Taller 1 - Distancia, norma y convergencia

Álgebra en ciencia de datos

Universidad EAFIT

Fecha de Entrega: Octubre 1 de 2023

Entregue soluciones justificadas y con código reproducible a 4 de los siguientes problemas:

Problema 1

Elija un vocabulario técnico correspondiente a un dominio específico, por ejemplo, nombres científicos de animales. Programe una función tipo autocorrector que dada una palabra cualquiera encuentre la palabra más similar dentro del vocabulario elegido.

Problema 2

A partir del algoritmo de k-vecinos más cercanos cree un modelo que clasifique fotografías según el género de la persona retratada. Justifique por qué la distancia que usted usó es apropiada para este problema.

Problema 3

- 1. Grafique en el plano \mathbb{R}^2 la bola de radio r y centro en el origen respecto a la distancia de Minkowski de orden p, donde los parámetros r y p varían entre desde 0.1 a 2 y desde 1 a ∞ .
- 2. Programe un algoritmo que dado n y p genere de forma aleatoria un vector de \mathbb{R}^n cuya distancia de Minkowski de orden p al origen sea menor a 0.1.

Problema 4

Tómese una foto tipo documento y transformela a escala de grises y resolución 400×600 . Defina una sucesión de imágenes que sea convergente a su foto. Muestre al menos 10 términos de la sucesión incluyendo el elemento 100-ésimo. Como la sucesión es convergente, obtenga el término tal que todos las imágenes siguientes en tienen una distancia (en norma de Frobenius) menor a 0.5 de su foto.

Problema 5

Demuestre que las normas matriciales inducidas por las normas vectoriales 1 y ∞ , corresponden a tomar el máximo de la suma de valores absolutos entre filas y columnas, respectivamente.

Problema 6

- 1. Programe un algoritmo que dada una matriz aproxime su norma inducida por la norma vectorial de orden p.
- 2. Usando el algoritmo del ítem anterior estime la norma inducida de ordenes 1, 2, 3 y ∞ para la matríz de Hilbert de tamaño 10×10 definida por $H_{10} = [h_{ij}] = [\frac{1}{i+j}]$.

Problema 7

- 1. Si $d: X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica, entonces $\bar{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ también es una métrica.
- 2. Demuestre que la distancia coseno en \mathbb{R}^n definida como

$$d(x,y) = 1 - \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$$

no satisface la desigualdad triangular.

Problema 8

1. Considere el espacio vectorial \mathbb{R}^2 y los vectores $a = [2, 1]^T$, $v = [3, 9]^T$. Halle vectores u y w tales que $u \in \text{Gen}(a)$, $w \perp a$ y v = u + w.

Muestre que $\|v\|2=\|u\|^2+\|w\|^2$ y haga una gráfica que muestre los cuatro vectores.

2. Definimos la reflexión ortogonal del vector u sobre el subespacio $\mathrm{Gen}(v)$ mediante la expresión:

$$H_v(u) = u - 2P_v(u)$$

Considere el vector en \mathbb{R}^2 , $u=[4,3]^T$. Encuentre una dirección adecuada v tal que su reflexión, sobre dicha dirección, sea un múltiplo del vector básico $e_1=[1,0]^T$.