概率论与数理统计

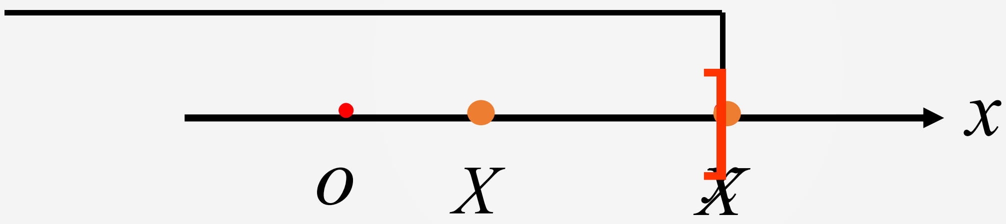
随机变量的分布函数

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

一、分布函数的定义

设 X 是一个 $r.v$，称 $F(x)=P(X\leq x)(-\infty<x<+\infty)$ 为 **X 的分布函数**，记作 $F(x)$ 。



如果将 X 看作数轴上随机点的坐标，那么分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X 落在区间 $(-\infty, x]$ 内的概率。

一、分布函数的定义

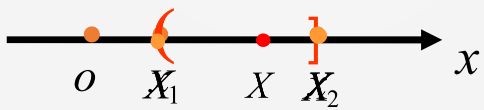
请注意：

(1) 在分布函数的定义中，X是随机变量， x是参变量。

(2) $F(x)$ 是$r.v\ X$取值不大于 x 的概率。

(3) 对任意实数 $x_1 < x_2$，随机点落在区间$(x_1, x_2]$内的概率为：

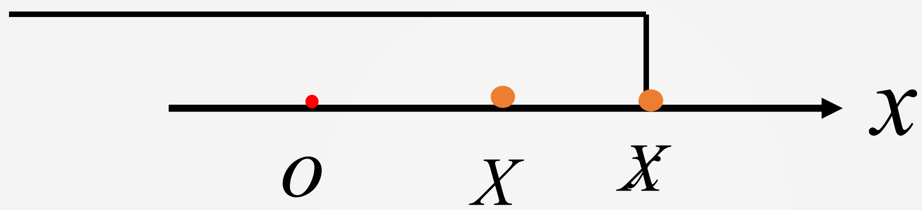
$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$



因此，只要知道了随机变量X的分布函数， 它的统计特性就可以得到全面的描述。

一、分布函数的定义

$$F(x)=P(X\le x),\quad -\infty<x<\infty$$



分布函数是一个普通的函数，
正是通过它，我们可以用高等数学的
工具来研究随机变量。

一、分布函数的定义

例1：设随机变量 X 的分布律为

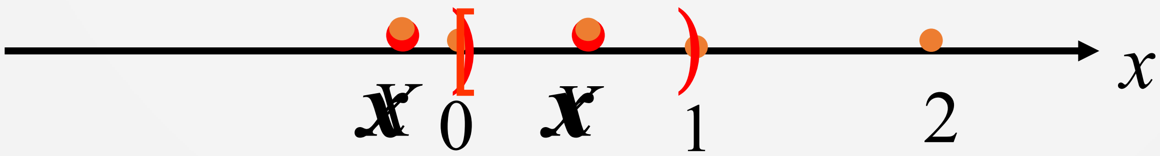
X	0	1	2
p_k	1/3	1/6	1/2

，求 X 的分布函数 $F(x)$.

解 $F(x)=P(X\le x)$

当 $x<0$ **时，** $\{X\le x\}=\Phi$， **故** $F(x)=0$

当 $0\le x<1$ **时，** $F(x)=P\{X\le x\}=P(X=0)=\dfrac{1}{3}$



一、分布函数的定义

当 $1 \leq x < 2$ 时，

$$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

当 $x \geq 2$ 时，

$$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = 1$$

一、分布函数的定义

故

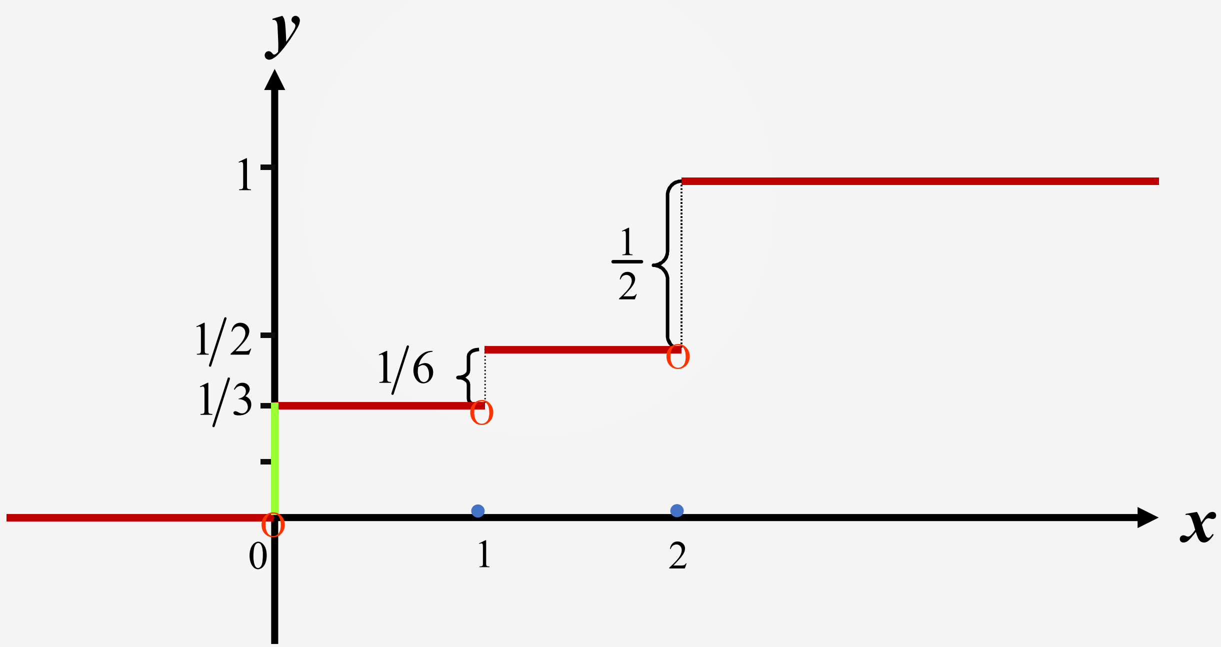
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{3}, & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

注意右连续

下面我们从图形上来看一下。

一、分布函数的定义

F(x) 的分布函数图



一、分布函数的定义

一般地

设离散型 $r.v\ X$ 的分布律是

$$P\{X=x_k\}=p_k\,,\qquad k=1,2,3,\ldots$$

则其分布函数

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_k\le x}p_k$$

即$F(x)$是X取$\le x$的诸值x_k的概率之和。

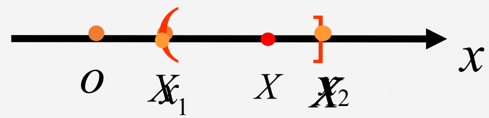
二、分布函数的性质

(1) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一个不减函数，

即对 $\forall\, x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$ 且 $x_1 < x_2$，都有

$F(x_1) \le F(x_2)$;

$$\boldsymbol{F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \le x_2\} \ge 0}$$



二、分布函数的性质

(2) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$　　$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

(3) $F(x)$ **右连续，即** $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

如果一个函数具有上述性质，则一定是某个 $r.v\ X$ 的分布函数。也就是说，性质(1)--(3)是鉴别一个函数是否是某 $r.v$ 的分布函数的充分必要条件。

二、分布函数的性质

例2 **设有函数** $F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

试说明$F(x)$能否是某个$r.v$ 的分布函数。

解：注意到函数 $F(x)$在$[\pi/2,\pi]$上下降，不满足性质(1)，故$F(x)$不能是分布函数。

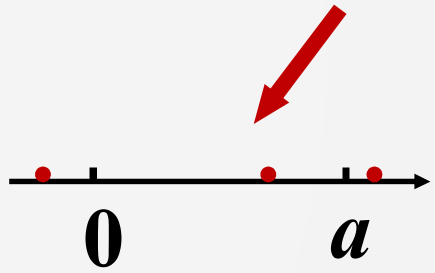
或者 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$

不满足性质(2)， 可见$F(x)$也不能是$r.v$ 的分布函数。

二、分布函数的性质

例3： 在区间 $[0，a]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标。设这个质点落在 $[0, a]$中意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比，试求 X 的分布函数。

解：设 $F(x)$ 为 X 的分布函数，



当 $x<0$ 时，$F(x)=P(X\leq x)=0$

当 $x>a$ 时，$F(x)=1$

当 $0\leq x\leq a$ 时，$P(0\leq X\leq x)=kx$ （k为常数）

二、分布函数的性质

由于 $P(0 \le X \le a) = 1 \Rightarrow ka=1$，$k = 1/a$

$$F(x) = P(X \le x) = P(X<0) + P(0 \le X \le x) = x / a$$

故

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{a}, & 0 \le x \le a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

这就是在区间 $[0, a]$上服从均匀分布的**连续型**随机变量的分布函数。

谢 谢 大 家