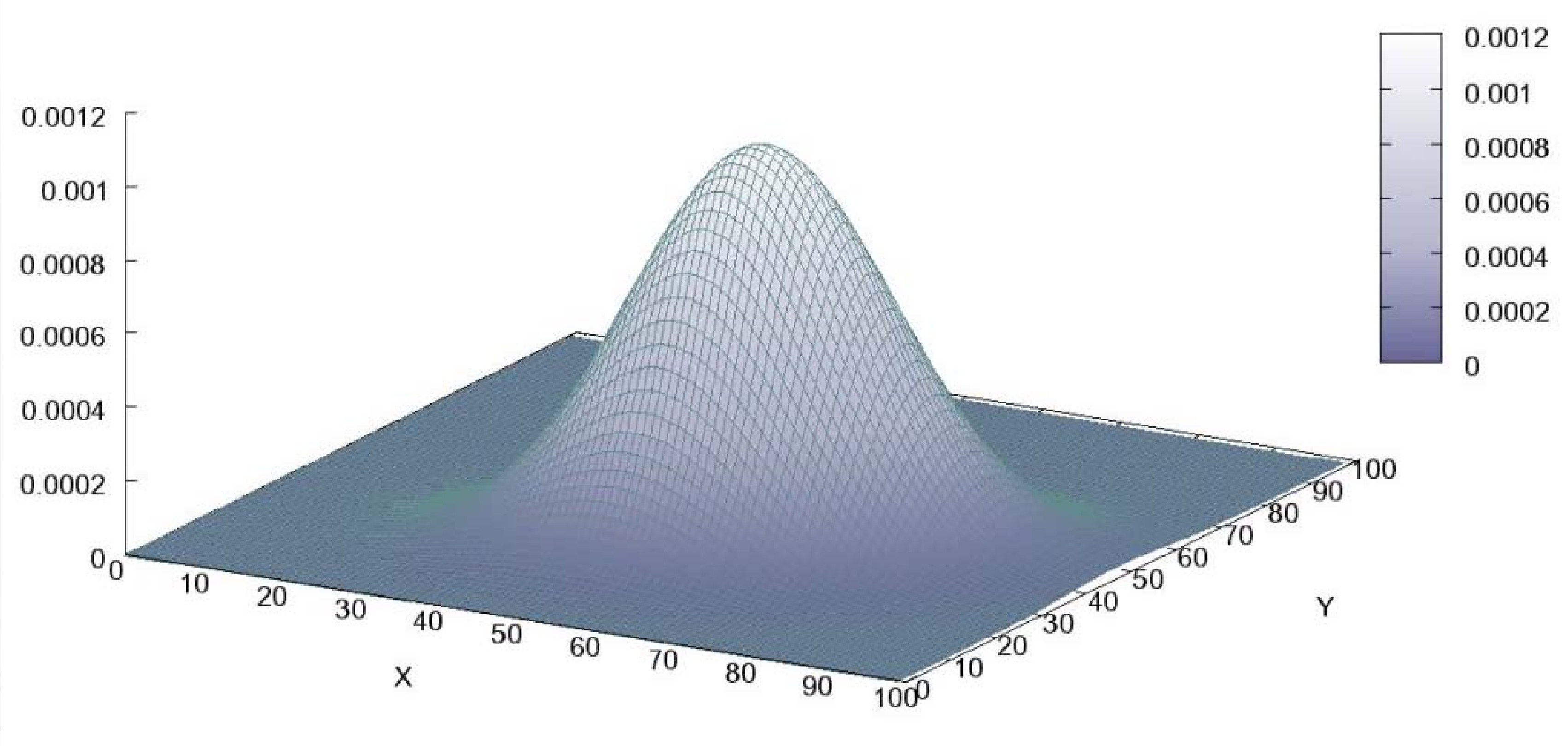
其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,\ |\rho|<1.$

则称 (*X*, *Y*) 服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布。

记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

两个常见的二维分布

二维正态分布



两个常见的二维分布

例 试求二维正态随机变量的边缘概率密度

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dy$$

因为 $\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

两个常见的二维分布

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

令 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$, 又 $dt=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}\ \sigma_2}dy$

则有

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

即 $X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$

两个常见的二维分布

同理， $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$ 即 $Y\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$

可见，二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且不依赖于参数 ρ 。

也就是说，对于给定的 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$，不同的 ρ 对应不同的二维正态分布，但它们的边缘分布却都是一样的。

此例表明由边缘分布一般不能确定联合分布。

小结

- 边缘分布函数
- 边缘分布律
- 边缘概率密度
- 二维均匀分布和二维正态分布

谢谢大家