EXTREMIDADES DOS CHOQUE TRANSICIONAIS

Cálculos sobre a reta EW de equação $s_o/\mu_o = s_g/\mu_g$.

Sugestão: parametrize a reta EW por s_w, que varia de 0 a 1.

Cálculos preparatórios:

01. Armazene as coordenadas dos estados E, W e do ponto umbílico U.

02. Calcule os estados E_1 e E_2 (extensões-1 e 2, respectivamente de E) com $\sigma(E, E_1) = \lambda_1(E_1)$ e $\sigma(E, E_2) = \lambda_2(E_2)$.
    Armazene estes pontos.

03. Calcule os estados C_1 e C_2 no contato duplo com $\sigma(C_1, C_2) = \lambda_2(C_1) = \lambda_2(C_2)$. Chame C_1 o estado entre E e U e de C_2 o estado entre U e W.
    Armazene estes pontos.

Cálculos para a determinação e localização das extremidades do choque transicional sobre a reta EW em função de L e dos pontos armazenados.

04. Se $E \leq L \leq U$, então determine as extremidades X_1 e X_2 do segmento de choque de transicional, com $X_1 < X_2$, usando as equações $\sigma(L, X_1) = \lambda_1(X_1)$, $\sigma(L, X_2) = \lambda_2(X_2)$. Pesquise X_1 e X_2 satisfazendo $U \leq X_1 \leq E_1$ e $X_1 < X_2 \leq E_2$.

    Obs. Neste caso X_1 é o ponto de 1-bifurcação secundária de $H(L)$.

05. Se $U < L \leq C_2$, então determine as extremidades X_1 e X_2 do segmento de choque de transicional, com $X_1 < X_2$, usando as equações $\sigma(L, X_1) = \lambda_1(L)$, $\sigma(L, X_2) = \lambda_2(X_2)$. Pesquise X_1 e X_2 satisfazendo $E < X_1 < U$ e $X_1 < X_2 < U$.

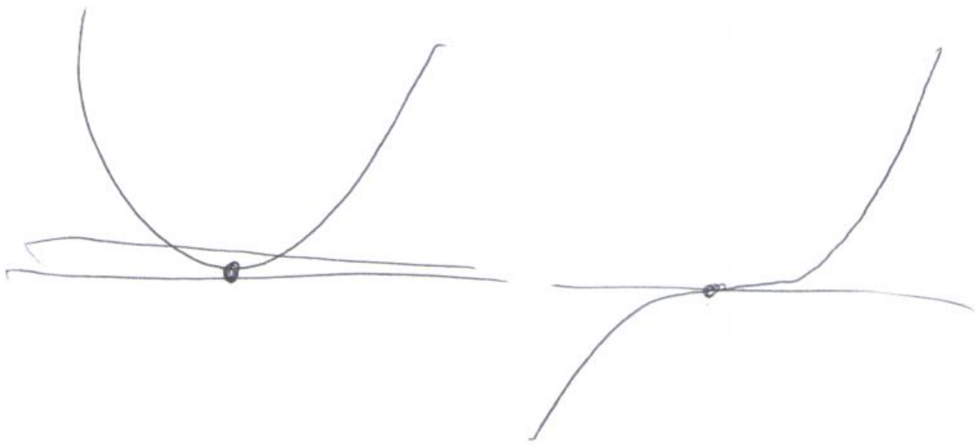
    Obs. Neste caso X_2 é o ponto de 2-bifurcação secundária de $H(L)$.

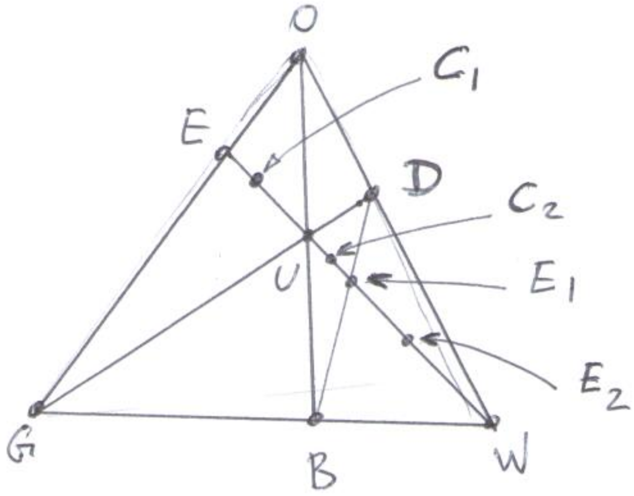
06. Se $C_2 < L \leq E_1$, então determine as extremidades X_1 e X_2 do segmento de choque de transicional, com $X_1 < X_2$, usando as equações $\sigma(L, X_1) = \lambda_1(L)$, $\sigma(L, X_2) = \lambda_2(L)$. Pesquise X_1 e X_2 satisfazendo $E \leq X_1 < U$ e $X_1 < X_2 < C_1$.

Obs. A partir deste caso X_2 não é mais o ponto de 2-bifurcação secundária de $H(L)$.

07. Se $E_1 < L < E_2$, então fatalmente tem-se que $X_1 = E$ e determine apenas a extremidade X_2 do segmento de choque de transicional, com $X_1 = E < X_2$, usando a equação $\sigma(L, X_2) = \lambda_2(L)$. Pesquise X_2 satisfazendo $E < X_2 < U$.

08. Se $E_2 < L \leq W$, então não há segmento de choque transicional no interior do triângulo de saturações, sobre a reta EW.





* E_1 = extensão interior de E, família lenta (λ_1)

* E_2 = extensão interior de E, família rápida (λ_2)

* (C_1, C_2) = contato duplo, família rápida (λ_2)

Equações das retas E-W, B-O, D-G: $0 \leq s \leq 1$

(i) E-W: $s_w = 1 - s$; $s_o = \dfrac{\mu_o s}{\mu_o + \mu_g}$, $0 \leq s \leq 1$

(ii) B-O: $s_w = \dfrac{\mu_w s}{\mu_w + \mu_g}$; $s_o = 1 - s$, $0 \leq s \leq 1$

(iii) D-G: $s_w = \dfrac{\mu_w s}{\mu_w + \mu_o}$; $s_o = \dfrac{\mu_o s}{\mu_w + \mu_o}$, $0 \leq s \leq 1$

Coordenadas dos pontos E, B, D: correspondem a $s = 1$

E: $s_w = 0$, $s_o = \mu_o / (\mu_o + \mu_g)$

B: $s_w = \mu_w / (\mu_w + \mu_g)$, $s_o = 0$

D: $s_w = \mu_w / (\mu_w + \mu_o)$, $s_o = \mu_o / (\mu_w + \mu_o)$

Coordenadas do ponto E_2 (ver Fig. pg. 1)

OBS: • E_2 é a extensão interior de E com relação à família rápida (λ_2).

• As coordenadas são calculadas com as fórmulas (i), (ii), (iii) da p.g. 1 em termos do valor de $S(E_1) \equiv S_*$:

(i) E-W: $S_* = \sqrt{\dfrac{\mu_o + \mu_g}{\mu_{tot}}}$, $\mu_{tot} = \mu_o + \mu_w + \mu_g$

(ii) B-O: $S_* = \sqrt{\dfrac{\mu_w + \mu_g}{\mu_{tot}}}$

(iii) D-G: $S_* = \sqrt{\dfrac{\mu_w + \mu_o}{\mu_{tot}}}$

Coordenadas das retas B-D, D-E, E-B:

* B-D (Hugoniot de E):

$$\begin{pmatrix} B \Leftrightarrow s = 1 \\ D \Leftrightarrow s = 0 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{aligned} s_w &= \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_g} s + \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o}(1-s) \\ s_o &= \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o}(1-s) \end{aligned} \right. \qquad \underline{0 \le s \le 1}$$

* D-E (Hugoniot de B):

$$\begin{pmatrix} D \Leftrightarrow s = 1 \\ E \Leftrightarrow s = 0 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{aligned} s_w &= \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o} s \\ s_o &= \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o} s + \frac{\mu_o}{\mu_o + \mu_g}(1-s) \end{aligned} \right. \qquad \underline{0 \le s \le 1}$$

* E-B (Hugoniot de D):

$$\begin{pmatrix} E \Leftrightarrow s = 1 \\ B \Leftrightarrow s = 0 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{aligned} s_w &= \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_g}(1-s) \\ s_o &= \frac{\mu_o}{\mu_o + \mu_g} s \end{aligned} \right. \qquad \underline{0 \le s \le 1}$$

"Effective fractional flow function" and characteristic speeds along invariant lines

* $$f(s) = \frac{s^2/\mu_{\alpha\beta}}{\dfrac{s^2}{\mu_{\alpha\beta}} + \dfrac{(1-s)^2}{\mu_\gamma}} \qquad \left\{ \begin{aligned} s &= s_\alpha + s_\beta \\ \mu_{\alpha\beta} &= \mu_\alpha + \mu_\beta \end{aligned} \right.$$

* $$\lambda_{\parallel}(s) = f'(s) = \frac{2s(1-s)}{\mu_{\alpha\beta}\,\mu_\gamma\, M^2(s)}, \quad M(s) = \frac{s^2}{\mu_{\alpha\beta}} + \frac{(1-s)^2}{\mu_\gamma}$$

* $$\lambda_{\perp}(s) = \frac{2s/\mu_{\alpha\beta}}{M(s)}, \quad M(s) = \frac{s^2}{\mu_{\alpha\beta}} + \frac{(1-s)^2}{\mu_\gamma}$$

(i) E-W: $\alpha = g$, $\beta = oil$, $\gamma = w$

(ii) B-O: $\alpha = w$, $\beta = g$, $\gamma = o$

(iii) D-G: $\alpha = w$, $\beta = o$, $\gamma = g$

<u>Contato duplo</u>: pontos C_1 & C_2 na figura pg. 1.

* Nomenclatura: $\hat{x} \equiv S(C_1)$, $\hat{L} \equiv S(C_2)$

(i) Calcule a raiz do polinômio em $\hat{L}$ (de sexto grau) abaixo, no intervalo $[0,1]$:

$$(1-\hat{L})\left[r^2\hat{L}^2 + r\left(2(1-r)\hat{L}^2 + 5r\hat{L} - 3r\right)^2\right]$$

$$-\left[2(1-r)\hat{L}^2 + 6r\hat{L} - 3r\right]\left[\hat{L}^2 + r(1-\hat{L})^2\right]^2 = 0$$

<u>Obs</u>: O polinômio acima tem sinais opostos em $\hat{L}=0$ e $\hat{L}=1$. Acredita-se que haja exatamente uma raiz em $[0,1]$.

(ii) Calcule $\hat{x} = \dfrac{r\hat{L}}{2(1-r)\hat{L}^2 + 6r\hat{L} - 3r}$ a partir do valor de $\hat{L}$ calculado em (i).

* O valor de r depende da reta:

E-W: $r = (\mu_g + \mu_o)/\mu_w$

B-O: $r = (\mu_w + \mu_g)/\mu_o$

D-G: $r = (\mu_w + \mu_o)/\mu_g$

Coordenadas do ponto E_1:

(i) Sobre E-W:

$$\begin{cases} s_w = \dfrac{\mu_w}{\mu_w+\mu_g}\, s + \dfrac{\mu_w}{\mu_w+\mu_o}\,(1-s) \\[2ex] s_o = \dfrac{\mu_o}{\mu_w+\mu_o}\,(1-s) \end{cases}$$

com $s = (\mu_w+\mu_g)/(\mu_{tot}+\mu_w)$; $\mu_{tot} = \mu_w+\mu_g+\mu_o$

(ii) Sobre D-G:

$$\begin{cases} s_w = \dfrac{\mu_w}{\mu_w+\mu_g}\,(1-s) \\[2ex] s_o = \dfrac{\mu_o}{\mu_o+\mu_g}\, s \end{cases}$$

com $s = (\mu_w+\mu_g)/(\mu_{tot}+\mu_g)$

(iii) Sobre B-O:

$$\begin{cases} s_w = \dfrac{\mu_w}{\mu_w+\mu_o}\, s \\[2ex] s_o = \dfrac{\mu_o}{\mu_w+\mu_o}\, s + \dfrac{\mu_o}{\mu_o+\mu_g}\,(1-s) \end{cases}$$

com $s = (\mu_w+\mu_o)/(\mu_{tot}+\mu_o)$

Extremidades dos choques transicionais: seguindo documento preparado por Cido. (6)

Intervalo $[s_\ell, s_r]$ no parâmetro s.

Novamente, o valor de r depende da reta:

E-W: $r = (\mu_g + \mu_o)/\mu_w$; B-O: $r = (\mu_w + \mu_g)/\mu_o$

D-G: $r = (\mu_w + \mu_o)/\mu_g$

Valor do parâmetro s no pto. umbílico:

$$\boxed{s(U) \equiv \frac{\mu_\alpha + \mu_\beta}{\mu_{tot}}, \quad s(U) \equiv s_u}$$

E-W: $\alpha = g$, $\beta = 0$
B-O: $\alpha = w$, $\beta = g$
D-G: $\alpha = w$, $\beta = 0$

Casos (documento Cido)

08. L entre E_2 e W: intervalo é vazio.

07. L entre E_1 e E_2: $s_r = 1$ neste caso; s_ℓ é a raiz no intervalo $[s_u, 1]$, onde s_u é o valor de s no pto. umbílico, do polinômio quadrático em x abaixo:

$$\hat{L} \equiv s(L); \quad \sigma = \frac{2\hat{L}(1-\hat{L})}{r\left[\frac{\hat{L}^2}{r} + (1-\hat{L})^2\right]^2}$$

$$-\sigma\left[\hat{L}^2 + r(1-\hat{L})^2\right]\left[x^2 - r(1-x)^2\right] + r(\hat{L} + x) - 2r\hat{L}x = 0 \qquad (*)$$

06. L entre C_2 e E_1 (inclusive)

Intervalo $[s_e, s_r]$ no parâmetro s:

* s_e dado pela raiz ~~___~~ em $[0,1]$ de (*) na pg. 6.

* Cálculo de s_r: $\hat{L} \equiv s(L)$, $\sigma = \dfrac{2\hat{L}}{r\left[\dfrac{\hat{L}^2}{r} + (1-\hat{L})^2\right]}$

$$\boxed{-\sigma\left[\hat{L}^2 + r(1-\hat{L})^2\right]\left[x^2 - r(1-x)^2\right] + r(\hat{L}+x) - 2r\hat{L}x = 0 \qquad (**)}$$

s_r é a raiz em $[0,1]$ do polinômio quadrático em x acima.

05. L entre U e C_2 (inclusive): $\hat{L} \equiv s(L)$

* Cálculo de s_e: solução da eq. linear em x:

$$-2x\left[\hat{L}^2 + r(1-\hat{L})^2\right] + r(\hat{L}+x) - 2r\hat{L}x = 0.$$

* Cálculo de s_r: Dado pela raiz em $[0,1]$ de $(**)$ acima.

04. L entre E (inclusive) e U (inclusive)

$\hat{L} \equiv S(L)$

* Cálculo de S_e: raiz em $[0,1]$ do polinômio cúbico em x

$$(1+r)(1-2\hat{L})x^3 + (1-r)\hat{L}(1+2\hat{L})x^2 - [r+2(1+r)\hat{L}^2]x + r\hat{L} = 0$$

* Cálculo de S_r: solução do polinômio linear em x

$$-2x[\hat{L}^2 + r(1-\hat{L})^2] + r(\hat{L}+x) - 2r\hat{L}x = 0.$$