수리통계 1. 2차 중간시험　　2016. 07. 11

[1](20점: (a) 5점 (b) 10점 (c) 5점)
확률변수 X_1, X_2, X_3의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2,3}(x,y,z) = 18e^{-(3x+2y+z)} I_{(0<x<y<z<\infty)}$$

일 때 다음에 답하여라.
(a) $X_1 = x$인 조건에서, X_2와 X_3의 조건부확률밀도함수 $f_{2,3|1}(x_2, x_3|x)$를 구하여라.
(b) $Y = (X_2, X_3)^t$라고 할 때 $E(Y|X_1)$, $Var(Y|X_1)$를 구하여라.
(c) $Y = (X_2, X_3)^t$라고 할 때 $Var[E(Y|X_1)]$, $E[Var(Y|X_1)]$ 를 구하여라.

[2](20점: (a) 5점 (b) 5점 (c) 10점)
확률변수 X_1, X_2, X_3의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2,3}(x,y,z) = 8xe^{-y-z} I_{(0<x<y<z<\infty)}$$

일 때 다음에 답하여라.
(a) 세 확률변수 X_1, X_2, X_3의 결합적률생성함수 $mgf_{1,2,3}(t_1, t_2, t_3)$를 구하여라.
(b) $X_1 + X_2 + X_3$의 분산을 구하여라.
(c) $X_1, X_2 - X_1, X_3 - X_2$가 서로 독립인가를 판단하여라.

[3](15점: (a)5점 (b)10점)
$X = (X_1, \cdots, X_k)^t \sim \mathrm{Multi}(n, (p_1, \cdots, p_k)^t)\ (k \ge 4)$일 때 다음에 답하여라.
(a) $X_4 = x_4, \cdots, X_k = x_k$ 인 조건에서 $(X_1, X_2, X_3)^t$의 조건부확률밀도함수를 구하여라.
(b) $Var[E\{(X_1, X_2, X_3)^t | X_4, \cdots, X_k\}]$와 $E[Var\{(X_1, X_2, X_3)^t | X_4, \cdots, X_k\}]$를 구하여라.

[4](15점:(a) 5점 (b) 10점)
서로 독립이고 성공률이 $p\ (0<p<1)$인 베르누이시행 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$을 관측할 때 r 번째 성공까지의 시행횟수를 $W_r\ (r = 1, 2, \cdots)$이라고 하자. 이 때, 다음을 구하여라.

(a) $Cov(W_1, W_3)$　　　　(b) $E\left[Var\left(\begin{pmatrix} W_2 \\ W_4 \end{pmatrix} \middle| W_1\right)\right]$

[5](15점: (a)5점 (b)10점)

발생률이 λ인 포아송과정 $\{N_t : t \geq 0\}$에서 r 번째 현상이 발생할 때까지의 시간을

$$W_r = \min\{t : N_t \geq r\}\ (r = 1, 2, \cdots)$$

이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(a) $(W_1, W_2, W_4)^t$의 분산행렬

(b) W_1, W_2의 함수 $u(W_1, W_2)$로서

$$E[(W_4 - u(W_1, W_2))^2]$$

을 최소로 하는 함수와 그 최소값.

[6](15점: (a)8점 (b)7점)

확률변수 X의 적률생성함수가 존재하는 것이 알려져 있고, X의 k차 적률 $m_k(X)$가 다음과 같은 각 경우에 X의 확률밀도함수를 구하여라.

(a) $m_k(X) = \sum_{0 \leq l \leq k/2} \frac{k!}{(k-2l)!\,l!} 8^l,\ k = 0, 1, \cdots$

(b) $m_k(X) = \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} 2^k, k = 0, 1, \cdots$ (r은 양의 정수)

수리통계 1. 2차 중간시험 2017. 07. 10

[1](15점:(a) 10점 (b) 5점)
다차원 확률변수 X_1을 이용한 X_2의 최소제곱선형예측자(Least Mean Squares Linear Predictor)에 대한 다음의 결과를 증명하여라. 여기에서, 다차원 확률변수 X_1, X_2의 평균과 분산을

$$E\left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},, \qquad Var\left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

로 나타내고 있으며 분산행렬은 역행렬을 갖는 정칙행렬임을 전제로 하고 있다.

(a) $\underset{AX_1+b}{argmin} E[\| X_2 - (AX_1 + b) \|^2] = \mu_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X_1 - \mu_1)$

(b) $\underset{AX_1+b}{min} E[\| X_2 - (AX_1 + b) \|^2] = tr(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})$

[2](15점: (a) 5점 (b) 5점 (c) 5점)
확률변수 X_1, X_2, X_3의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2,3}(x,y,z) = 8xe^{-y-z} I_{(0<x<y<z<\infty)}$$

일 때 다음에 답하여라.

(a) $X_1 = x\,(x>0)$인 조건에서, X_2와 X_3의 조건부확률밀도함수 $f_{2,3|1}(x_2, x_3|x)$를 구하여라.

(b) $Y = (X_2, X_3)^t$라고 할 때 $E(Y|X_1)$, $Var(Y|X_1)$를 구하여라.

(c) $Y = (X_2, X_3)^t$라고 할 때 $Var(Y)$ 를 구하여라.

[3](15점: (a)5점 (b)10점)
$X = (X_1, \cdots, X_k)^t \sim \text{Multi}(n, (p_1, \cdots, p_k)^t)\,(k \geq 4)$일 때 다음에 답하여라.

(a) $X_4 = x_4, \cdots, X_k = x_k$ 인 조건에서 $(X_1, X_2, X_3)^t$의 조건부확률밀도함수를 구하여라.

(b) $Cov[E(X_1|X_4, \cdots, X_k), E(X_2|X_4, \cdots, X_k)]$와 $E[Cov((X_1, X_2)|X_4, \cdots, X_k)]$를 구하여라.

[4](15점:(a) 5점 (b) 5점 (c) 5점)
서로 독립이고 성공률이 $p\,(0<p<1)$인 베르누이시행 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$을 관측할 때 r 번째 성공까지의 시행횟수를 $W_r\,(r = 1, 2, \cdots)$이라고 하자. 이 때, 다음을 구하여라.

(a) $Cov[(W_3, W_5)|W_2]$

(b) $Cov[E(W_3|W_2), E(W_5|W_2)]$

(c) $W_2 = x$인 조건에서, W_3와 W_5의 조건부확률밀도함수 $pdf_{3,5|2}(y, z|x)$

[5](20점: (a)10점 (b)10점)

발생률이 λ인 포아송과정 $\{N_t : t \geq 0\}$에서 r 번째 현상이 발생할 때까지의 시간을

$$W_r = \min\{t : N_t \geq r\}\ (r = 1, 2, \cdots)$$

이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(a) $Var(E(W_5|W_2))$와 $E(Var(W_5|W_2))$

(b) $E\left[Var\left(\begin{pmatrix} N_t \\ N_{3t} \end{pmatrix} \middle| N_{6t}\right)\right]$

[6](20점: (a)7점 (b)7점 (c) 6점)

확률변수 X의 적률생성함수가 존재하는 것이 알려져 있고, X의 k차 적률 $m_k(X)$가 다음과 같은 각 경우에 X의 확률밀도함수를 구하여라.

(a) $m_k(X) = \sum_{0 \leq l \leq k/2} \frac{k!}{(k-2l)!\, l!} 2^l,\ k = 0, 1, \cdots$

(b) $m_k(X) = \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} 3^k, k = 0, 1, \cdots$ (r은 양의 정수)

(c) $m_k = (-1)^k \sum_{l=1}^{k} \sum_{\substack{j_1 \geq 1 \\ j_1 + \cdots + j_l = k}} \cdots \sum_{j_l \geq 1} \binom{k}{j_1 \cdots j_l} \binom{-2}{l} 2^l,\ k = 1, 2, \cdots$

수리통계 1. 2차 중간시험 2018. 07. 13.

[1] (15점)

다차원 확률변수 X의 실수값 1차 함수 a^tX+b와 1차원 확률변수 Y 사이의 상관계수의 최대값

$$\max_{a,\,b} Corr(Y,\, a^tX+b)$$

를 Y와 다차원 확률변수 X 사이의 중상관계수(multiple correlation coefficient)라고 하며 $\rho_{Y:X}$로 나타낸다. X의 분산행렬 $\Sigma_{11} = Var(X)$의 역행렬 Σ_{11}^{-1}이 존재하고 $\sigma_{22} = Var(Y) > 0$이며, $\sigma_{21} = Cov(Y, X)$이 존재할 때 이러한 중상관계수가 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라.

$$\rho_{Y:X} = \left(\frac{\sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\right)^{1/2}$$

[2](15점:각각 5점)

서로 독립이고 성공률이 $p\,(0 < p < 1)$인 베르누이시행 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$을 관측할 때 r 번째 성공까지의 시행횟수를 $W_r\,(r = 1, 2, \cdots)$이라고 하자. 이 때, 다음을 구하여라.

(a) $W_2 = y\,(y \ge 2)$인 조건에서, W_1의 조건부확률밀도함수 $pdf_{1|2}(x|y)$

(b) $Var[E(W_1|W_2)]$와 $E[Var(W_1|W_2)]$ $Cov[(W_3, W_5)|W_2]$

(c) $Cov(W_1, W_2 - W_1|W_2)$

[3] (15점)

발생률이 λ인 포아송과정 $\{N_t : t \ge 0\}$에서 r 번째 현상이 발생할 때까지의 시간을

$$W_r = \min\{t : N_t \ \ge \ r\}\,(r = 1, 2, \cdots)$$

이라고 할 때, W_r과 N_t의 관계를 이용하여 다음 등식이 성립하는 이유를 설명하여라.

$$\int_0^t \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r y^{r-1} e^{-\lambda y} dy = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

[4] (15점: (a)10점 (b)5점)

발생률이 λ인 포아송과정 $\{N_t : t \geq 0\}$에서 r 번째 현상이 발생할 때까지의 시간을

$$W_r = \min\{t : N_t \geq r\} \,(r = 1, 2, \cdots)$$

이라고 할 때, 다음에 답하여라.

(a) W_1, W_3의 일차 함수 $aW_1 + bW_3 + c$로서

$$E[(W_5 - (aW_1 + bW_3 + c))^2]$$

을 최소로 하는 $aW_1 + bW_3 + c$를 구하여라.

(a) W_5와 $(W_1, W_3)^t$ 사이의 중상관계수 $\rho_{5:(1,3)}$을 구하여라.

[5] (20점: 각각 5점)

발생률이 λ인 포아송과정 $\{N_t : t \geq 0\}$에서 r 번째 현상이 발생할 때까지의 시간을

$$W_r = \min\{t : N_t \geq r\} \,(r = 1, 2, \cdots)$$

이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(a) $Cov[E(W_4|W_2), E(W_5|W_2)]$

(b) $E[Cov(W_4, W_5|W_2)]$

(c) $N_{5t} = n$이 주어진 조건에서 $(N_t, N_{3t} - N_t, N_{5t} - N_{3t})^t$의 조건부분포를 구하여라.

(d) $E[Var(\begin{pmatrix} N_t \\ N_{3t} \end{pmatrix}|N_{5t})]$

[6] (20점: 각각 10점)

확률변수 X의 적률생성함수가 존재하는 것이 알려져 있고, X의 k차 적률 $m_k(X)$ 또는 k차 누율 $c_k(X)$가 다음 과 같은 각 경우에 X의 확률밀도함수를 구하여라.

(a) $m_k(X) = (-1)^k \sum_{l=1}^{k} \sum_{j_1 \geq 1} \cdots \sum_{\substack{j_l \geq 1 \\ j_1 + \cdots + j_l = k}} \begin{pmatrix} & k & \\ j_1 & \cdots & j_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ l \end{pmatrix} 2^l, \; k = 1, 2, \cdots$

(b) $c_k(X) = r(k-1)! 2^{k-1}, k = 1, 2, \cdots$