

# 概率论与数理统计

## 条件概率

主讲人：曾华琳



信息科学与技术学院

# 条件概率

---



## 1. 条件概率的概念

在解决许多概率问题时，往往需要在有某些附加信息（条件）下求事件的概率。

如在事件B发生的条件下求事件A发生的概率，将此概率记作 $P(A|B)$ 。

一般地  $P(A|B) \neq P(A)$

## 条件概率

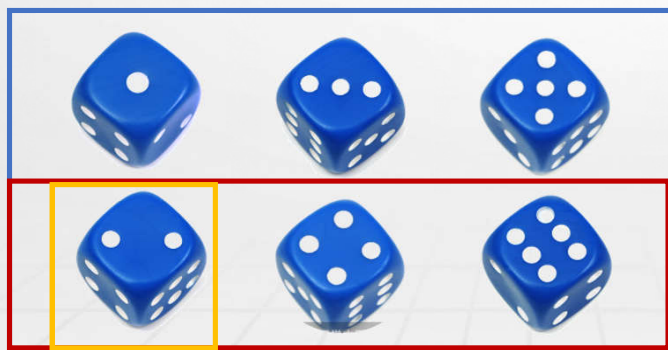
例如，掷一颗均匀骰子， $A=\{\text{掷出2点}\}$ ， $B=\{\text{掷出偶数点}\}$ ，

$$P(A)=1/6, \quad P(A|B)=?$$

已知事件  $B$  发生，此时试验所有可能结果构成的集合就是  $B$ 。

掷骰子

事件  $B$



事件  $A$

于是  $P(A|B)=1/3$ .

容易看到

$$P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

## 条件概率

---

$B$  中共有 3 个元素，它们的出现是等可能的，其中只有 1 个在集  $A$  中。

于是  $P(A|B) = 1/3$ .

容易看到

$$P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

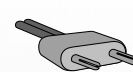
## 条件概率

又如，10 件产品中有7 件正品，3 件次品，7 件正品中有3 件一等品，4 件二等品。现从这10件中任取一件，记

$A=\{\text{取到一等品}\}$ ，  $B=\{\text{取到正品}\}$

则  $P(A) = 3/10$

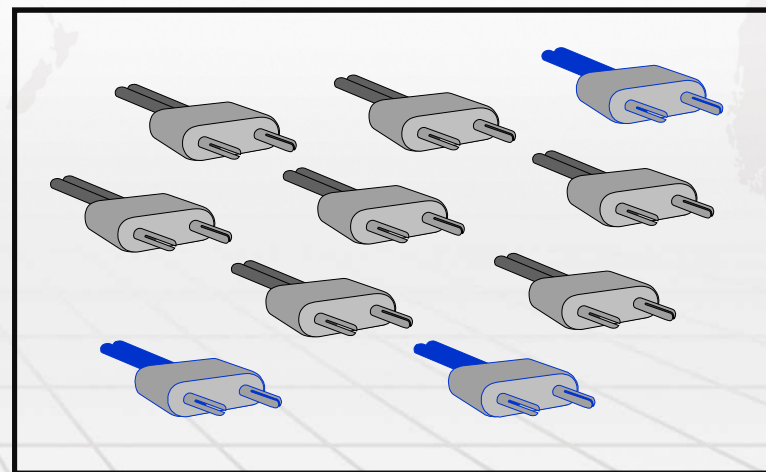
$$P(A|B) = \frac{3}{7} = \frac{3/10}{7/10} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



正品



次品



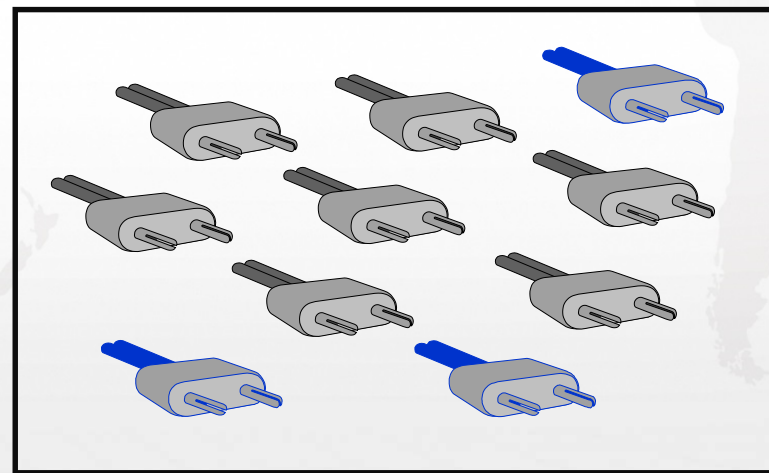
## 条件概率

$A = \{\text{取到一等品}\}, P(A) = 3/10$

$B = \{\text{取到正品}\} \quad P(A|B) = 3/7$

本例，计算 $P(A)$ 时，依据的前提条件是10件产品中一等品的比例。

 正品  次品



计算 $P(A|B)$ 时，这个前提条件未变，只是加上“事件  $B$  已发生”这个新的条件。



## 条件概率

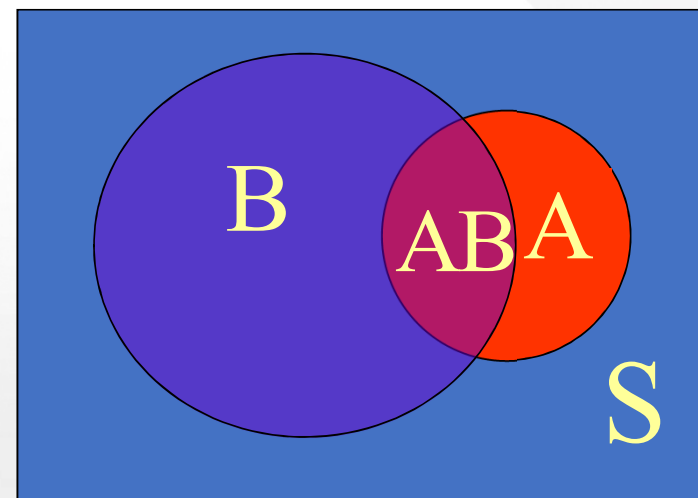


### 2. 条件概率的定义

设 $A$ 、 $B$ 是两个事件，且 $P(B) > 0$ ，则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

在事件 $B$ 发生的条件下，事件 $A$ 的条件概率。



## 条件概率



### 3. 条件概率的性质(自行验证)

条件概率  $P(\bullet | A)$  具备概率定义的三个条件：

- (1) 非负性：对于任意的事件  $B$ ,  $P(B | A) \geq 0$ ；
- (2) 规范性： $P(S | A) = 1$ ；
- (3) 可列可加性：设  $B_1, B_2, \dots$  是两两互斥事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

所以在第二节中证明的性质对条件概率都成立。



## 条件概率



### 4. 条件概率的计算

1) 用定义计算:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) > 0$$

2) 从加入条件后改变了的情况去算

例:  $A = \{\text{掷出2点}\}$ ,  $B = \{\text{掷出偶数点}\}$

$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

在缩减样本空间中  
 $A$ 所含样本点个数

$B$  发生后的缩减样本  
空间所含样本点总数

## 条件概率

---

**例1：** 掷两颗均匀骰子，已知第一颗掷出6点，问 “掷出点数之和不小于10 ”的概率是多少？

解： 设  $A=\{\text{掷出点数之和不小于10}\}$

$B=\{\text{第一颗掷出6点}\}$

## 条件概率

应用定义

解法1

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3/36}{6/36} = \frac{1}{2}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

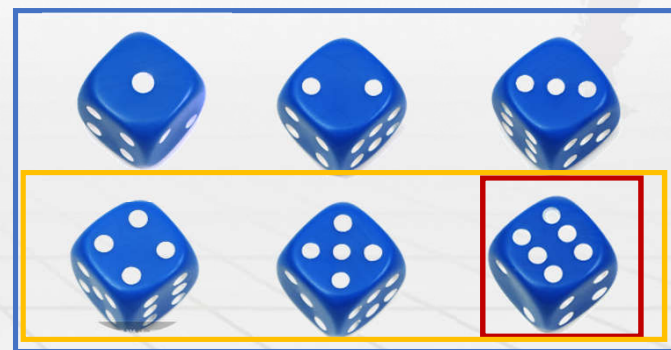
解法2

在B发生后的缩减样本空间中计算

$$P(A|B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

事件B

掷骰子



已掷6点

The background of the slide is divided into three horizontal sections. The top section is white with a faint, light gray world map. The middle section is a solid dark red color, also featuring a faint world map. The bottom section is white with a gray grid pattern that recedes into the distance.

**谢 谢 大 家**