Q1. Soient $t>0$ et $k \in \mathbb{N}$. D'après (3) :

$$\frac{d^2}{dt^2}(v(t), u_k)_{L^2} + a(v(t), u_k) = (f(t), u_k)_{L^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y_k(t) + \lambda_k y_k(t) = (f(t), u_k)_{L^2} \quad \text{(car } v(t) \in V\text{)}$$

Soit, comme $v(0) = \frac{dv}{dt}(0) = 0$, y_k vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y_k'' + \lambda_k y_k = (g, u_k)_{L^2} \sin(\omega t) \\ y_k(0) = y_k'(0) = 0. \end{cases}$$

<u>1e cas</u> : $\lambda_k = \omega^2$

Dans ce cas,

$$y_k(t) = \frac{(g, u_k)_{L^2}}{2\omega^2}\left(\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)\right)$$

<u>2e cas</u> : $\lambda_k \neq \omega^2$

$$y_k(t) = \frac{(g, u_k)_{L^2}}{\omega_k^2 - \omega^2}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_k}\sin(\omega_k t)\right)$$

Q2. Lorsque la fréquence d'excitation ν se rapproche d'une fréquence propre du système, le système entre en résonance : les oscillation vont se faire de plus en plus grande jusqu'à une rupture du système.

Q3. Soit $v \in H_0^2(]0;L[)$ (tel que $v(0)=v(L)=v'(0)=v'(L)=0$)

On a

$$\int_0^L \frac{d^4 u}{dx^4} v = \int_0^L h v$$

Après 2 intégrations par parties :

$$\underbrace{\int_0^L u'' v''}_{a(u,v)} = \int_0^L h v .$$

Réciproquement, deux intégrations par parties nous ramènent au problème initial si $u \in H^4(]0;L[)$.

C : On a l'équivalence au problème (4).

Q4. Nous savons (proposition 3.26) que H^2 muni du produit scalaire de H^2 est un espace de Hilbert. Or, étant le noyau de l'application continue trace de cet espace, $H_0^2(]0;L[)$ est un sous-espace fermé de H^2 pour le PS H^2, d'où un espace de Hilbert.

De plus, comme $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 \leq \|v\|_{H^2}^2$ pour $v \in H^2$, toute suite bornée de H^2 est bornée dans H^1. Le théorème de Rellich assure donc que l'injection canonique de H^1 dans

L^2 est compacte. Comme $H^2 \subset L^2$ et que $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans les 2 espaces, H^2 est dense dans L^2.

- Soit $u, v \in H_0^2(]0;L[)$.

$$a(u,v) = \int_0^L u'' v''$$

$$\leq \|u''\|_{L^2} \cdot \|v''\|_{L^2}$$

$$\leq \|u\|_{H^2} \cdot \|v\|_{H^2}$$

D'où a continue.

$$a(u,u) = \int_0^L {u''}^2 = \|u''\|_{L^2}^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\|u''\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2 \right)$$

théorème de Poincaré

$$\geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{C^4}\|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{C^2}\|u'\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2 \right)$$

$$\geq \frac{1}{3}\min\left(\frac{1}{C^4}, \frac{1}{C^2}, 1\right) \|u\|_{H^2}^2$$

D'où a coercive.

Q.5. Soit $w \in H_0^2(]0;L[)$. On a :

$$a(u_k, w) = \lambda_k (u_k, w)_{L^2}$$

$$\int_0^L u_k'' w'' = \lambda_k \int_0^L u_k w$$

On intègre par partie 2 fois :

$$\int_0^L (u_k^{(4)} - \lambda_k u_k) w = 0$$

Ceci étant vrai pour tout w, on en déduit

$$\forall x \in]0;L[, \quad \frac{d^4 u_k}{dx^4}(x) = \lambda_k u_k(x).$$

On se place dans $V_h = \text{Vect}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$
avec ϕ_j les "fonctions chapeau" associées à un maillage uniforme.

~~On a $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{H^2} = 0$ si $|i-j| > 1$~~

~~$\langle \phi_i, \phi_{i+1} \rangle_{H^2} =$~~

Le calcul numérique des valeurs propres, à partir des matrices de rigidité et de masse, ne converge pas. Pour des éléments finis P3 et $N = 300$ points, on obtient les valeurs propres suivantes :

$-0,83$; $-0,75$; $-0,11$; $0,09$;
$0,13$; $0,23$; $0,33$; $0,37$.

Mais ces valeurs ne sont pas consistantes, lorsque l'on fait varier N.

Q.5. Dans le cadre des éléments finis P1, les fonctions de base ϕ_i sont des fonctions affines par morceaux. Par conséquent leur dérivée seconde est toujours nulle et il est impossible de calculer les valeurs propres de la matrice de rigidité $(K_{ij}) = (a(\phi_i'', \phi_j''))$.
On ne peut donc pas construire une approximation de Galerkin de ce problème à l'aide d'éléments finis P1.
Il est par contre en théorie possible d'appliquer la méthode avec des éléments finis P2 ou P3.

Q.7. (Voir le code FreeFem++ en annexe, avec les 12 valeurs propres et modes propres associés, pour la cocotte et la flèche.)
Les valeurs propres retenues ont été obtenues par la méthode des éléments finis P3, avec $n = 100$.

Q.7. (Voir les graphes de convergence de la première valeur propre en annexe.)
En faisant varier le paramètre n (de 5 en 5 de $n=10$ jusqu'à $n = 100$) que les valeurs propres convergent vers une valeur stable à 5 chiffres significatifs.
On observe une convergence très rapide

pour les éléments finis P2 et P3, mais extrêmement lente pour les éléments finis P1.
Par rapport aux résultats optimaux (éléments finis P3 et $n = 100$), on voit que pour des maillages fins, les trois méthodes obtiennent les mêmes résultats, à quelques chiffres significatifs près.
Pour des maillages moyens, en revanche, il est nécessaire d'utiliser des éléments finis P2 ou P3, qui obtiennent les mêmes résultats, tandis que les éléments finis P1 sont très imprécis.

On observe également qu'on obtient les mêmes valeurs propres pour la flèche et la cocotte, ce qui indique que les sons produits par deux membranes de ces formes seraient identiques.
Notre analyse numérique, même si elle ne peut montrer l'égalité des spectres, montre en tout cas que les deux formes seraient indiscernables à l'oreille humaine.