CAMPINA GRANDE, 04/09/14. CONTAS FEITAS COM O MAPLE A PARTIR DOS MANUSCRITOS DO FRED. CIDO

1. Equações das retas de bifurcação.

Todas parametrizadas pelo parâmetro s, o qual corresponde a "saturação efetiva".

$E-W$: $s_w = (1-s), \quad s_o = \dfrac{\mu_o\, s}{\mu_o+\mu_g}, \quad 0 \le s \le 1.$
Neste caso $s = s_g + s_o$.

$B-O$: $s_w = \dfrac{\mu_w s}{\mu_w+\mu_g}, \quad s_o = (1-s), \quad 0 \le s \le 1.$
Neste caso $s = s_w + s_g$.

$D-G$: $s_w = \dfrac{\mu_w s}{\mu_w+\mu_o}, \quad s_o = \dfrac{\mu_o s}{\mu_w+\mu_o}, \quad 0 \le s \le 1.$
Neste caso $s = s_w + s_o$.

2. Coordenadas dos pontos E, B e D correspondentes ao valor $s = 1$.

$$E: \quad s_w(E) = 0, \quad s_o(E) = \frac{\mu_o}{\mu_o+\mu_g}$$

$$B: \quad s_w(B) = \frac{\mu_w}{\mu_w+\mu_g}, \quad s_o(B) = 0$$

$$D: \quad s_w(D) = \frac{\mu_w}{\mu_w+\mu_o}, \quad s_o(D) = \frac{\mu_o}{\mu_w+\mu_o}$$

3. Coordenadas dos pontos E_1, B_1 e D_1.

São respectivamente pontos de extensão-1 de E, B e D e também os pontos de 1-bifurcação secundária de $H(E)$, $H(B)$ e $H(D)$.

Definimos: $\mu_{tot} = \mu_w + \mu_o + \mu_g$.

E_1 sobre $E - W$ com $\sigma(E, E_1) = \lambda_1(E_1)$.

$$s_w(E_1) = \frac{2\mu_w}{\mu_{tot} + \mu_w}, \quad s_o(E_1) = \frac{\mu_o}{\mu_{tot} + \mu_w}.$$

B_1 sobre $B - O$ com $\sigma(B, B_1) = \lambda_1(B_1)$.

$$s_w(B_1) = \frac{\mu_w}{\mu_{tot} + \mu_o}, \quad s_o(B_1) = \frac{2\mu_o}{\mu_{tot} + \mu_o}.$$

D_1 sobre $D - G$ com $\sigma(D, D_1) = \lambda_1(D_1)$.

$$s_w(D_1) = \frac{\mu_w}{\mu_{tot} + \mu_g}, \quad s_o(D_1) = \frac{\mu_o}{\mu_{tot} + \mu_g}.$$

4. Coordenadas dos pontos E_2, B_2 e D_2.

Calculadas usando as parametrizações (i), (ii) e (iii) das retas de bifurcação feitas na Seção 1 em termos dos valores de s_* dados pelos pontos de Weldge, com

$$s_*(E_2) = 1 - \sqrt{\frac{\mu_w}{\mu_{tot}}},$$
$$s_*(B_2) = 1 - \sqrt{\frac{\mu_o}{\mu_{tot}}},$$
$$s_*(D_2) = 1 - \sqrt{\frac{\mu_g}{\mu_{tot}}}$$

e $\mu_{tot} = \mu_w + \mu_o + \mu_g$ obtemos:

E_2 sobre $E - W$ extensão de E com $\sigma(E, E_2) = \lambda_2(E_2)$.

$$s_w(E_2) = \sqrt{\frac{\mu_w}{\mu_{tot}}}, \quad s_o(E_2) = \frac{\mu_o}{\mu_o + \mu_g}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_w}{\mu_{tot}}}\right).$$

B_2 sobre $B - O$ extensão de B com $\sigma(B, B_2) = \lambda_2(B_2)$.

$$s_w(B_2) = \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_g}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_o}{\mu_{tot}}}\right), \quad s_o(B_2) = \sqrt{\frac{\mu_o}{\mu_{tot}}}.$$

D_2 sobre $D - G$ extensão de D com $\sigma(D, D_2) = \lambda_2(D_2)$.

$$s_w(D_2) = \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_g}{\mu_{tot}}}\right), \quad s_o(D_2) = \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_g}{\mu_{tot}}}\right).$$

5. Equações das retas $B - D$, $D - E$ e $E - B$, ramos não locais das Hugoniots por E, B e D, respectivamente.

Todas parametrizadas por um parâmetro s apropriado com $0 \leq s \leq 1$.

$B - D$:

$$s_w = \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_g} s + \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o}(1 - s), \quad s_o = \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o}(1 - s).$$

$s = 1 \iff B$, $s = 0 \iff D$.

$D - E$:

$$s_w = \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o} s, \quad s_o = \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o} s + \frac{\mu_o}{\mu_o + \mu_g}(1 - s).$$

$s = 1 \iff D$, $s = 0 \iff E$.

$E - B$:

$$s_w = \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_g}(1 - s), \quad s_o = \frac{\mu_o}{\mu_o + \mu_g} s.$$

$s = 1 \iff E$, $s = 0 \iff B$.

6. Funções de fluxo fracionário ao longo das retas $E-W$, $B-O$ e $D-G$

Definimos a "saturação efetiva" como $s = s_\alpha + s_\beta$,

a "viscosidade efetiva" como $\mu_{\alpha\beta} = \mu_\alpha + \mu_\beta$

e a razão $r = \dfrac{\mu_{\alpha\beta}}{\mu_\gamma}$.

Em $E-W$: $\alpha = g, \quad \beta = o, \quad \gamma = w, \quad r = \dfrac{\mu_g + \mu_o}{\mu_w}$.

Em $B-O$: $\alpha = w, \quad \beta = g, \quad \gamma = o, \quad r = \dfrac{\mu_w + \mu_g}{\mu_o}$.

Em $D-G$: $\alpha = w, \quad \beta = o, \quad \gamma = g, \quad r = \dfrac{\mu_w + \mu_o}{\mu_g}$.

$$f(s) = \frac{s^2/\mu_{\alpha\beta}}{s^2/\mu_{\alpha\beta} + (1-s)^2/\mu_\gamma} \equiv \frac{s^2}{s^2 + r(1-s)^2}\,.$$

7. Autovalores ao longo das retas $E-W$, $B-O$ e $D-G$.

Definimos: $M(s) = \dfrac{s^2}{\mu_{\alpha\beta}} + \dfrac{(1-s)^2}{\mu_\gamma}$.

$$\lambda_\parallel \equiv \frac{df(s)}{ds} = \frac{2s(1-s)}{\mu_{\alpha\beta}\,\mu_\gamma\,M^2(s)}, \quad \lambda_\perp = \frac{2s/\mu_{\alpha\beta}}{M(s)}\,.$$

O ponto umbílico U corresponde ao valor do parâmetro $s(U) = r/(1+r)$.

Para s entre 0 e $s(U) = r/(1+r)$ tem-se que $\lambda_\perp \equiv \lambda_1$ e $\lambda_\parallel \equiv \lambda_2$.

Para s entre $s(U) = r/(1+r)$ e 1, tem-se que $\lambda_\parallel \equiv \lambda_1$ e $\lambda_\perp \equiv \lambda_2$.

8. Determinação do par de pontos (C_1, C_2) sobre uma das retas de bifurcação correspondenddo ao contato duplo com $\sigma(C_1, C_2) = \lambda_2(C_1) = \lambda_2(C_2)$

Polinômio de grau 5, cujas raizes fornecem os candidatos a C_2 em função da saturação efetiva s.

$$\begin{aligned} polgrau5(s) = & -2(1+r)^3 s^5 + 6r(1+r)^2 s^4 - r(1+r)(5r+1)s^3 \\ & - r^2(1+r)s^2 + r^2(1+3r)s - r^3 \,. \end{aligned}$$

Raizes:

$$raiz1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{r}{1+r}}\,, \quad raiz2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{r}{1+r}}\,,$$
$$raiz3 = \frac{r}{1+r}\,,$$
$$raiz4 = \frac{r+\sqrt{-r}}{1+r}\,, \quad raiz5 = \frac{-r+\sqrt{-r}}{1+r}\,.$$

As candidatas a ponto de contato duplo no triangulo são $s(C_2) = raiz1$ e $s(C_2) = raiz3$. No entanto, para $s = raiz3$ obtemos que o ponto C_1 (correspondente ao contato duplo com C_2) tambem é a própria $raiz3$. Na realidade esta raiz corresponde ao ponto umbílico.

Lembrando que $s(C_1)$ é dado pela fórmula

$$s(C_1) = \frac{rs}{2(1+r)s^2 - 2rs + r}$$

obtemos para $s = s(C_2) = raiz1$ que

$$s(C_1) = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{r}{1+r}}}{-2+\sqrt{2}\sqrt{\frac{r}{1+r}}}$$

9. Extremidades dos segmentos de choques transicionais.

O valores das raizes encontradas (na variável x) correspondem a valores da saturação efetiva s que parametriza as retas $E-W$, $B-O$ e $D-G$ como na Seção1. Portanto com estes valores das raizes encontra-se os valores das coordenadas s_w e s_o ao longo das retas.

No caso a letra maiúscula L está sendo utilizada para identificar o ponto base e também o valor do parâmetro s no ponto base, ou seja, estamos identificando $s(L)$ com L.

9.1. **Estado base L entre E_2 e E_1.**

$$\sigma = \frac{2L(1-L)}{r(L^2/r+(1-L)^2)^2}$$

$$polgrau2(x) = -\sigma(L^2+r(1-L)^2)(x^2+r(1-x)^2)+r(L+x)-2rLx$$

Substituindo σ e calculando as raizes obtemos

$$raiz1 = L \qquad (1)$$

$$(2)$$

$$raiz2 = \frac{1}{2}\frac{L^2(1+r)-r}{L(L-1)(1+r)} \qquad (3)$$

As extremidades procuradas correspondem a $s_r = 1$ e a $s_l = raiz2$, ou seja, o valor $s_r = 1$ corresponde à extremidade sobre o lado do triângulo e o valor $s_l = raiz2$ corresponde à outra extremidade do segmento de choque transicional.

9.2. **Estado base L entre E_1 e C_2.**

$$\sigma = \frac{2L}{r(L^2/r + (1-L)^2)^2}$$

$$polgrau2(x) = -\sigma(L^2+r(1-L)^2)(x^2+r(1-x)^2)+r(L+x)-2rLx$$

Substituindo σ e calculando as raizes obtemos

$$raiz3 = \frac{1}{4}\,\frac{r(2L+1)+\sqrt{4r^2L(1-L)+r^2-8rL^2}}{L(1+r)} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

$$raiz4 = \frac{1}{4}\,\frac{r(2L+1)-\sqrt{4r^2L(1-L)+r^2-8rL^2}}{L(1+r)} \tag{6}$$

As extremidades procuradas correspondem a $s_r = raiz3$ e $s_l = raiz2$ do Caso 9.1 (agora com L entre E_1 e C_2).

9.3. **Estado base L entre C_2 e U.**

$$polgrau1(x) = (-2L^2 - 2r(1-L)^2 + r - 2rL)x + rL$$

A raiz procurada é

$$raiz5 = \frac{rL}{2(1+r)L^2 + (1-2L)r}$$

As extremidades procuradas correspondem a $s_r = raiz3$ do Caso 9.2 (agora com L entre C_2 e U) e $s_l = raiz5$.

Obs. Note que para $L = 1/2$ tem-se que $s_l = raiz5 = r/(r+1)$ correspondendo ao valor do parâmetro s do ponto umbílico.

9.4. **Estado base L entre U e E.** Deve-se tomar cuidado se $L = 1/2$ ou $L \neq 1/2$.

Caso genérico com $L \neq 1/2$.

$$polgrau3(x) = (1+r)(1-2L)x^3+(1+r)L(2L+1)x^2-(r+2(1+r)L^2)x+rL$$

As raizez são

$$raiz6 = L$$

$$raiz7 = \frac{L(r+1) + \sqrt{L^2(r+1)^2 - 2rL(1+r) + r(r+1)}}{(2L-1)(1+r)}$$

$$raiz8 = \frac{L(r+1) - \sqrt{L^2(r+1)^2 - 2rL(1+r) + r(r+1)}}{(2L-1)(1+r)}$$

As extremidades procuradas correspondem a $s_r = raiz5$ do caso anterior (agora com L entre U e E) e $s_l = raiz8$.

Obs. Se $L \to 1/2$ então $raiz8 \to r/(1+r)$. Já os valores de $raiz7$ explodem quando $L \to 1/2$.

Caso degenerado com $L = 1/2$.

$$polgrau2(x) = (1+r)x^2 - \frac{1}{2}(3r+1)x + \frac{1}{2}r$$

As raizes são

$$raiz9 = 1/2 \equiv L$$

$$raiz10 = \frac{r}{1+r} \quad \text{(Ponto Umbílico)}$$

As extremidades procuradas correspondem a $s_r = raiz5$ do Caso 9.3 (agora com $L = 1/2$) e $s_l = raiz10$. No entanto também teremos que $raiz5 = r/(1+r) = raiz10$ e consequentemente não há segmento de choque transicional!