概率论与数理统计

切比雪夫不等式

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

四、切比雪夫不等式

定理： 设随机变量 X 具有数学期望$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数ε，有不等式

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

或
$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

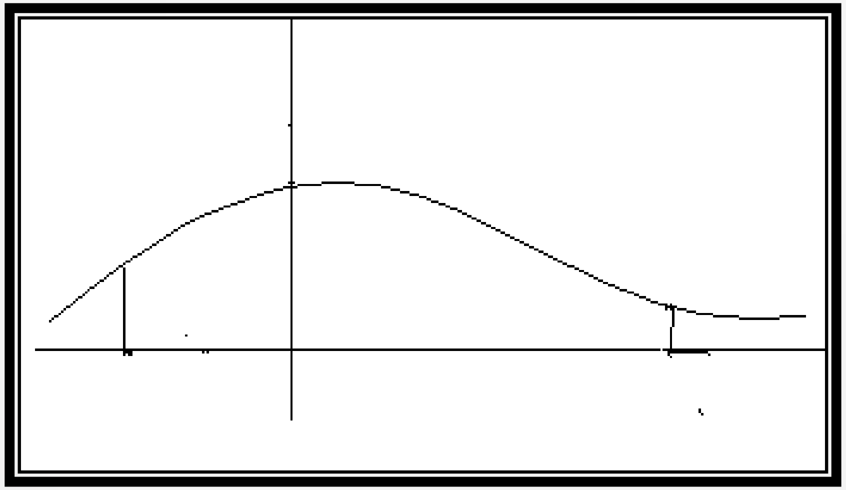
由切比雪夫不等式可以看出，若 σ^2 越小，则事件$\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$ 的概率越大，即随机变量X 集中在期望附近的可能性越大。

四、切比雪夫不等式

我们只就连续型随机变量的情况来证明。

证：设X的概率密度为$f(x)$，则有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|X-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx$$



$$\leq\int_{|X-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

四、切比雪夫不等式

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

当方差已知时，切比雪夫不等式给出了$r.v\ X$与它的期望的偏差不小于 ε 的概率的估计式。

如取$\varepsilon=3\sigma$

$$P\{|X-E(X)|\geq 3\sigma\}\leq\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}\approx 0.111$$

可见，对任给的分布，只要期望和方差 σ^2 存在，则 $r.v\ X$ 取值偏离$E(X)$超过 3σ的概率小于0.111。

四、切比雪夫不等式

例9：已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是7300，均方差是700 。利用切比雪夫不等式估计每毫升白细胞数在5200~9400之间的概率。

解：设每毫升白细胞数为X，依题意，$E(X)=7300, D(X)=700^2$

所求为 $P(5200 \le X \le 9400)$

$$P(5200 \le X \le 9400) = P(-2100 \le X-E(X) \le 2100)$$

$$= P\{ |X-E(X)| \le 2100\}$$

四、切比雪夫不等式

由切比雪夫不等式

$$P\{|X-E(X)| \le 2100\} \ge 1-\frac{D(X)}{(2100)^2}$$

$$=1-\left(\frac{700}{2100}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

即估计每毫升白细胞数在5200~9400之间的概率不小于8/9 。

四、切比雪夫不等式

例10：在每次试验中，事件A发生的概率为 0.75，利用切比雪夫不等式求：n需要多么大时，才能使得在n次独立重复试验中，事件A出现的频率在0.74~0.76之间的概率至少为0.90?

解：设X为n次试验中，事件A出现的次数，则 $X\sim B(n, 0.75)$

$$E(X)=0.75n,\quad D(X)=0.75\times 0.25n=0.1875n$$

所求为满足 $P\left(0.74<\dfrac{X}{n}<0.76\right)\geq 0.90$ **的最小的n。**

四、切比雪夫不等式

$P(0.74 < \frac{X}{n} < 0.76)$ **可改写为**

$\boldsymbol{P(0.74n < X < 0.76n)}$ $\boldsymbol{=P(-0.01n < X-0.75n < 0.01n)}$

$\boldsymbol{= P\{|X-E(X)| < 0.01n\}}$

在切比雪夫不等式中取 $\varepsilon = 0.01\ \boldsymbol{n}$**，则**

$$P(0.74 < \frac{X}{n} < 0.76) = P\{|X-E(X)| < 0.01n\}$$

$$\geq 1 - \frac{D(X)}{(0.01n)^2} = 1 - \frac{0.1875n}{0.0001n^2} = 1 - \frac{1875}{n}$$

四、切比雪夫不等式

依题意，取 $1-\frac{1875}{n}\geq 0.9$

解得

$$n\geq\frac{1875}{1-0.9}=18750$$

即n **取18750**时，可以使得在n次独立重复试验中，

事件A出现的频率在0.74~0.76之间的概率至少为0.90 。

谢 谢 大 家