Algorytmy Numeryczne – Zadanie 3

18 listopada 2017

Grzybobranie

W grze bierze udział dwóch graczy: G_1 i G_2. Każdy z graczy dysponuje jednym pionem. Na początku gry pion gracza G_1 umieszczony jest na polu s_1, a pion gracza G_2 umieszczony jest na polu s_2 ($s_1, s_2 \neq 0$). Grę rozpoczyna gracz G_1. Kolejne ruchy gracze wykonują na przemian.

Plansza złożona jest z $2N+1$ pól ponumerowanych liczbami od $-N$ do N, przy czym pola o numerach $-N$ i $+N$ są sąsiednie. Na wybranych polach planszy rozmieszczone są grzyby. Grzybów jest k i rozmieszczone są na polach: m_1, m_2, $\ldots m_k$. Na jednym polu znajduje się co najwyżej jeden grzyb.

Ruch polega na rzucie kostką i przesunięciu piona o wyrzuconą liczbę oczek a_i: jeśli pion stał na polu x, to gracz przesuwa go na pole $x+a_i$. Gracz, który przesunie piona na pole z grzybem, zbiera go zwiększając liczbę posiadanych grzybów o jeden. Przesunięcie piona przez jednego z graczy na pole o numerze 0 (meta) kończy grę. Zwycięża ten z graczy, który zebrał więcej grzybów a w przypadku tej samej liczby grzybów ten, który pierwszy dotarł do mety.

Kostka

Przez rzut kostką rozumiemy wylosowanie jednej z l liczb: a_1, a_2, $\ldots a_l$ z prawdopodobieństwami odpowiednio: p_1/P, p_2/P, $\ldots p_l/P$, gdzie $P = p_1 + p_2 + \ldots + p_l$.

Zadanie

Napisz program, który oblicza prawdopodobieństwo wygrania gry przez gracza G_1 mając dane wejściowe podane w kolejnych wierszach:

- N - rozmiar planszy
- k - liczbę grzybów oraz ich rozmieszczenie: m_1 m_2 $\ldots m_k$.
- s_1 s_2 - pola startowe obu graczy.
- l - liczbę ścian kostki oraz ich parametry
- a_1 a_2 $\ldots a_l$
- p_1 p_2 $\ldots p_l$

Do obliczenia prawdopodobieństwa wykorzystaj układ równań liniowych oraz przedstawione na wykładzie metody: Gaussa oraz metody iteracyjne: Jacobiego i Gaussa-Seidela.

Przykład danych wejściowych

Następujący zestaw danych:

```
3
2 -1 1
3 -3
2
-1 1
1 1
```

oznacza grę na planszy złożonej z $2 \cdot 3 + 1 = 7$ pól, z dwoma grzybami położonymi na polach -1 i $+1$, gracze zaczynają na polach 3 (gracz G_1) i -3 (gracz G_2). W czasie gry gracze przesuwają się o $+1$ bądź -1 z prawdopodobieństwem $1/2$.

Macierze rzadkie

Można zauważyć, że dla małych kostek (małego parametru l) i dużych plansz (duży parametr N) powstające układy równań będą miały bardzo dużo zer. O macierzach takich układów mówimy, że są rzadkie (ang. sparse matrix). Znając charakter macierzy możemy stosować specjalizowane struktury danych, w których zapamiętujemy jedynie niezerowe elementy oszczędzając pamięć i czas obliczeń.

Implementacja specjalizowanych struktur danych nie jest obowiązkowa w tym zadaniu. Zauważmy jednak, że dla rzadkiej macierzy można przyspieszyć znacząco algorytm Gaussa sprawdzając przed wyzerowaniem elementu, czy nie jest on już zerem (wtedy pętla dla całego wiersza jest zbędna). Na potrzeby tego zadania nazwijmy taki wariant zoptymalizowanym dla macierzy rzadkich.

Testy poprawnościowe i wydajnościowe

Niech n_1 i n_2 oznaczają ostatnie cyfry numeru indeksu obu członków zespołu lub dwie ostatnie cyfry numeru indeksu w przypadku prac wykonywanych samodzielnie. Do testów proszę przyjąć:

$$\begin{aligned} k &= 3 + n_1\%6. \\ s_1 &= N \\ s_2 &= -N \\ l &= 3 + 2 \cdot (n_2\%4) \end{aligned}$$

Dwa typy kostek: jedną symetryczną np: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 z równomiernym rozkładem prawdopodobieństw i drugą dowolną.

Rozmieszczenie grzybów losujemy z rozkładem równomiernym.

Testy proszę przeprowadzić używając typu podwójnej precyzji: `double` (lub odpowiednika w wybranym języku programowania).

Wyniki i czas działania powyższych operacji proszę porównać z wynikami uzyskanymi przy użyciu klas: `Matrix` oraz `SparseMatrix` z biblioteki Eigen3.

Sprawozdanie

W pierwszej części sprawozdania proszę przedstawić argumenty za prawidłową implementacją oraz przedyskutować możliwość stosowania metod iteracyjnych dla postawionego problemu. Prawidłowość otrzymanego wyniku proszę zweryfikować metodą Monte Carlo (wielokrotne losowanie przebiegu gry).

W drugiej części sprawozdania proszę porównać wyniki otrzymane:

- metodą Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego w dwóch wariantach: z dodatkową optymalizacją dla macierzy rzadkich i bez,
- metodami iteracyjnymi Jacobiego i Gaussa-Seidela,
- oraz metodami z biblioteki Eigen3: `partialPivLu` dla macierzy ogólnych (ang. dense) oraz `SparseLU` przy użyciu macierzy rzadkich (ang. sparse)

i przedyskutować optymalny dobór metody w zależności od rozmiaru planszy.

Zadania dodatkowe

1. Znajdź taką grę dla $N > 10$, w której prawdopodobieństwo wygranej obu graczy jest jak najbliższe 1/2.
2. Zaimplementuj metodę iteracyjną Jacobiego z wykorzystaniem macierzy rzadkich z biblioteki Eigen3 – dla jak dużej planszy jesteś teraz w stanie policzyć prawdopodobieństwa w ciągu 10 minut?

Praca zespołowa

Zadanie można wykonać w zespole dwuosobowym. W takim przypadku proszę dokładnie oznaczyć jaki był zakres pracy członków zespołu. W oddaniu projektu musi uczestniczyć cały zespół.