수리통계 2　기말 시험(17.12.14)

[1] (20점 (a)10점 (b)10점)
 두 개의 모수를 갖는 지수분포 $\mathrm{Exp}(\mu,\sigma),\ -\infty < \mu < +\infty,\ \sigma > 0$에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n\ (n>3)$을 이용하여

$$\eta = \eta(\mu,\sigma) \equiv \mu/\sigma$$

를 추정하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) $\eta = \eta(\mu,\sigma)$의 전역최소분산불편추정량 $\hat{\eta}_n^{UMVUE}$을 구하여라.

(b)표본 크기 n이 한없이 커질 때 $\hat{\eta}_n^{UMVUE}$의 극한분포를 구하여라.

[2] (20점 (a) 10점 (b) 10점)
정규분포 $N(\mu,\sigma^2),\ -\infty < \mu < +\infty,\ \sigma > 0$에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n\ (n>6)$을 이용하여

$$\eta = \eta(\mu,\sigma) \equiv \mu/\sigma$$

을 추정하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) 정보량부등식에서 주어지는 $\eta = \eta(\mu,\sigma)$의 불편추정량 $\hat{\eta}_n^{UE}$의 분산에 대한 하한을 구하여라.

(b) $\eta = \eta(\mu,\sigma)$의 전역최소분산불편추정량(UMVUE) $\hat{\eta}_n^{UMVUE}$을 구하고, 표본 크기 n이 한없이 커질 때 그 극한분포를 구하여라.

(참고: 극한분포의 계산에서 다음의 근사식을 증명없이 사용하여도 좋다.)

$$\Gamma(m+1) = m^{m+1/2}e^{-m}\sqrt{2\pi}(1+r_m),\ \ \sqrt{m}\,r_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

$$(1+a/n)^n = e^a(1+R_n),\ \ \sqrt{n}\,R_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

[3] (15점)
베르누이분포 $\mathrm{Bernoulli}(\theta),\ 0 \le \theta \le 1$에서의 $n=8$개의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_8$을 이용하여

$$H_0 : \theta \le 1/2 \quad vs \quad H_1 : \theta > 1/2$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha = 0.05$의 전역최강력 검정을 구하여라.

[4] (15점 (a)5점 (b)10점)
평균이 0으로 알려진 정규분포 $N(0,\theta), \theta>0$에서의 랜덤표본을 $X_1,\cdots,X_n$을 이용하여 아래와 같은 가설을 검정할 때 주어진 질문에 답하여라.

(a) $H_0: \theta = 1 \ \ vs \ \ H_1: \theta \neq 1$을 유의수준 α에서 검정할 때 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$의 전역최강력 검정이 존재하지 않음을 밝혀라.

(b) $H_0: \theta = 1 \ \ vs \ \ H_1: \theta \neq 1$을 유의수준 α에서 검정할 때 두 조건

$$E_1\phi(X) = \alpha \ \ (0<\alpha<1), \ \ [\frac{d}{d\theta}E_\theta\phi(X)]_{\theta=1} = 0$$

을 만족시키는 검정 중에서 전역최강력 검정을 구하여라.

[5] (15점 (a)5점 (b)10점)
다음과 같은 균형된 이원분류정규분포모형

$$\begin{cases} X_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk} \\ e_{ijk} \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2), \ i=1,\cdots,a, \ j=1,\cdots,b; k=1,\cdots,r \\ -\infty < \mu_{ij} < +\infty, \mu_{ij} - \overline{\mu_{i.}} - \overline{\mu_{.j}} + \overline{\mu_{..}} \overset{i,j}{\equiv} 0, \ \sigma^2 > 0 \end{cases}$$

에서 주어진 질문에 답하여라. 여기에서

$$\overline{\mu_{..}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\mu_{ij}/ab, \overline{\mu_{i.}} = \sum_{j=1}^{b}\mu_{ij}/b, \overline{\mu_{.j}} = \sum_{i=1}^{a}\mu_{ij}/a$$

(a) B인자 효과의 유의성에 대한 가설

$$H_0^B: \overline{\mu_{.1}} = \cdots = \overline{\mu_{.b}} \ \ vs \ \ H_1^B: \overline{\mu_{.1}}, \cdots, \overline{\mu_{.b}}\text{가 모두 같은 것은 아니다.}$$

을 검정할 때 유의수준 5%의 최대가능도비 검정의 기각역을 구하여라.

(b) (a)에서의 최대가능도 검정의 표본분포를 구하고, 그 검정력함수가

$$\delta_B = \sum_{j=1}^{b} ar(\overline{\mu_{.j}} - \overline{\mu_{..}})^2/\sigma^2$$

의 증가함수임을 밝혀라.

[6] (15점 (a)5점 (b)10점)

로지스틱회귀모형이라고 불리우는 다음과 같은 모형을 가정하고 아래에 답하여라.

$$\begin{cases} \mathrm{Y}_i \sim \mathrm{B}(n_i, p_i),\, i = 1, \cdots, k; \mathrm{Y}_1, \cdots, \mathrm{Y}_k \text{는 서로 독립} \\ \log\left(\dfrac{p_i}{1-p_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_i,\ \ x_1, \cdots, x_k \text{는 주어진 수이고 모두 같지는 않다.} \\ \beta_0, \beta_1 \text{은 실수} \end{cases}$$

(a) 가능도 방정식은

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} (y_i - n_i p_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{k} x_i (y_i - n_i p_i) = 0 \end{cases} \quad \left(\log \frac{p_i}{1-p_i} = \beta_0 + \beta_1 x_i\right)$$

로 주어지고, 가능도 방정식의 근이 있다면 그 근이 최대가능도 추정값이 되는 것을 밝혀라.

(b) 표본 크기 $n_i (i = 1, \cdots, k)$들이 충분히 클 때, $\beta = (\beta_0, \beta_1)^t$에 대한 5가능도방정식의 일단계 근사 해가 다음과 같이 주어지는 것을 설명하여라.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{(1)} &= \hat{\beta}^{(0)} + (X^t \widehat{W}^{(0)} X)^{-1} X^t \widehat{W}^{(0)} \left(\frac{y_i - n_i \hat{p}_i^{(0)}}{n_i \hat{p}_i^{(0)} (1 - \hat{p}_i^{(0)})} \right)_{1 \le i \le k} \\ &= (X^t \widehat{W}^{(0)} X)^{-1} X^t \widehat{W}^{(0)} \left\{ X \hat{\beta}^{(0)} + \left(\frac{y_i - n_i \hat{p}_i^{(0)}}{n_i \hat{p}_i^{(0)} (1 - \hat{p}_i^{(0)})} \right)_{1 \le i \le k} \right\} \\ &= (X^t \widehat{W}^{(0)} X)^{-1} X^t \widehat{W}^{(0)} z^{(0)} \end{aligned}$$

여기에서

$$\hat{\beta}^{(0)} = (\hat{\beta}_0^{(0)}, \hat{\beta}_1^{(0)})^t,\ X = (1, x), 1 = (1, \cdots, 1)^t, x = (x_1, \cdots, x_k)^t$$

$$\widehat{W}^{(0)} = diag(\hat{w}_i^{(0)}),\ \ \hat{w}_i^{(0)} = n_i \hat{p}_i^{(0)} (1 - \hat{p}_i^{(0)})$$

$$z_i^{(0)} = \hat{\beta}_0^{(0)} + \hat{\beta}_1^{(0)} x_i + \frac{y_i - n_i \hat{p}_i^{(0)}}{n_i \hat{p}_i^{(0)} (1 - \hat{p}_i^{(0)})}\ (i = 1, \cdots, k)$$

이고, 어깨 글자 (0)는 초기값을 나타낸다.

수리통계학 2 기말 시험 (12/12/2016)

[1] (10점)

이변량 정규분포

$$N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),\ \sigma_1^2>0,\ \sigma_2^2>0,\ -1<\rho<1$$

에서의 랜덤표본 $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)', \cdots, (\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)'\ (n \ge 4)$을 이용한 $\eta = \dfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$

의 전역최소분산불편추정량 $\widehat{\eta_n}^{UMVUE}$을 구하여라.

[2] (20점 (a)10점 (b)10점)

확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathrm{I}_{[0,\infty)}(x)$$

로 주어지는 지수분포 $\mathrm{Exp}(\theta), \theta > 0$에서 랜덤표본 $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$ 전부를 관측할 수 없고, 이들의 일부분인 순서통계량

$$\mathrm{X}_{(1)} \le \cdots \le \mathrm{X}_{(r)}\ (1 < r < n)\ \ (r = [\alpha n]\ (0 < \alpha < 1))$$

만을 관측할 수 있다고 한다. 이를 이용하여

$$\eta = \mathrm{P}_\theta(\mathrm{X}_1 > a) \qquad (a > 0)$$

을 추정하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) $\eta = \eta(\theta)$의 전역최소분산불편추정량 $\widehat{\eta_n}^{UMVUE}$을 구하여라.

(b) $r = [\alpha n]\ (0 < \alpha < 1)$이고 표본크기 n이 무한히 커질 때 $\eta = \eta(\theta)$의 전역최소분산불편추정량 $\widehat{\eta_n}^{UMVUE}$의 극한분포를 구하여라.

[3] (10점)

확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta - 1} \mathrm{I}_{(0,1)}(x)$$

로 주어지는 베타분포 $\mathrm{Beta}(\theta, 1), \theta > 0$에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$을 이용하여 가설

$$H_0 : \theta \ge 1 \quad vs \quad H_1 : \theta < 1$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha(0 < \alpha < 1)$의 전역최강력검정을 구하여라.

[4] (20점 (a)10점 (b)10점)

지수분포 $\mathrm{Exp}(\theta), 0 < \theta < +\infty$에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$을 이용하여

$$H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_1 : \theta \ne 1$$

을 검정하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) $H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_1 : \theta \ne 1$을 유의수준 α에서 검정할 때 유의수준 $\alpha(0 < \alpha < 1)$의 전역최강력검정이 존재하지 않음을 밝혀라.

(b) $H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_1 : \theta \ne 1$을 유의수준 α에서 검정할 때 두 조건

$$\mathrm{E}_1\phi(\mathrm{X}) = \alpha\ \ (0 < \alpha < 1),\ \ \left[\frac{d}{d\theta}\mathrm{E}_\theta\phi(\mathrm{X})\right]_{\theta=1} = 0$$

을 만족시키는 검정 중에서 전역최강력 검정을 구하여라.

[5] (20점 (a) 10점 (b) 10점)

교호작용 효과가 없는 균형된 이원분류정규분포모형

$$\begin{cases} X_{ijk} = \overline{\mu_{..}} + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}, \\ \sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0, \\ e_{ijk} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2),\ \ i = 1, \cdots, a;\ j = 1, \cdots, b; k = 1, \cdots, r \\ \overline{\mu_{..}}, \alpha_i, \beta_j \text{는 실수이고 } \sigma^2 > 0 \end{cases}$$

에서 다음에 답하여라.

(a) 일반적인 균형된 이원분류 모형

$$\begin{cases} X_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)\ \ independently,\ i = 1, \cdots, a : j = 1, \cdots, b; k = 1, \cdots, r \\ \\ \mu_{ij} \text{는 실수이고 } \sigma^2 > 0 \end{cases}$$

에서 위와 같이 교호작용 효과가 없다는 것을 나타내려면 추가해야 하는 가정을 μ_{ij}들을 이용하여 나타내어라.

(b) B인자 효과의 유의성에 대한 가설

$$H_0^B : \beta_1 = \cdots = \beta_b = 0 \quad vs \quad H_1^B : \beta_j (j = 1, \cdots, b)\text{가 모두 0은 아니다.}$$

을 검정할 때 최대가능도비 검정의 검정 통계량과 그 표본분포를 구하여라.

[6] (20점 (a) 10점 (b) 10점)

회귀모형으로서 다음과 같은 모형을 가정하고 아래에 답하여라.

$$\begin{cases} Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + e_i,\ i = 1, \cdots, n\ (n > p+1) \\ e_i \sim N(0, \sigma^2/w_i)\ independently\ \ (i = 1, \cdots, n) \\ \beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p)^t \in R^{p+1}, 0 < \sigma^2 < +\infty \end{cases}$$

여기에서 가중치 $w_1, \cdots, w_n$은 알고 있는 양수이고 설명변수의 행렬

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

의 계수(rank)는 $p+1$이라고 가정한다.

(a) 이러한 모형에서 회귀모형의 유의성에 대한 가설

$$H_0 : \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0 \quad vs \quad H_1 : H_0\text{가 아니다.}$$

에 대하여 유의수준 $\alpha (0 < \alpha < 1)$인 최대가능도비 검정의 기각역을 구하여라.

(b) (a)에서의 검정통계량의 대립가설하의 표본분포를 구하여라.

수리통계 2 기말 시험 (15.12.10)

[1](10점 (a)5점 (b)5점)

두 개의 모수를 갖는 지수분포 $\mathrm{Exp}(\mu,\sigma)$, $-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$에서의 랜덤표본을 관측할 수 없고 이들의 순서통계량 중에서 $X_{(1)} < \cdots < X_{(r)}$ $(1 \le r < n)$ 만을 관측할 수 있다고 한다. 이들을 이용하여 μ,σ에 관한 추론을 할 때 다음에 답하여라.

(a) 통계량

$$(S, T)^t = (X_{(1)}, \sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + (n-r)X_{(r)} - nX_{(1)})^t = (X_{(1)}, \sum_{i=2}^{r}(n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}))^t$$

가 $(\mu,\sigma)^t \in R \times R_+$에 관한 완비충분통계량임을 밝혀라.

(b) μ의 전역최소분산불편추정량(UMVUE)을 구하여라.

[2] (20점 (a)10점 (b)10점)

확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \theta x^{-\theta-1} I_{(1,+\infty)}(x)$$

로 주어지는 파레토분포 $\mathrm{Pareto}(1,\theta)$, $\theta > 0$에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n$을 이용하여

$$\eta = P_\theta(X_1 > a) \quad (a > 1)$$

를 추정하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) $\eta = \eta(\theta)$의 전역최소분산불편추정량 $\widehat{\eta_n}^{UMVUE}$을 구하여라.

(b) 표본크기 n이 무한히 커질 때 $\eta = \eta(\theta)$의 전역최소분산불편추정량 $\widehat{\eta_n}^{UMVUE}$의 극한분포를 구하여라.

[3] (20점 (a) 10점 (b) 10점)

정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$, $-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n (n \ge 6)$을 이용하여

$$\eta = \eta(\theta) \equiv \mu^2/\sigma^2 \quad (\text{여기에서 } \theta = (\mu,\sigma^2)^t)$$

를 추정하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) $\eta = \eta(\theta)$의 전역최소분산불편추정량(UMVUE) $\widehat{\eta_n}^{UMVUE}$ 을 구하여라.

(b) 정보량부등식에서 주어지는 $\eta = \eta(\theta)$의 불편추정량 $\widehat{\eta_n}^{UE}$의 분산에 대한 하한과 전역최소분산불편추정량 $\widehat{\eta_n}^{UMVUE}$의 분산을 표본크기 n이 무한히 커질 때 비교하여라.

[4] (20점 (a)10점 (b)10점)

확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$$

로 주어지는 베타분포 $\mathrm{Beta}(\theta,1)$, $\theta > 0$에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n$을 이용하여 다음 가설을 검정하려고 한다.

(a) $H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_1 : \theta \ne 1$을 유의수준 α에서 검정할 때 유의수준 $\alpha(0 < \alpha < 1)$의 전역최강력검정이 존재하지 않음을 밝혀라.

(b) $H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_1 : \theta \ne 1$을 유의수준 $\alpha(0 < \alpha < 1)$에서 검정할 때 두 조건

$$E_1\phi(X) = \alpha, \quad [\frac{d}{d\theta}E_\theta\phi(X)]_{\theta=1} = 0$$

을 만족시키는 검정 중에서 전역최강력 검정을 구하여라.

[5] (20점 (a)5점 (b)5점 (c)10점)

세 개의 인자 A, B, C가 있고 각 인자의 수준이 a, b, c개 있는 경우에 각 인자 수준의 조합에서의 처리 효과를 분석하기 위한 모형으로서 다음의 균형된 삼원분류정규분포모형을
생각할 수 있다.

$$\begin{cases} \mathrm{X}_{ijkl} = \mu_{ijk} + e_{ijkl} \\ e_{ijkl} \overset{iid}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2), \ (i=1,\cdots,a; j=1,\cdots,b; k=1,\cdots,c) \\ \qquad\qquad\qquad (l=1,\cdots,r)(a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2, r \geq 2) \\ -\infty < \mu_{ijk} < +\infty \ (i=1,\cdots,a; j=1,\cdots,b; k=1,\cdots,c) \\ \sigma^2 > 0 \end{cases}$$

(a) 모수의 일대일변환을 이용하여 다음과 같이 총체적효과, 주효과, 이원교호작용효과, 삼원교호작용효과로 평균처리효과를 나타낼 수 있음을 설명하여라.

$$\begin{cases} \mu_{ijk} = \overline{\mu} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk} + (\gamma\alpha)_{ki} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk}, \\ \sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \ \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0, \ \sum_{k=1}^{c} \gamma_k = 0, \\ \sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} \overset{j}{\equiv} 0 \overset{i}{\equiv} \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}, \cdots, \sum_{k=1}^{c} (\gamma\alpha)_{ki} \overset{i}{\equiv} 0 \overset{k}{\equiv} \sum_{i=1}^{a} (\gamma\alpha)_{ki} \\ \sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \overset{j,k}{\equiv} 0 \cdots \overset{i,j}{\equiv} \sum_{k=1}^{c} (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \end{cases}$$

(b) 삼원교호작용효과의 유의성에 대한 가설

$$H_0^{ABC} : (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \overset{i,j,k}{\equiv} 0 \quad vs \quad H_1^{ABC} : (\alpha\beta\gamma)_{ijk}\text{가 모두 0은 아니다.}$$

에 대하여 유의수준 5%인 F 검정의 기각역을 추측하여라.(추측의 논거는 없어도 무방)

(c) (b)에서의 F 검정통계량의 대립가설 하의 분포를 구하여라.

[6] (10점)

회귀모형으로서 다음과 같은 모형을 가정하고 아래에 답하여라.

$$\begin{cases} \mathrm{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + e_i, \ i=1,\cdots,n \ (n > p+1) \\ e_i \sim N(0, \sigma^2/w_i) \ independently \ (i=1,\cdots,n) \\ \beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p)^t \in R^{p+1}, 0 < \sigma^2 < +\infty \end{cases}$$

여기에서 가중치 $w_1, \cdots, w_n$은 알고 있는 양수이고 설명변수의 행렬

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

의 계수(rank)는 $p+1$이라고 가정한다. 이러한 모형에서 회귀모형의 유의성에 대한 가설

$$H_0 : \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0 \quad vs \quad H_1 : H_0\text{가 아니다.}$$

에 대하여 유의수준 $\alpha (0 < \alpha < 1)$인 최대가능도비 검정의 기각역을 구하여라.