厦门大学《微积分 I - 1》课程期中试题 A

考试日期：2013.11　　信息学院自律督导部整理

一、解答题（共 76 分）

1、计算下列各题：（每题 6 分，共 30 分）

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x}{x-\sin x}}$；

（2）设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，试求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0 f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$；

（3） 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$ 所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

(4) 设 $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}+(1+x^2)^{\sin x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(5) 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f^{(10)}(x)$；

2．(8 分)求函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x(x^2-4)}, & x>0 \\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x\le 0 \end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

3．(8 分)设函数 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ \mathrm{e}^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$ ；

4．(8 分)设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $f(0)=f'(0)=0$ ， $f''(0)=6$ ，试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^4}$ ；

5．(6 分)求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+9$ 的单调区间和极值；

6．(8 分)设 $0<x_1<2$ ， $x_n=\dfrac{4(1+x_{n-1})}{4+x_{n-1}}$ （ $n=2,3,\cdots$ ），证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7．（8 分）设 $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0 \end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

二、应用题（10 分）

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内嵌入有最大面积的四边平行于椭圆轴的矩形，求该内接矩形的最大面积。

三、证明题（共 14 分）

1、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=b$， $f(b)=a$，证明：

（1）在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $f(c)=c$；

（2）至少存在互异的两点 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

2、（6 分）证明：当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x\geq x^{\mathrm{e}}$.