Solucion Taller 2 - Algebra Lineal

1.1)

Dia	A	B	C	costo
1	2	4	5	220
2	6	9	8	490
3	4,1	5	3	274

sean
x = horas de A
y = horas de B
z = horas de C

$\therefore$ Sistema de ecuaciones:

$$2x + 4y + 5z = 220$$
$$6x + 9y + 8z = 490$$
$$4{,}1x + 5x + 3z = 274$$

• Encontrar la matriz Ampliada y resolver:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 220 \\ 6 & 9 & 8 & 490 \\ 4{,}1 & 5 & 3 & 274 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - 3R_1]{R_3 - \frac{4{,}1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 220 \\ 0 & -3 & -7 & -170 \\ 0 & -16/5 & -29/4 & -177 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - \frac{16}{15}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 220 \\ 0 & -3 & -7 & -170 \\ 0 & 0 & 13/60 & 13/3 \end{array}\right]$$

• Resolver:

$$2x + 4y + 5z = 220$$
$$-3y - 7z = -170$$
$$\frac{13}{60}z = \frac{13}{3}$$

$$z = \frac{13 \times 60}{3 \times 13} \rightarrow \boxed{z = 20}$$

$$-3y - 7z = -170$$
$$-3y - 7(20) = -170$$
$$-3y - 140 = -170$$
$$30 = 3y$$
$$\boxed{y = 10}$$

$$2x + 4y + 5z = 220 \rightarrow 2x + 4(10) + 5(20) = 220$$
$$2x + 40 + 100 = 220$$
$$2x = 80$$
$$\boxed{x = 40}$$

R// Los precios por hora de cada procesador son: $\begin{cases} A = 40 \\ B = 10 \\ C = 20 \end{cases}$

1.2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 220 \\ 6 & 9 & 8 & 490 \\ 4{,}2 & 5 & 3 & 274 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - 3R_1]{R_3 - \frac{4{,}2}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 220 \\ 0 & -3 & -7 & -170 \\ 0 & -17/5 & -15/2 & -188 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - \frac{17}{15}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 220 \\ 0 & -3 & -7 & -170 \\ 0 & 0 & 13/30 & 14/3 \end{array}\right]$$

• Resolver:

$$2x + 4y + 5z = 220$$
$$-3y - 7z = -170$$
$$\frac{13}{30}z = \frac{14}{3}$$

$$z = \frac{14 \times 30}{3 \times 13}$$
$$\boxed{z = 140/13 \approx 10{,}77}$$

$$-3y - 7\left(\frac{140}{13}\right) = -170$$
$$3y = 170 - 7\left(\frac{140}{13}\right)$$
$$\boxed{y = 410/13 \approx 31{,}5385}$$

$$2x + 4\left(\frac{410}{13}\right) + 5\left(\frac{140}{13}\right) = 220$$
$$2x + 180 = 220$$
$$2x = 40$$
$$\boxed{x = 20}$$

R// • Cambios en Precio por Hora:

	Precio antes de Error	Precio después de Error	% Variación
A	40	20	-50%
B	10	31,5385	215,39%
C	20	10,77	-46,15%

Comentarios:
Los cambios en el precio por hora de cada procesador, son grandes. Esto se debe a que la eliminación gaussiana es muy sensible a cambios en los coheficientes de la matriz, causado porque las operaciones de fila amplificas los errores.

Cota superior de error relativo =

$$\varepsilon \leq K \cdot \delta,$$ donde: ε = cota superior para el error relativo

K = Número de condición de la matriz

δ = Error o cambio relativo en los coeficientes de la matriz

Sea $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 8 \\ 4{,}1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ la matriz original, $K = \|A_1\|_2 \times \|A_1^{-1}\|_2$, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma 2

- calculando $\|A_1\|_2 \wedge \|A_1^{-1}\|_2$:

$$\|A_1\|_2 = \max_{i=1,\dots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 8 \\ 4{,}1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \Sigma \\ 11 \\ 23 \\ 12{,}1 \end{array} \Big\} \boxed{\|A_1\|_2 = 23}$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 10 \\ -11{,}3846 & 11{,}1538 & -10{,}76923 \\ 5{,}3077 & -4{,}923 & 4{,}6153 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \Sigma \\ 30 \\ 33{,}3076 \\ 14{,}846 \end{array} \Big\} \boxed{\|A_1^{-1}\|_2 = 33{,}3076}$$

- calculando K: $K = \|A_1\|_2 \times \|A_1^{-1}\|_2 = 23 \times 33{,}3076 \Rightarrow \boxed{K = 766{,}0748}$

- Sea $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 8 \\ 4{,}2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ la matriz con error, $\delta = \dfrac{\|A_1 - A_2\|_2}{\|A_1\|_2}$.

$$A_1 - A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \|A_1 - A_2\|_2 = 0{,}1 \;\therefore\; \delta = \frac{0{,}1}{23} \Rightarrow \boxed{\delta = 1/230}$$

Por lo tanto, la cota superior para el error relativo es:

$$\varepsilon \leq 766{,}0748 \times \frac{1}{230} \Rightarrow \boxed{\varepsilon \leq 3{,}33076}$$