厦门大学《微积分Ⅰ-1》课程期中试题

考试日期：2011.11　　信息学院自律督导部整理

1．求下列函数的极限：（每小题 4 分，共 16 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{(\sqrt{1+x}-1)[\ln(1+x)-x]}$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^2+x)\ln(1+\dfrac{1}{x})-x-\dfrac{1}{x^2}\cos x]$

2．求下列数列的极限：（每小题 4 分，共 8 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1})$

3．（10 分）设数列$\{x_n\}$**满足** $x_1=\dfrac{\pi}{2}$， $x_{n+1}=\sin x_n$， $n=1,2,3,\ldots$，

（1）试证明此数列极限存在，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（2）试求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$。

4．（**10** 分）求函数 $f(x)=(x-2)\div[1-e^{\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}}]+\cos\frac{1}{x}$ 的间断点，并判断其类型。

5．（**6** 分）求函数 $y=\ln|\sec x+\tan x|+x^x+\arctan\sqrt{x^2-1}$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和微分 $dy\big|_{x=2}$ 。

6．（**10** 分）已知 $f(x)=x^2\cos 2x+\ln(1-x)$，试求 $f^{(20)}(x)$ 。

7．（**10** 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(a+b)\sin x+2\ln(1-x)}{x} & x>0\\ e^{ax}-1 & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，试求出 a 和 b 。

8．（**10** 分）设函数 $y=f(x)$ 的极坐标式为 $\rho=a\theta$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\pi}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\theta=0}$ 。

9.（10 分）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是二阶可导，并且 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，已知 $f(0)=1,$

$f'(0)=2, f''(0)=8$，求 $g'(1)$ 及 $g''(1)$ 。

10.（10 分）以下两题任选其一（仅做一题）

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导， $f(0)=0$， $f(1)+f(2)=0$，证明：至少存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$ 。

（2）设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导， $f(1)=\dfrac{1}{2}$， $f(2)=2$，证明：至少存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$ 。

附加题 （10 分）

依次求解下列问题

（1） 证明方程 $\mathrm{e}^{x}+x^{2n+1}=0$ 有唯一的实根 x_n $(n=0,1,2,\cdots)$；

（2） 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值 A;

（3） 证明当 $n\to\infty$ 时， x_n-A 与 $\dfrac{1}{n}$ 是同阶无穷小。