수리통계 1. 4장 추가 문제

[4장 추가 문제]

$(X_1, Y_1)', \cdots, (X_n, Y_n)'$ $(n > 2)$이 이변량 정규분포

$$N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),\ \sigma_1^2 > 0,\ \sigma_2^2 > 0,\ -1 < \rho < 1$$

에서의 랜덤표본이고, r이 표본상관계수 즉

$$r = \frac{\sum_1^n (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_1^n (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_1^n (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

이라고 하자.

또한, $Z_i = (X_i - \mu_1)/\sigma_1$

$W_i = \{(Y_i - \mu_2)/\sigma_2 - \rho(X_i - \mu_1)/\sigma_1\}/\sqrt{1-\rho^2}\ (i = 1, \cdots, n)$

이라고 할 때, 다음에 답하여라.

(추가 1) $\dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}} = \dfrac{S_{ZZ}\,\rho/\sqrt{1-\rho^2} + S_{ZW}}{\sqrt{S_{ZZ}S_{WW} - S_{ZW}^2}}$

임을 밝혀라. 여기에서 $S_{ZZ} = \sum_1^n (Z_i - \overline{Z})^2, S_{WW} = \sum_1^n (W_i - \overline{W})^2, S_{ZW} = \sum_1^n (Z_i - \overline{Z})(W_i - \overline{W})$.

(추가 2) $T = ((Z_1 - \overline{Z})/\sqrt{S_{ZZ}}, \cdots, (Z_n - \overline{Z})/\sqrt{S_{ZZ}})'$라고 할 때, 다음을 밝혀라.

$$\{S_{WW} - S_{ZW}^2/S_{ZZ} = W'\{I - 1(1'1)^{-1}1' - T(T'T)^{-1}T'\}W$$

(추가 3) $(Z_1, \cdots, Z_n)'$과 $(W_1, \cdots, W_n)'$이 서로 독립임을 밝히고, 이를 이용하여 다음을 밝혀라.

(i) $S_{WW} - S_{ZW}^2/S_{ZZ} \sim \chi^2(n-2)$이고, $(Z_1, \cdots, Z_n)'$과는 독립이다.

(ii) $S_{ZW}/\sqrt{S_{ZZ}} \sim N(0,1)$ 이고 $(Z_1, \cdots, Z_n)'$과는 독립이다.

(iii) $S_{WW} - S_{ZW}^2/S_{ZZ}$, $S_{ZW}/\sqrt{S_{ZZ}}$, S_{ZZ}는 서로 독립이다.

(추가 4) (추가 1, 3)으로부터 다음이 성립함을 밝혀라.

$$\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \overset{d}{\equiv} \frac{\sqrt{V_1}\,\rho/\sqrt{1-\rho^2} + U}{\sqrt{V_2}}$$

$V_1 \sim \chi^2(n-1), V_2 \sim \chi^2(n-2), U \sim N(0,1)$ 이고 V_1, V_2, U는 서로 독립.