Algebra Lineal - Examen 2 - Por: David Alejandro López

① Si se tiene la matriz $A_{m\times n}$ y su traspuesta $A^T_{n\times m}$, entonces:

$$\boxed{B_{n\times n} = A^T A}$$

• <u>Demostrando que $B_{n\times n}$ es invertible:</u>

Dado que:
- $A_{m\times n}$ tiene rango n ($rnk(A) = n$)
- $A^T A = B_{n\times n}$
- $rnk(B) \leq min\{m, n\}$

$B = A^T \cdot A$ tiene dimensiones $n\times n$, por lo tanto, su rango es n.

según lo anterior y el siguiente corolario, se puede afirmar que $B_{n\times n}$ es invertible:

<u>Corolario:</u> Las siguientes proposiciones son equivalentes para la matriz $B_{n\times n}$:

① $rnk(B) = n \longrightarrow$ <u>Ya se tiene confirmado</u>

② Para cualquer b, $Bx = b$ tiene única solución

③ $Nul(B) = 0 = dim(N(B))$

④ Las columnas de B son una base de $\mathbb{R}^n$

⑤ <u>B es Invertible</u>

Por lo tanto, para B existe B^{-1} tal que $B^{-1}B = I = BB^{-1}$

• <u>Demostrando que $B_{n\times n}$ es simétrica:</u>

$$B = A^T A \longrightarrow B^T = (A^T \cdot A)^T$$

Propiedad de la transpuesta de un producto $\longrightarrow B^T = A^T \cdot (A^T)^T$, pero $(A^T)^T = A$

$B^T = A^T A$, reemplazando $A^T A$ por B

$$\boxed{B^T = B}$$

<u>Por lo tanto, se puede concluir que $B_{n\times n}$ es simétrica</u>