厦门大学《微积分Ⅰ-1》期末试题·答案

考试日期：2014 年 1 月　　信息学院自律督导部

一、计算下列各题（共 70 分）

1、计算下列积分（每题 6 分，共 24 分）：

（1）$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；

解： 令 $x=\sin t\ (-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2})$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，于是，

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\sin^2 2t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}t-\frac{1}{32}\sin 4t+C$$

$$=\frac{1}{8}\arcsin x-\frac{1}{8}\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)+C$$

$$=\frac{1}{8}\arcsin x-\frac{1}{8}(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}+C.$$

（2）$\int\frac{1-2x}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$；

解一： $$\int\frac{1-2x}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2x-x^2}-\int\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2x-x^2}-\arcsin(x-1)+C.$$

解二： $$\int\frac{1-2x}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2x-x^2}-2\int\frac{1}{\sqrt{2-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=2\sqrt{2x-x^2}-2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}+C.$$

（3）$\int_{-2}^{3}\left|x^2+2|x|-3\right|\mathrm{d}x$；

解： $\int_{-2}^{3}\left|x^2+2|x|-3\right|\mathrm{d}x=2\int_0^2|(x+3)(x-1)|\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2+2x-3)\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^1(3-2x-x^2)\mathrm{d}x+2\int_1^2(x^2+2x-3)\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2+2x-3)\mathrm{d}x$$

$$=2(-\frac{1}{3}-1+3)+2(\frac{7}{3}+3-3)+\frac{19}{3}+5-3$$

$$=\frac{49}{3}.$$

（4） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解： $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}+2\ln\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{2}-\ln 2.$$

2、求解下列微分方程：（每小题 6 分，共 12 分）

（1）求微分方程 $xy'-2y=x^4\mathrm{e}^x$ 的通解；

解： 原方程化为 $y'-\frac{2}{x}y=x^3\mathrm{e}^x$，其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}[\int x^3\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=x^2[\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C],$$

即 $y=Cx^2+(x^3-x^2)\mathrm{e}^x$，其中 C 为任意常数.

（2）求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+2y^2}{xy}$ 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解一： 令 $u=\frac{y}{x}$，则原方程化为 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+2u$，即 $\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

两边积分，得 $\ln(1+u^2)=\ln\left|Cx^2\right|$，于是，$1+u^2=Cx^2$，即 $x^2+y^2=Cx^4$.

由 $y|_{x=1}=1$ 可得 $C=2$，所求方程的特解为 $x^2+y^2=2x^4$.

解二： 原方程改写为 $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}y^2=2x$，即 $\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}y^2=2x$，于是，原方程的通解为

$$y^2=\mathrm{e}^{\int\frac{4}{x}\mathrm{d}x}[\int 2x\mathrm{e}^{-\int\frac{4}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=x^4[\int\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x+C]$$

即 $x^2+y^2=Cx^4$，其中 C 为任意常数。

由 $y|_{x=1}=1$ 可得 $C=2$，所求方程的特解为 $x^2+y^2=2x^4$.

3、求下列极限（每小题 5 分，共 10 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}}{n}$；

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[\ln(1+\dfrac{1}{n})+\ln(1+\dfrac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\dfrac{n}{n})]$

$$=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=(1+x)\ln(1+x)\Big|_0^1-1$$

$$=2\ln 2-1.$$

（2）设 $F(x)=x\cdot\int_0^x e^{t^2-x^2}\mathrm{d}t$， 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$

解： $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t+xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}}=\dfrac{1}{2}.$

4、(8 分) 求微分方程 $yy''=2[(y')^2-y']$ 满足 $y(0)=1$， $y'(0)=2$ 的特解.

解： 令 $p=y'$， 则原方程化为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2[p^2-p]$， 即 $\dfrac{1}{p-1}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\dfrac{2}{y}\mathrm{d}y$，

两边积分， 可得 $\ln|p-1|=\ln|C_1y^2|$， 即 $p=1+C_1y^2$.

由 $y(0)=1$， $y'(0)=2$， 可得 $C_1=1$， 故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$， 移项后可得

$$\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

两边积分， 可得 $\arctan y=x+C_2$， 即 $y=\tan(x+C_2)$

由 $y(0)=1$ 可得 $C_2=\dfrac{\pi}{4}$， 从而原方程的特解为 $y=\tan(x+\dfrac{\pi}{4})$.

5、(8 分)若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & x>0\end{cases}$， 对 $x\in(-\infty,+\infty)$， 求 $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$.

解： 当 $x\le 0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan t\Big|_{-\infty}^x=\arctan x+\frac{\pi}{2}.$$

当 $x>0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t=\arctan t\Big|_{-\infty}^0+2\arctan\sqrt{t}\Big|_0^x=\frac{\pi}{2}+2\arctan\sqrt{x}.$$

6、（8 分）设 $f(x)=x^2+x+\sin^3 x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x+\cos^3 x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解： 令 $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x$，$B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\mathrm{d}x$，则

$$f(x)=x^2+x+A\sin^3 x+B\cos^3 x,$$

式子两端乘 $\sin x$，并从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分，则有

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+x)\sin x\,\mathrm{d}x+A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x+B\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x\,\mathrm{d}x$$

即 $$A=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x+2A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=2[-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x]+2A\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

所以，$A=\dfrac{16}{8-3\pi}$.

同理，式子两端乘 $\cos x$，并从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分，则有

$$B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+x)\cos x\,\mathrm{d}x+A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x+B\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x$$

即 $$B=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x+2B\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x$$

$$=2[x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x]+2B\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=2[\frac{\pi^2}{4}-2]+\frac{3\pi}{8}B,$$

所以，$B=\dfrac{4\pi^2-32}{8-3\pi}$.

故 $$f(x)=x^2+x+\frac{16}{8-3\pi}\sin^3 x+\frac{4\pi^2-32}{8-3\pi}\cos^3 x.$$

二、应用题（第一小题 12 分，第二题 6 分，共 18 分）

1．过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

（1）求 D 的面积 A；(2) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积.

解： 设切点坐标为 $(x_0,\ln x_0)$，于是曲线 $y=\ln x$ 过点 $(x_0,\ln x_0)$ 的切线方程为

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)，\ 即\ y-\ln x_0=\frac{x}{x_0}-1，$$

由于切线过原点，则有 $x_0=\mathrm{e}$，于是切点坐标为 $(\mathrm{e},1)$，切线方程为 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$.

（1）平面图形 D 的面积为

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}-1-\frac{\mathrm{e}}{2}=\frac{\mathrm{e}}{2}-1.$$

（2）D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\mathrm{e}^2\cdot1-\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\pi\cdot\mathrm{e}^2-\pi\int_0^1(\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^{y+1}+\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\mathrm{e}^2-\pi(\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2})$$

$$=\frac{5}{6}\pi\cdot\mathrm{e}^2-2\pi\mathrm{e}+\frac{1}{2}\pi.$$

2．一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动，介质的阻力与速度的平方成正比，即 $F=kv^2$，其中 v 为物体的运动速度，k 为比例常数。计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时，克服介质阻力所作的功.（注：题目中的 a 和 c 均为正的常数）.

解一： 速度 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3ct^2=3c^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$，故 $F=kv^2=9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}$，于是所求的物体克服介质阻力所做的功为

$$W=\int_0^a 9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

解二： $x=a$ 时，$t=\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$，因此，

$$W=\int_0^a F(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{c}}}k\cdot(3ct^2)^2\cdot3ct^2\mathrm{d}t=27kc^3\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{c}}}t^6\mathrm{d}t=\frac{27}{7}ka^{\frac{7}{3}}c^{\frac{2}{3}}.$$

三、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

1．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x)^2\le\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$.

证明： 做辅助函数 $F(x)=(\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t)^2-\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t$，因为

$$F'(x)=2f(x)g(x)\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t-g^2(x)\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int_a^x[f(x)g(t)-g(x)f(t)]^2\,\mathrm{d}t\le0,$$

故$F(x)$单调不增，因此，当$x \geq a$时，我们有$F(x) \leq F(a)=0$，即

$$\left(\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

取$x=b$可得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

2 .设函数$f(x)$是$[0,3]$上的连续，在$(0,3)$内可导，且有$\frac{1}{3}\int_0^1 xf(x)dx=f(3)$，试证：必有$\xi\in(0,3)$，使$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi)$.

证明： 设$F(x)=xf(x)$，由$\frac{1}{3}\int_0^1 xf(x)dx=f(3)$知，存在$\eta\in(0,1)$，使得$\eta f(\eta)=3f(3)$，即$F(\eta)=F(3)$. 由罗尔中值定理，存在$\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得$F'(\xi)=0$，

而$F'(x)=xf'(x)+f(x)$，则$F'(\xi)=\xi f'(\xi)+f(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi)$.

四、附加题（10 分）

设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，证明：存在$\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b xf(x)dx=a\int_a^\xi f(x)dx+b\int_\xi^b f(x)dx$.

证明： 令$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则$F'(x)=f(x)$

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^x xF'(x)\,\mathrm{d}x = xF(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\\ &= bF(b)-F(\xi)(b-a)\\ &= b\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= a\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x+b\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$