

概率论与数理统计

二维随机变量及其分布函数

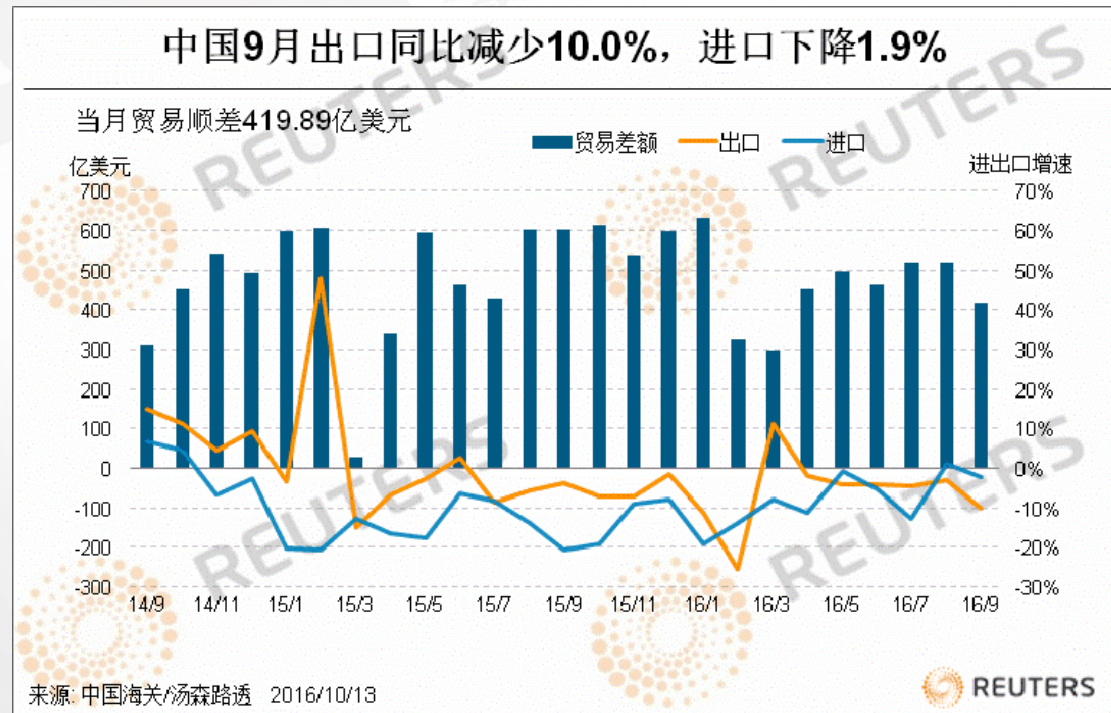
主讲人：郑旭玲



信息科学与技术学院



到现在为止，我们只讨论了一维随机变量及其分布。但有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，需要用几个随机变量来描述。



为了研究一个国家的对外贸易发展状况，可以对比该国每月的进口总值 X 和出口总值 Y 。

样本空间 $S=\{e\}=\{\text{某国所有月份的外贸情况}\}$ ，而 $X(e)$ 和 $Y(e)$ 是定义在 S 上的两个随机变量。



血压通常由收缩压和舒张压两个指标构成。



除了血压，人体的基本生理指标还有心率、血氧、呼吸、体温等等

定义

一般地，设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S = \{e\}$ ，设 $X_1 = X_1(e)$, $X_2 = X_2(e)$, \dots , $X_n = X_n(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 叫做 **n 维随机向量**或 **n 维随机变量**。



一维随机变量及其分布



多维随机变量及其分布

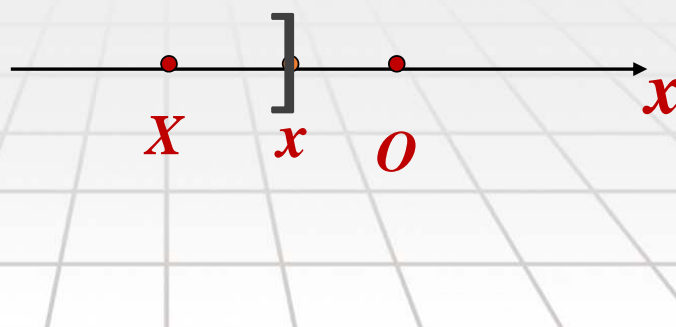
由于2维随机变量的情况，不难推广到多维随机变量上，所以本章重点讨论2维随机变量。

二维随机变量的分布函数

一维随机变量
 X 的分布函数

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$-\infty < x < \infty$$



二维随机变量的分布函数



定义

设 (X, Y) 是二维随机变量，如果对于任意实数 x, y ，二元函数：

$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} \triangleq P(X \leq x, Y \leq y)$$

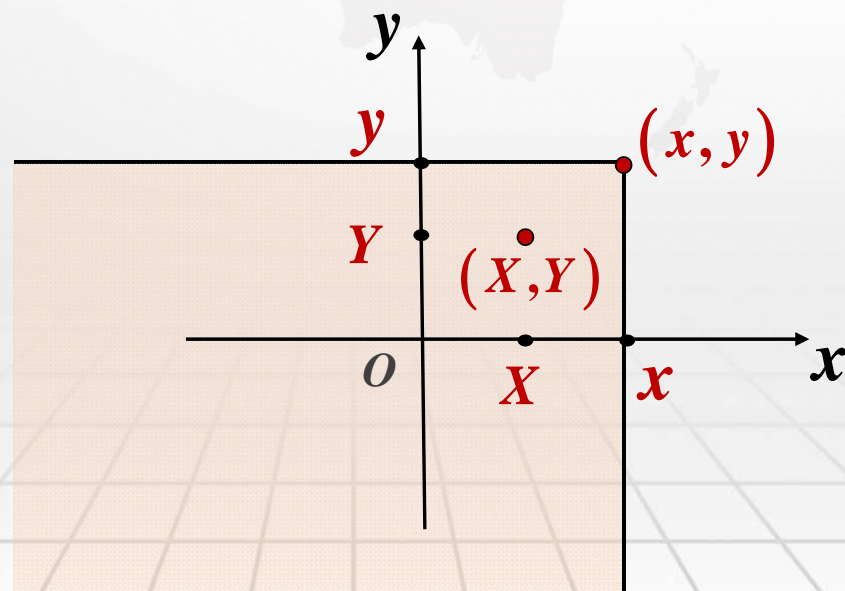
称为二维随机变量 (X, Y) 的**分布函数**，或者称为随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**。

二维随机变量的分布函数



分布函数的函数值的几何解释

分布函数 $F(x,y)$ 在点 (x,y) 处的函数值就是随机点 (X,Y) 落在下图所示的点 (x,y) 左下方的无穷矩形域内的概率。

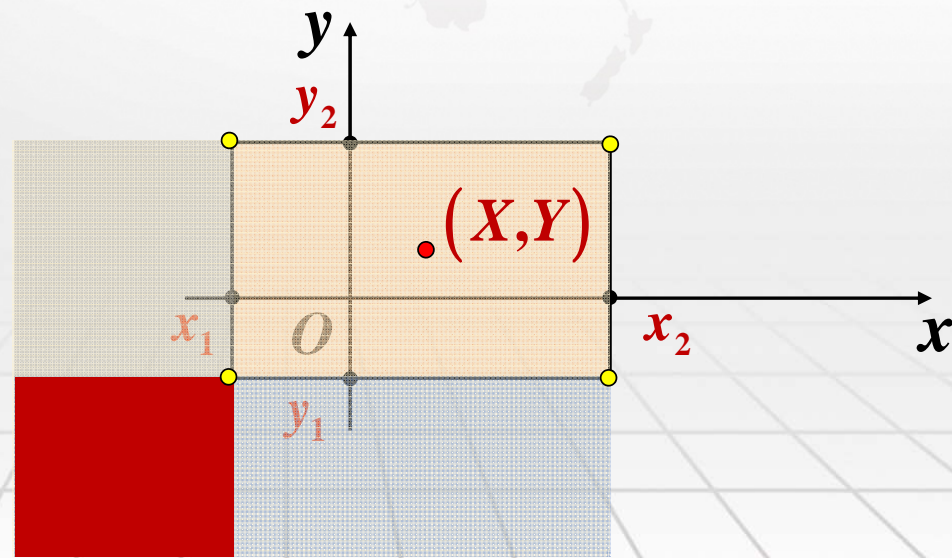


二维随机变量的分布函数

分布函数的函数值的几何解释

随机点 (X,Y) 落在矩形域 $[x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2]$ 内的概率为

$$\begin{aligned} &P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \end{aligned}$$



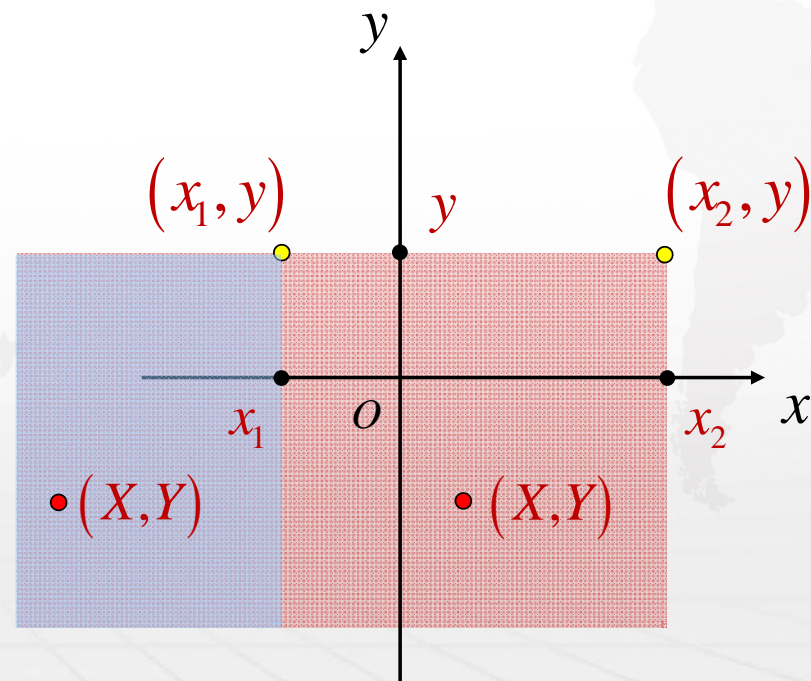
二维随机变量的分布函数

分布函数 $F(x,y)$ 的性质

1. $F(x,y)$ 是关于变量 x 和 y 的不减函数

对任意固定的 $y \in R$ 及 $\forall x_1, x_2 \in R$,
当 $x_1 < x_2$ 时 $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$;

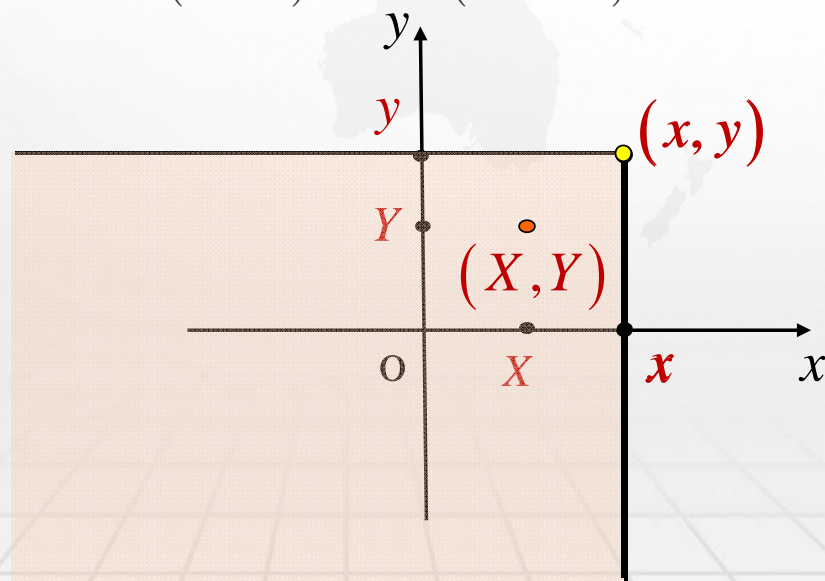
对任意固定的 $x \in R$ 及 $\forall y_1, y_2 \in R$,
当 $y_1 < y_2$ 时 $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$;



二维随机变量的分布函数

分布函数 $F(x,y)$ 的性质

2. $0 \leq F(x, y) \leq 1$, 且对任意固定的 $y \in R$, $F(-\infty, y) = 0$,
对任意固定的 $x \in R$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.



3. $F(x, y) = F(x+0, y)$, $F(x, y) = F(x, y+0)$.