Лабораторная работа №2 "Логистическая регрессия. Многоклассовая классификация"

Долматович Алина, 858641

Набор данных ex2data1.txt представляет собой текстовый файл, содержащий информацию об оценке студента по первому экзамену (первое число в строке), оценке по второму экзамену (второе число в строке) и поступлении в университет (0 - не поступил, 1 - поступил).

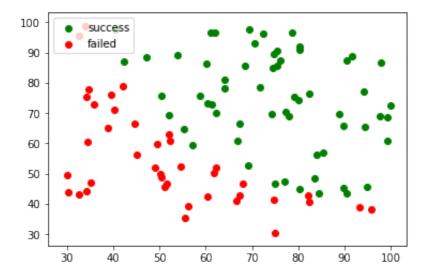
Набор данных ex2data2.txt представляет собой текстовый файл, содержащий информацию о результате первого теста (первое число в строке) и результате второго теста (второе число в строке) изделий и результате прохождения контроля (0 - контроль не пройден, 1 - контроль пройден).

Набор данных ex2data3.mat представляет собой файл формата *.mat (т.е. сохраненного из Matlab). Набор содержит 5000 изображений 20х20 в оттенках серого. Каждый пиксель представляет собой значение яркости (вещественное число). Каждое изображение сохранено в виде вектора из 400 элементов. В результате загрузки набора данных должна быть получена матрица 5000х400. Далее расположены метки классов изображений от 1 до 9 (соответствуют цифрам от 1 до 9), а также 10 (соответствует цифре 0).

Загрузите данные ex2data1.txt из текстового файла.

Постройте график, где по осям откладываются оценки по предметам, а точки обозначаются двумя разными маркерами в зависимости от того, поступил ли данный студент в университет или нет.

```
In [3]:
             def scatterPlot(data):
           1
                 colors = ("green", "red")
           2
           3
                 groups = ("success", "failed")
           4
           5
                 figure = pyplot.figure()
                 subplot = figure.add_subplot(1, 1, 1)
           6
           7
           8
                 for data, color, group in zip(data, colors, groups):
           9
                     x, y = data[0], data[1]
                     subplot.scatter(x, y, c=color, label=group)
          10
          11
          12
                 pyplot.legend(loc=2)
          13
          14 success = data1.loc[data1[2] == 1]
          15 failed = data1.loc[data1[2] == 0]
          16 scatterPlot(data=(success, failed))
          17 pyplot.show()
```



Реализуйте функции потерь $J(\theta)$ и градиентного спуска для логистической регрессии с использованием векторизации.

```
In [12]:
            1 def sigmoid(x):
            2
                  return 1 / (1 + np.exp(-x))
            3
            4 def h(theta, X):
            5
                  z = np.dot(theta, X.T)
            6
                  return sigmoid(z)
            7
            8 def particularCost(theta, x, y):
           9
                  if y == 1:
           10
                      return - math.log(h(theta, x))
           11
                  elif y == 0:
           12
                      return - math.log(1 - h(theta, x))
           13
           14 def cost(theta, X, Y):
           15
                  particularCosts = []
           16
                  for x, y in zip(X,Y):
           17
                      currentParticularCost = particularCost(theta, x, y)
           18
                      particularCosts.append(currentParticularCost)
           19
                  return 1. / len(X) * sum(particularCosts)
           20
           21 def gradientDescent(x, y, theta, alpha=0.0005):
           22
                  for i in range(500):
           23
                      h = sigmoid(np.dot(x, theta))
           24
                      gradient = np.matmul(X.T, (h - y)) / len(y);
                      theta -= alpha * gradient
           25
           26
                  return theta
           27
```

```
4.26613842362
[-0.01889155 0.01055634 0.00059828]
```

Реализуйте другие методы (как минимум 2) оптимизации для реализованной функции стоимости (например, Метод Нелдера — Мида, Алгоритм Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно, генетические методы и т.п.). Разрешается использовать библиотечные реализации методов оптимизации (например, из библиотеки scipy).

0.206231

Реализуйте функцию предсказания вероятности поступления студента в зависимости от значений оценок по экзаменам.

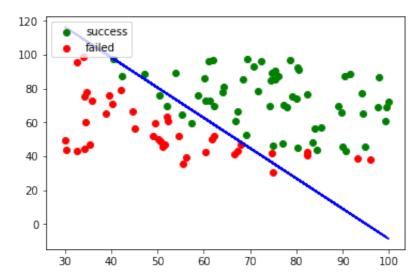
0.20147085]

```
In [7]:
           1 h = h(resultTheta.copy(), X.copy())
           2 print(h)
           9.10342800e-02
                             4.22601706e-05
                                               4.39091754e-02
                                                                 9.90424545e-01
        [
           9.98198714e-01
                             1.07976791e-02
                                               9.98978114e-01
                                                                 4.23227182e-01
                                                                 2.85970699e-02
           9.99710012e-01
                             7.35387352e-01
                                               9.09673865e-01
           9.99270125e-01
                             9.99853941e-01
                                               1.56037429e-01
                                                                 9.80959079e-01
                             1.48789818e-01
                                               9.99706535e-01
                                                                 5.74280445e-01
            4.27716919e-01
            6.68354987e-02
                             9.98627216e-01
                                               7.41812959e-03
                                                                 1.01158024e-04
            9.91878123e-01
                             8.55047779e-01
                                               6.00298381e-01
                                                                 8.65184223e-01
           9.23898049e-02
                             1.68290877e-02
                                               8.97130010e-01
                                                                 9.81037118e-01
            1.54911474e-01
                             3.91938487e-01
                                               7.41293603e-02
                                                                 3.31110712e-02
            8.52266888e-01
                             9.87564125e-01
                                               2.03988405e-01
                                                                 4.95802746e-02
           9.70300054e-01
                             6.11832483e-03
                                               9.99461472e-01
                                                                 5.02285115e-01
            4.48877376e-03
                             1.37024401e-01
                                               9.92991691e-01
                                                                 9.99996181e-01
           9.99204897e-01
                             9.99990760e-01
                                               9.98106744e-01
                                                                 9.99500476e-01
                             2.80619156e-03
                                               8.52283234e-03
                                                                 5.28913438e-02
           9.05015341e-01
           9.99856626e-01
                             6.93706428e-01
                                               9.85496467e-01
                                                                 9.95728534e-01
            9.99531636e-01
                             2.22382092e-04
                                               3.50546294e-03
                                                                 1.27070078e-04
           7.16571125e-02
                             4.08764977e-02
                                               9.44425563e-01
                                                                 1.00706754e-02
           9.99952446e-01
                             7.09299878e-01
                                               6.20412637e-05
                                                                 9.77395873e-01
                                               9.05239847e-01
           9.99893355e-01
                             8.84275600e-01
                                                                 9.99954903e-01
           9.17694064e-01
                             6.26742965e-01
                                               1.58403269e-02
                                                                 5.99468870e-01
           9.99282476e-01
                             9.73471313e-01
                                               8.94531428e-01
                                                                 2.03193080e-01
           9.99941046e-01
                             9.97982437e-01
                                               3.54559867e-01
                                                                 9.99820024e-01
                                                                 9.99985224e-01
           9.99973210e-01
                             1.06959730e-01
                                               9.99943951e-01
            1.42430938e-03
                             9.99321725e-01
                                               9.24569617e-01
                                                                 8.58638371e-01
            7.50880784e-01
                             9.99896603e-01
                                               3.39275511e-01
                                                                 9.99750926e-01
        ]
```

[-25.16124435]

Постройте разделяющую прямую, полученную в результате обучения модели. Совместите прямую с графиком из пункта 2.

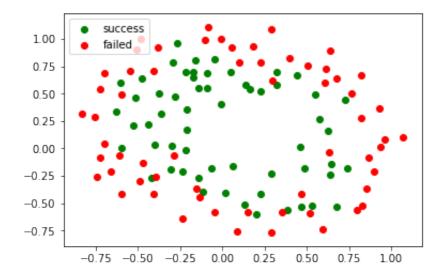
```
In [8]:
           1 \# -(t1*x1 + t3) / t2 = x2
           2
           3
            def line x1(x1, theta):
           4
                 result = []
           5
                 for x in x1:
           6
                     value = (theta[0] * x + theta[2]) / theta[1] + 170
           7
                     result.append(value)
           8
                 return result
           9
          10 scatterPlot(data=(success, failed))
          pyplot.plot(data1[0], line x1(data1[0], theta), color='blue')
          12 pyplot.show()
```



Загрузите данные ex2data2.txt из текстового файла.

Постройте график, где по осям откладываются результаты тестов, а точки обозначаются двумя разными маркерами в зависимости от того, прошло ли изделие контроль или нет.

```
In [10]: 1 success = data2.loc[data2[2] == 1]
2 failed = data2.loc[data2[2] == 0]
3
4 scatterPlot(data=(success, failed))
5 pyplot.show()
```



Реализуйте L2-регуляризацию для логистической регрессии и обучите ее на расширенном наборе признаков методом градиентного спуска.

```
1 \#J(X,Y,W) = L + 1/C * ||W||^2, \Gamma Ae ||W||^2 = w1^2 + w2^2 + ... + wn^2
In [13]:
            2
            3 X = np.array(data2.iloc[:, 0:2])
            4 \mid (m, n) = X.shape
            5 theta = np.zeros((n + 1, 1))
            6 \mid X = np.hstack((np.ones((m, 1)), X))
            7
            8 \mid Y = np.array(data2[2])
            9 theta = np.array([0, 0.1, 0.2])
           10
           11 def l2regularization(theta, X, Y, C=0.1):
           12
                  particularCosts = []
           13
                   for x, y in zip(X,Y):
           14
                       currentParticularCost = particularCost(theta, x, y) + (C
           15
                       particularCosts.append(currentParticularCost)
           16
                   return 1. / len(X) * sum(particularCosts)
           17
           18 theta2 = gradientDescent(X, Y, theta)
           19 L2 = 12regularization(theta, X, Y)
           20 print(L2, theta2)
```

Реализуйте функцию предсказания вероятности прохождения контроля изделием в зависимости от результатов тестов.

(0.69647643833990047, array([-0.00456763, 0.09412745, 0.19643552])

```
In [14]:
            1 def partialPredict(h, y):
            2
                  return sigmoid(np.dot(h, y))
            3
            4 def prediction(X, Y):
            5
                  H = h(resultTheta.copy(), X)
            6
            7
                  P = []
            8
                  for h, y in zip(H, Y):
            9
                       partial = partialPredict(_h, y)
           10
                       P.append(partial)
           11
                  return P
           12
           13 predict = prediction(X, Y)
           14 print(len(predict))
```

118

)

Постройте все возможные комбинации признаков x1 (результат первого теста) и x2 (результат второго теста), в которых степень полинома не превышает 6, т.е. 1, x1, x2, x12, x1x2, x22, ..., x1x25, x26 (всего 28 комбинаций).

```
In [15]:
            1 X = np.array(data2.iloc[:, 0:2])
            2 Y = np.array(data2[2])
            3 (m, n) = X.shape
            4 theta = np.zeros((n + 1, 1))
            5
            6 def polynomialCombinations():
            7
                  def partialCombination(p1, p2):
            8
                       def multiply(x):
            9
                           return (x[0] ** p1) * (x[1] ** p2)
           10
           11
                       return ['x1%s*x2%s' % (p1, p2), multiply]
           12
           13
                  combinations = {}
           14
                  for i in range(0, 7):
           15
                       for j in range(0, 7):
                           if i + j <= 6:
           16
           17
                               [key, fn] = partialCombination(i, j)
           18
                               combinations[key] = fn
           19
                  return combinations
           20
           21 \mid XX = []
           22 for i in X:
           23
                  a = []
                  combinations = polynomialCombinations()
           24
           25
                  for key in combinations.keys():
           26
                       a.append(combinations[key](i))
           27
                  XX.append(np.array(a))
           28 \mid X = np.array(XX)
           29 print(X.shape)
```

(118, 28)

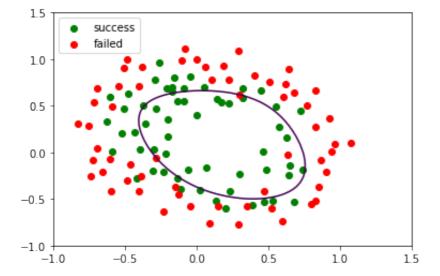
Реализуйте другие методы оптимизации.

```
In [16]:
            1
             def getThetaOptimized(X, C=0.01):
            2
                  (m, n) = X.shape
            3
                  theta = np.zeros((n + 1, 1))
            4
                  X = np.hstack((np.ones((m, 1)), X))
            5
            6
                  theta optimized = optimize.minimize(12regularization, theta,
            7
                  print(theta optimized)
            8
            9
                    theta_optimized = optimize.minimize(12regularization, theta,
           10 #
                    print(theta optimized)
           11
          12
                  return theta optimized
          13
          14 thetaOptimize = getThetaOptimized(X)
```

Постройте разделяющую кривую, полученную в результате обучения модели. Совместите прямую с графиком из пункта 7.

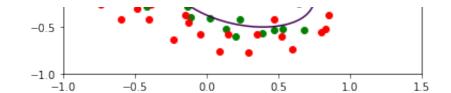
```
In [17]:
            1
              def dividingCurve(C):
            2
                  thetaOptimized = getThetaOptimized(X, C)
            3
                  XX = np.linspace(-1, 1.5, 100)
            4
                  YY = np.linspace(-1, 1.5, 100)
            5
                  ZZ = np.zeros((len(XX), len(YY)))
                  combinations = polynomialCombinations()
            6
            7
            8
                  for i in range(len(XX)):
            9
                       for j in range(len(YY)):
           10
                           a = [1]
                           for key in combinations.keys():
           11
           12
                               a.append(combinations[key]([XX[i], YY[j]]))
           13
                           ZZ[i, j] = h(thetaOptimized, np.array(a))
           14
           15
                  success = data2.loc[data2[2] == 1]
           16
                  failed = data2.loc[data2[2] == 0]
           17
                  scatterPlot(data=(success, failed))
           18
                  pyplot.contour(XX, YY, ZZ, 0)
           19
           20 dividingCurve(0.1)
           21 pyplot.show()
```

```
[
  2.75511335e+00
                   4.27654981e-01
                                    2.95675339e+00
                                                     5.27832419e-01
 -4.99821618e-01
                 -2.77958684e+00 -9.17935165e-02
                                                    -1.14888962e+00
 -1.22050153e-03
                  6.24093385e-01 -4.22406247e+00
                                                     7.46224940e-01
 -9.58722753e-01
                  -1.21465841e+00
                                   -1.14921411e+00
                                                    -1.76212068e+00
 -1.13637721e+00
                 -4.21467546e+00 -1.07812657e+00
                                                     4.44274096e-01
 -6.21338533e-01
                  -2.63112452e+00 -3.37771914e+00
                                                     1.80722305e+00
 -1.20754102e+00 -3.26537172e+00 -4.71452579e-01 -7.35762809e-01
 -4.74778418e-01]
```



Попробуйте различные значения параметра регуляризации λ. Как выбор данного значения влияет на вид разделяющей кривой? Ответ дайте в виде графиков.

```
In [18]:
              cValues = [0.9, 0.1, 0.01, 0.001]
            1
            2
            3
              for value in cValues:
            4
                   dividingCurve(value)
            5
                  pyplot.show()
            1.33477867e+00
                               1.94091487e-02
                                                 1.25196521e+00
                                                                   -4.95881899e-02
            -1.77273238e-01
                              -1.25575922e+00
                                                -4.62986339e-01
                                                                   -9.59079703e-01
            -1.77360113e-04
                              -4.11317435e-02
                                                -1.52540465e+00
                                                                    1.44419801e-01
            -1.59744279e-01
                                                                   -6.53891858e-01
                              -3.19536273e-01
                                                -3.48482111e-01
            -2.98062103e-01
                              -2.12258443e+00
                                                -3.93026207e-01
                                                                    3.37540950e-02
            -2.48913912e-01
                              -1.09682006e+00
                                               -9.94359359e-01
                                                                    6.74738528e-01
            -3.00536003e-01
                              -1.53257646e+00
                                                -2.18956428e-01
                                                                   -3.09485552e-01
            -3.79513258e-01]
            1.5
                   success
                   failed
            10
            0.5
           0.0
          -0.5
          -1.0
             -1.0
                      -0.5
                               0.0
                                       0.5
                                                1.0
                                                        1.5
                               4.27654981e-01
                                                 2.95675339e+00
            2.75511335e+00
                                                                    5.27832419e-01
            -4.99821618e-01
                              -2.77958684e+00
                                                -9.17935165e-02
                                                                   -1.14888962e+00
            -1.22050153e-03
                               6.24093385e-01
                                                -4.22406247e+00
                                                                    7.46224940e-01
            -9.58722753e-01
                                                -1.14921411e+00
                                                                   -1.76212068e+00
                              -1.21465841e+00
            -1.13637721e+00
                              -4.21467546e+00
                                                -1.07812657e+00
                                                                    4.44274096e-01
            -6.21338533e-01
                              -2.63112452e+00
                                                -3.37771914e+00
                                                                    1.80722305e+00
            -1.20754102e+00
                              -3.26537172e+00
                                                -4.71452579e-01
                                                                   -7.35762809e-01
            -4.74778418e-01]
            1.5
                   success
                   failed
            1.0
            0.5
            0.0
```

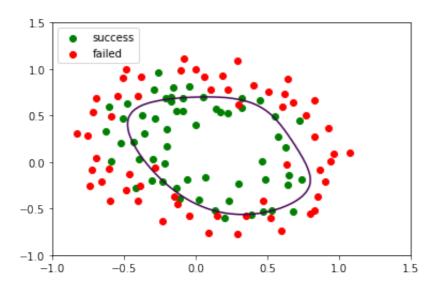


2.84732584 0.32110738 0.04666409 5.01139142 -6.05869898 2.1376 0524

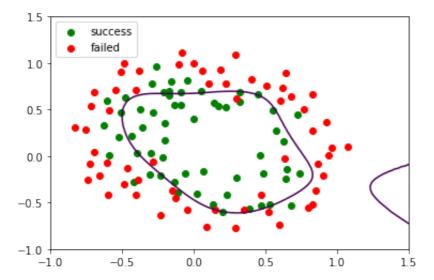
-3.6594982 -4.32656123 -4.49457957 -3.70160141 -3.60947846 -5.5621 0576

-0.09605167 0.41744376 -1.70520988 -5.48256526 -6.69650402 2.02676681

-1.98244411 -3.75115211 -0.87408806 -0.85685924 2.490571321



3.0049419 11.76737158 4.64860032 3.18674038 -3.30114775 -18.22425516 8.88881534 1.40932792 0.47215167 10.57478771 5.02722798 -13.34155455 -13.29903408 -17.39451255 -0.86041362 -10.11155637 -8.58889272 -5.61364754 6.80390598 -7.79178492 -1.91957033 -18.03966713 -8.57339407 0.57987762 -1.00980683 -3.74723557 -2.69935809 11.35061294] 2.52891058



Загрузите данные ex2data3.mat из файла.

Визуализируйте несколько случайных изображений из набора данных. Визуализация должна содержать каждую цифру как минимум один раз.

```
In [20]:
           1 images = dict()
           2
           3 for i in range(len(Y)):
                  key = Y[i][0]
           5
                  if key not in images.keys():
           6
                      images[key] = i
           7
           8 keys = images.keys()
           9
              , axis = pyplot.subplots(1, len(keys))
          10
          11
          12 for j in range(len(keys)):
          13
                  matrix = X[images[j+1], :].reshape(20, 20, order="F")
          14
                  axis[j].imshow(matrix)
          15
                  axis[j].axis("off")
          16
          17 pyplot.show()
          18
```



Реализуйте бинарный классификатор с помощью логистической регрессии с использованием векторизации (функции потерь и градиентного спуска).

```
In [22]:
                                                         1
                                                                     def costRegularized(theta, X, y, lambda =0):
                                                         2
                                                                                        m = len(y)
                                                         3
                                                                                         h theta = sigmoid(np.dot(X, theta))
                                                         4
                                                                                         J = (1. / m) * ((np.dot(-y.T, np.log(h theta))) - np.dot((1 - m)) - np.dot((1 - m)
                                                         5
                                                                                         return J
                                                         6
                                                         7 def gradientDescentRegularized(theta, X, Y, alpha=0.01, lambdaValu
                                                                                        m = len(Y)
                                                         8
                                                                                         grad = np.zeros([m, 1])
                                                         9
                                                                                         grad = (1. / m) * np.dot(X.T, (sigmoid(np.dot(X, theta.T)) - Y
                                                     10
                                                                                         grad = grad.T + ((lambdaValue / m) * theta)
                                                    11
                                                    12
                                                                                         return grad
                                                    13
                                                    14 print(costRegularized(theta[0], X, Y))
                                                     15 print(gradientDescentRegularized(theta, X, Y))
```

```
[-17.05142064]
[[ -5.0000000e+00
                     0.0000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
    6.02839052e-07
                     0.00000000e+00]
 [ -5.0000000e+00
                     0.0000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
                     0.00000000e+001
    6.02839052e-07
 [ -5.0000000e+00
                     0.0000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
    6.02839052e-07
                     0.00000000e+001
 [ -5.0000000e+00
                     0.0000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
    6.02839052e-07
                     0.00000000e+001
 [ -5.0000000e+00
                     0.0000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
    6.02839052e-07
                     0.00000000e+00]
 [ -5.0000000e+00
                     0.00000000e+00
                                      0.00000000e+00 ..., 7.287646
24e-06
                     0.00000000e+0011
    6.02839052e-07
```

Добавьте L2-регуляризацию к модели.

```
In [23]: 1 lmbda = 0.01
2 print(costRegularized(theta[0], X, Y, lmbda))
3 print(gradientDescentRegularized(theta[0], X, Y, lmbda))
```

```
[-17.05142064]
[[ -5.0000000e+00
                     0.00000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
    6.02839052e-07
                     0.00000000e+001
                     0.0000000e+00
 [ -5.0000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
    6.02839052e-07
                     0.00000000e+00]
 [ -5.0000000e+00
                     0.00000000e+00
                                      0.00000000e+00 ..., 7.287646
24e-06
    6.02839052e-07
                     0.00000000e+001
 [ -5.0000000e+00
                     0.00000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
                     0.00000000e+00]
    6.02839052e-07
 [ -5.0000000e+00
                     0.00000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
    6.02839052e-07
                     0.00000000e+001
 [ -5.0000000e+00
                     0.0000000e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                            7.287646
24e-06
    6.02839052e-07
                     0.00000000e+0011
```

Реализуйте многоклассовую классификацию по методу "один против всех".

```
def oneVSAll(theta, k, X, Y, C=0.1):
In [28]:
            1
            2
                   for i in range(k):
            3
                       digit class = i if i else 10
            4
                       currentY = (Y == digit_class).flatten().astype(np.int)
            5
                       theta[i] = optimize.fmin cg(
            6
                           f=costRegularized,
            7
                           x0=theta[i],
            8
                           fprime=gradientDescentRegularized,
            9
                           args=(X, currentY, C),
           10
                           maxiter=100
           11
                       )
                  return theta
           12
           13
           14 theta = oneVSAll(theta, k, X, Y)
           15 print(theta)
```

Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision los s.

Current function value: 0.008937

Iterations: 63

Function evaluations: 2608 Gradient evaluations: 2597

Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision los s.

Current function value: 0.013482

Iterations: 18

Function evaluations: 237
Gradient evaluations: 225

Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision los

Current function value: 0.051921

Iterations: 6

Function evaluations: 100 Gradient evaluations: 88

Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision los s.

Current function value: 0.058449

Iterations: 38

Function evaluations: 668 Gradient evaluations: 656

Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision los

Current function value: 0.034447

Iterations: 8

Function evaluations: 121 Gradient evaluations: 109

Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision los

Current function value: 0.055264

Iterations: 9

Function evaluations: 184 Gradient evaluations: 172

Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision los s.

Current function value: 0.020437

Iterations: 9

Function evaluations: 92 Gradient evaluations: 81

Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision los s.

Current function value: 0.031460

Iterations: 16

Function evaluations: 278 Gradient evaluations: 266

Warning: Maximum number of iterations has been exceeded.

Current function value: 0.079965

Iterations: 100

Function evaluations: 280 Gradient evaluations: 280

Warning: Desired error not necessarily achieved due to precision los s.

Current function value: 0.071799

Iterations: 37

Function evaluations: 336 Gradient evaluations: 324

```
0.00000000e+00
[[ -7.41679593e+00
                                      0.00000000e+00 ...,
                                                          -4.125049
29e-04
                     0.00000000e+001
    1.65380789e-05
                     0.00000000e+00
                                      0.00000000e+00 ..., 5.272751
 [ -3.19334873e+00
14e-03
    2.59448167e-07
                     0.00000000e+001
                     0.00000000e+00
                                      0.00000000e+00 ..., 1.003658
 [ -3.67211698e+00
91e-02
  -1.14501572e-03
                     0.00000000e+001
 [ -2.23813374e+00
                     0.0000000e+00
                                      0.00000000e+00 ..., -1.897871
84e-03
    2.28927589e-04
                     0.00000000e+00]
                     0.00000000e+00
                                      0.00000000e+00 ..., -2.457774
 [ -9.26845069e+00
06e-04
                     0.00000000e+001
    2.13078648e-05
 [ -5.72624956e+00
                     0.00000000e+00
                                    0.00000000e+00 ..., -6.963963
95e - 03
    5.53371615e-04
                     0.00000000e+0011
```

Реализуйте функцию предсказания класса по изображению с использованием обученных классификаторов.

Процент правильных классификаций на обучающей выборке должен составлять около 95%.

('Accuracy: ', 96.12)

Вывод

В отличие от обычной регрессии, в методе логистической регрессии не производится предсказание значения числовой переменной исходя из выборки исходных значений. Вместо этого, значением функции является вероятность того, что данное исходное значение принадлежит к определенному классу.

Основная идея логистической регрессии заключается в том, что пространство исходных значений может быть разделено линейной границей (т.е. прямой) на две соответствующих классам области. В случае двух измерений — это просто прямая линия без изгибов. В случае трех — плоскость, и так далее. Эта граница задается в зависимости от имеющихся исходных данных и обучающего алгоритма. Чтобы все работало, точки исходных данных должны разделяться линейной границей на две вышеупомянутых области. Если точки исходных данных удовлетворяют этому требованию, то их можно назвать линейно разделяемыми.