

概率论与数理统计

正态总体均值的假设检验

主讲人：曾华琳



信息科学与技术学院

01

单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$
均值 μ 的检验

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

1. σ^2 已知, 关于 μ 的检验 (μ 检验)

在上一小节中已讨论过正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 当 σ^2 已知时关于 $\mu = \mu_0$ 的检验问题。在这些检验问题中, 我们都是利用 H_0 在为真时服从 $N(0, 1)$ 分布的统计量 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 来确定拒绝域。这种检验法常称为 u 检验法。

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

下面还将给出一个有用的结果：

将例2中需要检验的问题写成以下的形式，看来更为合理：

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$$

取显著性水平为 α ，现在来求这个问题的拒绝域。

因为 H_0 中的 μ 全部都比 H_1 中的要小，从直观上看，较合理的检验法应是：若观测值 \bar{x} 与 μ_0 的差 $\bar{x} - \mu_0$ 过分大，即 $\bar{x} - \mu_0 > k$ ，则我们拒绝 H_0 而接受 H_1 ，因此拒绝域的形式为 $\bar{x} - \mu_0 \geq k$ （ k 待定）。

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

由标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 的单调性得到

$$P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\}$$

$$= P_{\mu \leq \mu_0}(\bar{x} - \mu_0 \geq k)$$

$$= P_{\mu \leq \mu_0}\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0 + k - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_0 + k) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)_{\mu \leq \mu_0} = \Phi\left(\frac{\mu - (\mu_0 + k)}{\sigma/\sqrt{n}}\right)_{\mu \leq \mu_0} \\ &\leq \Phi\left(\frac{\mu_0 - (\mu_0 + k)}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{-k}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

所以要控制 $P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\} \leq \alpha$, 只需

$$\text{令} \quad \Phi\left(\frac{-k}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

即得 $k = (\sigma/\sqrt{n})z_\alpha$, 从而得检验问题 (1.7) 的拒绝域为

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$$

$$\text{即} \quad \bar{x} - \mu_0 \geq (\sigma/\sqrt{n})z_\alpha$$

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

这与上节得到的检验问题 (1.3) 的拒绝域 (1.5) 是一致的。

比较正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 在方差 σ^2 已知时, 对均值 μ 的两种检验问题

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$$

和 $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

我们看到尽管两者原假设 H_0 的形式不同，实际意义也不一样，但对于相同的显著性水平它们的拒绝域是相同的。因此遇到形如 (1.7) 的检验问题，可归结为 (1.3) 来讨论。对于下面将要讨论的有关正态总体的参数的检验也有类似的结果。

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

2. σ^2 已知, 关于 μ 的检验 (t 检验)

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 未知, 我们来求检验问题

$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 的拒绝域 (显著性水平为 α) 。

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态总体 X 的样本, 由于 σ^2 未知,

现在不能利用 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝了。

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

注意到 S^2 是 σ^2 的无偏估计，我们用 S 来代替 σ ,

采用 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ 作为检验统计量。

当 $|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right|$ 过分大时就拒绝 H_0 ,

拒绝域的形式为 $|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| \geq k$

已知当 H_0 为真时, $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

故由 $P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\} = P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq k\right\} = \alpha$

得 $k = t_{\alpha/2}(n-1)$, 即拒绝域为

$$|t| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$$

对于正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 当 σ^2 未知时, 关于 μ 的单边检验得拒绝域在课本附表中已给出。

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

上述利用 t 统计量得出得检验法称为 t 检验法。

在实际中，正态总体的方差常为未知，所以我们常用 t 检验法来检验关于正态总体均值的检验问题。

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

例1：某种电子元件的寿命 X （以小时计）服从正态分布， μ, σ^2 均未知。现测得16只元件的寿命如下：

159 280 101 212 224 379 179 264

222 362 168 250 149 260 485 170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225（小时）？

➤ 一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验

解：按题意需检验

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 225, H_1 : \mu > 225.$$

取 $\alpha = 0.05$ 。由表8.1知检验问题的拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1)$$

现在 $n=16$, $t_{0.05}(15)=1.7531$. 又算得 $\bar{x} = 241.5, s = 98.7259$

即得
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 0.6685 < 1.7531.$$

t 不落在拒绝域，故接受 H_0 ，即认为元件的平均寿命不大于225小时。

二、两个正态总体均值差的检验 (t 检验)

我们还可以用 t 检验法检验具有相同方差的两个正态总体均值差的假设。

设 x_1, x_2, \dots, x_{n_1} 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, y_1, y_2, \dots, y_{n_2} 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本且设两样本独立。又分别记它们的样本均值为 \bar{x}, \bar{y} 记样本方差为 s_1^2, s_2^2 。

设 μ_1, μ_2, σ^2 均为未知, 要特别引起注意的是, 在这里假设两总体的方差是相等的。

➤ 二、两个正态总体均值差的检验 (t 检验)

现在来求检验问题:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta.$$

(δ 为已知常数) 的拒绝域, 取显著性水平为 $\alpha = 0.05$

引用下述 t 统计量作为**检验统计量**:

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

其中

$$s_w^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

二、两个正态总体均值差的检验 (t 检验)

当 H_0 为真时, 已知 $t \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ 与单个总体

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq k.$$

的 t 检验法相仿, 其拒绝域的形式为

$$P_{\mu_1 - \mu_2 = \delta} \left\{ \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq k \right\} = \alpha$$

$P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\}$

➤ 二、两个正态总体均值差的检验 (t 检验)

可得 $k = t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$. 于是得拒绝域为

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2).$$

关于均值差的其它两个检验问题的拒绝域在书附表中给出。常用的是 $\delta = 0$ 的情况。

当两种正态总体的方差均为已知时，我们可用 u 检验法来检验两正态总体均值差的假设问题。

二、两个正态总体均值差的检验 (t 检验)

例 2： 在平炉进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率，试验是在同一只平炉上进行的。每炼一炉钢时除操作方法外，其它条件都尽可能做到相同。先用标准方法炼一炉，然后用建议的新方法炼一炉，以后交替进行，各炼了10炉，其得率分别为

标准方法 78.1 72.4 76.2 74.3 77.4 78.4 76.0 75.5 76.7 77.3

新方法 79.1 81.0 77.3 79.1 80.0 79.1 79.1 77.3 80.2 82.1

二、两个正态总体均值差的检验 (t 检验)

设这两个样本相互独立，且分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ ， μ_1, μ_2, σ^2 均未知。问建议的新操作方法能否提高得率？（取 $\alpha = 0.05$ ）

解：需要检验假设 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$.
分别求出标准方法和新方法的样本均值和样本方差如下：

$$n_1 = 10, \bar{x} = 76.23, s_1^2 = 3.325,$$

$$n_2 = 10, \bar{y} = 79.43, s_2^2 = 2.225.$$

➤ 二、两个正态总体均值差的检验 (t 检验)

又,

$$s_w^2 = \frac{(10-1)s_1^2 + (10-1)s_2^2}{10+10-2} = 2.775, t_{0.05}(18) = 1.7341,$$

故拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} \leq -t_{0.05}(18) = -1.7341,$$

现在由于样本观察值 $t = -4.295 < -1.7341$, 所以拒绝 H_0 ,

即认为建议的新操作方法较原来的方法为优。

谢谢大家