실험 계획 및 실습

Homework #(**3**)
2014-16757 김보창

---

1 Q1

4.7

여기서 모형은 $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$, $i = 1...4, j = 1, 2...4$, $\sum_{i=1}^{4} \tau_i = 0$, $\sum_{j=1}^{4} \beta_j = 0$으로 놓을 수 있다. $(\epsilon_{ij} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2))$

treatment는 tip의 종류, block은 coupon이 된다.

1.1 1-(a)

데이터를 분석하기위해, 먼저 각 treatment(여기서는 tip) 에 따른 유의미한 차이가 있는지 알아보기 위한 test를 실시한다.

$$H_0 : \tau_i = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4$$

$$H_1 : \tau_i \neq 0, \exists i$$

로 귀무가설과 대립가설을 세우고, two factor ANOVA test를 진행하자.

우리는 H_0하에서 $\frac{MS_{Trt}}{MS_E} \sim F_{a-1,(a-1)(b-1)}$임을 알고 있으므로,

$F_0 = \frac{MS_{Trt}}{MS_E}$ 로 두고, 유의수준 α에서 $F_0 > F_{a-1,(a-1)(b-1)}(\alpha)$이면 귀무가설을 기각할 것이다.

이를 구하기 위해 F_0의 값을 구할것인데, 계산을 쉽게 하기 위해 R을 이용할 것이다.

다음 R코드를 이용하여 F_0의 값을 구한다.

```
tip <- as.factor(c(rep(1,4), rep(2,4), rep(3,4), rep(4,4)))
coupon <- as.factor(c(rep(c(1,2,3,4),4)))
y <- c(9.3,9.4,9.6,10.0,9.4,9.3,9.8,9.9,9.2,9.4,9.5,9.7,9.7,9.6,10.0,10.2)
df <- data.frame(tip, coupon, y)
result <- aov(y ~ tip + coupon, data = df)
summary(result)
```

데이터를 입력해주고, tip, coupon이라는 벡터에 각 데이터가 어떤 treatment와 block의 데이터인지 명시해준다.

그후, data.frame 함수를 이용해 data frame으로 만들어주고,

aov와 summary함수를 이용하여 결과를 출력하면 다음과 같은 값이 나온다.

```
> df
   tip coupon    y
1    1      1  9.3
2    1      2  9.4
3    1      3  9.6
4    1      4 10.0
5    2      1  9.4
6    2      2  9.3
7    2      3  9.8
8    2      4  9.9
9    3      1  9.2
10   3      2  9.4
11   3      3  9.5
12   3      4  9.7
13   4      1  9.7
14   4      2  9.6
15   4      3 10.0
16   4      4 10.2
```

df에 저장된 형태.

```
> summary(result)
            Df Sum Sq Mean Sq F value
tip          3  0.385 0.12833   14.44
coupon       3  0.825 0.27500   30.94
Residuals    9  0.080 0.00889
              Pr(>F)
tip         0.000871 ***
coupon      4.52e-05 ***
Residuals
---
Signif. codes:
  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*'
  0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

anova 분석 결과.

이를 통해, 여기서의 MS_E의 값은 0.00889, MS_{Trt}의 값은 0.12833임을 알 수 있고,
$F_0 = 14.44$임을 알 수 있다. 또한 이때의 P-value가 0.000871임을 알 수 있다.
따라서, $\alpha = 0.05$로 택했을때, P-value가 0.05보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 있다.
즉, tip에따라 유의미한 차이가 있다는 결론을 내리게 된다.
마찬가지로, block effect에 대해서도 유의미한 차이가 있는지를 알아볼 수 있는데,

$$H_0 : \beta_j = 0, \forall j = 1, 2, 3, 4$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0, \exists j$$

로 가설을 세웠을때, H_0하에서 $\frac{MS_B}{MS_E} \sim F_{b-1,(a-1)(b-1)}$임을 알고 있으므로, (여기서 $a = 4, b = 4$임)
$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$ 로 두고, 유의수준 α에서 $F_0 > F_{b-1,(a-1)(b-1)}(\alpha)$이면 귀무가설을 기각할 것이다.
이 test의 결과는 위의 anova에서 구할 수 있다. MS_B의 값이 0.275, MS_E는 위와 같다.
이때의 $F_0 = 30.94$임을 알 수 있고, 이때의 P-value가 $4.52 * 10^{-5}$임을 알 수 있으므로,
$\alpha = 0.05$로 택했을때, P-value가 0.05보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 있다.
즉, coupon에따라 유의미한 차이가 있다는 결론을 내리게 된다.

1.2 1-(b)

Fisher의 LSD 방법을 적용해서 tip별로 차이가 있는지를 구하자.
i번째 tip, j번째 tip에 대해 다음과 같이 가설을 세우고,
$u_i = u + \tau_i$

$$H0 : u_i = u_j$$

$$H1 : u_i \neq u_j$$

i번째 tip과 j번째 tip에 의한 효과가 다음과 같은 조건을 만족할때 유의미한 차이가 있다고 할 것이다.

$$|\bar{y_{i.}} - \bar{y_{j.}}| > LSD = t_{(a-1)(b-1)}(\frac{\alpha}{2}))\sqrt{\frac{2MS_E}{b}}$$

$\alpha = 0.05$일때, 이제 이를 구하는 R 코드를 작성해보면

```
MSE <- summary(result)[[1]][[3]][3]
means <- aggregate(y ~ tip, df, mean)
y1_mean <- means[[2]][1]
y2_mean <- means[[2]][2]
y3_mean <- means[[2]][3]
```

```r
y4_mean <- means[[2]][4]
mean_diff <- abs(c(y1_mean - y2_mean, y1_mean - y3_mean, y1_mean - y4_mean, y2
    _mean - y3_mean, y2_mean - y4_mean, y3_mean - y4_mean))

LSD <- qt(0.975, 9) * sqrt(2 * MSE / 4)
LSD
mean_diff
mean_diff > LSD
```

```
> MSE <- summary(result)[[1]][[3]][3]
> means <- aggregate(y ~ tip, df, mean)
> y1_mean <- means[[2]][1]
> y2_mean <- means[[2]][2]
> y3_mean <- means[[2]][3]
> y4_mean <- means[[2]][4]
> mean_diff <- abs(c(y1_mean - y2_mean, y1_mean - y3_mean, y1_mean - y4_m
ean, y2_mean - y3_mean, y2_mean - y4_mean, y3_mean - y4_mean))
>
> LSD <- qt(0.975, 9) * sqrt(2 * MSE / 4)
> LSD
[1] 0.1508105
> mean_diff
[1] 0.025 0.125 0.300 0.150 0.275 0.425
> mean_diff > LSD
[1] FALSE FALSE  TRUE FALSE  TRUE  TRUE
> |
```

fisher LSD 적용 결과.

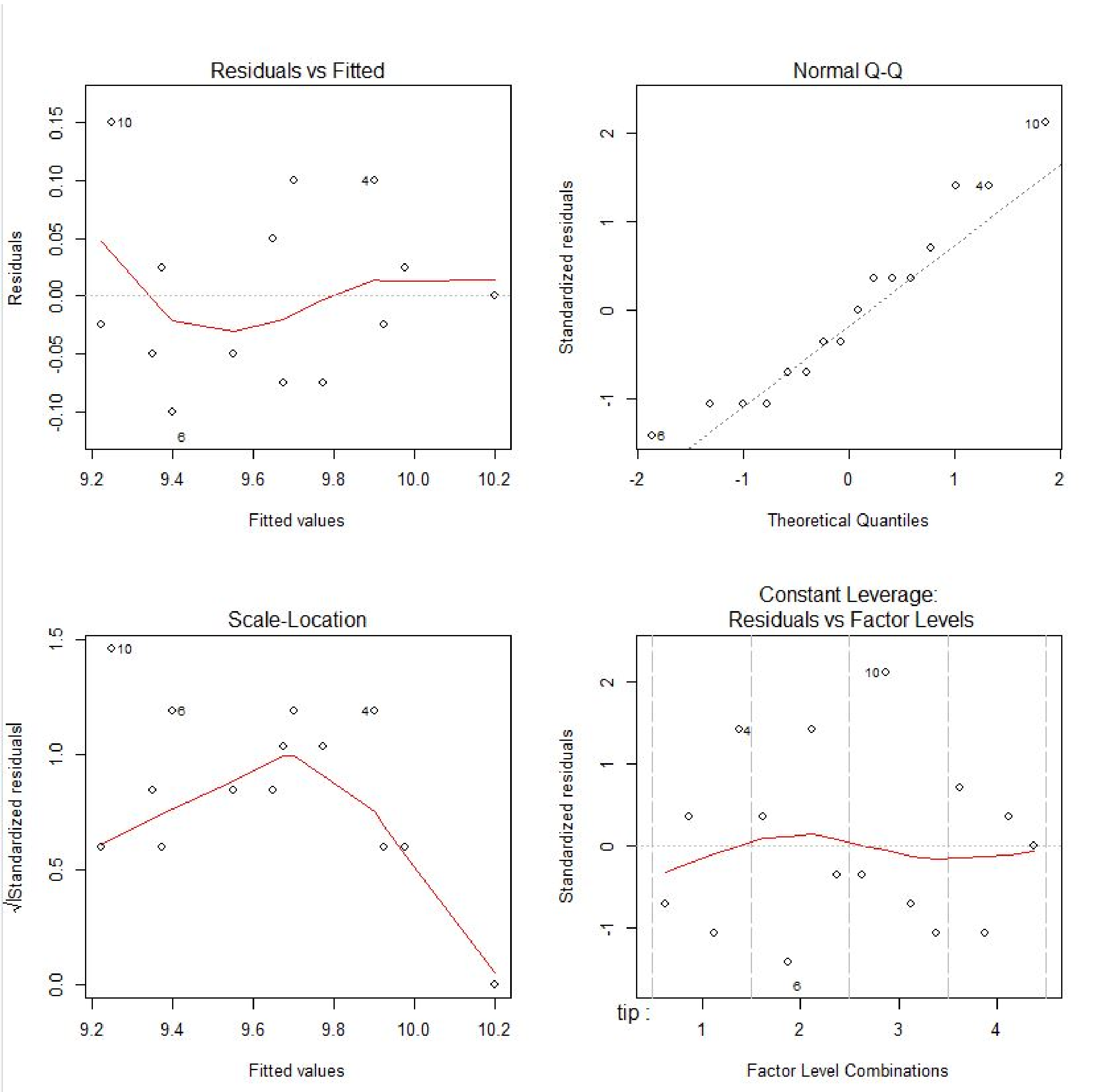
결과적으로, $\alpha = 0.05$에서 $u_1 \neq u_4, u_2 \neq u_4, u_3 \neq u_4$의 결과를 얻었다.
즉, tip이 각각 (1,4), (2,4), (3,4)에서의 test에서 $\alpha = 0.05$에서 귀무가설이 기각됨을 알 수 있다.
또한, tip이 (2,3)인 test에서는 mean_diff의 값이 LSD의 값과 거의 비슷하므로, 이들이 확실히 차이가 나지 않는다고 판정하기는 약간 어렵다고 할 수 있다.

1.3 1-(c)

residual에 대한 분석을 하기 위해, 실습시간에 배운 R함수를 이용한다.

```r
1 opar <- par(mfrow=c(2,2),cex=.8)
2 plot(aov(y ~ tip + coupon, data = df))
```

첫줄을 통해 그래프를 출력할 환경을 지정해주고, 두번째줄 plot을 이용하여 그래프를 출력하게 하였다.
결과는 다음과 같다.



왼쪽 위 그래프를 보면, fitted value와 residual로 그래프를 그렸을때, 특정 경향성이 나타나지 않는것을 알 수 있다.

따라서 우리 모형이 데이터를 잘 표현한다고 말할 수 있고,
오른쪽 아래 그래프를 봐도 factor level에 따라 residual의 차이가 거의 없으므로
등분산 가정을 위반하지 않음을 알 수 있다.

오른쪽 위 그래프, normal QQ 그래프를 살펴보면, residual의 경향이 직선으로 정렬된것을 보아 normality 가정을 위반하지 않음을 알 수 있다.

결론적으로, 독립, 등분산, 정규분포 가정이 알맞다고 할 수 있어

따라서 $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$이라는 우리의 가정에 문제가 없음을 알 수 있다.

2 Q2

4.23

문제에서 Latin square 디자인을 이용하여 실험을 했을때의 모델은 다음과 같다.

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + \epsilon_{ijk}$$

$, i = 1...4, j = 1, 2...4, k = 1, 2...4$,$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^{4} \tau_j = 0$, $\sum_{k=1}^{4} \beta_k = 0$

$(\epsilon_{ijk} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2))$

여기서, α_i는 assembly order에 따른 row effect factor, τ_j는 assembly method에 따른 treatment effect factor, β_k는 operator에 따른 column effect factor다.

이제, 이를 분석하기 위해, 각 treatment(여기서는 assembly method) 에 따른 유의미한 차이가 있는지 알아보기 위한 test를 실시한다.

$$H_0 : \tau_j = 0, \forall j = 1, 2, 3, 4$$

$$H_1 : \tau_j \neq 0, \exists j$$

로 귀무가설과 대립가설을 세우고, test를 진행하자.

우리는 H_0하에서 $\frac{MS_{Trt}}{MS_E} \sim F_{p-1,(p-2)(p-1)}$임을 알고 있으므로, (p = 4)

$F_0 = \frac{MS_{Trt}}{MS_E}$ 로 두고, 유의수준 α에서 $F_0 > F_{p-1,(p-2)(p-1)}(\alpha)$이면 귀무가설을 기각할 것이다.

이를 구하기 위해 F_0의 값을 구할것인데, 계산을 쉽게 하기 위해 R을 이용할 것이다.

다음 R코드를 이용하여 F_0의 값을 구한다.

```
order <- as.factor(c(rep(1,4), rep(2,4), rep(3,4), rep(4,4)))
oper <- as.factor(rep(c(1,2,3,4),4))
method <- as.factor(c('C','D','A','B','B','C','D','A','A','B','C','D','D','A',
    'B','C'))
y <- c(10,14,7,8,7,18,11,8,5,10,11,9,10,10,12,14)
df2 <- data.frame(order, oper, method, y)
df2
g <- lm(y ~ order + oper + method,data = df2)
anova(g)
```

데이터를 입력해주고, order, oper, method라는 벡터에 각 데이터의 order, operator, method를 명시해준다.

그후, data.frame 함수를 이용해 data frame으로 만들어주고,

lm함수와 anova함수를 이용하여 latin square design에서 anova test를 진행하면 다음과 같은 결과가 나온다.

```
> df2
   order oper method  y
1      1    1      C 10
2      1    2      D 14
3      1    3      A  7
4      1    4      B  8
5      2    1      B  7
6      2    2      C 18
7      2    3      D 11
8      2    4      A  8
9      3    1      A  5
10     3    2      B 10
11     3    3      C 11
12     3    4      D  9
13     4    1      D 10
14     4    2      A 10
15     4    3      B 12
16     4    4      C 14
```

df에 저장된 형태.

```
> g <- lm(y ~ order + oper + method,data = df2)
> anova(g)
Analysis of Variance Table

Response: y
          Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
order      3   18.5  6.1667  3.5238 0.088519 .
oper       3   51.5 17.1667  9.8095 0.009926 **
method     3   72.5 24.1667 13.8095 0.004213 **
Residuals  6   10.5  1.7500
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

anova 분석 결과.

이를 통해, 여기서의 MS_E의 값은 1.75, MS_{Trt}의 값은 24.16임을 알 수 있고,
$F_0 = 13.81$임을 알 수 있다. 또한 이때의 P-value가 0.004213임을 알 수 있다.
따라서, $\alpha = 0.05$로 택했을때, P-value가 0.05보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 있다.
즉, method에 따라 유의미한 차이가 있다는 결론을 내리게 된다.
마찬가지로, order, operator에 대해서도 유의미한 차이가 있는지를 알아볼 수 있다.
먼저 order의 경우,

$$H_0 : \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4$$

$$H_1 : \alpha_i \neq 0, \exists i$$

로 가설을 세웠을때, H_0하에서 $\frac{MS_{Rows}}{MS_E} \sim F_{p-1,(p-2)(p-1)}$임을 알고 있으므로, (여기서 $p = 4$)
$F_0 = \frac{MS_{Rows}}{MS_E}$ 로 두고, 유의수준 α에서 $F_0 > F_{p-1,(p-2)(p-1)}(\alpha)$이면 귀무가설을 기각할 것이다.
이 test의 결과는 위의 anova에서 구할 수 있다. MS_{Rows}의 값이 6.1667, MS_E는 위와 같다.
이때의 $F_0 = 3.52$임을 알 수 있고, 이때의 P-value가 0.088519임을 알 수 있으므로,
$\alpha = 0.05$로 택했을때, P-value가 0.05보다 크므로 귀무가설을 기각할 수 없다.
즉, assembly order에 따른 유의미한 차이가 있다고 말하기 어렵다.
물론, p-value가 작은편이라 α가 커지면 귀무가설을 기각할 수 있을것이고, 이때는 유의미한 차이가 있다고 말할 수 있을것이다.
operator의 경우,

$$H_0 : \beta_k = 0, \forall k = 1, 2, 3, 4$$

$$H_1 : \beta_k \neq 0, \exists i$$

로 가설을 세웠을때, H_0하에서 $\frac{MS_{Columns}}{MS_E} \sim F_{p-1,(p-2)(p-1)}$임을 알고 있으므로, (여기서 $p = 4$)

$F_0 = \frac{MS_{Columns}}{MS_E}$ 로 두고, 유의수준 α에서 $F_0 > F_{p-1,(p-2)(p-1)}(\alpha)$이면 귀무가설을 기각할 것이다.

이 test의 결과 역시 위의 anova에서 구할 수 있다. $MS_{Columns}$의 값이 17.1667, MS_E는 위와 같다.

이때의 $F_0 = 9.8095$임을 알 수 있고, 이때의 P-value가 0.009926임을 알 수 있으므로,

$\alpha = 0.05$로 택했을때, P-value가 0.05보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 있다.

즉, operator에 따른 유의미한 차이가 있다고 말할 수 있다.

결과적으로, $\alpha = 0.05$일때 method, operator에 따라서 assembly time에 유의미한 차이가 존재하지만, order는 assembly time에 유의미한 차이를 준다고 말하기는 힘들다.