概率论与数理统计

正态总体方差的假设检验

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

一、单个总体$N(\mu, \sigma^2)$均值 μ 的检验

1. σ^2 已知，关于 μ 的检验（μ检验）

在上一小节中已讨论过正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，当 σ^2 已知时关于 $\mu = \mu_0$ 的检验问题。在这些检验问题中，我们都是利用H_0在为真时服从$N(0, 1)$分布的统计量 $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 来确定拒绝域。这种检验法常称为 u **检验法**。

一、单个总体的情况

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ，σ^2 均属未知，$x_1, x_2, \ldots, x_n$

是来自X的样本，要求检验假设（显著性水平为 α）：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

σ_0^2 为已知常数。

一、单个总体的情况

由于 S^2 是 σ^2 的无偏估计，当H_0为真时，比值 $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$ 一般来说应在1附近摆动，而不应过分大于1或过分小于1。由于当 H_0 为真时，$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ 。我们取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 作为检验统计量，如上所说，知道上述检验问题的拒绝域具有以下的形式：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1 \text{ 或 } \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1 \text{ 或 } \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$$

此处的 k_1 , k_2值由下式确定：

$$\mathrm{P}\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1) \cup (\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\} = \alpha$$

为计算方便起见，习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1)\} = \frac{\alpha}{2}, \qquad P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\} = \frac{\alpha}{2} \qquad (3.1)$$

故得

$$k_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), k_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

一、单个总体的情况

于是得拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

上述检验法为 χ^2 检验法。关于方差 σ^2 的单边检验法得拒绝域已在附表中给出。

一、单个总体的情况

例 3： 某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差 $\sigma^2=5000$（小时^2）的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变，现随机取26只电池，测出其寿命的样本方差 $S^2=9200$（小时^2）。问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化（取$\alpha=0.02$）？

一、单个总体的情况

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le 11.524 \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge 44.314$$

由观察值 $S^2=9200$ 得 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 46 > 44.314$

所以拒绝 H_0， 认为这批电池寿命波动性较以往的有显著的变化。

二、两个总体的情况

设 $x_1, x_2, \ldots, x_{n1}$ 来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$y_1, y_2, \ldots, y_{n2}$ 是来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且两样本独立。其样本方差分别为 s_1^2, s_2^2。且设 $\mu_1, \mu_2, s_1^2, s_2^2$ 均为未知，现在需要检验假设：

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

二、两个总体的情况

由于 s_1^2, s_2^2 的独立性及 $(n_i-1)s_i^2/\sigma_i^2 \sim \chi(n_i-1), i=1,2$

得知 $$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1) \qquad (3.2)$$

故当 H_0 为真时，即当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时有

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

二、两个总体的情况

我们取 $F = s_1^2 / s_2^2$ 作为检验统计量。

当 H_0 为真时 $E(s_1^2) = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = E(s_2^2)$，

而当 H_1 为真时，由于 $E(s_1^2) = \sigma_1^2 > \sigma_2^2 = E(s_2^2)$，

故 $F = s_1^2 / s_2^2$ 有偏大的趋势，

因此拒绝域的形式为

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq k. \qquad (3.3)$$

二、两个总体的情况

k 由下式确定：

$$\text{P}\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = P_{\sigma_1^2=\sigma_2^2}\left\{\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq k\right\} = \alpha,$$

即有 $k = F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$,

于是拒绝域为 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$ (3.4)

上述检验法称为F检验法。关于 σ_1^2, σ_2^2 的另外两个检验问题的拒绝域在附表中给出。

二、两个总体的情况

例 4：试对例2中的数据作方差的假设检验（取$\alpha = 0.01$）

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$$

解：此处 $n_1=n_2=10, \alpha=0.01$，拒绝域为

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\geq F_{0.005}(10-1,10-1)=6.54$$

或 $$\frac{s_1^2}{s_2^2}\leq F_{1-0.005}(10-1,10-1)=\frac{1}{F_{0.005}(10-1,10-1)}=\frac{1}{6.54}=0.153.$$

二、两个总体的情况

现在 $s_1^2 = 3.325, s_2^2 = 2.225, s_1^2 / s_2^2 = 1.49$

即有 $0.153 < s_1^2 / s_2^2 < 6.54$

故接受 H_0，认为两总体方差相等。

二、两个总体的情况

例5 研究机器A和机器B生产的钢管的内径，随机抽取机器 A 生产的管子18 只，测得样本方差 $s_1^2=0.34(mm^2)$；抽取机器B生产的管子13只，测得样本方差$s_2^2=0.29(mm^2)$。设两样本相互独立，且设由机器A,机器B生产的管子的内径分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$，这里 $\mu_i,\sigma_i^2(i=1,2)$ 均未知。作假设检验：（取$\alpha=0.01$）

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2.$$

二、两个总体的情况

解：此处

$$n_1 = 18, n_2 = 13, F_\alpha(18-1, 13-1) = F_{0.1}(17, 12) = 1.96$$

由（3.4）式拒绝域为

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq 1.96.$$

现在

$$s_1^2 = 0.34, s_2^2 = 0.29, s_1^2 / s_2^2 = 1.17 < 1.96$$

故接受 H_0

三、课堂练习

某机器加工某种零件，规定零件长度为100cm，标准差不超过2cm。每天定时检查机器的运行情况。某日抽取10个零件，测得平均长度 $\overline{x}=101cm$，样本标准差 $S=2cm$ 。

问该日机器工作是否正常（$\alpha=0.05$）？

三、课堂练习

解：设加工零件长度为X, $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 **均末知。**

(1)检验假设 $H_{01}:\mu=\mu_0=100, H_{11}:\mu\neq\mu_0=100$ ，

这是 t**—检验，当** H_{01} **成立时，统计量**

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$$

拒绝域为 $W=\{(x_1,\cdots,x_n):|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

对 $\bar{x}=101, n=10, S^2=2^2$

计算得 $t=\dfrac{101-100}{2}\sqrt{10}=1.5811$

三、课堂练习

对$(\alpha=0.05)$，由 t—分布表查得$t_{0.025}(9)=2.2622$ 。

因为$|t|=1.5811<2.2622$。接受假设H_{01}，即认为 $\mu=100$。

(2) 检验假设 $H_{02}:\sigma^2=\sigma_0^2\le 2^2, H_{12}:\sigma_1^2>\sigma_0^2=2^2$

这是 χ^2 检验问题；

当 H_{02} 成立时，统计量

$$\chi_n^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

拒绝域为

$$W=\{(x_1,\cdots,x_n):\chi_n^2(n-1)\}$$

三、课堂练习

计算得 $\chi_n^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{9\times 2^2}{2^2}=9$ 由（$\alpha=0.05$），

查得 $\chi_{0.05}^2(9)=16.9$，因为 $\chi_n^2=9<16.9$ ，

故接受假设H_{02}，即认为$\sigma^2<2^2$。

综合（1），（2）可以认为该日机器工作状态正常。

谢 谢 大 家