概率论与数理统计

频率与概率

主讲人：曾华琳

信息科学与技术学院

前言

研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小，也就是**事件的概率**。

- 概率是随机事件发生可能性大小的度量。
- 事件发生的可能性越大，概率就越大！

一、频率的定义

频率

设在 n 次重复试验中，事件A出现了n_A次，则称 n_A为事件 A 在 n 次试验中出现的频数，比值为 n_A/n 事件 A 在 n 次试验中出现的频率，记为f_n(A)，即

$$f_n(A)=\frac{\mu}{n}$$

频率所具有的三个性质

(1) $0\leq f(a)\leq 1$；

(2) $f(s)=1$；

(3) 设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 是两两互斥事件，则$f(A_1+A_2+\ldots+A_k)=f(A_1)+f(A_2)+\ldots+f(A_k)$

一、频率的定义

抛掷钱币试验记录

试验者	抛币次数n	"正面向上"次数	频率$f_n(A)$
De Morgan	2084	1064	0.518
Bufen	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

从上表中可以看出，出现{正面向上}$f_n(A)$的频率虽然随 n 的不同而变动，但是总的趋势是随着试验次数的增加而逐渐稳定在0.5 这个数值上。

一、频率的定义

概率的统计定义

在不变的一组条件下进行大量的重复试验，随机事件A出现的频率 $\frac{\mu}{n}$ 会稳定地在某个固定的数值 p 的附近摆动，我们称这个稳定值为随机事件A的概率，即$P(A) = p$ 。

二、概率的定义

概率的公理化定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 P(A)，称之为事件A的概率，如果它满足下列三个条件

(1) $P(A) \geq 0$；　**(非负性)**

(2) $P(S) = 1$；　**(规范性)**

(3) 对于两两互斥事件$A_1,A_2,\ldots$,有

$P(A_1+A_2+\ldots) = P(A_1)+ P(A_2)+\ldots$;

(可列可加性)

二、概率的定义

由概率的公理化定义可推得概率的下列性质

1 性质1 $P(\varnothing)=0$.

证 因为 $\varnothing=\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots$

设由于上式右端可列个事件两两互斥，故由概率公理化定义的可列可加性，有

$$P(\varnothing)=P(\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$$

再由概率的非负性可得，

$$P(\varnothing)=0.$$

二、概率的定义

2 **性质2** 设有限个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证 因为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots$

所以由可列可加及性质1，有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + 0 + 0 + \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

二、概率的定义

3 **性质 3** 对于任何事件 A ,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

证　因为 $\boldsymbol{A\cup\bar{A}=S}$,且 $\boldsymbol{A\bar{A}=\varnothing}$.

所以 $P(A\cup\bar{A})=P(S)$ $=1$.

并且 $P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$

由以上两式可得， $P(A)+P(\bar{A})=1$

即 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

二、概率的定义

4 性质 4

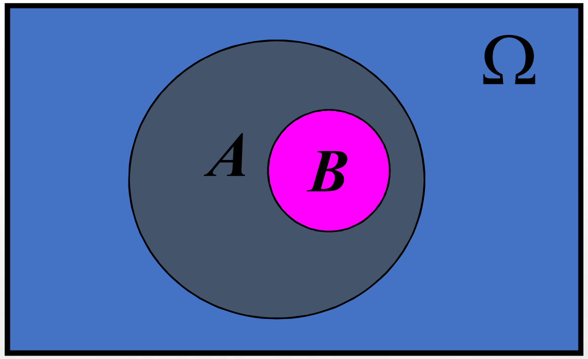
设 A、B 为两事件，且 $A \supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

并且 $P(A) \geq P(B)$.

证　如图，因为 $A \supset B$，

所以 $A=B+(A-B)$

并且 $\boldsymbol{B(A-B)=\varnothing}$



$A \supset B$

二、概率的定义

4 性质 4

于是由性质 2 ,可得 $P(A)=P(B)+P(A-B)$

也即 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,

又由概率的非负性 ,有 $P(A-B)=P(A)-P(B)\geq 0$

即 $P(A)\geq P(B)$.

二、概率的定义

5 **性质 5** 对于任一事件 A，都有 $P(A) \le 1$.

证 因为对于任一事件 A，都有 $A \subset \Omega$

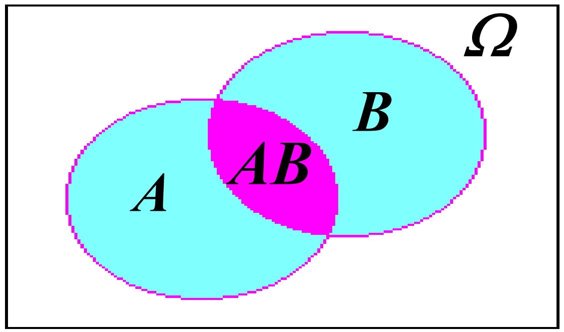
故由性质 4，可得

$$P(A) \le P(\Omega) = 1.$$

二、概率的定义

6 **性质** 6 设 A,B 为任意两个事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

证　如图所示，



$$A\cup B=A+(B-AB)$$

而且　$\boldsymbol{A(B-AB)=\varnothing}$

所以　$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

由此性质还可推得

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B) .$$

二、概率的定义

推广：

$$P(A\cup B\cup C)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\quad -P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$P(A\cup B\cup C\cup D)\quad =P(A)+P(B)+P(C)+P(D)$$

$$-P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)$$

$$+P(ABC)+P(ABD)+P(BCD)+P(ACD)-P(ABCD)$$

二、概率的定义

推广：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i,j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i,j,k\le n} P(A_iA_jA_k)$$

$$-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

二、概率的定义

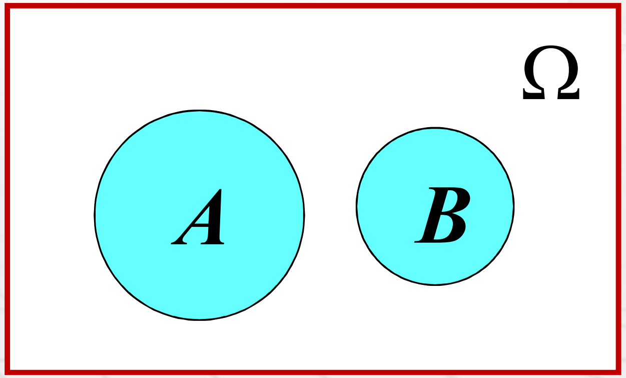
例1 设 A、B 为两个随机事件，且已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，就下列三种情况求概率 $P(B\overline{A})$.

(1) A 与 B 互斥；　(2) $A\subset B$；　(3) $P(AB)=\frac{1}{9}$.

解　(1) 由于 A、B 互斥，所以 $B\subset\overline{A}$

于是　$B\overline{A}=B$

所以 $P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}$.



A、B 互斥

二、概率的定义

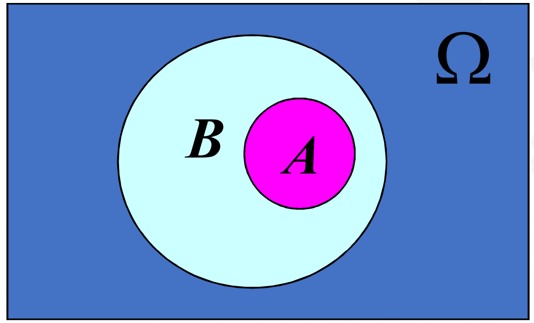
(2) 因为 $A \subset B$，所以

$$P(B\overline{A}) = P(B - A) = P(B) - P(A)$$

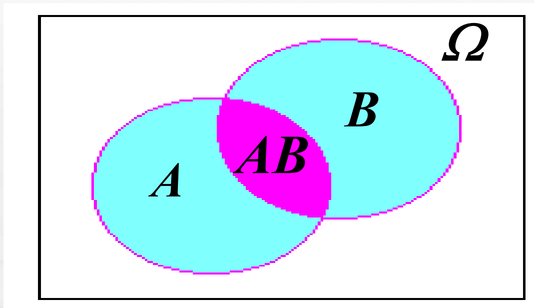
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

(3) $P(B\overline{A}) = P(B - AB)$

$$= P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}.$$



$A \subset B$



$A \cap B$

二、概率的定义

例2 设 A、B、C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0,\ P(AC)=\frac{1}{8}$．求 A、B、C 至少有一个发生的概率。

解 $P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+0 \quad =\frac{5}{8}.$$

二、概率的定义

例2 设 A、B、C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=\frac{1}{8}$. 求 A、B、C 至少有一个发生的概率。

解 $P(A\cup B\cup C)$

$$=\underbrace{P(A)}_{\frac{1}{4}}+\underbrace{P(B)}_{\frac{1}{4}}+\underbrace{P(C)}_{\frac{1}{4}}-\underbrace{P(AB)}_{0}-\underbrace{P(AC)}_{\frac{1}{8}}-\underbrace{P(BC)}_{0}+\underbrace{P(ABC)}_{0}$$

二、概率的定义

例2 设 A、B、C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=\dfrac{1}{8}$. 求 A、B、C 至少有一个发生的概率。

解 $P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=3\cdot\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.$$

谢 谢 大 家