概率论与数理统计

连续型随机变量的条件概率密度

主讲人：郑旭玲

信息科学与技术学院

连续型随机变量的条件分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量，

由于对任意x, y，

$P\{X=x\}=0$，$P\{Y=y\}=0$，

因此，不能直接用条件概率公式来

得到条件分布函数.

连续型随机变量的条件分布

给定y，对于任意固定的ε>0，对于任意x，考虑条件概率：

$$P\left\{X \le x \middle| Y = y\right\} = \lim_{\varepsilon \to 0+} P\left\{X \le x \middle| y < Y \le y + \varepsilon\right\}$$

$$P\left\{X \le x \middle| y < Y \le y + \varepsilon\right\} = \frac{P\left\{X \le x, y < Y \le y + \varepsilon\right\}}{P\left\{y < Y \le y + \varepsilon\right\}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x,y)\,dy\right)dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)\,dy} \approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx}{\varepsilon \cdot f_Y(y)} (\varepsilon \to 0+)$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx$$

连续型随机变量的条件分布

定义 设 X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$，

(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$，

若对于固定的 y，$f_Y(y)>0$，

则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下

X 的条件概率密度。

记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

连续型随机变量的条件分布

定义

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$ 为在 $Y=y$

的条件下，X 的条件分布函数。

记为 $P\{X \le x|Y=y\}$ 或 $F_{X|Y}(x|y)$

即

$$P\{X \le x|Y=y\} = F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

连续型随机变量的条件分布

- 条件概率密度满足：

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx=\frac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=1$$

- 条件分布函数也具有分布函数的一切性质

连续型随机变量的条件分布

类似地，可以定义

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

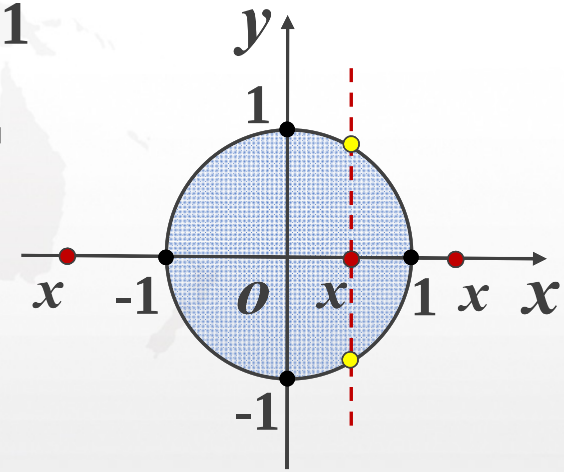
$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy$$

连续型随机变量的条件分布

例 设(X,Y)服从单位圆上的均匀分布，概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$f_{Y|X}(y|x)$



解： X的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

连续型随机变量的条件分布

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

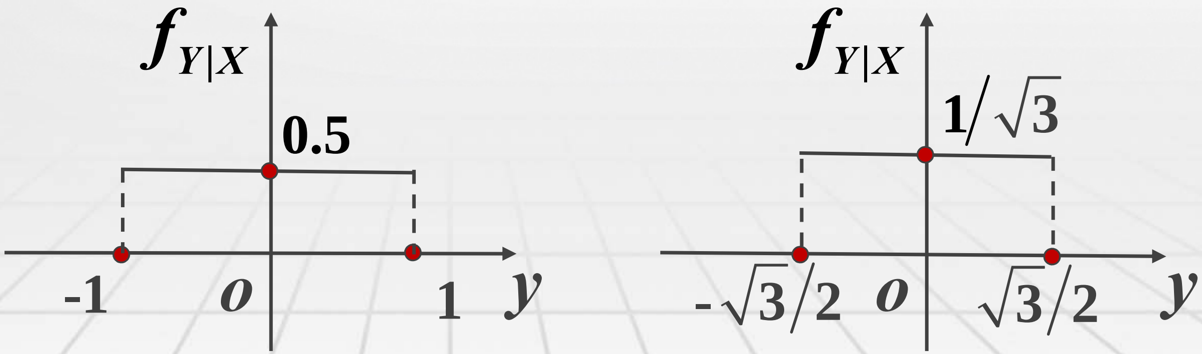
当$|x|<1$时，对于 $-\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$，有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

连续型随机变量的条件分布

即当 $|x|<1$ 时，有

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

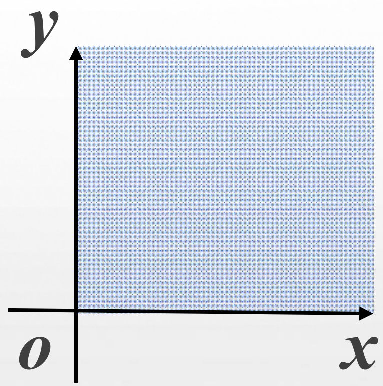


当x =0时　　当x=0.5时

连续型随机变量的条件分布

例 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & 0<x<\infty, 0<y<\infty \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

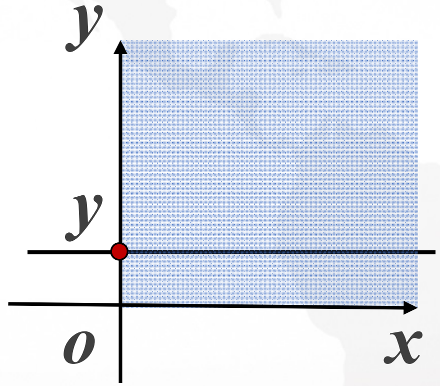


求 $P\{X>1|Y=y\}$.

解： $P\{X>1|Y=y\}=\int_1^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx$

为此，需求出 $f_Y(y)$、$f_{X|Y}(x|y)$

连续型随机变量的条件分布



由于 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}dx=\frac{e^{-y}}{y}[-ye^{-x/y}]\Big|_0^{\infty}$$

$$=e^{-y},\ 0<y<\infty$$

于是对 $y>0$，$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{e^{-x/y}}{y}，\ x>0$

故对$y>0$，$P\{X>1|Y=y\}=\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{-x/y}}{y}dx=-e^{-x/y}\Big|_1^{\infty}=e^{-1/y}$

连续型随机变量的条件分布

例 设数 X 在区间 (0, 1) 均匀分布，当观察到 $X=x\ (0<x<1)$ 时，数 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机地取值，求 Y 的概率密度。

解： 依题意，X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于任意给定的值 $x\ (0<x<1)$，在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

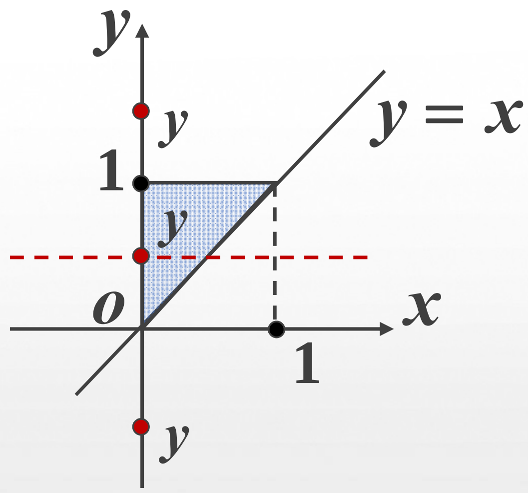
$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

连续型随机变量的条件分布

X和Y的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



于是得Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

小结

- 条件分布律
- 条件概率密度
- 条件分布函数

谢 谢 大 家