

Lógica intuicionista

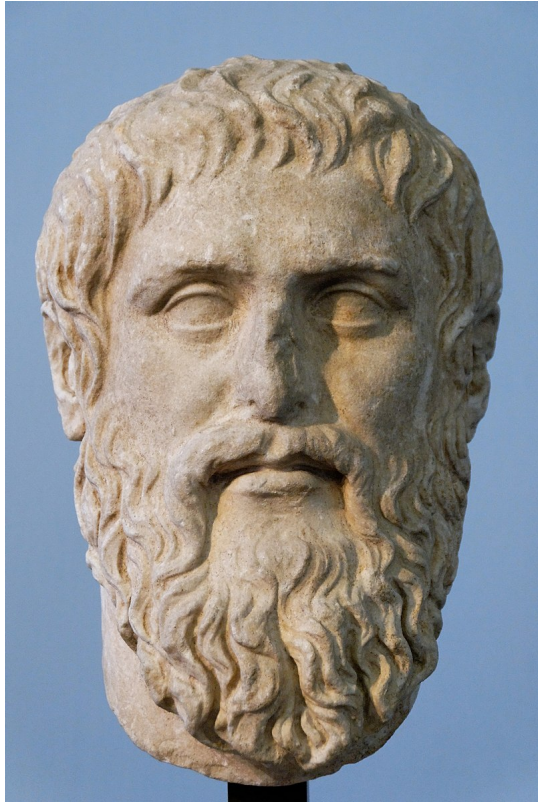
Elias Gabriel Amaral da Silva

UFRN - Estratégia, cognição e tomada de decisão (2025.2)

[Apresentação em PDF](#)

**A matemática foi descoberta ou
inventada?**

A matemática foi descoberta ou inventada?



Platão (séc. IV a.C.)

VS



L.E.J. Brouwer (1907)

Platonismo

Intuicionismo

Platonismo

Intuicionismo

Platonismo

A matemática foi
descoberta

Intuicionismo

Platonismo

A matemática foi
descoberta

Intuicionismo

A matemática foi
inventada

Platonismo

A matemática foi
descoberta

A matemática existe
independente do ser
humano

Intuicionismo

A matemática foi
inventada

Platonismo

A matemática foi
descoberta

A matemática existe
independente do ser
humano

Intuicionismo

A matemática foi
inventada

A matemática existe só
na mente humana

Platonismo

A matemática foi
descoberta

A matemática existe
independente do ser
humano

A verdade matemática é
objetiva

Intuicionismo

A matemática foi
inventada

A matemática existe só
na mente humana

Platonismo

A matemática foi
descoberta

A matemática existe
independente do ser
humano

A verdade matemática é
objetiva

Intuicionismo

A matemática foi
inventada

A matemática existe só
na mente humana

A verdade matemática é
uma experiência
subjetiva

Platonismo

A matemática foi
descoberta

A matemática existe
independente do ser
humano

A verdade matemática é
objetiva

Intuicionismo

A matemática foi
inventada

A matemática existe só
na mente humana

A verdade matemática é
uma experiência
subjetiva

Pergunta: que diferença isso faz?

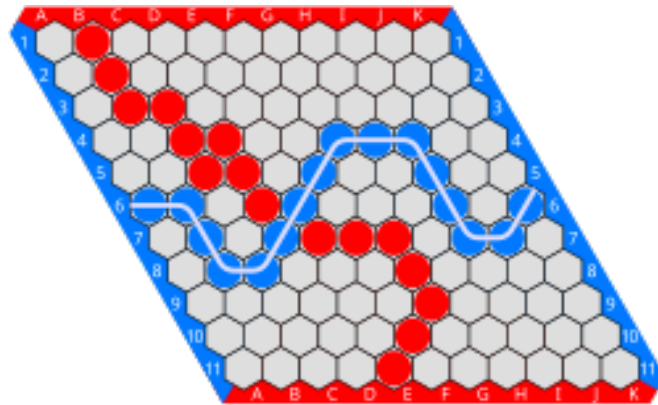
No intuicionismo, só podemos afirmar a existência do
que podemos construir na nossa mente.

No intuicionismo, só podemos afirmar a existência do
que podemos construir na nossa mente.

Mas a lógica clássica permite provar coisas não
construtivas.

(ou seja, provar existência de um objeto matemático que não construímos em nossa
mente.)

Exemplo: Em 1949, John Nash provou que o primeiro jogador no jogo de Hex tem uma estratégia pra sempre vencer.



Mas até hoje ninguém sabe que estratégia é essa!

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_\(board_game\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game))

O filme "Uma mente brilhante" (2001) é sobre a vida de John Nash

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)
2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)
2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.
3. Então o primeiro jogador pode fazer uma jogada qualquer, e adotar a mesma estratégia do segundo jogador.

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)
2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.
3. Então o primeiro jogador pode fazer uma jogada qualquer, e adotar a mesma estratégia do segundo jogador.
4. Isso contradiz o fato de que o segundo jogador tem uma estratégia para vencer.

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)
2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.
3. Então o primeiro jogador pode fazer uma jogada qualquer, e adotar a mesma estratégia do segundo jogador.
4. Isso contradiz o fato de que o segundo jogador tem uma estratégia para vencer.
5. Portanto, o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)
2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.
3. Então o primeiro jogador pode fazer uma jogada qualquer, e adotar a mesma estratégia do segundo jogador.
4. Isso contradiz o fato de que o segundo jogador tem uma estratégia para vencer.
5. Portanto, o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

??? que estratégia é essa exatamente?

A prova por redução ao absurdo levou o Nash a afirmar a existência de uma estratégia vencedora mesmo sem ter construído ela em sua mente.

A prova por redução ao absurdo levou o Nash a afirmar a existência de uma estratégia vencedora mesmo sem ter construído ela em sua mente.

Brouwer quer rejeitar esse tipo de prova, mas ela segue as regras da lógica!

A prova por redução ao absurdo levou o Nash a afirmar a existência de uma estratégia vencedora mesmo sem ter construído ela em sua mente.

Brouwer quer rejeitar esse tipo de prova, mas ela segue as regras da lógica!

... talvez podemos mudar as regras da lógica?

Logicismo

Intuicionismo

Logicismo

Primeiro veio a
lógica, depois a
matemática

Intuicionismo

Logicismo

Primeiro veio a
lógica, depois a
matemática

Intuicionismo

As regras da lógica foram
criadas para refletir nossa
intuição matemática

Logicismo

Primeiro veio a
lógica, depois a
matemática

Os fatos
matemáticos se
resumem a fatos
lógicos

Intuicionismo

As regras da lógica foram
criadas para refletir nossa
intuição matemática

Logicismo

Primeiro veio a
lógica, depois a
matemática

Os fatos
matemáticos se
resumem a fatos
lógicos

Intuicionismo

As regras da lógica foram
criadas para refletir nossa
intuição matemática

As construções matemáticas
não dependem da lógica, e
sim de nossa intuição

A lógica intuicionista não é a lógica do verdadeiro/falso, e sim do "posso provar" ou "posso refutar"

Proposições atômicas

Proposição

P

$\neg P$ (não P)
(também escrito $\sim P$)

Proposições atômicas

Proposição	Lógica clássica
------------	-----------------

P	P é verdade
-----	-------------

$\neg P$ (não P) (também escrito $\sim P$)	P é falso
--	-----------

Proposições atômicas

Proposição	Lógica clássica	Lógica intuicionista
P	P é verdade	Posso provar P
$\neg P$ (não P) (também escrito $\sim P$)	P é falso	Posso refutar P

Lei do terceiro excluído

Na lógica clássica, $P \vee \neg P$ é uma tautologia

Significa "P é verdade ou P é falso", para qualquer P - não tem uma terceira opção

Lei do terceiro excluído

Na lógica clássica, $P \vee \neg P$ é uma tautologia

Significa "P é verdade ou P é falso", para qualquer P - não tem uma terceira opção

Mas na lógica intuicionista, tem outro significado:
"posso provar P ou posso refutar P"

Há uma terceira opção!

Negação intuicionista

Na lógica intuicionista, a negação $\neg P$ é definida como

$$P \rightarrow \perp$$

Onde \perp , chamado "bottom" ou "absurdo", é uma proposição que nunca pode ser provada.

Negação intuicionista

Na lógica intuicionista, a negação $\neg P$ é definida como

$$P \rightarrow \perp$$

Onde \perp , chamado "bottom" ou "absurdo", é uma proposição que nunca pode ser provada.

Afirmar $\neg P$ significa que se, hipoteticamente, pudéssemos provar P , então teríamos uma prova do absurdo.

Negação intuicionista

Na lógica intuicionista, a negação $\neg P$ é definida como

$$P \rightarrow \perp$$

Onde \perp , chamado "bottom" ou "absurdo", é uma proposição que nunca pode ser provada.

Afirmar $\neg P$ significa que se, hipoteticamente, pudéssemos provar P , então teríamos uma prova do absurdo.

Mas isso é o mesmo que *refutar* P !

Negação intuicionista

Do mesmo modo, para provar uma negação $\neg P$, tomamos P como hipótese, e a partir daí derivamos um absurdo ou contradição.

Negação intuicionista

Do mesmo modo, para provar uma negação $\neg P$, tomamos P como hipótese, e a partir daí derivamos um absurdo ou contradição.

Mas isso não é o mesmo que a prova por redução ao absurdo?

Negação intuicionista

Do mesmo modo, para provar uma negação $\neg P$, tomamos P como hipótese, e a partir daí derivamos um absurdo ou contradição.

Mas isso não é o mesmo que a prova por redução ao absurdo?

Não: quando esse raciocínio é usado pra provar uma proposição negativa, chamamos de "prova de negação" e não "redução ao absurdo"

Redução ao absurdo

Na redução ao absurdo, tomamos $\neg P$ como hipótese e chegamos numa contradição. E daí concluimos que P é verdade.

Redução ao absurdo

Na redução ao absurdo, tomamos $\neg P$ como hipótese e chegamos numa contradição. E daí concluimos que P é verdade.

Mas na lógica intuicionista, esse raciocínio só pode ser usado pra concluir uma negação. Portanto, concluimos apenas $\neg\neg P$.

Redução ao absurdo

Na redução ao absurdo, tomamos $\neg P$ como hipótese e chegamos numa contradição. E daí concluimos que P é verdade.

Mas na lógica intuicionista, esse raciocínio só pode ser usado pra concluir uma negação. Portanto, concluimos apenas $\neg\neg P$.

Mas $\neg\neg P$ não é a mesma coisa que P ?

Redução ao absurdo

Na redução ao absurdo, tomamos $\neg P$ como hipótese e chegamos numa contradição. E daí concluimos que P é verdade.

Mas na lógica intuicionista, esse raciocínio só pode ser usado pra concluir uma negação. Portanto, concluimos apenas $\neg\neg P$.

Mas $\neg\neg P$ não é a mesma coisa que P ?

Na lógica intuicionista não é!

Dupla negação

Na lógica clássica, $\neg\neg P$ significa "não é verdade que P é falso", e, por conta do terceiro excluído, podemos concluir que P é verdade.

Dupla negação

Na lógica clássica, $\neg\neg P$ significa "não é verdade que P é falso", e, por conta do terceiro excluído, podemos concluir que P é verdade.

Mas na lógica intuicionista, $\neg\neg P$ significa "não posso refutar P ". Mas isso é diferente de provar P .

Dupla negação

A partir de P podemos concluir $\neg\neg P$ na lógica intuicionista: se eu posso provar, então eu não posso refutar.

Ou seja, $P \rightarrow \neg\neg P$

Dupla negação

A partir de P podemos concluir $\neg\neg P$ na lógica intuicionista: se eu posso provar, então eu não posso refutar.

Ou seja, $P \rightarrow \neg\neg P$

Mas não podemos concluir $\neg\neg P \rightarrow P$, porque o fato de não podermos refutar não é suficiente pra de fato ter uma prova.

É por isso que a prova por redução ao absurdo não é válida na lógica intuicionista!

É por isso que a prova por redução ao absurdo não é válida na lógica intuicionista!

Dum ponto de vista intuicionista, Nash apenas provou que não podemos refutar que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

É por isso que a prova por redução ao absurdo não é válida na lógica intuicionista!

Dum ponto de vista intuicionista, Nash apenas provou que não podemos refutar que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

Só podemos afirmar que o jogador de fato tem essa estratégia se pudermos dizer exatamente no que consiste essa estratégia.