厦门大学《微积分Ⅰ-1》期末试题·答案

考试日期：2013 年 1 月　　信息学院自律督导部

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{[x+\ln(1-x)]\sin^2 x}$

解：利用泰勒展式

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5))-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+o(x^5))}{[x+(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^5)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\dfrac{1}{6}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{2n}\dfrac{\ln x}{x^2}dx$.

解：利用积分中值定理知，$\exists\xi\in(n,2n)$，s.t.

$$0<\int_n^{2n}\frac{\ln x}{x^2}dx = n\frac{\ln\xi}{\xi^2}\le n\frac{\ln 2n}{n^2}=\frac{\ln 2n}{n}\to 0.$$

由两边夹法则，原式 $=0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\Lambda+\sqrt{n^2})$.

解：利用定积分定义

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^t dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

解：利用洛必达法则

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\int_0^x e^t dt)e^x}{xe^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^t dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2e^x=2.$

二、计算下列积分（每小题 4 分，共 16 分）

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}\ (x>0)$.

解：令 $x=\tan^2\theta, \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则

原式 $=\int \frac{2\tan\theta\sec^2\theta}{\tan\theta\sec\theta}d\theta = 2\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C = 2\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+\mathrm{C}.$

另证：原式 $=\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = \int \frac{2d\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} = 2\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+\mathrm{C}.$

2. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$.

解：利用分部积分

$$\text{原式} = \int_0^1 \ln(1+x)d(\frac{1}{2-x}) = \ln(1+x)\cdot\frac{1}{2-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{3}\int_0^1 (\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x})dx = \ln 2 - \frac{1}{3}(-\ln(2-x)+\ln(1+x))\,|_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}(\frac{|x|\sin x}{1+x^4}+1)dx$.

解：利用函数奇偶性

$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \tan\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

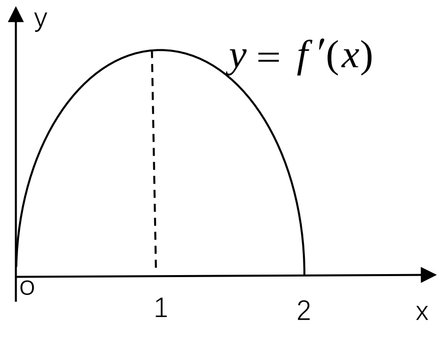
4. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$.

解：分部积分

$$I = -e^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = -e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = 1-I.$$

故 $I=\frac{1}{2}$.

三、解答题（每题 6 分，共 36 分）



1．设 $y=f'(x)$ 的图像为如图所示的二次抛物线，

且 $f(x)$ 的极小值为 2，极大值为 6，试求 $f(x)$.

解：由图可设抛物线方程为 $y=a(x-1)^2-a, a<0.$

故 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=a\int_0^x(t^2-2t)dt+f(0)=a(\frac{1}{3}x^3-x^2)+f(0).$

又由 $f'(x)\geq 0, f'(0)=f'(2)=0$ 及条件易知 $f(0)=2, f(2)=6.$

故可解得 $a=-3.$ 从而 $f(x)=-x^3+3x^2+2.$

2. $\int f'(\sqrt{x})dx=x(e^{\sqrt{x}}+1)+c$，求 $f(\sin x)$.

解：求导知 $f'(\sqrt{x})=e^{\sqrt{x}}+1+xe^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 故 $f'(x)=e^x+\frac{1}{2}xe^x+1.$

因此 $f(x)=\int(e^x+\frac{1}{2}xe^x+1)dx=e^x+\frac{1}{2}(xe^x-e^x)+x+C=\frac{1}{2}e^x(x+1)+x+C.$

故 $f(\sin x)=\frac{1}{2}e^{\sin x}(\sin x+1)+\sin x+C.$

3. 求曲线 $y=x-2\arctan x$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点、渐近线以及在 $x=1$ 处的曲率半径.

解：计算可得 $y'=1-\frac{2}{1+x^2}, y''=\frac{4x}{(1+x^2)^2}.$

故其单调增区间为 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$, 单调减区间为 $(-1,1).$

在 $x=-1$ 处取极大值 $\frac{\pi}{2}-1$，在 $x=1$ 处取极小值 $1-\frac{\pi}{2}$。

凹区间为 $(0,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,0)$，拐点为 $x=0$ 点。

又由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2\arctan x}{x})=1$ 知函数有两条倾斜渐近线 $y = x \pm \pi$。

在 $x=1$ 处的曲率半径为 $\rho(1)=\frac{1}{K(1)}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}|_{x=1}=1.$

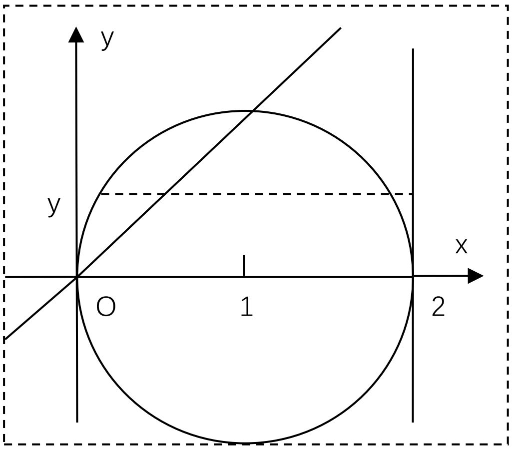
4. 已知 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^{2x} xf(t)dt + 2\int_x^0 tf(2t)dt = 2x^3(x-1)$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最值。

解：求导知 $2xf(2x) + \int_0^{2x} f(t)dt - 2xf(2x) = \int_0^{2x} f(t)dt = 8x^3 - 6x^2$,

故 $f(x) = 6x^2 - 6x$. 其导数为 $f'(x) = 12x - 6$. 有唯一驻点 $x = \frac{1}{2}$.

计算 $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}, f(2) = 12$. 故最大值为 12，最小值为 $-\frac{3}{2}$.

5. 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \le 2x$ 与 $y \ge x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积。



解：如图所示，

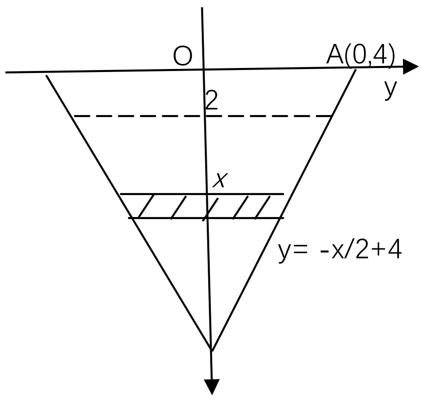
上半圆方程为 $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$.

体积微元为 $dV = \pi(R^2 - r^2)dy$

$$V = \int_0^1 \pi[(1+\sqrt{1-y^2})^2 - (2-y)^2]dy$$
$$= \pi\int_0^1 (-2y^2 + 4y - 2 + 2\sqrt{1-y^2})dy$$
$$= \pi(-\frac{2}{3} + 2 - 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t dt) = -\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}\pi^2.$$

6. 一个半径为 4 米，高为 8 米的倒圆锥形水池，里面有 6 米深的水，试问要把池内的水全部抽完，需作多少功。

解：以倒圆锥的底圆中心为坐标原点 o，原点与圆锥顶点的连线为 x 轴，方向向下，如下草图所示：锥体母线 AB 的方程为 $y = 4 - \frac{x}{2}$。



任取水深 $x \in [2,8]$，与 $[x, x+dx]$ 相对应的薄层水所受的重力近似为 $g\pi y^2 dx = g\pi(4-\frac{x}{2})^2 dx$，将这薄层水“提到”池口的距离为 x，则克服重力所作

的功约为 $dW = g\pi x(4-\frac{x}{2})^2 dx$，于是 B(8,0)

x

$$W=\int_2^8 g\pi x(4-\frac{x}{2})^2 dx = g\pi\int_2^8 x(4-\frac{x}{2})^2 dx = 63\pi g \approx 1939(KJ).$$

四、证明题 （任选 4 题，共 32 分）

1. (8 分) 证明$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$，并求其值。

解：令 $x=\frac{1}{t}$，$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_{+\infty}^0\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{1+\frac{1}{t^4}}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

故积分 $I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

2. (8 分)设 $f(x)$ 在$[0,b]$上连续且单调减少，若 $0<a<b$，

证明：$a\int_0^b f(x)dx < b\int_0^a f(x)dx$.

证明：令 $F(x)=a\int_0^x f(t)dt - x\int_0^a f(t)dt, x\in[a,b].$ 则 $F(a)=0,$

且由积分中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$， $F'(x)=af(x)-\int_0^a f(t)dt = a(f(x)-f(\xi))<0.$

故 $F(b)<0,$ 即不等式得证。

3. (8 分) 证明：$\sin x \le x-\frac{1}{3\pi}x^3$，$0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

证明：令 $F(x)=\sin x - x+\frac{1}{3\pi}x^3, x\in[0,\frac{\pi}{2}].$

则 $F(0)=0$ 且 $F'(x)=\cos x-1+\frac{1}{\pi}x^2,$

而 $F'(x)=0,$ 且 $F''(x)=-\sin x+\frac{2}{\pi}x\le 0$ 。

故 $F'(x)\le 0,$ 从而 $F(x)\le 0,$ 不等式得证。

4. (8 分) 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

(1) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f'(x)(a-x)dx$，其中 a 为参数;

(2) $|\int_0^1 f(x)dx| \le \frac{1}{4}M$，其中 M 是 $|f'(x)|$ 在[0,1]上的最大值.

证明:（1）分部积分，得

$$\int_0^1 f'(x)(a-x)dx = f(x)(a-x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

（2）令（1）中的 $a=\frac{1}{2}$ 得

$$|\int_0^1 f(x)dx| = |\int_0^1 f'(x)(\frac{1}{2}-x)dx| \le \int_0^1 |f'(x)(\frac{1}{2}-x)|dx \le M\int_0^1 |\frac{1}{2}-x|dx.$$

$$= M\int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}-x)dx + M\int_{\frac{1}{2}}^1 (x-\frac{1}{2})dx = \frac{M}{8}+\frac{M}{8} = \frac{M}{4}$$

5 .(8 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，证明至少存在一点 $\xi \in [-a,a]$，使得 $\int_{-a}^a f(x)dx = \frac{a^3}{3}f''(\xi)$。

证法 1：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, x\in[-a,a].$ 则 $F(0)=0, F'(0)=f(0)=0$。

将 $F(a)$ 与 $F(-a)$ 在 0 点处做泰勒展开，得

$$F(-a)=F(0)-F'(0)a+\frac{F''(0)}{2}a^2-\frac{F'''(\xi_1)}{3!}a^3=\frac{f'(0)}{2}a^2-\frac{f''(\xi_1)}{6}a^3,$$

$$F(a)=F(0)+F'(0)a+\frac{F''(0)}{2}a^2+\frac{F'''(\xi_2)}{3!}a^3=\frac{f'(0)}{2}a^2+\frac{f''(\xi_2)}{6}a^3,$$

其中 $\xi_1\in(-a,0), \xi_2\in(0,a).$ 两式相减，得

$$F(a)-F(-a)=\frac{a^3}{3}\cdot\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}.$$

又由 $f''(x)$ 的连续性和介值定理知，必然 $\exists \xi\in[\xi_1,\xi_2], s.t. f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}.$

故而 $\int_{-a}^a f(x)dx = \frac{a^3}{3}f''(\xi)$。

证法 2：将 $f(x)$ 在 0 点处做泰勒展开，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2,$$

其中 η 在 0 与 x 之间，等式两端从 $-a$ 到 a 积分，得

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}f'(0)xdx+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx \qquad (*)$$

$m=\min\limits_{x\in[-a,a]}f''(x)\le f''(\eta)\le\max\limits_{x\in[-a,a]}f''(x)=M$，则 $mx^2\le f''(\eta)x^2\le Mx^2$

$$\frac{2ma^3}{3}=m\int_{-a}^{a}x^2dx\le\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx\le M\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{2Ma^3}{3}$$

则有 $m\le\dfrac{\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx}{\frac{2a^3}{3}}\le M$，又由 $f''(x)$ 的连续性和介值定理知,$\exists\xi\in[-a,a]$

使得 $f''(\xi)=\dfrac{\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx}{\frac{2a^3}{3}}$，即 $\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx=\dfrac{2a^3}{3}f''(\xi)$，代入（*）得

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\eta)x^2dx=\frac{a^3}{3}f''(\xi)$$

五、附加题（10 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续导数，且 $f(0)=f(2)=1$，若 $|f'(x)|\le 1$，证明：

$$1\le\int_0^2 f(x)dx\le 3$$

证明：首先将 $f(x),x\in[0,1]$在$x=0$ 点做泰勒展开，得

$f(x)=f(0)+f'(\xi)x=1+f'(\xi)x,$其中$\xi\in(0.x)$依赖于$x.$对该式两边积分，得

$\int_0^1 f(x)dx=1+\int_0^1 f'(\xi)xdx.$其中$\left|\int_0^1 f'(\xi)xdx\right|\le\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$

故 $\frac{1}{2}\le\int_0^1 f(x)dx\le\frac{3}{2}.$

同理，将 $f(x),x\in[1,2]$在$x=2$ 点做泰勒展开并积分可证

$\frac{1}{2}\le\int_1^2 f(x)dx\le\frac{3}{2}.$

两式相加，即得 $1\le\int_0^2 f(x)dx\le 3$。