

# Ondas MHD en arcos de la corona solar

Materia: Física de Plasmas  
Profesor: Dr. Fernando Minotti  
Alumna: Lic. Cecilia Mac Cormack

---

---

## 1. Introducción

La atmósfera magnética de la corona solar puede asumirse conformada por arcos coroneales (tubos de flujo magnético), para los cuales las dimensiones transversales son mucho más chicas que las longitudinales. La misma está dominada por fuerzas magnéticas; el flujo de calentamiento se produce principalmente a lo largo de la línea de campo, por lo que las inhomogeneidades laterales en temperatura se mantienen. Ocurren también inhomogeneidades en densidad. Como resultado, un tubo de flujo magnético se vuelve visible, separado de los vecinos, incluso si toda la atmósfera está llena de campo magnético. Las inhomogeneidades en el módulo de campo magnético no son grandes, pero incluso en un campo magnético uniforme, las grandes variaciones en densidad resultan en fuertes diferencias en la velocidad de Alfvén, y es ésta última la que gobierna el carácter de las oscilaciones. La naturaleza elástica del campo magnético, y el hecho de que la corona está en todos lados impregnada del mismo, sugiere que la corona puede soportar oscilaciones MHD como ondas de sonido y oscilaciones armónicas.

La teoría de las oscilaciones MHD y ondas coroneales fue desarrollada décadas antes de las primeras imágenes satelitales de alta resolución y estaba lista para aplicaciones. Uno de los mayores beneficios del estudio de las oscilaciones coroneales es la confirmación de parámetros físicos como las velocidades de Alfvén y los campos magnéticos, los cuales son muy difíciles de medir en la corona solar por otros medios.

Incorporando efectos de estratificación gravitacional, no linealidad, disipación y curvatura de arco, la teoría de ondas en arcos coroneales intenta explicar las observaciones de la evolución de las ondas compresivas en los arcos.

Las ondas propagantes surgirán en un arco coronal si los movimientos no tienen suficiente tiempo para reflejarse en el otro pie del arco o en regiones de campo magnético abierto. Una fuente de estas perturbaciones impulsivas es un flare (dando lugar a una o múltiples fuentes de perturbaciones), pero generadores menos energéticos no deben dejarse fuera de discusión. Si las ondas son generadas impulsivamente, la perturbación resultante puede representarse como una integral de Fourier sobre todas las frecuencias  $\omega$ , números de onda  $k$ . En general, se forma un paquete de onda, cuya estructura está determinada por la naturaleza dispersiva de los modos.

En este trabajo se presentarán las ecuaciones MHD (sección 2) y la relación de dispersión que se deriva de las mismas para distintos escenarios: Medio homogéneo, interfaz simple y geometría cilíndrica, en la sección 4.2. Para la última configuración, se estudian los modos posibles tanto en un medio incompresible como en un arco coronal, en la sección 4. En la sección 5 se estudiarán los períodos de las distintas oscilaciones. En la sección 6 se deduce brevemente la ecuación de propagación de ondas acústicas. Y se concluye en la sección 7

## 2. Ecuaciones MHD

El movimiento de un plasma puede ser descripto tanto microscópicamente como macroscópicamente. Desde el punto de vista microscópico, la teoría cinética, a partir de la ecuación de Boltzmann o Vlasov, describe la física de fluidos en términos de las distribuciones de partículas de cada especie que conforma ese plasma. Por otro lado, se puede obtener una descripción macroscópica definiendo las distintas cantidades a partir de promedios estadísticos.

La teoría cinética describe al fluido a partir de funciones de distribución, para las distintas especies, que evolucionan en escalas de tiempo y espacio cortas. Para esta descripción, todas las especies deben tener frecuencias menores a las frecuencias colisionales para poder describirlas por separado. Para llegar a la descripción macroscópica se considera que todas las magnitudes tienen variaciones espaciales en rangos mayores a la longitud de Debye ( $\lambda_{MHD} \gg \lambda_D$ ). A esta escala, el plasma se considera único fluido sin distinción de especies. Una aproximación esencial para el paso a la descripción macroscópica, es que el tiempo en que tarda en equilibrarse la temperatura entre las distintas especies es corto comparado con los demás tiempos característicos, por lo que  $T_e = T_i$ .

Con estas aproximaciones, es posible sumar el número de partículas, el momento y la densidad de energía de todas las especies  $\alpha$  que componen el plasma y usar ecuaciones de conservación. Una consecuencia de esto es que el término de colisiones entre partículas desaparece dado que el momento total se conserva.

Así, se define la masa total como  $\rho \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} N_{\alpha}$ , la velocidad de flujo de masa  $\mathbf{V} \equiv (\sum_{\alpha} m_{\alpha} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha})/\rho$ , la densidad de carga  $\rho^* = \sum_{\alpha} q_{\alpha} N_{\alpha}$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}$ .

Se tienen entonces ecuaciones de conservación de masa y momento sobre todas las especies de partículas en el plasma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{p} = \rho^* \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \mathbf{g}. \quad (2)$$

Se puede ver en la ecuación 2, que las variaciones temporales del momento están causadas por la advección del mismo, el gradiente de presión  $p$  del plasma y las fuerzas externas actuando sobre el volumen de plasma. Con la ecuación 1 y las ecuaciones de Maxwell, se obtiene un sistema con más incógnitas que ecuaciones.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho^* \quad (6)$$

Para lograr resolver el sistema, es necesario hacer algunas aproximaciones. Si los procesos llevados a cabo son lentos, como los encontrados en la corona solar, y de escalas espaciales largas, se puede asumir que existe neutralidad de carga  $\rho^* = 0$  dado los efectos de apantallamiento de Debye, **e ignorar la ecuación de Poisson**. Además, se puede reescribir la densidad de corriente como  $\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})/c)$  en el sistema de laboratorio y asumir que la conductividad eléctrica  $\sigma$  es infinita. Esta aproximación es usual para llegar a las ecuaciones de MHD ideal. Si  $\sigma \rightarrow \infty$ , entonces  $\mathbf{E} = -1/c(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ . Se asumen también, velocidades y presiones isotrópicas, dado que los tiempos característicos de los procesos son mucho mayores al tiempo entre colisiones. Gracias a esto, se puede suponer al plasma coronal como un gas ideal que cumple  $p = \rho k_B T$ .

La corona solar presenta un gas completamente ionizado formado principalmente por hidrógeno y helio. En consecuencia,  $\rho \approx m_e N_e + m_H N_H + m_{He} N_{He} \approx m_H \mu N_e$  con  $\mu$  el peso atómico promedio por electrón  $\mu = (1 + 4a)/(1 + 2a)$ , donde  $a \equiv N_{He}/N_H$  es la abundancia del helio relativa al hidrógeno.

Si despreciamos los efectos relativista y corrientes de desplazamientos, obtenemos el sistema de ecuaciones MHD ideal:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (7)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \mathbf{g}, \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (9)$$

$$\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (11)$$

$$(12)$$

Combinando la ecuación de balance de momento con el rotor de  $\mathbf{B}$ , se obtiene:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}. \quad (13)$$

A todas las ecuaciones ya mencionadas, se tiene que agregar una que describa el proceso dependiendo si es:

- incompresible  $\Leftrightarrow \rho(t) = cte$ . Ésto implica que  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ .
- isotérmico  $\Leftrightarrow \rho \propto p$ .
- adiabático  $\Leftrightarrow p \rho^{-\gamma} = cte$ . Con  $\gamma$  el índice adiabático. Para un gas monoatómico,  $\gamma = 5/3$ .

Para más detalle sobre la obtención de las ecuaciones MHD el lector puede consultar Benz 2002.

Para tener una notación más simple, es conveniente definir la derivada total de una cantidad  $\mathbf{X}$ , la cual incorpora el cambio temporal de una magnitud con el cambio por advección de la misma:

$$\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{X} \quad (14)$$

En las próximas secciones se utiliza esta notación.

### 3. Relación de dispersión de ondas MHD

Para entender las varias oscilaciones y ondas que se observan en el plasma coronal, se deben resolver las ecuaciones MHD. La existencia de soluciones de onda es generalmente derivada mediante la introducción de una perturbación de los parámetros físicos del plasma. Se puede usar una función dependiente del espacio y el tiempo que contenga soluciones periódicas, como  $\exp(i[\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t])$ . A partir de ella, derivar la relación de dispersión  $\omega(\mathbf{k})$ , que otorga tanto la velocidad de grupo  $v_g = d\omega(\mathbf{k})/d\mathbf{k}$  como la velocidad de fase  $v_{ph} = \omega/k$  de la onda.

Comenzamos desde las ecuaciones de MHD ideal, donde se incorporó la ecuación que describe un proceso adiabático y la definición de derivada total:

$$\frac{D}{Dt} \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (15)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \rho \mathbf{g} + \frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (16)$$

$$\frac{D}{Dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0, \quad (17)$$

$$\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (19)$$

Como se mencionó en la sección 2, para procesos adiabáticos  $p\rho^{-\gamma} = cte$ , por lo que:

$$\frac{d(p\rho^{-\gamma})}{ds} = \rho^{-\gamma} \frac{dp}{ds} - \frac{\gamma p}{\rho^{\gamma+1}} \frac{d\rho}{ds} = 0 \quad (20)$$

$$\text{y} \quad \frac{dp}{ds} = \frac{\gamma p}{\rho} \frac{d\rho}{ds} = c_s^2 \frac{d\rho}{ds}. \quad (21)$$

Así, se puede sustituir el término de gradiente de presión de la ecuación 16 por la relación  $\nabla p = c_s^2 \nabla \rho$ , con  $c_s^2$  la velocidad del sonido. Usando la Ec. 19, y la identidad  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} + (\mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{C}\mathbf{B})\mathbf{A}$  en  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  en la Ec. 18 y  $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$  en la Ec. 16, podemos reducir las ecuaciones de MHD para las variables  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{B}$ :

$$\frac{D}{Dt} \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (22)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -c_s^2 \nabla \rho - \rho \mathbf{g} + \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1}{2} \nabla B^2 + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right], \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (24)$$

Se asume que existe una solución de equilibrio estacionaria ( $\partial/\partial t = 0$ ) y sin **flujos de masa** ( $\mathbf{V}_0 = 0$ ), por lo que la densidad y el campo magnético sólo tienen dependencia espacial. Se indica esta solución de equilibrio con el subíndice 0 ( $\rho_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ ). Como no hay corrientes, ambos lados de las ecuaciones 22 y 24 desaparecen y queda sólo una ecuación que define la solución de equilibrio (ecuación 23),

$$-c_s^2 \nabla \rho - \rho \mathbf{g} + \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1}{2} \nabla B_0^2 + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \right] = 0, \quad (25)$$

En las siguientes secciones se realizan perturbaciones al sistema estacionario descripto por la ecuación 25 para distintos medios y geometrías.

### 3.1. Medio homogéneo ilimitado

Se introduce una pequeña perturbación (en densidad, velocidad y campo magnético) desde el equilibrio. La amplitud de perturbación se denota con el subíndice 1,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{x}, t), \quad (26)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t), \quad (27)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t). \quad (28)$$

Se puede considerar a la perturbación como un fenómeno local y despreciar los gradientes de gran escala de parámetros macroscópicos. Se puede despreciar el término gravitatorio ( $-\rho_0 \mathbf{g}$ ) y la variación espacial de la solución estacionaria  $\rho_0(x)$  y  $B_0(x)$ , y asumir entonces que  $\rho_0$  y  $B_0$  son constantes en la perturbación y  $\nabla \rho_0 = 0$  y  $\partial \mathbf{B}_0 / \partial x = 0$ . Agregando estas funciones de perturbación en las ecuaciones de MHD ideal y eliminando la solución de equilibrio, se obtienen los siguientes términos lineales (se desprecian términos de segundo o mayor orden en la perturbación),

$$\frac{D}{Dt} \rho_1 = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_1, \quad (29)$$

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{V}_1}{Dt} = -c_s^2 \nabla \rho_1 + \frac{1}{4\pi} [-\nabla(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1], \quad (30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -\mathbf{B}_0(\nabla \cdot \mathbf{V}_1) + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1. \quad (31)$$

Se puede considerar un campo magnético homogéneo en la dirección  $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ . Así,

$$\nabla(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) = B_0 \nabla(\mathbf{e}_z \mathbf{B}_1), \quad (32)$$

$$(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1 = B_0(\mathbf{e}_z \nabla)\mathbf{B}_1 = B_0 \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial z} \quad (33)$$

y la velocidad de Alfvén asociada  $v_A$  es,

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (34)$$

La ecuación 30 se transforma en

$$\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\nabla \rho_1}{\rho_0} + \frac{v_A^2}{B_0} [-\nabla(\mathbf{e}_z \mathbf{B}_1) + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial z}]. \quad (35)$$

Tomando la derivada respecto al tiempo en la ecuación 35,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2} = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right) + \frac{v_A^2}{B_0} [-\nabla(\mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t})], \quad (36)$$

se puede insertar  $(\partial \rho_1 / \partial t)$  de la Ec. 29 y  $(\partial \mathbf{B}_1 / \partial t)$  de la Ec. 31, y obtener una ecuación única para la perturbación de la velocidad  $\mathbf{V}_1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla(\nabla \mathbf{V}_1) + v_A^2 [-\nabla(\frac{\partial V_z}{\partial z} - \nabla \mathbf{V}_1) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial z} - \mathbf{e}_z \nabla \mathbf{V}_1)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Por conveniencia, se introducen las variables  $\Delta = \nabla \cdot \mathbf{V}_1$  y  $\Gamma = \partial V_z / \partial z$  en la Ec. 37:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla \Delta + v_A^2 [-\nabla(\Gamma - \Delta) + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial z} - \mathbf{e}_z \Delta)]. \quad (38)$$

Tomando por un lado la componente  $z$  y por otro la divergencia en la ecuación 38, se obtienen dos ecuaciones lineales de los modos MHD en un medio homogéneo ilimitado (Roberts 1981a):

$$\frac{\delta^2 V_z}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial \Delta}{\partial z}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (c_s^2 + v_A^2) \nabla^2 \Delta - v_A^2 \nabla^2 \Gamma. \quad (40)$$

Ambas ecuaciones pueden combinarse tomando la derivada cuarta respecto al tiempo,

$$\frac{\partial^4 \Delta}{\partial t^4} - (c_s^2 + v_A^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \Delta + c_s^2 v_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \Delta = 0. \quad (41)$$

Para obtener la relación de dispersión, se expresa la perturbación en términos de componentes de Fourier para una frecuencia  $\omega$  y número de onda  $(k_x, k_y, k_z)$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente:  $\Delta \propto \exp[i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z]$ . Insertando esta forma de Fourier en la Ec. 41, donde los términos de derivadas temporales dejan un  $i\omega$  y las derivadas espaciales dejan un  $ik$ , se puede expresar la ecuación 41 como

$$\omega^4 - k^2(c_s^2 + v_A^2)\omega^2 + k_z^2 k^2 c_s^2 v_A^2 = 0. \quad (42)$$

Se obtiene así una relación de dispersión para las ondas magnetoacústicas rápidas y lentas. La misma puede expresarse también como  $k_x^2 + k_y^2 + m_0^2 = 0$ , donde

$$m_0^2 = \frac{(k_z^2 c_s^2 - \omega^2)(k_z^2 v_A^2 - \omega^2)}{(c_s^2 + v_A^2)(k_z^2 c_T^2 - \omega^2)} \quad (43)$$

y  $c_T$  es la velocidad de tubo  $c_T = c_s v_A / \sqrt{c_s^2 + v_A^2}$ .

El vector de propagación de onda  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  tiene un valor absoluto  $k = |\mathbf{k}| = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ . Si  $\theta$  es el ángulo de propagación, la proyección del vector de onda en la dirección del campo magnético es  $k_z = k \cos \theta$ .

Cuando la velocidad de fase ( $v_{ph} = \omega/k$ ) varía como función de la longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$ , la onda es llamada dispersiva. Para ondas no-dispersivas, la velocidad de fase es igual a la de grupo ( $\mathbf{v}_{gr} = \partial\omega(\mathbf{k})/\partial\mathbf{k}$ ). La relación de dispersión puede ser expresada de forma explícita desde la ecuación 42, dividiendo la expresión por  $k^4$ . Se encuentra una función para la velocidad de fase y el ángulo de propagación  $\theta$ ,

$$v_{ph}^4 - v_{ph}^2(c_s^2 + v_A^2) + c_s^2 v_A^2 \cos^2(\theta) = 0. \quad (44)$$

En el panel superior de la figura 1 se muestra un diagrama polar para  $v_{ph}/v_A$  tomando que la relación entre las velocidades de Alfvén y del sonido es  $c_s/v_A = 0,7$ .

De la ecuación 44 se pueden deducir diferentes casos especiales. Para un campo magnético nulo,  $v_A \propto B_0 = 0$ , la relación se degenera a la solución de una onda con velocidad de fase igual a la velocidad del sonido, sin dependencia con el ángulo  $\theta$ . Desde la ecuación de continuidad (29) y la forma para la perturbación, se deduce que  $\omega\rho_1 = -\rho_0 k V_1$  o que  $c_s\rho_1 = -\rho_0 V_1$ , lo que significa que el gradiente de presión es la única fuerza restitutiva, donde una perturbación en velocidad  $V_1$  es restituida por un cambio proporcional en la densidad  $\rho_1$ . Así, la onda de sonido, o la onda acústica, es una onda no dispersiva ( $v_{ph} = v_{gr} = c_s$ ), compresiva ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1 \neq 0$ ) y longitudinal ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}$ ).

Para un campo magnético no despreciable, pero con dirección de propagación perpendicular ( $\theta = 90^\circ$ ), la velocidad de fase es  $v_{ph} = \sqrt{c_s^2 + v_A^2}$ . Para una dirección de propagación paralela ( $\theta = 0^\circ$ ),  $v_{ph}^2 = [(c_s^2 + v_A^2) \pm (c_s^2 - v_A^2)]/2$ .

Dado que la relación de dispersión es cuadrática en  $\omega^2$ , hay dos soluciones posibles para  $\omega^2(\mathbf{k})$ , las cuales se denominan modos lentos y rápidos. Si la perturbación es incompresible (la dirección de propagación de la onda es perpendicular a la perturbación en la velocidad), la perturbación  $\mathbf{V}_1$  es restituida por el cambio en el campo magnético  $B_1$ . Esta onda incompresible se denomina onda de Alfvén de corte y cae dentro de la categoría de ondas transversales. Dado que es una onda incompresible, no tiene cambios en la densidad o la presión asociados. La fuerza que impulsa una onda de Alfvén es solamente la de la tensión magnética. Así, la onda se propaga con velocidad  $v_A$  en la dirección paralela, pero no puede propagarse en direcciones perpendiculares. Esta solución se denomina onda de Alfvén o modo intermedio.

Entonces, para cada ángulo de propagación  $\theta$ , hay en general tres soluciones de modos magnetoacústicos: lentos, intermedios o rápidos. El orden de la velocidad de fase depende de si la velocidad del sonido es mayor o menor que la velocidad de Alfvén.

En el panel superior de la figura 1 se puede observar que el modo lento tiene velocidades de fase en el rango  $0 \leq v_{ph} \leq \min(c_s, v_A)$ , teniendo un máximo para la propagación a lo largo del campo y no pudiendo propagarse perpendicularmente. El modo rápido tiene velocidades de fase en el rango de  $\max(c_s, v_A) \leq v_{ph} \leq (c_s^2 + v_A^2)^{1/2}$ , con el modo más rápido propagándose perpendicularmente al campo magnético.

Para las condiciones de la corona solar, la velocidad de Alfvén es generalmente más grande que la del sonido ( $v_A \approx 1000 \text{ km s}^{-1}$  y  $c_s \approx 200 \text{ km s}^{-1}$  para una temperatura de plasma de  $T = 1,5 \text{ MK}$ ), alrededor de  $c_s/v_A \approx 0,2$ . En el panel inferior de la figura 1 se muestra el diagrama polar para las condiciones coroneas. Dado que  $v_A \gg c_s$ , el modo lento tiene velocidades de fase en el rango  $0 \leq v_{ph} \leq c_s$ , y el modo rápido en el rango de  $v_A \leq v_{ph} \leq (c_s^2 + v_A^2)^{1/2} \approx v_A$ , como se muestra en la figura.

### 3.2. Interfaz magnética simple

Como la corona solar es un medio altamente inhomogéneo, se introduce una modificación en la relación de dispersión de las ondas y oscilaciones que soportan las estructuras coroneas. Un primer paso hacia las estructuras inhomogéneas es el concepto de dos zonas de plasma distintas que son separadas por una

interfaz discontinua. Ese límite ocurre en la superficie de arcos coronales sobredensos, en los límites de los sunspots, o en el límite de los agujeros coronales. Roberts 1981, generalizó la relación de dispersión para ondas magnetoacústicas en una atmósfera magnéticamente estructurada. Se propone un campo determinado con una función escalón como discontinuidad en  $x = 0$ :  $B_e, \rho_e, p_e$  para  $x > 0$  y  $B_0, \rho_0, p_0$  para  $x < 0$ .

Estos parámetros físicos en ambos lados están relacionados por el balance de presión a través de la interface,

$$p_e + \frac{B_e^2}{8\pi} = p_0 + \frac{B_0^2}{8\pi}, \quad (45)$$

con las definiciones correspondientes para las velocidades del sonido y Alfvén en cada lado de la discontinuidad,

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \quad c_{se} = \sqrt{\frac{\gamma p_e}{\rho_e}}, \quad v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad v_{Ae} = \frac{B_e}{\sqrt{4\pi\rho_e}}. \quad (46)$$

La relación de dispersión puede entonces ser derivada con el mismo método descrito anteriormente, pero con el campo magnético no perturbado  $\mathbf{B}_0(x)$  y la densidad  $\rho_0(x)$  con dependencia espacial en lugar de ser constantes. Cada uno de los medios puede tener ondas magnetoacústicas en su dominio por separado, con una relación de dispersión como la calculada para el medio ilimitado simple (ecuación 42), requiriendo que  $m_0^2 < 0$ . Estas ondas se denominan ondas “*body*”. Un fenómeno que ocurre gracias a la presencia de un límite, son los modos denominados de *superficie*, los cuales aparecen si  $m_0^2 > 0$ . La relación de dispersión obtenida para las ondas de superficie en una interfaz simple y un vector de onda  $\mathbf{k} = (0, k_y, k_z)$  se deriva en Roberts 1981a,

$$\frac{\omega^2}{k_z^2} = v_A^2 - \frac{R}{R+1}(v_A^2 - v_{Ae}^2) = v_{Ae}^2 + \frac{1}{R+1}(v_A^2 - v_{Ae}^2), \quad (47)$$

$$R = \frac{\rho_e}{\rho_0} \left( \frac{m_0^2 + k_y^2}{m_e^2 + k_y^2} \right)^{1/2} > 0, \quad (48)$$

$$m_e^2 = \frac{(k_z^2 c_{se}^2 - \omega^2)(k_z^2 v_{Ae}^2 - \omega^2)}{k_z^2 c_{se}^2 v_{Ae}^2 - (c_s^2 + v_{Ae}^2)\omega^2}. \quad (49)$$

La velocidad de fase de estas ondas de superficie está entre  $v_{Ae}$  y  $v_A$ . Un caso especial es una onda de corte que se propaga a lo largo del eje  $y$  de la superficie. La correspondiente relación de dispersión se obtiene para los límites  $k_y^2 \gg k_z^2$  y  $k_y^2 \gg m_0^2, m_e^2$ , dando que  $R \approx \rho_e/\rho_0$  y la relación de dispersión:

$$\frac{\omega^2}{k_z^2} = \frac{\rho_0 v_A^2 + \rho_e v_{Ae}^2}{\rho_0 + \rho_e}. \quad (50)$$

### 3.2.1. Geometría cilíndrica

Se pueden representar los tubos de flujos magnéticos en la corona solar (despreciando la curvatura) tomando un cilindro derecho definido en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  con una superficie límite en  $r = a$ .

Se considera un cilindro uniforme de campo magnético  $B_0 \hat{z}$  confinado a una región de radio  $a$ , rodeada de un campo magnético uniforme  $B_e \hat{z}$ , como se muestra en la figura 2.

La presión y la densidad del gas dentro del cilindro son  $p_0$  y  $\rho_0$ , y fuera  $p_e$  y  $\rho_e$ . Teniendo en cuenta el balance de presión (ecuación 45, se tiene que las densidades  $\rho_0$  y  $\rho_e$  están relacionadas por

$$\rho_e/\rho_0 = \frac{2c_0^2 + \gamma v_A^2}{2c_e^2 + \gamma v_{Ae}^2}, \quad (51)$$

donde  $c_0 = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$  y  $v_A = B_0/(4\pi\rho_0)^{1/2}$  son la velocidad del sonido y Alfvén dentro del cilindro, respectivamente, y  $c_e = (\gamma p_e/\rho_e)^{1/2}$  y  $v_{Ae} = B_e/(4\pi\rho_e)^{1/2}$  son las velocidades fuera.  $\gamma$  es el cociente entre calores específicos.

Como vimos antes, una perturbación lineal alrededor del equilibrio deja

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (c_0^2 + v_A^2) \nabla^2 \right) \Delta + c_0 v_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \Delta = 0 , \quad (52)$$

$$(53)$$

donde  $\nabla^2$  ahora es el operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ ,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} , \quad (54)$$

y

$$\Delta = \nabla \cdot \mathbf{V} , \quad (55)$$

$$(56)$$

para una velocidad  $\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z)$ . Ecuaciones iguales se presentan para el exterior del cilindro. Si se toma la perturbación como  $\Delta = R(r) \exp[i(\omega t + n\theta + kz)]$ , se tiene

$$\frac{\partial^4 \Delta}{\partial t^4} = \omega^4 R(r) , \quad (57)$$

$$\nabla^2 \Delta = R''(r) + \frac{R'(r)}{r} - R(r) \left( \frac{n^2}{r^2} + k^2 \right) , \quad (58)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \Delta = -\omega^2 \nabla^2 \Delta , \quad (59)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \Delta = -k^2 \nabla^2 \Delta . \quad (60)$$

con cada una de las expresiones acompañadas por  $\exp[i(\omega t + n\theta + kz)]$ . Las ecuaciones anteriores implican que  $R(r)$  cumple la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - (m_0^2 + \frac{n^2}{r^2}) R = 0 , \quad (61)$$

donde

$$m_0^2 = \frac{(k^2 c_0^2 - \omega^2)(k^2 v_A^2 - \omega^2)}{(c_0^2 + v_A^2)(k^2 c_T^2 - \omega^2)} . \quad (62)$$

Para una solución cercana al eje ( $r = 0$ ) del cilindro, se tiene

$$R(r) = A_0 I_n(m_0 r), \quad m_0^2 > 0 \quad (63)$$

$$R(r) = A_0 J_n(n_0 r), \quad n_0^2 = -m_0^2 > 0 \quad (64)$$

ambas para  $r < a$ , donde  $A_0$  es una constante y  $I_n, J_n$  son funciones de Bessel de orden  $n$ . En la región externa, suponiendo que no hay propagación de energía desde o hacia el cilindro, se tiene  $R(r) = A_1 K_n(m_e r)$  para  $r > a$ , donde  $A_1$  es una constante y  $m_e$  está dada por

$$m_e^2 = \frac{(k^2 c_e^2 - \omega^2)(k^2 v_{Ae}^2 - \omega^2)}{(c_e^2 + v_{Ae}^2)(k^2 c_{Te}^2 - \omega^2)} , \quad c_{Te}^2 = \frac{c_e^2 v_{Ae}^2}{c_e^2 + v_{Ae}^2} , \quad (65)$$

y se asume positivo.



Pidiendo continuidad en la componente radial de la velocidad ( $v_r$ ) y en la presión total a través de la superficie del cilindro, la relación de dispersión resulta:

$$\rho_0(k^2 v_A^2 - \omega^2) m_e \frac{K'_n(m_e a)}{K_n(m_e a)} = \rho_e(k^2 v_{Ae}^2 - \omega^2) m_0 \frac{I'_n(m_0 a)}{I_n(m_0 a)} \quad (66)$$

para las ondas de superficie ( $m_0^2 > 0$ ), y

$$\rho_0(k^2 v_A^2 - \omega^2) m_e \frac{K'_n(m_e a)}{K_n(m_e a)} = \rho_e(k^2 v_{Ae}^2 - \omega^2) m_0 \frac{J'_n(n_0 a)}{J_n(n_0 a)} \quad (67)$$

para las ondas de cuerpo ( $m_0^2 = -n_0^2 < 0$ ). El primado denota la derivada de la función de Bessel respecto a su argumento. Se analizan en este trabajo los modos cilíndricamente simétricos (*sausage*) dados por  $n = 0$ , y los modos antisimétricos (*kink*) dados por  $n = 1$ .

#### 4. Modos en un cilindro

Para analizar el conjunto complejo de modos dados por las relaciones de dispersión anteriores, Se analizarán dos casos, un medio incompresible, y un arco coronal.

##### 4.1. Modos incompresibles

En el límite incompresible ( $c_0^2 \rightarrow \infty, c_e^2 \rightarrow \infty$ ),  $m_0$  y  $m_e$  se convierte en  $|k|$ , y entonces 66 queda

$$\omega^2 = k^2 \frac{(v_{Ae}^2 - \frac{\rho_0}{\rho_e} v_A^2) \phi_n}{(1 - \frac{\rho_0}{\rho_e} \phi_n)}, \quad (68)$$

donde  $\phi_n = K'_n(a|k|)I_n(a|k|)/K_n(a|k|)I'_n(a|k|)$ . Así, el modo *sausage* ( $n = 0$ ) y el modo *kink* ( $n = 1$ ) están dados explícitamente. La forma de la relación de dispersión incompresible está representada en la figura 3. Puede verse que la velocidad de fase para los modos *kink* no es monótona como función del número de onda  $k$  (tomado positivo), sino que tiene un máximo (mínimo) si  $v_A > v_{Ae}$  ( $v_A < v_{Ae}$ ); el modo *sausage* es monotonamente decreciente (creciente) si  $v_A > v_{Ae}$  ( $v_A < v_{Ae}$ ). Esta característica de un máximo o mínimo en la velocidad de fase de las ondas *kink* es un reflejo de la geometría del campo magnético. En el límite de tubo delgado ( $|k|a \ll 1$ ), la ecuación 68 deja una velocidad  $c = \omega/k$  dada aproximadamente por

$$c = v_A \left[ 1 - \frac{\rho_e}{\rho_0} \left( 1 - \frac{v_{Ae}^2}{v_A^2} \right) \frac{k^2 a^2}{4} K_0(|k|a) \right], \quad (\text{sausage}) \quad (69)$$

$$c = c_k \left[ 1 - \frac{\rho_e \rho_0}{2(\rho_e + \rho_0)} \frac{(v_{Ae}^2 - v_A^2) k^2 a^2}{(\rho_0 v_A^2 + \rho_e v_{Ae}^2)} K_0(|k|a) \right], \quad (\text{kink}) \quad (70)$$

con

$$c_k = \left( \frac{\rho_0 v_A^2 + \rho_e v_{Ae}^2}{\rho_0 + \rho_e} \right)^{1/2}. \quad (71)$$

##### 4.2. Arcos coronales

La figura 4 (Edwin & Roberts 1983) muestra el comportamiento de ondas bajo las condiciones coronales,  $v_{Ae}^2, v_A^2 > c_e, c_0$ .

En esas circunstancias, ya no hay modos de superficie pero si dos clases de ondas *body*. De particular interes es el modo rápido que surge sólo si  $v_{Ae}^2 > v_A^2$ . Así, para la atmósfera coronal con  $B_0 = B_e$ , las ondas de modos rápidos ocurren sólo si  $\rho_0 > \rho_e$ . Esto sugiere que arcos densos en la corona están habilitados a sostener vibraciones libres con períodos característicos en las escalas de tiempo Alfvénicas (dado que  $v_A < \omega/k < v_{Ae}$ ).

Si se toma un cilindro de radio grande ( $ka \gg 1$ ) y se asume  $c_e \approx c_0 \approx 0$ , se obtiene desde la ecuación 67

$$\tan(n_0 a - \frac{\pi}{4}) = -\frac{n_0}{m_e} \text{ , sausage,} \quad (72)$$

$$\tan(n_0 a - \frac{\pi}{4}) = \frac{m_e}{n_0} \text{ , kink.} \quad (73)$$

Además, las ondas de modos rápidos tienen un corte en los número de onda bajos. Dado que este corte ocurre para  $|k|a$  del orden de la unidad, sólo las longitudes de onda ( $2\pi/k$ ) que son más cortas que el diámetro de un tubo coronal pueden propagarse libremente.

Los modos rápidos sausage y kink existen como oscilaciones libres sólo par arcos densos ( $B_e = B_0$ ). Los modos lentos surgen tanto en cilindros de alta como baja densidad. Finalmente, para los modos kink rápidos en el caso coronal con  $c_e \approx c_0 \approx 0$ , se tiene

$$c = c_k [1 - \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \rho_e}{(\rho_0 + \rho_e)^2} (\frac{v_{Ae}^2 - v_A^2}{c_k^2}) \lambda^2 k^2 a^2 K_0(\lambda |k|a)] \text{ ,} \quad (74)$$

donde  $\lambda = (v_{Ae}^2 - c_k^2)^{1/2} / v_{Ae} > 0$ . Esta relación es válida para  $v_{Ae} > v_A$ . Si  $v_{Ae} < v_A$ , no tendremos más un modo oscilación libre.

## 5. Períodos de modos de oscilación

La relación de dispersión para ondas magneto-acústicas en un tubo de flujo cilíndrico muestra dos dominios de soluciones, una rama lenta con velocidades de fase acústicas ( $c_T \leq v_{ph} = \omega/k \leq c_s$ ), y una rama rápida con velocidades de fase de Alfvén ( $v_A \leq v_{ph} \leq v_{Ae}$ ). En la rama de modos rápidos, modos sausage ( $n = 0$ ) y modos kink ( $n = 1$ ), se observa que los modos kink se extienden hasta  $ka \rightarrow 0$ , mientras que los modos sausage tienen un corte en la velocidad de fase  $v_{ph} = v_A$ , donde no hay soluciones para bajos números de onda  $ka \lesssim 1$ . En esta sección se analizan los períodos de ambos modos.

### 5.1. Modos antisimétricos rápidos (fast kink)

El cociente entre el ancho del arco magnético  $w = 2a$  y la longitud de la media pierna  $L$ , es típicamente  $w/L \approx 0,05 - 0,1$  en la corona (Aschwanden et al. 2002a). Así, el número de onda adimensional es  $ka = 2\pi a/\lambda = (\pi/4)(w/L) \approx 0,04 - 0,08$ , donde la longitud de onda es  $\lambda = 4L$  y el radio del arco es  $a = w/2$ . Las oscilaciones de modo kink observadas son en el régimen de largas longitudes de onda o  $ka \ll 1$ , donde la velocidad de fase es prácticamente igual a la velocidad kink  $c_k$ .

En el bajo  $\beta$  del plasma de la corona, donde el campo magnético es casi igual dentro que fuera de los arcos ( $B_e \approx B_0$ ), se puede aproximar como

$$c_k \approx v_A (\frac{2}{1 + (\rho_e/\rho_0)})^{1/2} \text{ .} \quad (75)$$

Para cocientes típicos de densidad ( $\rho_e/\rho_0 \approx 0,1 - 0,5$ ), la velocidad kink se aproxima a  $c_k \approx (1,15 - 1,35)v_A$ . Estas ondas son esencialmente no dispersivas y tienen una velocidad de fase  $v_{ph} = \omega/k_z \approx c_k \gtrsim v_A$ .

Las ondas estacionarias se presentan cuando la onda kink es reflejada en las dos terminales del arco. Así, los nodos de las ondas estacionarias coinciden con los pies del loop, que están fijos en la cromósfera. Si llamamos a la longitud completa del arco  $l$ , la longitud de onda de la onda estacionaria fundamental es el doble de la longitud de arco (debido a la propagación hacia adelante y atrás)  $\lambda = 2l$ , y así el numero de onda del modo fundamental ( $N = 1$ ) es  $k_z = 2\pi/\lambda = \pi/l$ , mientras que los armónicos más altos ( $N = 2, 3, \dots$ ) tendrán numeros de onda  $k_z = N(\pi/l)$ . Así, el período de tiempo  $P_k$  de un modo de oscilación kink en el armónico fundamental es, utilizando la ecuación 75

$$P_k \approx \frac{2l}{c_k} = \frac{2l}{v_A} (\frac{1 + (\rho_e/\rho_0)}{2})^{1/2} \quad (76)$$

Para arcos coronales con longitudes de onda de  $l = 60 - 600 \text{ Mm}$  y velocidades de Alfvén de  $v_A \approx 1 \text{ Mm s}^{-1}$ , se esperan períodos kink en el rango de  $P_k \approx 2l/v_A = 2 - 20$  minutos.

### 5.2. Modos simétricos rápidos (*fast sausage*)

El corte en los modos sausage ocurre en el número de onda de corte  $k_c$  (Roberts 1984),

$$k = k_c = \left[ \frac{(c_s^2 + v_A^2)(v_{Ae}^2 - c_T^2)}{(v_{Ae}^2 - v_A^2)(v_{Ae}^2 - c_s^2)} \right]^{1/2} \left( \frac{j_{0,s}}{a} \right), \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (77)$$

donde  $j_{0,s} = (2, 4, 5, 52, \dots)$  son los ceros de la función de Bessel  $J_0$ . La frecuencia de corte  $\omega$  en el corte es  $k_c v_{Ae} = \omega_c$ .

La mayoría de las regiones activas tienen temperaturas de  $T \approx 1 - 3\text{MK}$ , por lo que la velocidad del sonido es típicamente  $c_s = 147 \times \sqrt{T_{MK}} \approx 150 - 260\text{km s}^{-1}$ , mucho más chica que la velocidad de Alfvén típica ( $v_A \approx 1000\text{km s}^{-1}$ ) en la corona. En este caso, la velocidad del tubo de flujo  $c_T = c_s v_A / \sqrt{c_s^2 + v_A^2}$  es cercana a la velocidad del sonido  $c_T \lesssim c_s$ , y la expresión para el número de onda de corte  $k_c$  se simplifica a

$$k_c \approx \left( \frac{j_{0,s}}{a} \right) \left[ \frac{1}{(v_{Ae}^2/v_A^2)^2 - 1} \right]^{1/2}. \quad (78)$$

En la corona con bajo  $\beta$  del plasma, la presión térmica es mucho más chica que la presión magnética, y así, podemos asumir que los módulos de campo magnético dentro y fuera del arco son prácticamente iguales ( $B_0 \approx B_e$ ), por lo que el cociente entre las velocidades de alfvén externa e interna es, esencialmente, el cociente de densidades  $\sqrt{\rho_0/\rho_e}$ . Así,

$$k_c \approx \left( \frac{j_{0,s}}{a} \right) \left[ \frac{1}{(\rho_0/\rho_e - 1)} \right]^{1/2}. \quad (79)$$

Se deduce que, para cocientes de densidades típicos en la corona ( $\rho_e/\rho_0 \approx 0,1 - 0,5$ ), el número de onda adimensional de corte  $k_c a$  se espera entre  $0,8 \lesssim k_c a \lesssim 2,4$ . Se espera entonces, que el modo de oscilación global sausage sea completamente suprimido para arcos delgados para los cuales el modo kink de oscilación ha sido observado, el cual tiene números de onda de  $ka = 2\pi a/\lambda = (\pi/4)(\omega/l) \approx 0,04 - 0,08$ .

La existencia de modos de oscilación sausage requiere condiciones especiales, como el alto contraste entre densidades y arcos relativamente anchos. El alto contraste entre densidades, deja la expresión para el número de onda de corte  $k_c$ ,

$$k_c a \approx j_{0,s} \left( \frac{v_A}{v_{Ae}} \right) = j_{0,s} \left( \frac{\rho_e}{\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (80)$$

Como la longitud de onda del modo fundamental ( $s = 1$ ) corresponde al doble del largo del arco, la condición para el corte en el número de onda  $k > k_c$  implica una restricción entre la geometría del arco  $w/l$  y el contraste de densidades  $\rho_e/\rho_0$ ,

$$\frac{l}{w} = \frac{\pi}{2ak} < \frac{\pi}{2ak_c} = \frac{\pi}{2j_{0,s}} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_e}} = 0,6545 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_e}}. \quad (81)$$

El factor numérico 0,65 aplica al modo sausage fundamental  $s = 1$ . Como los parámetros geométricos pueden medirse más fácil que las densidades, la condición anterior se convierte en el requerimiento necesario para el contraste de densidades dado un determinado arco,

$$\frac{\rho_0}{\rho_e} > \left( \frac{1}{0,6545} \frac{l}{w} \right)^2 = 2,334 \left( \frac{l}{w} \right)^2. \quad (82)$$

Esto indica que los arcos delgados con un alto cociente longitud-radio, requieren un alto contraste de densidades  $\rho_0/\rho_e$ . Las regiones activas típicas, con contrastes moderados de  $\rho_0/\rho_e \approx 2, \dots, 10$ , necesitarían ser extremadamente anchas, con cocientes ancho-longitud de  $l/w \approx 1 - 2$ . El contraste de densidades es mucho mayor para arcos de flares o postflares, con  $\rho_0/\rho_e \approx 10^2, \dots, 10^3$ . En este caso, un cociente de  $l/w \approx 6 - 20$  permitiría oscilaciones de modo sausage. La figura 5 muestra la restricción para el número de onda de los modos sausage, mostrando el cociente  $l/w$  como función del contraste de densidades  $\rho_0/\rho_e$ . Todas las consideraciones fueron aplicadas al modo fundamental a lo largo del tubo de flujo.

### 5.2.1. Período del modo sausage

Como el modo sausage es altamente dispersivo, la velocidad de fase depende fuertemente del número adimensional  $ka$ . El diagrama de velocidad de fase muestra que la misma es igual a la velocidad de Alfvén externa por sobre la longitud de onda de corte  $v_{ph}(k = k_c) = v_{Ae}$ , y tiende a aproximarse a la velocidad de Alfvén interna en el límite de longitudes de onda corta  $v_{ph}(ka \gg 1) \rightarrow v_A$ . Para las condiciones coronales, las velocidades de fase de los modos kink y sausage están limitadas por las velocidades de Alfvén interna y externa,  $v_A \leq v_{ph} = \omega/k \leq v_{Ae}$ . Por lo tanto, el período  $P = 2l/v_{ph}$  de un modo sausage estacionario está también limitado:

$$\frac{2l}{v_{Ae}} < P_s = \frac{2l}{v_{ph}} < \frac{2l}{v_A}. \quad (83)$$

En un límite bajo, se puede derivar una relación simple para el período del modo sausage desde la longitud de onda de corte, donde  $v_{ph}(k = k_c) = v_{Ae}$ , (Roberts 1984)

$$P_s = \frac{2l}{v_{ph}} = \frac{2\pi}{kv_{ph}} < \frac{2\pi}{k_c v_{ph}} \approx \frac{2\pi a}{j_{0,s} v_{Ae}} \left( \frac{v_{Ae}}{v_A} \right) = \frac{2\pi a}{j_{0,s} v_A} = \frac{2,62a}{v_A}, \quad (84)$$

Se espera que para arcos con radios de  $a \approx 500, \dots, 10000 \text{ km}$  y velocidades de Alfvén típicas de  $v_A \approx 1000 \text{ km s}^{-1}$ , los períodos de los modos sausage se encuentren en el rango  $P_s \approx 1,3 - 26 \text{ s}$ , los cuales son cerca de dos órdenes de magnitud mas cortos que los períodos de modos kink.

### 5.3. Modo de oscilaciones lentas (Acústicas)

Se considera ahora la rama de modos lentos, la cual es débilmente dispersiva en el  $\beta$  bajo de la corona. La velocidad de tubo de flujo  $c_T$  es cercana a la velocidad del sonido  $c_s$ ,

$$c_T = \frac{c_s v_A}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \approx c_s, \quad \text{para } c_s \ll v_A. \quad (85)$$

Así, las velocidades de fase de las ondas de modos lentos (acústicas) están dadas en buena aproximación por  $v_{ph} = \omega(k)/k \approx c_s$ . Por lo que las ondas magnetoacústicas de modos lentos son esencialmente ondas de sonido, no dispersivas ( $v_{gr} \approx v_{ph} \approx c_s$ ), compresivas ( $kv_1 \neq 0$ ) y longitudinales ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}$ ).

El período de una onda estacionaria en los modos MHD lentos es el tiempo en el que el sonido va y vuelve a lo largo del arco para un armónico fundamental ( $j = 1$ ),

$$P_l = \frac{2l}{jc_T} \approx \frac{2l}{jc_s} \quad (86)$$

donde la velocidad del sonido es,

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma 2k_B T}{\mu m_p}} = 147 \sqrt{\frac{T_e}{1 \text{ MK}}} \text{ [km/s]}, \quad (87)$$

con  $\gamma = 5/3$  el índice adiabático,  $\mu = 1,27$  el peso molecular promedio y  $m_p$  la masa del protón. Para arcos coronales típicos en la corona, con temperaturas de  $T \approx 1 \text{ MK}$  y longitudes entre 10 y 100 Mm, el período de una oscilación MHD de modo lento es esperado en el rango de  $P_l = 140 - 1400 \text{ s} \approx 2 - 20 \text{ min}$ .

## 6. Propagación de ondas MHD

En las secciones anteriores se derivó la relación de dispersión general para ondas magnetoacústicas en un tubo de flujo cilíndrico, la cual mostró tener dos ramas de soluciones para la velocidad de fase  $\omega/k$ : Una rama de modos rápidos con velocidades de Alfvén, y una rama de modos lentos con velocidades acústicas. En esta sección se estudia la propagación de las ondas MHD para la geometría de los arcos coronales.

Como primer paso se considera un arco semicircular de área constante con radio de curvatura  $R_L$ . El arco está lleno de plasma isotérmico. Se consideran sólo perturbaciones longitudinales respecto al campo

magnético. Así, se desprecian los efectos 2D como la curvatura y torsión del arco, y la estructura transversal. Consecuentemente, se considera al tubo como un cilindro rectificado, confinado entre dos planos que representan los pies. En la corona solar, se tiene  $\beta \ll 1$ . Si se consideran ondas propagantes paralelamente, se tienen dos modos de ondas MHD, ondas de Alfvén propagándose con velocidad de Alfvén  $v_A$ , y ondas magnetoacústicas lentas con velocidad del sonido  $c_s$ . Las ondas de Alfvén tienen que ser excluidas del análisis de esta sección dado que su velocidad en la corona es mucho más elevada de la velocidad observada de las perturbaciones. Por otro lado, las ondas magnetoacústicas son capaces de perturbar la densidad del plasma, y su velocidad es cercana a la velocidad de propagación observada.

Se considera una onda lenta propagándose estrictamente a lo largo del campo magnético, en la dirección  $z$ . En este caso se tienen en cuenta la viscosidad y las pérdidas energéticas. El conjunto de ecuaciones que describen este escenario es el MHD resistivo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V) = 0 , \quad (88)$$

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = \frac{4}{3}\eta_0 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} , \quad (89)$$

$$\frac{Dp}{Dt} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial z} \right) , \quad (90)$$

donde  $\rho$  es la densidad del plasma,  $V$  es la velocidad longitudinal,  $p$  es la presión del plasma,  $T$  es la temperatura del plasma,  $\gamma$  es el índice adiabático,  $\kappa_{\parallel}$  es la conductividad térmica a lo largo del campo magnético,  $\eta_0$  es el coeficiente de viscosidad compresiva,  $g$  es la proyección de la aceleración gravitatoria en el eje  $z$ ,

$$g = \frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^2} \left( 1 + \frac{R_L}{R_{\odot}} \sin\left(\frac{z}{R_L}\right) \right)^{-2} \cos\left(\frac{z}{R_L}\right) , \quad (91)$$

con  $G$  la constante gravitacional,  $R_L$  el radio del arco y  $R_{\odot}$  y  $M_{\odot}$  son el radio y la masa del sol, respectivamente. En la ecuación 90 se desprecian las pérdidas radiativas y términos de calentamiento. La conexión entre  $T$ ,  $\rho$  y  $p$  puede obtenerse desde la ley de gas ideal,  $p = RT\rho$ , con  $R$  la constante de gases ideales.

El campo magnético guía a las ondas, pero no es explícitamente presentado en las ecuaciones que gobiernan el movimiento. Esto es debido a que consideramos sólo las ondas estrictamente longitudinales. Las ondas no perturban el campo y su velocidad es independiente del módulo del mismo. La densidad  $\rho_0$  y la presión  $p_0$  estacionarias están conectadas entre ellas mediante la relación

$$\frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0 , \quad (92)$$

Se consideran arcos isotérmicos con temperatura estacionaria  $T_0 = \text{cte}$ , resultando en que  $c_s = \text{cte}$ . El perfil de densidad a lo largo del arco, siguiendo las ecuaciones 91, la ley de gas ideal y la ecuación de estado resulta

$$\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp\left(-\frac{\gamma}{c_s^2} \int_0^z g(z') dz'\right) \quad (93)$$

$$= \rho_0(0) \exp\left(-\frac{\gamma g(0)}{c_s^2} \frac{R_L \sin(z/R_L)}{1 + (R_L/R_{\odot}) \sin(z/R_L)}\right) . \quad (94)$$

### 6.1. La ecuación evolucionaria de ondas lentas

Para el siguiente análisis se asume que los efectos de no linealidad y disipación son débiles. Así, las perturbaciones del estado estacionario se describen por las ecuaciones

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 V) = N_1 , \quad (95)$$

$$\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = N_2 , \quad (96)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{C_s^2(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} V = N_3 , \quad (97)$$

donde  $p$ ,  $\rho$  y  $V$  son perturbaciones de presión, densidad y velocidad. Los términos no lineales y dispersivos están reunidos en los lados derechos de las ecuaciones,

$$N_1 = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho V) , \quad (98)$$

$$N_2 = -\rho \frac{\partial V}{\partial t} - \rho_0 V \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{4}{3} \eta_0 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} , \quad (99)$$

$$N_3 = -V \frac{\partial p}{\partial z} + c_s^2 \left[ \left( \frac{p}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] + (\gamma - 1) \kappa_{\parallel} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} . \quad (100)$$

Despreciando los términos  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$ , se pueden combinar las ecuaciones 95, 96 y 97, para tener la ecuación de evolución de las ondas.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\rho_0 V) + \frac{c_s^2(\gamma - 1)}{\gamma \rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{d\rho_0}{dz} V \right) - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 V) = 0 . \quad (101)$$

De acuerdo con la ecuación 94,  $d\rho_0/dz = -\rho_0/H$ , donde  $H = c_s^2(\gamma g)^{-1}$  es la escala de altura de la densidad local, y

$$\frac{d^2 \rho_0}{dz^2} = \frac{\rho_0}{H} \left( \frac{1}{H} - \frac{1}{g} \frac{dg}{dz} \right). \quad (102)$$

Usando las últimas expresiones, la ecuación 101 puede re escribirse como

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \gamma g \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{dg}{dz} V = 0 . \quad (103)$$

Si se desprecian los términos de viscosidad y estractificación, se obtiene la ecuación de onda conocida

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} . \quad (104)$$

cuya solución para el cilindro rectificado con extremos fijos es,

$$v(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(k_n z) \cos(\omega_n t) \quad (105)$$

con  $k_n = n\pi/l$  y  $\omega_n = c_s k_n$ .

Esta solución se representa para el modo fundamental en el panel superior de la figura 6. Puede verse que la perturbación persiste en el tiempo, variando la amplitud a lo largo del arco pero de forma simétrica.

Si tenemos en cuenta el término viscoso de la ecuación 103, tenemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \gamma g \frac{\partial V}{\partial z} = 0 . \quad (106)$$

cuya solución es

$$v(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(k_n z) \cos(\omega_n t) \exp\left[-\frac{\gamma t}{2}\right] \quad (107)$$

con  $k_n = n\pi/l$  y  $\omega_n = i\gamma/2 \pm \sqrt{c_s^2 k_n^2 - (\gamma/2)^2}$ .

El panel inferior de la figura 6, muestra esta solución en función del tiempo y la coordenada  $z$ . Se observa que la perturbación no logra realizar una oscilación, debido al término disipativo.

Si los términos no lineales se tienen en cuenta, las perturbaciones se vuelven antisimétricas y dependen fuertemente del coeficiente de viscosidad compresiva  $\eta_0$ . Una discusión detallada del comportamiento de estas perturbaciones se encuentra en Nakariakov et al. 2000.

## 7. Conclusiones

Bajo condiciones coroneales, se mostró que un tubo de flujo de densidad y temperatura inhomogénea puede oscilar con dos periodicidades distintas, una oscilación lenta (con períodos acústicos) y una oscilación rápida (con períodos alfvénicos).

Dado que la velocidad de Alfvén y la del sonido en la corona son muy distintas, al rededor de un orden de magnitud, las escalas de tiempo de las dos clases de oscilaciones son también muy distintas. Adicionalmente, los modos magnetoacústicos rápidos tienen escalas de tiempo separadas de acuerdo a si las oscilaciones son simétricas (modos sausage) o antisimétricas (modos kink) alrededor del eje del arco. Los modos sausage tienen las escalas de tiempo más cortos en el sistema.

Para los modos kink en arcos coroneales, se esperan ondas magnéticas con períodos característicos de  $2L/c_k$ , para una longitud de arco  $L$ . Esa oscilación puede surgir sólo si la velocidad de Alfvén en el arco es menor a la del entorno. Los modos kink surgen para todas las longitudes de onda. En contraste, los modos sausage tienen un corte para longitudes de ondas bajas, y sólo pueden propagarse si  $ka$  es mayor a la unidad. Así, con la longitud de onda determinada por el largo del arco, se observa que los modos de oscilación sausage de una onda magnética pueden surgir sólo en la forma de pulsos múltiples en el arco con períodos de oscilación del orden de los segundos.

Una discusión más detallada de las oscilaciones coroneales es presentada en Roberts et al. 1983.

## Referencias

- Aschwanden, M.J.: 2002, *The Astrophysical Journal* **580**, L79.
- Aschwanden, M.J.: 2005, *Physics of the Solar Corona. An Introduction with Problems and Solutions (2nd edition)*, by M.J. Aschwanden. 892 pages. ISBN 3-540-30765-6, Library of Congress Control Number: 2005937065. Praxis Publishing Ltd., Chichester, UK; Springer, New York, Berlin, 2005..
- Benz, A.: 2002, *Plasma Astrophysics. Kinetic Processes in Solar and Stellar Coronae, second edition*. By A. Benz, Institute of Astronomy, ETH Zürich, Switzerland. *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 279, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002..
- Edwin, P.M. and Roberts, B.: 1983, *Solar Physics* **88**, 179.
- Nakariakov, V.M., Verwichte, E., Berghmans, D., and Robbrecht, E.: 2000, *Astronomy and Astrophysics* **362**, 1151.
- Nakariakov, V.M. and Verwichte, E.: 2005, *Living Reviews in Solar Physics* **2**, 3.
- Roberts, B.: 1981, *Solar Physics* **69**, 27.
- Roberts, B.: 1983, *Solar and Stellar Magnetic Fields: Origins and Coronal Effects* **102**, 61.
- Roberts, B., Edwin, P.M., and Benz, A.O.: 1984, *The Astrophysical Journal* **279**, 857.

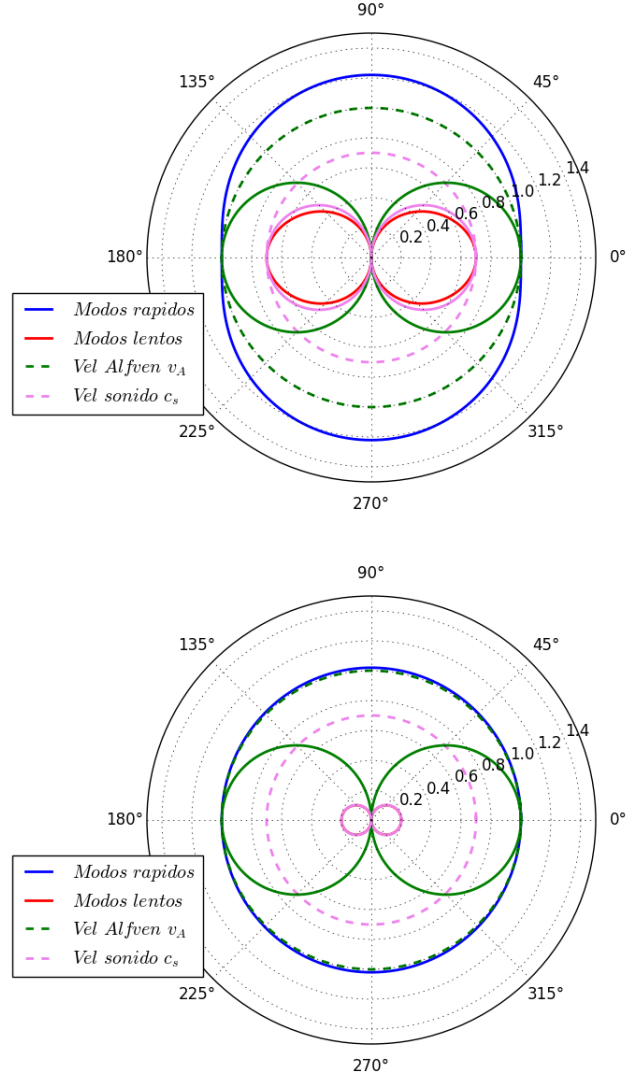


Figura 1: Diagrama polar de la velocidad de fase  $v_{ph}/v_A$  para ondas magnetoacústicas, para un cociente  $c_s/v_A = 0,7$  en el panel superior y  $c_s/v_A = 0,2$  en el panel inferior. Este último representa los modos posibles en la corona solar. En ambos casos se muestra la velocidad del sonido (línea punteada violeta) y la velocidad de Alfvén (línea punteada verde). Los modos lentos y rápidos están representados con una línea sólida.



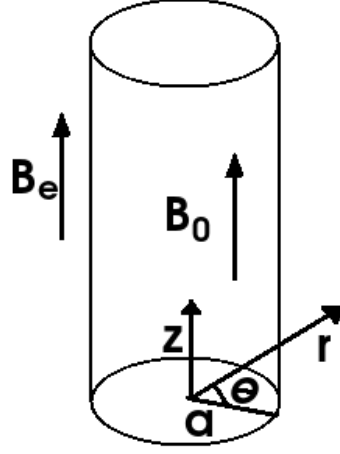


Figura 2: Configuración del cilindro magnético uniforme.

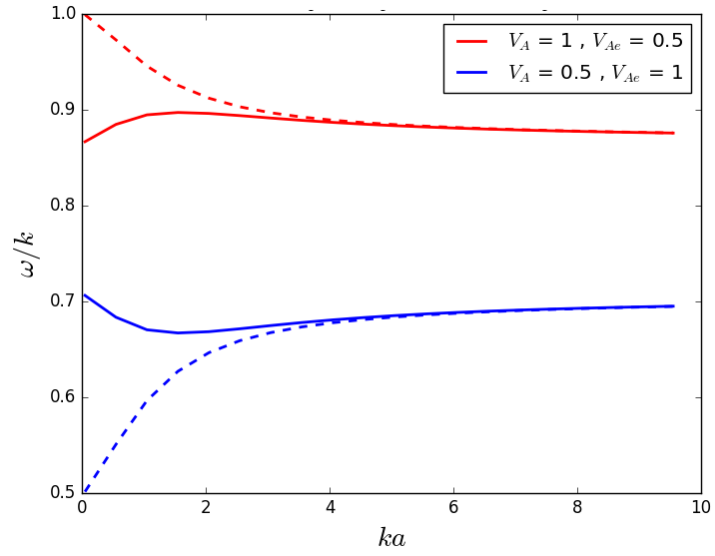


Figura 3: Relación de dispersión en un medio incompresible. Se grafica la velocidad de fase  $v_{ph}$  en función del número adimensional  $ka$  para los casos  $v_A > v_{Ae}$  en rojo y  $v_{Ae} > v_A$  en azul. Ambos para el modo sausage (curva punteada) y el kink (curva sólida).

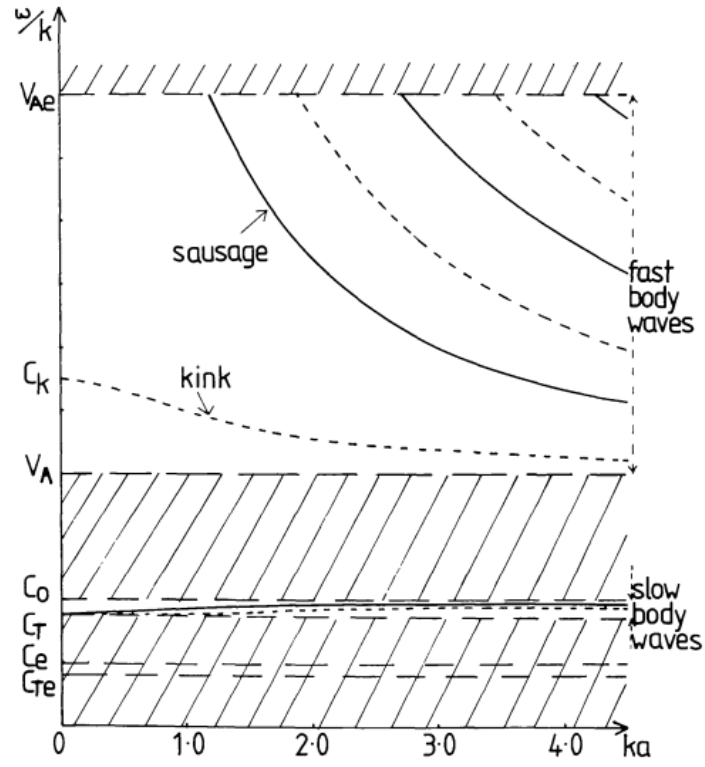


Figura 4: Velocidad de fase de los modos de oscilación de superficie bajo condiciones coronales ( $v_{Ae}, v_A > c_0, c_e$ ). Edwin & Roberts 1983.

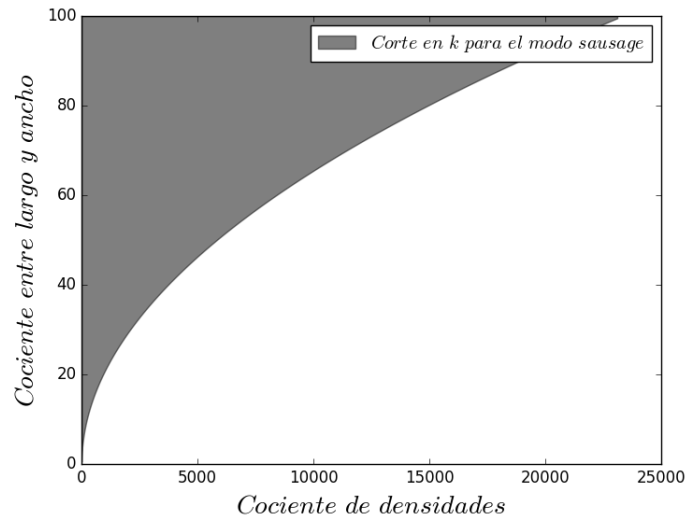


Figura 5: Límite en el número de onda  $k_c$  de las oscilaciones de modo sausage. Se representan los valores prohibidos en un gráfico del cociente entre el largo  $l$  y el ancho  $w$  de un arco magnético en función del cociente entre las densidades del arco y el medio que lo rodea ( $\rho_0/\rho_e$ ). Puede verse que las oscilaciones de modo sausage sólo están permitidas para alto cociente de densidad y arcos anchos.

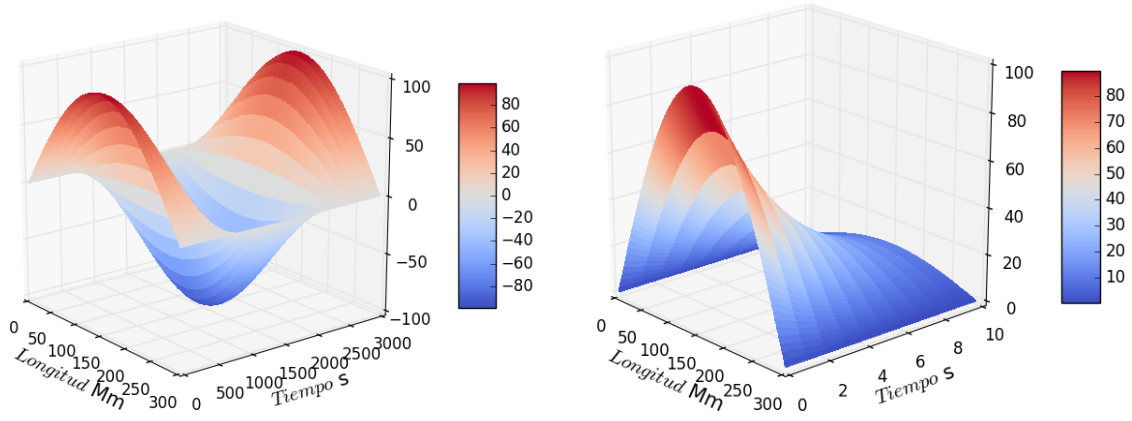


Figura 6: Evolución de una onda magnetoacústica lenta en las condiciones de la corona solar, despreciando los términos no lineales en la perturbación. En el panel izquierdo se observa una propagación sin pérdidas. En el panel derecho se agrega el término disipativo, que modula la oscilación. Ambas soluciones son para un arco coronal de 300 Mm de largo.