수리통계 2　중간 시험 1　(10/12/2017)

[1] (15점 (a)5점 (b)10점)
 확률밀도함수가

$$f(x;\alpha,\beta)=\beta\alpha^{\beta}x^{-\beta-1}\mathrm{I}_{[\alpha,\infty)}(x)$$

로 주어지는 두 개의 모수를 갖는 파레토분포 $\mathrm{Pareto}(\alpha,\beta), \alpha>0, \beta>0$ 모형에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n(n\geq 2)$을 이용한 모수 α,β의 최대가능도 추정량을 구하여라.

(a) 모수 α,β의 최대가능도 추정량 $\widehat{\alpha_n}^{MLE}$, $\widehat{\beta_n}^{MLE}$을 구하여라.

(b) 모수 β에 대한 95%신뢰구간으로서 다음의 구간을 사용할 수 있는 이유를 설명하여라.

$$\frac{\chi^2_{0.975}(2n-2)}{2n}\,\widehat{\beta_n}^{MLE}\leq\beta\leq\frac{\chi^2_{0.025}(2n-2)}{2n}\,\widehat{\beta_n}^{MLE}$$

[2] (15점 (a)5점 (b)10점)
 공통의 평균을 갖는 두 정규분포 $\mathrm{N}(\mu,\sigma_1^2),\mathrm{N}(\mu,\sigma_2^2), -\infty<\mu<+\infty, \sigma_1^2>0, \sigma_2^2>0$에서의 서로 독립인 두 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_{n_1}$과 $\mathrm{Y}_1,\cdots,\mathrm{Y}_{n_2}(n_1\geq 2, n_2\geq 2)$를 이용하여 공통인 평균 μ와 각각의 분산 σ_1^2,σ_2^2 을 추정하고자 한다.

(a) 두 모분산 σ_1^2,σ_2^2이 미지인 경우에 지수족의 성질을 이용하여 공통 평균 μ의 최대가능도 추정량을 구할 수가 없다. 그 이유를 구체적으로 기술하여라.

(b) 두 모분산 σ_1^2,σ_2^2의 비를 <u>알고 있을 때,</u> 즉

$$\sigma_2^2=\sigma_1^2/r \ (r\text{은 주어진 값})$$

일 때 $\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2$의 최대가능도 추정량을 구하여라.

[3] (20점 (a)5점 (b)10점 (c)5점)
확률밀도함수가

$$f(x;\alpha,\beta)=\alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}\exp(-x^{\alpha}/\beta^{\alpha})\mathrm{I}_{(0,+\infty)}(x)$$

인 와이불분포 $\mathrm{Weibull}(\alpha,\beta), \alpha>0, \beta>0$ 모형에서의 랜덤표본을 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n$이라고 할 때 모수 α,β의 최대가능도 추정량을 구하는 다음의 과정에 대하여 답하여라.

(a) $b=1/\beta^{\alpha}$ 라고 하면 각각의 $\alpha>0$에 대하여 로그가능도 $l(\alpha,b)$가

$$\hat{b}(\alpha)=1/\overline{(x^{\alpha})},\quad \overline{(x^{\alpha})}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}$$

에서 최대가 되는 것을 밝혀라.

(b) $b=1/\beta^{\alpha}$에 대하여 최대화된 로그가능도 $l(\alpha,\hat{b}(\alpha))$을 최대로 하는 $\hat{\alpha}$은 방정식

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}l(\alpha,\hat{b}(\alpha))=0$$

의 근으로 주어지는 것을 밝혀라.

(c) α,β의 최대가능도 추정량을 반복적인 방법으로 근사하는 방법을 설명하여라. 이에 답하는 과정에서, $\mathrm{Z}\sim\mathrm{Exp}(1)$일 때

$$\mathrm{E}(\log \mathrm{Z})=-0.577,\mathrm{Var}(\log \mathrm{Z})=1.6449$$

임을 이용하여도 좋다.

[4] (20점)

확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\frac{e^{(x-\mu)/\sigma}}{(1+e^{(x-\mu)/\sigma})^2}\mathrm{I}_{(-\infty,+\infty)}(x)$$

인 로지스틱분포 $\mathrm{L}(\mu,\sigma),-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$ 모형에서의 랜덤표본을 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n\,(n\ge 2)$이라고 할 때 모수 μ,σ의 최대가능도 추정량을 구하는 과정을 설명하여라. (참고: $\eta_1=1/\sigma,\eta_2=\mu/\sigma$를 이용)

[5] (15점 (a)5점 (b)10점)

모집단 상관계수 ρ 의 값이 $\underline{\rho_0\ \ (-1<\rho_0<+1)\text{로 알려진}}$ 이변량 정규분포

$$N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho_0\sigma_1\sigma_2\\ \rho_0\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),-\infty<\mu_1<+\infty,\ -\infty<\mu_2<+\infty,\ \sigma_1^2>0,\ \sigma_2^2>0$$

에서의 랜덤표본 $(\mathrm{X}_1,\mathrm{Y}_1)',\ \cdots,\ (\mathrm{X}_n,\mathrm{Y}_n)'\,(n>2)$을 이용하여 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$의 최대가능도 추정량을 구하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) 이 경우에 지수족의 성질을 이용하여 최대가능도 추정량을 구할 수가 없다. 그 이유를 구체적으로 기술하여라.

(b) $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$의 최대가능도추정량 $\widehat{\mu_1}^0,\widehat{\mu_2}^0,\widehat{\sigma_1^2}^0,\widehat{\sigma_2^2}^0$이 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라.

$$\widehat{\mu_1}^0=\overline{\mathrm{X}},\widehat{\mu_2}^0=\overline{\mathrm{Y}},\widehat{\sigma_i^2}^0=\frac{1-\hat{\rho}\,\rho_0}{1-\rho_0^2}\widehat{\sigma_i^2}\ (i=1,2)$$

여기에서

$$\widehat{\sigma_1^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X_i}-\overline{\mathrm{X}})^2,\ \widehat{\sigma_2^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})^2$$

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})}{\sqrt{\sum_{1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}\sqrt{\sum_{1}^{n}(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})^2}}$$

[6] (15점 (a)5점 (b)10점)

단순 선형회귀모형으로서 다음과 같은 모형을 가정하고 아래에 답하여라.

$$\begin{cases} Y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+e_i,\ \ x_1,\cdots,x_n\text{은 주어진 수이고 모두 같지는 않다.} \\ e_i\sim \mathrm{N}(0,\sigma^2/w_i),\ i=1,\cdots,n(n>2);\ e_1,\cdots,e_n\text{은 서로 독립이고 } w_i>0\text{는 주어진 수} \\ \beta_0,\beta_1\text{은 실수이고 } \sigma^2>0\text{은 미지의 모수이다.} \end{cases}$$

(a) 이 모형에서 β_0,β_1,σ^2의 최대가능도 추정량이 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라.

$$\widehat{\beta_0}^{MLE}=\overline{Y}^w-\widehat{\beta_1}^{MLE}\overline{x}^w,\ \overline{x}^w=\sum_{i=1}^{n}w_i x_i/\sum_{i=1}^{n}w_i,\ \overline{Y}^w=\sum_{i=1}^{n}w_i Y_i/\sum_{i=1}^{n}w_i$$

$$\widehat{\beta_1}^{MLE}=S_{xY}^w/S_{xx}^w,\ S_{xY}^w=\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\overline{x}^w)(Y_i-\overline{Y}^w),\ S_{xx}^w=\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\overline{x}^w)^2$$

$$\widehat{\sigma^2}^{MLE}=\frac{1}{n}[S_{YY}^w-\frac{(S_{xY}^w)^2}{S_{xx}^w}],\ S_{YY}^w=\sum_{i=1}^{n}w_i(Y_i-\overline{Y}^w)^2$$

(b) 이 모형에서 β_1에 대한 95%신뢰구간으로서 다음의 구간을 사용할 수 있는 이유를 설명하여라.

$$\widehat{\beta_1}^{MLE}-t_{0.025}(n-2)\sqrt{\frac{n}{n-2}\widehat{\sigma^2}^{MLE}}/\sqrt{S_{xx}^w}\le\beta_1\le$$
$$\widehat{\beta_1}^{MLE}+t_{0.025}(n-2)\sqrt{\frac{n}{n-2}\widehat{\sigma^2}^{MLE}}/\sqrt{S_{xx}^w}$$

수리통계 2 중간 시험 1. (10/10/2016)
PAGE 1/3

[1](20점 (a)10점 (b)10점)
확률밀도함수가

$$f(x;\theta)=\theta x^{-\theta-1}\mathrm{I}_{[1,\infty)}(x)$$

로 주어지는 파레토분포 $\mathrm{Pareto}(1,\theta)$, $\theta>0$ 모형에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n$을 이용하여

$$\eta=\mathrm{P}_\theta(\mathrm{X}_1>\mathrm{a})\ (a\text{는 주어진 값으로서 } a>1)$$

에 대한 추론을 할 때 다음에 답하여라.
(a) η의 최대가능도추정량 $\hat{\eta}_n$을 구하여라.
(b) 추정량 $\hat{\eta}_n$의 극한분포를 구하여라.

[2] (20점 (a)5점 (b)10점 (c)5점)
확률밀도함수가

$$f(x;\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}\exp(-x^\alpha)\mathrm{I}_{(0,+\infty)}(x)$$

인 와이불분포 $\mathrm{Weibull}(\alpha,1),\alpha>0$ 모형에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n$을 이용하여 α를 추정하려고 한다.
(a) $\log\mathrm{X}_1,\cdots,\log\mathrm{X}_n$을 이용한 α의 적률이용추정량 $\hat{\alpha}_n^{MME}$을 구하고,

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n^{MME}/\alpha-1)$$

의 극한분포를 구하여라. 이에 답하는 과정에서 다음을 이용하여라. $\mathrm{Z}\sim\mathrm{Exp}(1)$일 때

$$\mathrm{E}(\log\mathrm{Z})=-0.577,\mathrm{Var}(\log\mathrm{Z})=1.6449$$

(b) α의 최대가능도추정량 $\hat{\alpha}_n^{MLE}$은 가능도방정식의 하나뿐인 근으로 주어지는 것을 밝히고, 이의 일단계 반복법에 의한 근사방법을 설명하여라.
(c) α의 최대가능도추정량 $\hat{\alpha}_n^{MLE}$에 대하여

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n^{MLE}/\alpha-1)$$

의 극한분포를 구하여라. 이에 답하는 과정에서 극한분포의 유도를 위한 조건은 모두 만족된다고 전제하고, 다음을 이용하여라. $\mathrm{Z}\sim\mathrm{Exp}(1)$일 때

$$\mathrm{E}\{\mathrm{Z}(\log\mathrm{Z})^2\}=0.8236$$

[3] (20점)
확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\frac{e^{(x-\mu)/\sigma}}{(1+e^{(x-\mu)/\sigma})^2}\mathrm{I}_{(-\infty,+\infty)}(x)$$

인 로지스틱분포 $\mathrm{L}(\mu,\sigma),-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$ 모형에서의 랜덤표본을 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n\,(n\geq 2)$이라고 할 때 모수 μ,σ의 최대가능도 추정량을 구하는 과정을 설명하여라. (참고: $\eta_1=1/\sigma,\eta_2=\mu/\sigma$를 이용)

[4] (20점 (a)10점 (b)10점)
모집단 상관계수 ρ 의 값이 $\rho_0\ (-1<\rho_0<+1)$로 알려진 이변량 정규분포

$$N_2(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho_0\sigma_1\sigma_2\\ \rho_0\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix})\ ,-\infty<\mu_1<+\infty,\ -\infty<\mu_2<+\infty,\ \sigma_1^2>0,\ \sigma_2^2>0$$

에서의 랜덤표본 $(\mathrm{X}_1,\mathrm{Y}_1)',\ \cdots,\ (\mathrm{X}_n,\mathrm{Y}_n)'\,(n>2)$을 이용하여 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$의 최대가능도 추정량을 구하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) 이 경우에 지수족의 성질을 이용하여 최대가능도추정량을 구할 수가 없다. 그 이유를 구체적으로 기술하여라.

(b) $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$의 최대가능도추정량 $\widehat{\mu_1}^0,\widehat{\mu_2}^0,\widehat{\sigma_1^2}^0,\widehat{\sigma_2^2}^0$이 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라.

$$\widehat{\mu_1}^0=\overline{\mathrm{X}},\ \widehat{\mu_2}^0=\overline{\mathrm{Y}},\ \widehat{\sigma_i^2}^0=\frac{1-\hat{\rho}\rho_0}{1-\rho_0^2}\widehat{\sigma_i^2}\ (i=1,2)$$

여기에서

$$\widehat{\sigma_1^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X_i}-\overline{\mathrm{X}})^2,\ \widehat{\sigma_2^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})^2$$

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_1^n(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})}{\sqrt{\sum_1^n(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}\sqrt{\sum_1^n(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})^2}}$$

[5] (20점 (a)10점 (b)10점)
로그선형회귀모형이라고 불리우는 다음과 같은 모형을 가정하고 아래에 답하여라.

$$\begin{cases} Y_{ij} \sim \text{Poisson}(\lambda_i),\, j=1,\cdots,n_i; i=1,\cdots,k; \lambda_i>0,\, Y_{ij}\text{는 서로 독립} \\ \log(\lambda_i)=\beta_0+\beta_1 x_i,\ \ x_1,\cdots,x_k\text{는 주어진 수이고 모두 같지는 않다.} \\ \beta_0,\beta_1\text{은 실수} \end{cases}$$

(a) $y_{i}.=y_{i1}+\cdots+y_{in_i}(i=1,\cdots,k)$라고 할 때 가능도 방정식은

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k}(y_{i}.-n_i\lambda_i)=0 \\ \sum_{i=1}^{k}x_i(y_{i}.-n_i\lambda_i)=0 \end{cases} \quad (\log\lambda_i=\beta_0+\beta_1 x_i)(\beta_0,\beta_1\text{은 실수})$$

로 주어지고, 가능도 방정식의 근이 있다면 그 근이 최대가능도추정값이 되는 것을 밝혀라.

(b) 표본 크기 $n_i(i=1,\cdots,k)$들이 충분히 클 때, 가능도방정식의 일단계 근사해가 다음과 같이 주어지는 것을 설명하여라.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{(1)} &= \hat{\beta}^{(0)}+(X^t\widehat{W}^{(0)}X)^{-1}X^t\widehat{W}^{(0)}\left(\frac{y_{i}.-n_i\hat{\lambda}_i^{(0)}}{n_i\hat{\lambda}_i^{(0)}}\right)_{1\le i\le k} \\ &= (X^t\widehat{W}^{(0)}X)^{-1}X^t\widehat{W}^{(0)}\left\{X\hat{\beta}^{(0)}+\left(\frac{y_{i}.-n_i\hat{\lambda}_i^{(0)}}{n_i\hat{\lambda}_i^{(0)}}\right)_{1\le i\le k}\right\} \\ &= (X^t\widehat{W}^{(0)}X)^{-1}X^t\widehat{W}^{(0)}z^{(0)} \end{aligned}$$

여기에서

$$\hat{\beta}^{(0)}=(\hat{\beta}_0^{(0)},\hat{\beta}_1^{(0)})^t,\ X=(1,x), 1=(1,\cdots,1)^t, x=(x_1,\cdots,x_k)^t,\ \widehat{W}^{(0)}=diag(\hat{w}_i^{(0)}), \hat{w}_i^{(0)}=n_i\hat{\lambda}_i^{(0)}$$

$$z_i^{(0)}=\hat{\beta}_0^{(0)}+\hat{\beta}_1^{(0)}x_i+\frac{y_{i}.-n_i\hat{\lambda}_i^{(0)}}{n_i\hat{\lambda}_i^{(0)}}\ (i=1,\cdots,k)$$

이고, 어깨 글자 (0)는 초기값을 나타낸다.

(참고) (b)로부터 일단계 근사해가

$$\hat{\beta}^{(1)}=\arg\min\left\{(\hat{\beta}_0^{(0)},\hat{\beta}_1^{(0)})^t; \sum_{i=1}^{k}\hat{w}_i^{(0)}(z_i^{(0)}-\hat{\beta}_0^{(0)}-\hat{\beta}_1^{(0)}x_i)^2\right\}$$

의 꼴인 가중최소제곱추정량으로 주어지는 것을 알 수 있고, 이러한 이유에서 (b)의 반복 방법을 Iteratively Reweighted Weighted Least Squares Estimation(IRWLSE)이라고 부른다.

수리통계 2　중간 시험 1　(15.10.01)

[1](20점 (a)10점 (b)10점)
확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \theta x^{-\theta-1} \mathrm{I}_{[1,\infty)}(x)$$

로 주어지는 파레토분포 Pareto$(1,\theta)$, $\theta > 0$ 모형에서의 랜덤표본 $X_1, \cdots, X_n$을 이용햐여 모수 θ에 대한 추론을 할 때 다음에 답하여라.
(a) θ의 최대가능도 추정량을 구하여라.
(b) 표본 크기 n이 클 때 θ에 대한 95% 근사신뢰구간을 구하여라.

[2](20점 (a)10점 (b)10점)
확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathrm{I}_{[\mu,\infty)}(x)$$

로 주어지는 지수분포 Exp(μ,σ), $-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$ 모형에서의 랜덤표본 $X_1, \cdots, X_n$을 이용하여

$$\eta = P_{\mu,\sigma}(X_1 > a) \ (a\text{는 주어진 값})$$

에 대한 추론을 할 때 다음에 답하여라.
(a) η의 최대가능도 추정량 $\widehat{\eta_n}$을 구하여라.
(b) 표본 크기 n이 클 때 추정량 $\widehat{\eta_n}$의 극한분포를 구하여라.

[3] (20점 (a)7점 (b)7점 (c)6점)
공통의 평균을 갖는 두 정규분포 $N(\mu,\sigma_1^2), N(\mu,\sigma_2^2)$, $-\infty < \mu < +\infty, \sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0$에서의 서로 독립인 두 랜덤표본 $X_1, \cdots, X_m$과 $Y_1, \cdots, Y_n$을 이용하여 공통 평균 μ를 추정하고자 한다.
(a) 두 모분산 σ_1^2, σ_2^2을 알고 있는 경우에 공통 평균 μ의 최대가능도 추정량을 구하여라.
(b) 두 모분산 σ_1^2, σ_2^2이 미지인 경우에 지수족의 성질을 이용하여 공통 평균 μ의 최대가능도 추정량을 구할 수가 없다. 그 이유를 구체적으로 기술하여라.
(c) 두 모분산 σ_1^2, σ_2^2이 미지인 경우에 공통 평균 μ의 추정량을 제안하고, 표본크기 m, n이 큰 경우에 근사추정 오차 한계를 제시하는 방법을 기술하여라.(여기에서 표본크기는 다음을 만족하며 무한히 커진다고 전제한다. $m \to +\infty, n \to +\infty$ 이며 $\frac{m}{m+n} \to \lambda \, (0 < \lambda < 1)$)

[4] (20점)
확률밀도함수가

$$f(x;\alpha,\beta) = \alpha \beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x^\alpha/\beta^\alpha) \mathrm{I}_{(0,+\infty)}(x)$$

인 와이불분포 Weibull(α,β), $\alpha > 0, \beta > 0$ 모형에서의 랜덤표본을 $X_1, \cdots, X_n$이라고 할 때

모수 α, β의 최대가능도 추정량을 구하는 과정을 설명하여라.
(참고: $b = 1/\beta^{\alpha}$을 이용하고, $Z \sim \mathrm{Exp}(1)$일 때 $\mathrm{Var}(\log Z) = 1.6449$임을 이용하여라.)

[5] (20점 (a)10점 (b)10점)
오차항의 분산이 다를 수 있는 회귀모형

$$\begin{cases} Y_i = \beta_0 x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + e_i,\ i = 1, \cdots, n\ (n > p+1) \\ e_i \sim N(0, \sigma^2/w_i)\ independently\ (i = 1, \cdots, n) \\ \beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p)^t \in R^{p+1}, 0 < \sigma^2 < +\infty \end{cases}$$

에서 회귀계수의 추정량은 가중오차제곱합인

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \{Y_i - (x_{i0}\beta_0 + x_{i1}\beta_1 + \cdots + x_{ip}\beta_p)\}^2$$

을 최소로 하는 가중최소제곱추정량(weighted least squares estimator)

$$\hat{\beta}^{WLSE} = (\hat{\beta}_0^{WLSE}, \cdots, \hat{\beta}_p^{WLSE})^t = \arg \sum_{i=1}^{n} w_i \{Y_i - (x_{i0}\beta_0 + x_{i1}\beta_1 + \cdots + x_{ip}\beta_p)\}^2$$

을 사용하고, σ^2의 추정량으로는

$$\hat{\sigma}^{2\,W} = \min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} w_i \{Y_i - (x_{i0}\beta_0 + x_{i1}\beta_1 + \cdots + x_{ip}\beta_p)\}^2 / (n-p-1)$$

을 사용한다. 여기에서 가중치 $w_1, \cdots, w_n$은 알고 있는 양수이고 설명변수의 행렬

$$X = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

의 계수(rank)는 $p+1$이라고 가정한다.
(a) 벡터와 행렬을 사용하여 가중최소제곱추정량이 다음과 같이 주어지는 것을 증명하여라.

$$\hat{\beta}^{WLSE} = (X^t W X)^{-1} X^t W Y$$

여기에서 W는 가중치 $w_1, \cdots, w_n$을 대각 원소로 하는 대각행렬(diagonal matrix)이다.
(b) 다음의 표본분포가 성립하는 것을 증명하여라.

$$(n-p-1)\hat{\sigma}^{2\,W}/\sigma^2 \sim \chi^2(n-p-1)$$