- Demostrando que B_{nxn} es simétrica:

$B = A^T A \longrightarrow B^T = (A^T \cdot A)^T$

Propiedad de la transpuesta de un producto $\longrightarrow B^T = A^T \cdot (A^T)^T$, pero $(A^T)^T = A$

$B^T = A^T A$, reemplazando $A^T A$ por B

$\boxed{B^T = B}$

Por lo tanto, se puede concluir que $B_{n \times n}$ es simétrica

Si se tiene la Matriz $A_{m\times n}$ con rango $= n$, y $A^T_{n\times m}$, entonces:

- Demostrando que $A^T_{n\times m} \times A_{m\times n}$ es invertible:

Primero, demostraremos que si $Rnk(A)=n \Longleftrightarrow Rnk(A^TA)=n$:

1) sea $B = A^T \cdot A$ una matriz $n\times n$.
2) El rango de una matriz es el número máximo de columnas o filas linealmente independientes que contiene.
3) si las columnas de A son $[c_1, c_2, ..., c_n]$, entonces A^TA tiene la forma $[c_1^T c_1 + c_2^T c_2 + ... + c_n^T c_n]$, donde $[c_1^T, c_2^T, ... c^T_n]$ son las filas de A^T
4) Entonces, cada término de $B=A^TA$ es el producto interno de una fila de A^T con una columna de A. Esto significa que cada término de la suma anterior es un escalar y es una combinación lineal de las columnas de A.
5) Como A tiene rango n, sus columnas son linealmente independientes, por lo que cada término de la suma es linealmente independiente de los otros términos.

Por lo tanto, el rango de B es el número de términos linealmente independientes de la suma, dado que hay n términos (uno por cada columna de A) $\rightarrow \boxed{Rnk(B) = n}$

Según lo anterior y el siguiente colorario se puede afirmar que $B_{n\times n} = A^TA$ es invertible:

1) $Rnk(B) = n$
2) Para cualquier b, $Bx = b$ tiene única solución
3) B es invertible

Por lo tanto, para B existe B^{-1} talque $B^{-1}B = I = BB^{-1}$