概率论与数理统计

数　学　期　望

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

数学期望

在前面的课程中，我们讨论了随机变量及其分布，如果知道了随机变量 X 的概率分布，那么 X 的全部概率特征也就知道了。

然而，在实际问题中，概率分布一般是较难确定的。而在一些实际应用中，人们并不需要知道随机变量的一切概率性质，只要知道它的某些数字特征就够了。

在这些数字特征中，最常用的是

数学期望、方差、协方差和相关系数

一、离散型随机变量的数学期望

1、概念的引入：

例 1： 某车间对工人的生产情况进行考察。车工小张每天生产的废品数 X 是一个随机变量。如何定义 X 的平均值呢?

我们先观察小张100天的生产情况

一、离散型随机变量的数学期望

若统计100天,

32天没有出废品;
30天每天出一件废品;
17天每天出两件废品;
21天每天出三件废品;

（假定小张每天至多出现三件废品）

可以得到这100天中每天的平均废品数为

$$0\cdot\frac{32}{100}+1\cdot\frac{30}{100}+2\cdot\frac{17}{100}+3\cdot\frac{21}{100}=1.27$$

这个数能否作为X的平均值呢?

一、离散型随机变量的数学期望

可以想象，若另外统计 100 天，车工小张不出废品，出一件、二件、三件废品的天数与前面的100天一般不会完全相同，这另外100天每天的平均废品数也不一定是1.27。

一般来说，若统计 n 天，

n_0天没有出废品;
n_1天每天出一件废品;
n_2天每天出两件废品;
n_3天每天出三件废品.

(假定小张每天至多出三件废品)

可以得到 n 天中每天的平均废品数为

$$0\cdot\frac{n_0}{n}+1\cdot\frac{n_1}{n}+2\cdot\frac{n_2}{n}+3\cdot\frac{n_3}{n}$$

一、离散型随机变量的数学期望

$$0\cdot\frac{n_0}{n}+1\cdot\frac{n_1}{n}+2\cdot\frac{n_2}{n}+3\cdot\frac{n_3}{n}$$

这是以频率为权的加权平均

当 N 很大时，频率接近于概率，所以我们在求废品数 X 的平均值时，用概率代替频率，得平均值为

$$0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3$$

这是以概率为权的加权平均

这样得到一个确定的数. 我们就用这个数作为随机变量 X 的平均值。

一、离散型随机变量的数学期望

定义1： 设 X 是离散型随机变量，它的分布率是：

$$P\{X=x_k\}=p_k\,,\quad k=1,2,\ldots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛， 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量X的数学期望，记为$E(X)$,

即 $$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

请注意： 离散型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的级数的和。数学期望简称期望，又称为均值。

一、离散型随机变量的数学期望

例1 甲、乙二人进行打靶，所得分数分别记为X_1, X_2，它们的分布率分别为

X_1	0	1	2
p_k	0	0.2	0.8

X_2	0	1	2
p_k	0.6	0.3	0.1

解：我们先来算 X_1 和 X_2 的数学期望，

$$E(X_1) = 0\times 0 + 1\times 0.2 + 2\times 0.8 = 1.8(\text{分})$$

$$E(X_2) = 0\times 0.6 + 1\times 0.3 + 2\times 0.1 = 0.5(\text{分})$$

一、离散型随机变量的数学期望

例 2 设$X \sim \pi(\lambda)$,求$E(X)$.

解 X的分布率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$$

X的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

即$E(X)=\lambda$

一、离散型随机变量的数学期望

例 3：按规定，某车站每天 8:00~9:00 , 9:00~10:00 都恰有一辆客车到站，但到站时刻是随机的，且两者到站的时间相互独立。其规律为：

到站时刻	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	1/6	3/6	2/6

一旅客 8:20 到车站，求他候车时间的数学期望。

解：设旅客的候车时间为X(以分计),其分布率为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

上表中例如

$$P\{X=70\}=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$$

其中A为事件"第一班车8:10到站",B为事件"第二班车9:30到站"。

候车时间X的数学期望为

$$E(X)=10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{36}+70\times\frac{3}{36}+90\times\frac{2}{36}=27.22\text{分}$$

谢谢大家