概率论与数理统计

$max(X,Y)$及$min(X,Y)$的分布

主讲人：郑旭玲

信息科学与技术学院

M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，

它们的分布函数分别为$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，

求 $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的

分布函数。

M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布

1 $M=\max(X,Y)$ 的分布函数

$$F_M(z)=P(M\le z)=P(X\le z,\ Y\le z)$$

$$M\le z \Leftrightarrow \begin{cases} X\le z \\ Y\le z \end{cases}$$

由于X和Y相互独立，于是得到 $M=\max(X,Y)$ 的分布函数为：

$$F_M(z)=P(X\le z)P(Y\le z)$$

即有 $F_M(z)=F_X(z)\,F_Y(z)$

M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布

2 $N = \min(X,Y)$ 的分布函数

$$F_N(z) = P(N \le z) = 1 - P(N > z)$$

$$= 1 - P(X > z, Y > z)$$

$$N>z \Leftrightarrow \begin{cases} X > z \\ Y > z \end{cases}$$

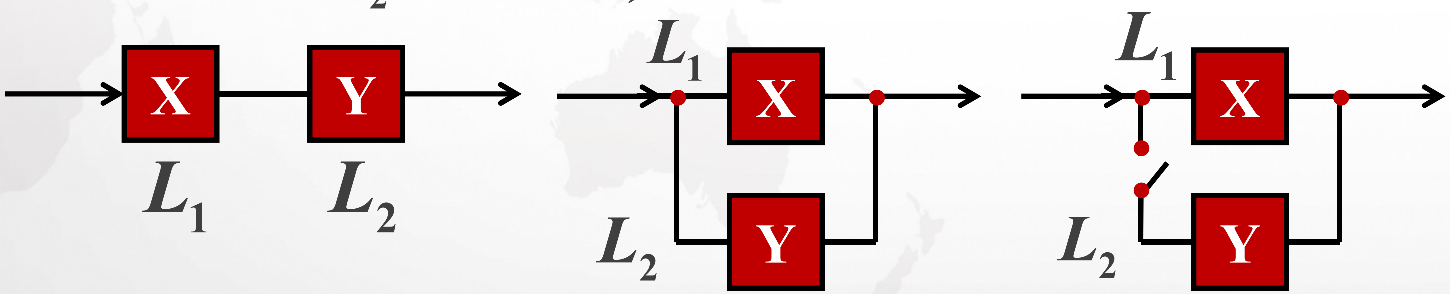
由于 X 和 Y 相互独立，于是得到 $N = \min(X,Y)$ 的分布函数为：

$$F_N(z) = 1 - P(X > z)\,P(Y > z)$$

即有 $$F_N(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

例 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2连接而成，连接的方式分别为 (i) 串联，(ii) 并联，(iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 开始工作)，如下图所示。



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y，已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

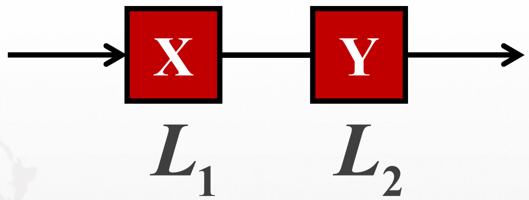
其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$.

试分别就以上三种连接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度。

M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布

解：(i) 串联的情况

由于当系统 L_1, L_2 中有一个损坏时，系统 L 就停止工作,
所以此时 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$



因为 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

所以 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

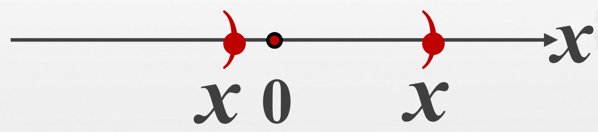
$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

当 $x\le 0$ 时，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

当 $x>0$ 时，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} \alpha e^{-\alpha t}dt=1-e^{-\alpha x}$

故 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$



类似地，可求得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布

于是 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

$Z=\min(X,Y)$ 的概率密度为

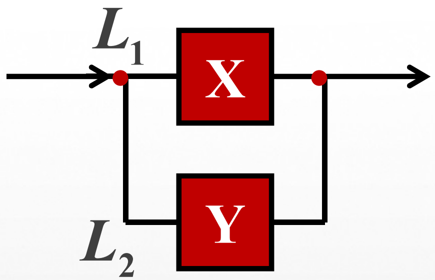
$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布

(ii) 并联的情况

由于当且仅当系统 L_1, L_2 都损坏时，系统 L 才停止工作，

所以此时 L 的寿命为 $Z = \max(X,Y)$



故 $Z = \max(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) F_Y(z)$$

$$= \begin{cases} (1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0, \end{cases}$$

M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布

于是 $Z=\max(X,Y)$ 的概率密度为

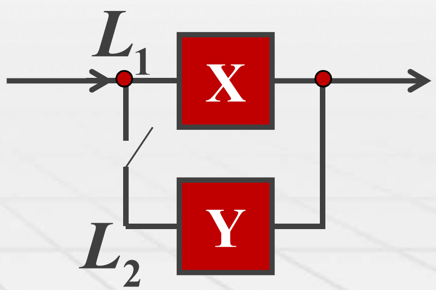
$$f_{\max}(z)=F'_{\max}(z)$$

$$=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

(iii) 备用的情况

由于当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 才开始工作,

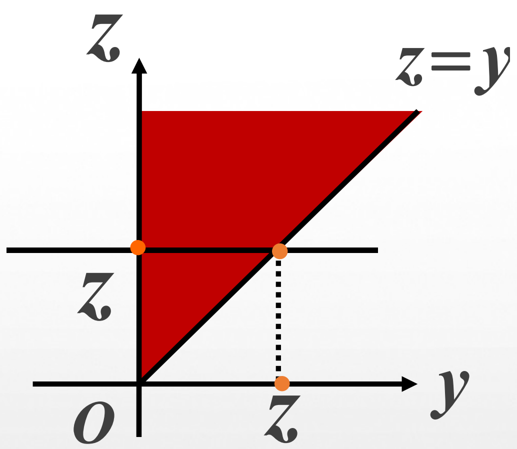
因此整个系统 L 的寿命为 $Z=X+Y$



$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

当且仅当 $\begin{cases} y>0, \\ z-y>0, \end{cases}$ 即 $0<y<z$ 时,



上述积分的被积函数不等于零.

故当 $z\le 0$ 时, $f_Z(z)=0.$

当 $z>0$ 时, $f_Z(z)=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy$

$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

$$f_Z(z)=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy$$

$$=\alpha\beta e^{-\alpha z}\int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}dy$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}).$$

于是 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布

设 $X_1,\ldots,X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为

$$F_{X_i}(z) \quad (i=1,\ldots,n)$$

用与二维时完全类似的方法，可得

$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为：

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为：

$$F_N(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

特别地，当 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立且具有相同分布函数 $F(x)$ 时，有

$$F_M(z)=[F(z)]^n$$

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^n$$

$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

当$X_1,\dots,X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，常称

$$M=\max(X_1,\dots,X_n)\text{，}N=\min(X_1,\dots,X_n)$$

为**极值**。

小结

- $Z=X+Y$
- $M=\max(X,Y)$
- $N=\min(X,Y)$

谢谢大家