概率论与数理统计

事件的运算

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

事件的运算

设试验 E 的样本空间为 S，A、B、C、A_1、A_2…试验 E 的事件。

事件的运算

1 包含关系

如果事件A发生必然导致事件 B发生，则称事件B 包含事件 A (或称事件 A 是事件 B 的子事件），记作$A \subset B$ 或 $B \supset A$。

对于任何事件A，都有$S \supset A \supset \emptyset$。

相等关系　若$A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等 (或称等价），记作 $A = B$ 。

事件的运算

2 和事件

事件A、B **至少有一个发生**所构成的事件叫做事件A与事件B的和。记作$A \cup B$。

类似地，称事件A_1、A_2、…、A_n中至少有一个发生的事件为事件A_1、A_2、…、A_n的和事件。记为$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$，简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$．

称事件A_1、A_2、…中至少有一个发生的事件为事件A_1、A_2、…的和事件。记为$A_1 \cup A_2 \cup \ldots$，简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$．

事件的运算

3 **积事件**

事件A、B **同时发生**所构成的事件叫做事件A与事件B的积事件。记作$A\cap B$或AB。

类似地，称事件A_1、A_2、…、A_n同时发生所构成的事件为事件A_1、A_2、…、A_n的积事件。记为$A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

称事件A_1、A_2、…同时发生所构成的事件为事件A_1、A_2、…的积事件。记为 $A_1\cap A_2\cap\ldots$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

事件的运算

性质

(1) $A \subset A \cup B$,$B \subset A \cup B$;

$A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$;

(2) $A \cap (A \cup B) = A$,$B \cap (A \cup B) = B$;

(3) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

(4) 若 $B \supset A$,则 $AB = A$,$A \cup B = B$.

事件的运算

4 互斥事件

事件A、B **不能同时发生**，即$AB=\emptyset$，则称事件A与事件B为互斥或不相容事件。**基本事件是两两不相容的**。

当两事件互不相容时，可将 $A\cup B$ 记为 $A+B$ 。

事件的运算

5 对立事件

若事件A与事件B在一次实验中必有且只有其中之一发生，即A、B满足条件

$$A \cup B = S\text{且}AB = \emptyset$$

则称事件A与事件B为互逆事件，或称事件A、B互为对立事件。事件A的对立事件记为 $\overline{A}$.

事件的运算

对立事件与互斥事件的关系：

- 对立一定互斥，但互斥不一定对立。 两事件A、B互斥：$AB=\emptyset$，即A与B不可能同时发生。

两事件A、B互逆或互为对立事件，除要求A、B互斥($AB=\emptyset$)外，还要求$A\cup B=S$ 。

事件的运算

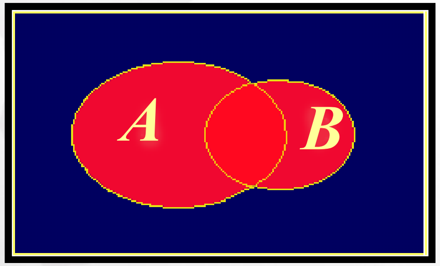
6 差事件

事件A发生而事件B不发生所构成的事件为事件A与事件B的差事件，记为 $A-B$ 。

$$A-B=A\overline{B}=A-AB$$

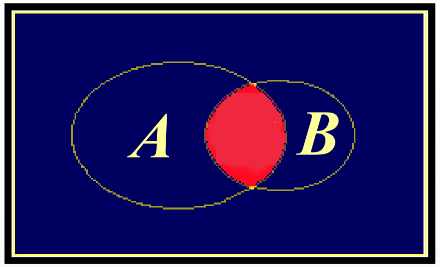
事件的运算

以上事件之间的各种关系及运算可以用下列各种图示来直观地表示。

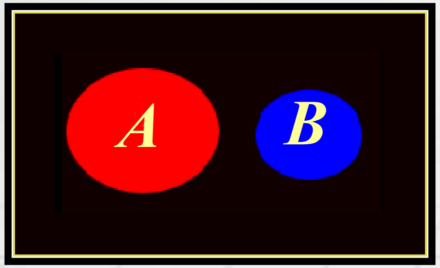


$A \cup B$

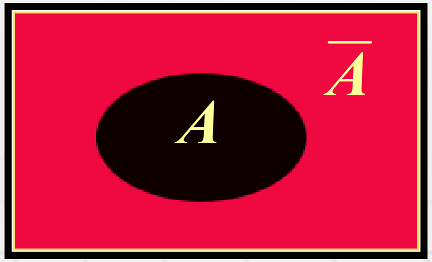
$A \subset B$



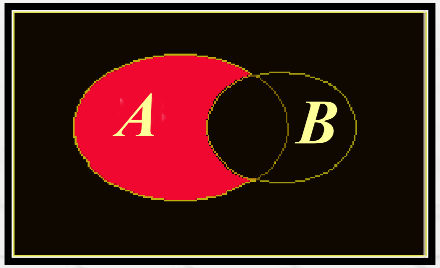
AB



$AB = \varphi$ A、B 互斥



对立事件 $\overline{A}$



$A - B = A\overline{B}$

事件的运算

事件的运算满足的规律

(1) 交换律 : $A\cup B=B\cup A$,$AB=BA$;

(2) 结合律 : $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律 : $(A\cup B)C=AC\cup BC$,

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$;

事件的运算

事件的运算满足的规律

(4) 德•摩根律（对偶律）：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{(AB)} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

事件的运算

事件的运算满足的规律

(5) $\overline{\overline{A}} = A$

(6) $A - B = A\overline{B} = A - AB$.

事件的运算

例3 按长度和直径两个指标检验某种圆柱形产品是否为合格品．若设 $A=\{$长度合格$\}$,$B=\{$直径合格$\}$，试用 A、B 的运算表示事件 $C=\{$产品为合格品$\}$，$D=\{$产品为不合格品$\}$．

解　产品为合格品必须是长度和直径两个指标合格，

因此　$C=AB$

产品为不合格品是指长度和直径两个指标中至少有一个指标不合格，因此

$$D=\overline{A}\cup\overline{B} \quad \text{或} \quad D=\overline{AB}\,.$$

事件的运算

练习1 设 A、B、C 为样本空间 S 中的三个随机事件，试用 A、B、C 的运算表示下列随机事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生； $A\overline{B}\overline{C}$

(2) A、B、C 都不发生； $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

(3) A、B、C 中恰好有一个发生；

$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$ 或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$

事件的运算

练习1 设 A、B、C 为样本空间 S 中的三个随机事件，试用 A、B、C 的运算表示下列随机事件：

(4) A、B、C 中至少有两个发生；

$\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$ 或 $AB\cup AC\cup BC$

(5) A、B、C 中至少有一个发生； $A\cup B\cup C$

(6) A、B、C 中恰好有两个发生． $\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}$

事件的运算

练习2 设某射手对一目标接连进行三次射击，记

$$A_i=\{\text{第 } i \text{ 次击中目标}\},\ \overline{A}_i=\{\text{第 } i \text{ 次未击中目标}\},$$

$i=1,2,3$，试用 A_i，$\overline{A}_i$，$i=1,2,3$ 表示事件

(1) $B_j=\{\text{三次射击中恰好有 } j \text{ 次击中目标}\}$，$j=0,1,2,3$

(2) $C_k=\{\text{三次射击中至少有 } k \text{ 次击中目标}\}$，$k=0,1,2,3$

事件的运算

解 (1) $B_0=\{三次射击中恰好有0次击中目标\}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

$$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

$$B_2=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$$

$$B_3=A_1A_2A_3$$

事件的运算

$$(2)\quad C_0=\{\text{三次射击中至少击中0次}\}$$

$$=\{\text{三次中恰好击中 0 次或1次或2次或3次}\}$$

$$=B_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3$$

$$C_1=B_1\cup B_2\cup B_3=A_1\cup A_2\cup A_3$$

$$C_2=B_2\cup B_3=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$$

$$C_3=B_3=A_1A_2A_3$$

谢 谢 大 家