Exámen 3 - Algebra Lineal

Problema 1:

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Demuestre que AA^T y A^TA tienen los mismos valores propios.

Ayuda: si $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de A^TA, entonces $Ax \in \mathbb{R}^m$ es vector propio de AA^T

Solución: $A_{m\times n}$ se puede descomponer como:

$$\boxed{A = USV},\ \text{donde:} \begin{cases} U = \text{Reorganización Ortogonal de las Salidas (columnas)} \\ V = \text{Reorganización Ortogonal de las entradas (filas)} \\ S = \text{Valores singulares} \end{cases}$$

ergo, $\boxed{A^T = V^TS^TU^T}$

Además, se tiene que S es una matriz diagonal que contiene los valores singulares de la descomposición:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \sigma_n \end{bmatrix},\ \text{por lo tanto: } S^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Entonces:

> $A^TA = V^TS^TU^TUSV$, dado que U es ortogonal, $U^TU = I$
$A^TA = V^TS^TSV$

$$y \quad S^TS = D = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Diagonal de valores propios de } A^TA}$$

$$\boxed{A^TA = V^TDV}$$

> $AA^T = USVV^TS^TU^T$, dado que V es ortogonal, $VV^T = I$
$AA^T = USS^TU^T$

$$y \quad SS^T = D' = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Diagonal de valores propios de } AA^T}$$

$$\boxed{AA^T = UD'U^T}$$

Entonces, los valores propios de A^TA son iguales a los valores propios de AA^T si:

$$D = D' \text{, donde } D = S^TS \text{ y } D' = SS^T$$

Reescribiendo:

$$S^TS = SS^T$$

Pero dado que S es una matriz diagonal, $S = S^T$

Entonces:

$$D = D' \text{ porque } S^TS = SS^T \text{, porque } S = S^T$$

Por lo tanto, los valores propios de A^TA (D) son iguales a los valores propios AA^T (D')

Otra forma de Demostrarlo:

Sea σ_1 un valor propio de A^TA, entonces:

(1) $A^TAx = \sigma_1 x$ donde: σ_1 es un valor propio de A^TA
x es un vector propio de A^TA

Dado que Ax es un vector propio de AA^T, se busca demostrar que:

(2) $AA^T(Ax) = \sigma_1(Ax)$

Multiplicamos (1) por A:

$$A(A^TAx) = A\sigma_1 x$$

Usando la propiedad asociativa de multiplicación de matrices: $(AB)C = A(BC)$

$$AA^T(Ax) = \sigma_1(Ax)$$

Entonces, podemos afirmar que:

A^TA tiene valor propio σ_1 y vector propio x

AA^T tiene valor propio σ_1 y vector propio Ax

Por lo tanto, A^TA y AA^T tienen los mismos valores propios