概率论与数理统计

伯努利大数定律与辛钦大数定律

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

三、贝努里大数定律

定理2（贝努里大数定律）

设 n_A 是n次独立重复试验中事件A发生的次数，p 是事件A在每次试验中发生的概率，则对于任意正数$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0$$

伯努利

三、贝努里大数定律

定理2（贝努里大数定律）

证明　因为$n_A \sim b(n, p)$,由此可表示为

$$n_A = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

其中相互独立，且都服从以p以为参数的（0－1）分布.因而$E(X_k) = p$，$D(X_k) = p(1-p)$,

伯努利

由定理1即得

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n} - p| < \varepsilon\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - p| < \varepsilon\} = 1$$

或 $$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0$$ **证毕**

注：贝努里大数定律表明，当重复试验次数n充分大时，事件A发生的频率n_A/n与事件A的概率p有较大偏差的概率很小。

事件发生的频率可以代替事件的概率。

四、辛钦大数定律

下面给出的独立同分布下的大数定律，不要求随机变量的方差存在。

定理3（辛钦大数定律）

设随机变量序列$X_1,X_2,\ldots$ 相互独立，服从同一分布，具有数学期$E(X_i)=\mu$, i=1,2,…， 则对于任意正数ε，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

辛钦

四、辛钦大数定律

注：

1. 辛钦大数定律为寻找随机变量的期望值提供了一条实际可行的途径。
2. 伯努利大数定律是辛钦定理的特殊情况。
3. 辛钦定理具有广泛的适用性。

要估计某地区的平均亩产量，要收割某些有代表性块，例如 n 块地。计算其平均亩产量，则当 n 较大时，可用它作为整个地区平均亩产量的一个估计。

四、辛钦大数定律

例：在一个罐子中，装有10个编号为0-9的同样的球，从罐中有放回地抽取若干次，每次抽一个，并记下号码。

设 $$X_k=\begin{cases}1 & 第k次取到号码0\\ 0 & 否则\end{cases}\quad,\ k=1,2,\ldots$$

问对序列$\{X_k\}$能否应用大数定律？

四、辛钦大数定律

解:

$$X_k \sim \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 0.9 \end{Bmatrix}, \quad E(X_k)=0.1, \quad k=1,2,\ldots$$

诸X_k独立同分布，且期望存在，故能使用大数定律。

即对任意的$\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - 0.1| < \varepsilon\} = 1$$

三、归纳总结

大数定律

伯努利大数定律	$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\lvert \frac{n_A}{n} - p \rvert < \varepsilon\} = 1$	$n_A \sim b(n, p)$
切比雪夫大数定律	$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\lvert \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \mu \rvert < \varepsilon\} = 1$	$\begin{cases} E(X_k) = \mu \\ D(X_k) = \sigma^2 \end{cases}$
辛钦大数定律	$\lim\limits_{n\to\infty} P\{\lvert \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \mu \rvert < \varepsilon\} = 1$	$E(X_k) = \mu$

大数定律以严格的数学形式表达了随机现象最根本的性质之一：

平均结果的稳定性

谢 谢 大 家