Solución Punto (1)

Sean v y w dos vectores de longitud n, entonces:

Distancia Hamming (D) entre v y w es una distancia si cumple las siguientes propiedades:

(1) No Negatividad

» Ejm: Sean: $v = [1\ 0\ 0\ 1\ 1] \wedge w = [1\ 1\ 0\ 0\ 1]$

Distancia de Hamming (D) = Es el conteo de ediciones que se deben hacer. Dado que un conteo nunca es negativo, siempre se garantiza que esta distancia no será negativo

$$D(v,w) = D([1\ 0\ 0\ 1\ 1], [1\ 1\ 0\ 0\ 1]) = 0+1+0+1+0 = 5$$

$$D(v,w) = 5$$

» En términos generales, si los vectores v y w de tamaño n son iguales, la distancia es cero porque no hay transformaciones. En caso de que no sean iguales, la distancia es el conteo de las transformaciones que se tienen que hacer en un vector para que ambos sean iguales.

Por lo tanto: $0 \leq$ Distancia de Hamming $\leq n$.

» En términos más formales la demostración sería la siguiente

$$D_H(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \delta(a_i, b_i), \text{ donde } \delta(a_i, b_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = b_i \\ 1 & \text{si } a_i \neq b_i \end{cases}$$

Dado que $\delta(a_i, b_i)$ siempre toma valores no negativos (0 ó 1), la suma de estos valores para todas las posiciones de i también será no negativa, y, por lo tanto, la Distancia de Hamming $d_H(a,b)$ es siempre una cantidad no negativa.

(2) Simetría: La Distancia de Hamming es simétrica sí:

$$D_H(a,b) = D_H(b,a) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{n} \delta(b_i, a_i)$$

Dado que δ no depende del orden de a_i y b_i, sino que depende de si los elementos son iguales o diferentes, se tiene que:

$$\delta(a_i, b_i) = \delta(b_i, a_i) \therefore \sum_{i=1}^{n} \delta(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{n} \delta(b_i, a_i) \therefore D_H(a,b) = D_H(b,a)$$

En conclusión, la Distancia de Hamming es simétrica.

3) Desigualdad Triangular

Consideremos los vectores a, b y c de tamaño n diferentes entre sí.

La distancia de Hamming cumple la desigualdad triangular si:

$$D_H(a,c) \leq D_H(a,b) + D_H(b,c)$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(a_i, c_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \delta(a_i, b_i) + \sum_{i=1}^{n} \delta(b_i, c_i)$$

Ejemplos:

1) $a = [1\ 0\ 0\ 1]$, $b = [0\ 0\ 0\ 0]$, $c = [1\ 1\ 1\ 1]$ } $d(a,c) = 2$, $d(a,b) = 2$, $d(b,c) = 4$
entonces: $2 \leq 2 + 4$ ✓

2) $a = [x\ y\ z]$, $b = [x\ y\ w]$, $c = [a\ y\ w]$ } $d(a,c) = 2$, $d(a,b) = 1$, $d(b,c) = 1$
$2 \leq 1 + 1$ ✓

3) $a = [0\ 0]$, $b = [0\ 1]$, $c = [1\ 0]$ } $d(a,c) = 1$, $d(a,b) = 1$, $d(b,c) = 2$
$1 \leq 1 + 2$ ✓

Demostración Formal

Si a y b difieren en "x" posiciones y b y c difieren en "y" posiciones, entonces a y c difieren en máximo "x"+"y" posiciones.

Esto se debe a lo siguiente:

- Si las dif entre a y b están en las posiciones $i_1, \dots i_k$
- Si las dif entre b y c están en las posiciones $j_1, \dots j_m$

Entonces las dif entre a y c deben estar en máximo las posiciones entre a y b ∧ b y c, es decir: $i_1, \dots i_k, j_1, \dots j_k$

Por lo tanto, sus distancias cumplen que:

$$D_H(a,c) \leq D_H(a,b) + D_H(b,c)$$

En conclusión La Distancia Hamming cumple la propiedades de NO negatividad, simetría y desigualdad triangular. Por lo tanto, es una distancia valida.