Lógica intuicionista

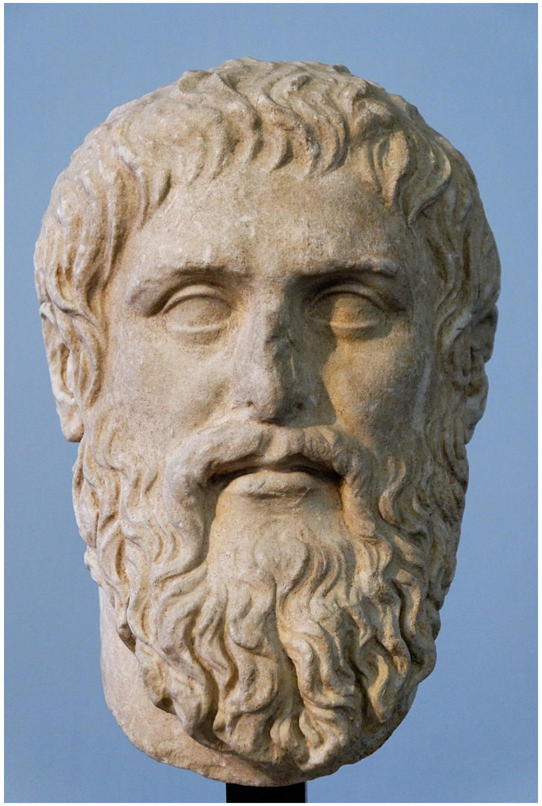
Elias Gabriel Amaral da Silva

UFRN - Estratégia, cognição e tomada de decisão (2025.2)

Apresentação em PDF

A matemática foi descoberta ou inventada?

A matemática foi descoberta ou inventada?



vs

Platão (séc. IV a.C.)

L.E.J. Brouwer (1907)

Platonismo	Intuicionismo

Platonismo	Intuicionismo
A matemática foi descoberta	

Platonismo	Intuicionismo
A matemática foi descoberta	A matemática foi inventada

Platonismo	Intuicionismo
A matemática foi descoberta	A matemática foi inventada
A matemática existe independente do ser humano	

Platonismo	Intuicionismo
A matemática foi descoberta	A matemática foi inventada
A matemática existe independente do ser humano	A matemática existe só na mente humana

Platonismo	**Intuicionismo**
A matemática foi descoberta	A matemática foi inventada
A matemática existe independente do ser humano	A matemática existe só na mente humana
A verdade matemática é objetiva	

Platonismo	Intuicionismo
A matemática foi descoberta	A matemática foi inventada
A matemática existe independente do ser humano	A matemática existe só na mente humana
A verdade matemática é objetiva	A verdade matemática é uma experiência subjetiva

Platonismo	Intuicionismo
A matemática foi descoberta	A matemática foi inventada
A matemática existe independente do ser humano	A matemática existe só na mente humana
A verdade matemática é objetiva	A verdade matemática é uma experiência subjetiva

Pergunta: que diferença isso faz?

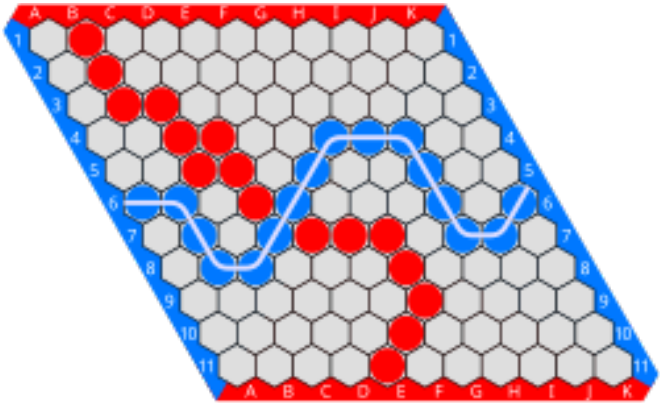
No intuicionismo, só podemos afirmar a existência do que podemos construir na nossa mente.

No intuicionismo, só podemos afirmar a existência do que podemos construir na nossa mente.

Mas a lógica clássica permite provar coisas não construtivas.

(ou seja, provar existência de um objeto matemático que não construímos em nossa mente.)

Exemplo: Em 1949, John Nash provou que o primeiro jogador no jogo de Hex tem uma estratégia pra sempre vencer.



Mas até hoje ninguém sabe que estratégia é essa!

https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game)

O filme "Uma mente brilhante" (2001) é sobre a vida de John Nash

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)

2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)

2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.

3. Então o primeiro jogador pode fazer uma jogada qualquer, e adotar a mesma estratégia do segundo jogador.

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)

2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.

3. Então o primeiro jogador pode fazer uma jogada qualquer, e adotar a mesma estratégia do segundo jogador.

4. Isso contradiz o fato de que o segundo jogador tem uma estratégia para vencer.

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)

2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.

3. Então o primeiro jogador pode fazer uma jogada qualquer, e adotar a mesma estratégia do segundo jogador.

4. Isso contradiz o fato de que o segundo jogador tem uma estratégia para vencer.

5. Portanto, o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

A prova de Nash é uma prova por redução ao absurdo:

1. Foi provado anteriormente que o jogo nunca pode empatar. (um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora)

2. Suponha que o segundo jogador tenha uma estratégia vencedora.

3. Então o primeiro jogador pode fazer uma jogada qualquer, e adotar a mesma estratégia do segundo jogador.

4. Isso contradiz o fato de que o segundo jogador tem uma estratégia para vencer.

5. Portanto, o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

??? que estratégia é essa exatamente?

A prova por redução ao absurdo levou o Nash a afirmar a existência de uma estratégia vencedora mesmo sem ter construído ela em sua mente.

A prova por redução ao absurdo levou o Nash a afirmar a existência de uma estratégia vencedora mesmo sem ter construído ela em sua mente.

Brouwer queria rejeitar esse tipo de raciocínio, mas ele segue as regras da lógica!

A prova por redução ao absurdo levou o Nash a afirmar a existência de uma estratégia vencedora mesmo sem ter construído ela em sua mente.

Brouwer queria rejeitar esse tipo de raciocínio, mas ele segue as regras da lógica!

... mas talvez podemos mudar as regras da lógica?

Logicismo	Intuicionismo

Logicismo	Intuicionismo
Primeiro veio a lógica, depois a matemática	

Logicismo	Intuicionismo
Primeiro veio a lógica, depois a matemática	As regras da lógica foram criadas para refletir nossa intuição matemática

Logicismo	Intuicionismo
Primeiro veio a lógica, depois a matemática	As regras da lógica foram criadas para refletir nossa intuição matemática
Os fatos matemáticos se resumem a fatos lógicos	

Logicismo	Intuicionismo
Primeiro veio a lógica, depois a matemática	As regras da lógica foram criadas para refletir nossa intuição matemática
Os fatos matemáticos se resumem a fatos lógicos	As construções matemáticas não dependem da lógica, e sim de nossa intuição

A lógica intuicionista não é a lógica do verdadeiro ou falso, e sim do "posso provar" ou "posso refutar"

Proposição
P
$\neg P$ (não P) (também escrito ~P)

Proposição	Lógica clássica
P	P é verdade
$\neg P$ (não P) (também escrito ~P)	P é falso

Proposição	Lógica clássica	Lógica intuicionista
P	P é verdade	Posso provar P
$\neg P$ (não P) (também escrito ~P)	P é falso	Posso refutar P

Lei do terceiro excluído

Na lógica clássica, $P \vee \neg P$ é uma tautologia

Significa "P é verdade ou P é falso", para qualquer P - não tem uma terceira opção

Lei do terceiro excluído

Na lógica clássica, $P \vee \neg P$ é uma tautologia

Significa "P é verdade ou P é falso", para qualquer P - não tem uma terceira opção

Mas na lógica intuicionista, tem outro significado:
"posso provar P ou posso refutar P"

Há uma terceira opção!

Negação intuicionista

Na lógica intuicionista, a negação $\neg P$ é definida como

$$P \to \bot$$

Onde $\bot$, chamado "bottom" ou "absurdo", é uma proposição que nunca pode ser provada.

Negação intuicionista

Na lógica intuicionista, a negação $\neg P$ é definida como

$$P \to \bot$$

Onde $\bot$, chamado "bottom" ou "absurdo", é uma proposição que nunca pode ser provada.

Afirmar $\neg P$ significa que se, hipoteticamente, pudessemos provar P, então teríamos uma prova do absurdo.

Negação intuicionista

Na lógica intuicionista, a negação $\neg P$ é definida como

$$P \to \bot$$

Onde $\bot$, chamado "bottom" ou "absurdo", é uma proposição que nunca pode ser provada.

Afirmar $\neg P$ significa que se, hipoteticamente, pudessemos provar P, então teríamos uma prova do absurdo.

Mas isso é o mesmo que *refutar* P!

Negação intuicionista

Do mesmo modo, para provar uma negação $\neg P$, tomamos P como hipótese, e a partir daí derivamos um absurdo ou contradição.

Negação intuicionista

Do mesmo modo, para provar uma negação $\neg P$, tomamos P como hipótese, e a partir daí derivamos um absurdo ou contradição.

Mas isso não é o mesmo que a prova por redução ao absurdo?

Negação intuicionista

Do mesmo modo, para provar uma negação $\neg P$, tomamos P como hipótese, e a partir daí derivamos um absurdo ou contradição.

Mas isso não é o mesmo que a prova por redução ao absurdo?

Não: quando esse raciocínio é usado pra provar uma proposição negativa, chamamos de "prova de negação" e não "redução ao absurdo"

Redução ao absurdo

Na redução ao absurdo, tomamos $\neg P$ como hipótese e chegamos numa contradição. E daí concluímos que P é verdade.

Redução ao absurdo

Na redução ao absurdo, tomamos $\neg P$ como hipótese e chegamos numa contradição. E daí concluímos que P é verdade.

Mas na lógica intuicionista, esse raciocínio só pode ser usado pra concluir uma negação. Portanto, concluímos apenas $\neg\neg P$.

Redução ao absurdo

Na redução ao absurdo, tomamos $\neg P$ como hipótese e chegamos numa contradição. E daí concluímos que P é verdade.

Mas na lógica intuicionista, esse raciocínio só pode ser usado pra concluir uma negação. Portanto, concluímos apenas $\neg\neg P$.

Mas $\neg\neg P$ não é a mesma coisa que P?

Redução ao absurdo

Na redução ao absurdo, tomamos $\neg P$ como hipótese e chegamos numa contradição. E daí concluímos que P é verdade.

Mas na lógica intuicionista, esse raciocínio só pode ser usado pra concluir uma negação. Portanto, concluímos apenas $\neg\neg P$.

Mas $\neg\neg P$ não é a mesma coisa que P?

Na lógica intuicionista não é!

Dupla negação

Na lógica clássica, $\neg\neg P$ significa "não é verdade que P é falso", e, por conta do terceiro excluído, podemos concluir que P é verdade.

Dupla negação

Na lógica clássica, $\neg\neg P$ significa "não é verdade que P é falso", e, por conta do terceiro excluído, podemos concluir que P é verdade.

Mas na lógica intuicionista, $\neg\neg P$ significa "não posso refutar P". Mas isso é diferente de provar P.

Dupla negação

A partir de P podemos concluir $\neg\neg P$ na lógica intuicionista: se eu posso provar, então eu não posso refutar.

Ou seja, $P \to \neg\neg P$

Dupla negação

A partir de P podemos concluir $\neg\neg P$ na lógica intuicionista: se eu posso provar, então eu não posso refutar.

Ou seja, $P \to \neg\neg P$

Mas não podemos concluir $\neg\neg P \to P$, porque o fato de não podermos refutar não é suficiente pra de fato ter uma prova.

É por isso que a prova por redução ao absurdo não é válida na lógica intuicionista!

É por isso que a prova por redução ao absurdo não é válida na lógica intuicionista!

Dum ponto de vista intuicionista, Nash apenas provou que não podemos refutar que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

É por isso que a prova por redução ao absurdo não é válida na lógica intuicionista!

Dum ponto de vista intuicionista, Nash apenas provou que não podemos refutar que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora.

Só podemos afirmar que o jogador de fato tem essa estratégia se pudermos dizer exatamente no que consiste essa estratégia.

Teorema de Glivenko (tradução da dupla negação)

Se P pode ser provado na lógica clássica, $\neg\neg P$ pode ser provado na lógica intuicionista (e vice versa)

Isso ocorre porque talvez a redução por absurdo possa ter sido usada durante a prova

Teorema de Glivenko (tradução da dupla negação)

Se P pode ser provado na lógica clássica, $\neg\neg P$ pode ser provado na lógica intuicionista (e vice versa)

Isso ocorre porque talvez a redução por absurdo possa ter sido usada durante a prova

Ou em outras palavras:

Se P é verdade na lógica clássica, não podemos refutar P na lógica intuicionista (e vice versa)

Tradução da dupla negação

Por exemplo: a lei do terceiro excluído $P \vee \neg P$ não pode ser refutada na lógica intuicionista

Ou seja, $\neg\neg(P \vee \neg P)$ é válido intuicionisticamente

Tradução da dupla negação

Podemos interpretar $P \to \neg\neg P$ como "se P pode ser provado na lógica intuicionista, P pode ser provado na lógica clássica", o que está correto

Tradução da dupla negação

Podemos interpretar $P \to \neg\neg P$ como "se P pode ser provado na lógica intuicionista, P pode ser provado na lógica clássica", o que está correto

Mas o contrário, $\neg\neg P \to P$ seria "se P vale classicamente, P também vale intuicionisticamente", o que não é o caso

Tradução da dupla negação

Podemos interpretar $P \to \neg\neg P$ como "se P pode ser provado na lógica intuicionista, P pode ser provado na lógica clássica", o que está correto

Mas o contrário, $\neg\neg P \to P$ seria "se P vale classicamente, P também vale intuicionisticamente", o que não é o caso

... mas $\neg\neg(\neg\neg P \to P)$, que é "na lógica clássica, podemos eliminar a dupla negação", pode ser provado na lógica intuicionista!

A lógica intuicionista é mais expressiva: expressa tanto o pensamento clássico (pela transformação da dupla negação), quanto o intuicionista

A lógica intuicionista é mais expressiva: expressa tanto o pensamento clássico (pela transformação da dupla negação), quanto o intuicionista

E ela nunca contradiz a lógica clássica: apenas diz que não há fundamentos para certos resultados, mas sem os refutar