수리통계 1 기말시험 2016. 7. 26

[1] (15점)
베타분포 $\mathrm{Beta}(1,\alpha)(\alpha>0)$로부터의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$에 대하여 $\mathrm{Y}_n=\max_{1\le i\le n}\mathrm{X}_i$이라고 할 때 $n^r(1-\mathrm{Y}_n)$의 극한분포가 존재하기 위한 양수 r의 범위를 구하고, 그 극한분포를 구하여라.

[2] (15점)
$\mathrm{X}_{(1)}<\mathrm{X}_{(2)}<\cdots<\mathrm{X}_{(n)}(n>2)$이 베타분포 $\mathrm{Beta}(\alpha,1)(\alpha>0)$로부터의 크기 n인 랜덤표본에 기초한 순서통계량이고

$$\mathrm{R}_n=\frac{\mathrm{X}_{(1)}}{\mathrm{X}_{(n)}}$$

이라고 할 때, $n^r\mathrm{R}_n$의 극한분포가 존재하기 위한 양수 r의 범위를 구하고 그 극한분포를 구하여라.

[3] (15점)
확률변수 X_n과 Z의 누적분포함수가 모든 실수에서 연속인 경우에

$$\mathrm{X}_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} \mathrm{Z}$$

일 때, 다음을 밝혀라.

$$\lim_{k\to\infty}\sup_n \mathrm{P}(|\mathrm{X}_n|>k)=0$$

[4] (15점)
다음과 같은 F 분포의 정규근사를 밝혀라: $\mathrm{F}_{r_1,r_2}\sim F(r_1,r_2)$일 때

$$\sqrt{r_1+r_2}\,(\mathrm{F}_{r_1,r_2}-1)\overset{\mathrm{d}}{\to}\mathrm{N}(0,2(\gamma^{-1}+(1-\gamma)^{-1}))$$

여기에서 극한은 다음과 같이 r_1,r_2가 커지는 것을 전제로 하고 있다.

$$r_1\to\infty,\, r_2\to\infty,\, \frac{r_1}{r_1+r_2}\to\gamma\,(0<\gamma<1)$$

[5] (10점)
표준지수분포 Exp(1)를 따르는 확률변수 Z 에 대하여

$$\mathrm{E}(\log \mathrm{Z}) = \int_0^\infty (\log z) e^{-z} dz \equiv \dot{\Gamma}(1) \fallingdotseq -0.577$$

임이 알려져 있다. 균등분포로부터 독립적으로 생성된 난수 $u_1, \cdots, u_N$ 을 이용하여 이 값의 근사값을 구하고 그 오차한계를 제시하는 방법을 설명하여라.

[6] (15점: (a)10점 (b)5점)
확률밀도함수가

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x)$$

인 와이블분포 $W(\alpha,1)$ $(\alpha > 0)$에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_n$에 대하여

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\dot{\Gamma}(1)}{\overline{(\log \mathrm{X})}} \fallingdotseq \frac{-0.577}{\overline{(\log \mathrm{X})}}$$

이라고 할 때, 다음에 답하여라.
(a) $\sqrt{n}(\widehat{\alpha_n} - \alpha)$ 의 극한분포를 구하여라.
(b) $\sqrt{n}(g(\widehat{\alpha_n}) - g(\alpha)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{Z},\ \mathrm{Z} \sim \mathrm{N}(0, avar),\ avar \equiv \dfrac{\ddot{\Gamma}(1) - (\dot{\Gamma}(1))^2}{(\dot{\Gamma}(1))^2} \fallingdotseq \dfrac{1.645}{(-0.577)^2}$
가 성립하는 분산안정변환 g를 구하고, 이 결과를 이용하여 α에 관한 95%근사신뢰구간을 구하는 방법을 설명하여라.(여기에서 $\dot{\Gamma}(a) = \dfrac{d}{da}\Gamma(a),\ \ddot{\Gamma}(a) = \dfrac{d^2}{da^2}\Gamma(a)$)

[7] (15점)
확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} \frac{e^{-(x-\mu)/\sigma}}{(1+e^{-(x-\mu)/\sigma})^2} \mathrm{I}_{(-\infty,+\infty)}(x)$$

인 로지스틱분포 $\mathrm{L}(\mu,\sigma), -\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$ 모형에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n (n \ge 2)$에 기초한 표본사분위수 $\mathrm{X}_{([n/4])}, \mathrm{X}_{([3n/4])}$들로부터 정의되는 다음과 같은 통계량들을 이용하여 μ, σ에 대한 추론을 하려고한다.

$$\widehat{\mu_n} \equiv \frac{1}{2}(\mathrm{X}_{([n/4])} + \mathrm{X}_{([3n/4])}),\ \ \widehat{\sigma_n} \equiv (\mathrm{X}_{([3n/4])} - \mathrm{X}_{([n/4])})/(2\log 3)$$

표본 크기 n이 한없이 커질 때 $\sqrt{n}\dfrac{\widehat{\mu_n} - \mu}{\widehat{\sigma_n}}$의 극한분포를 구하고, 이 결과를 이용하여 μ에 관한 95%근사신뢰구간을 구하는 방법을 설명하여라.

수리통계 1 기말시험 2017. 7. 24

[1] (15점)

확률변수 X_n과 Z에 대하여

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} Z$$

이고, Z의 누적분포함수가 모든 실수에서 연속인 함수일 때 다음이 성립함을 밝혀라.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |P(X_n \le x) - P(Z \le x)| = 0$$

[2] (20점: (a)10점 (b)10점)

확률변수 Z_n과 Z의 누적분포함수가 모든 실수에서 연속이며, 확률변수 X_n에 대하여

$$Z_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} Z, \quad X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0$$

일 때, 다음을 밝혀라.

(a) $\lim_{k\to\infty} \sup_n P(|Z_n| > k) = 0$

(b) $X_n Z_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0$

[3] (15점)

$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$이 지수분포 $\mathrm{Exp}(1)$에서의 랜덤표본 n개에 기초한 순서통계량일 때 다음을 밝혀라.

$$(n\log n)\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} \mathrm{Exp}(1)$$

[4] (15점)

다음과 같은 F 분포의 정규근사를 밝혀라: $F_{r_1,r_2} \sim F(r_1,r_2)$일 때

$$\sqrt{r_1+r_2}\,(F_{r_1,r_2}-1) \overset{d}{\to} N(0, 2(\gamma^{-1}+(1-\gamma)^{-1}))$$

여기에서 극한은 다음과 같이 r_1, r_2가 커지는 것을 전제로 하고 있다.

$$r_1 \to \infty, r_2 \to \infty, \frac{r_1}{r_1+r_2} \to \gamma \, (0 < \gamma < 1)$$

[5] (20점 : (a) 10점, (b) 10점)

서로 독립이고 성공률이 $p\ (0 < p < 1)$인 베르누이시행 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$에서 r 번째 성공까지의 시행횟수를 W_r 이라고 할 때

$$\hat{p_r} = r/W_r$$

에 대한 다음 질문에 답하여라.

(a) r이 한없이 커질 때 $\sqrt{r}(\hat{p_r} - p)$의 극한분포를 구하여라.

(b) r이 한없이 커질 때

$$\sqrt{r}(g(\hat{p_r}) - g(p)) \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1)$$

이 성립하는 분산안정변환 g를 구하고, 이 결과를 이용하여 r이 클 때 p에 관한 95%근사신뢰구간을 구하는 방법을 설명하여라.

[6] (15점)

확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\frac{e^{-(x-\mu)/\sigma}}{(1+e^{-(x-\mu)/\sigma})^2} I_{(-\infty,+\infty)}(x)$$

인 로지스틱분포 $L(\mu,\sigma), -\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$ 모형에서의 랜덤표본 $X_1, \cdots, X_n (n \geq 2)$에 기초한 표본사분위수 $X_{([n/4])}, X_{([n/2])}, X_{([3n/4])}$들로부터 정의되는 다음과 같은 통계량들을 이용하여 μ, σ에 대한 추론을 하려고한다.

$$\hat{\mu_n} \equiv X_{([n/2])},\ \ \hat{\sigma_n} \equiv (X_{([3n/4])} - X_{([n/4])})/(2\log 3)$$

표본 크기 n이 한없이 커질 때 $\sqrt{n}\dfrac{\hat{\mu_n} - \mu}{\hat{\sigma_n}}$의 극한분포를 구하고, 이 결과를 이용하여 μ에 관한 95%근사신뢰구간을 구하는 방법을 설명하여라.

수리통계 1 기말시험 2018. 7. 25

[1] (15점)
균등분포 $\mathrm{U}(0,1)$로부터의 랜덤표본 $\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n$에 대하여

$$\mathrm{Y}_n = \max_{1 \le i \le n} \mathrm{U}_i - \min_{1 \le i \le n} \mathrm{U}_i$$

라고 할 때, $n^r(1-\mathrm{Y}_n)$의 극한분포가 존재하기 위한 양수 r의 범위를 구하고 그 극한분포를 구하여라.

[2] (20점: (a)10점 (b)10점)
확률변수 Z_n과 Z의 누적분포함수가 모든 실수에서 연속이며, 확률변수 X_n에 대하여

$$\mathrm{Z_n} \underset{\mathrm{n}\to\infty}{\overset{\mathrm{d}}{\to}} \mathrm{Z}, \quad \mathrm{X}_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} 0$$

일 때, 다음을 밝혀라.

(a) $\lim_{k\to\infty} \sup_n \mathrm{P}(|\mathrm{Z}_n| > k) = 0$

(b) $\mathrm{X}_n \mathrm{Z}_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\to}} 0$

[3] (15점)
확률밀도함수가

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x)$$

인 와이불분포 $W(\alpha,1)$ $(\alpha > 0)$에서의 크기 n인 랜덤표본에 기초한 순서통계량을 $\mathrm{X}_{(1)} < \mathrm{X}_{(2)} < \cdots < \mathrm{X}_{(n)}$이라고 할 때, 다음을 밝혀라.

$$(n \log n)^{1/\alpha} \frac{\mathrm{X}_{(1)}}{\mathrm{X}_{(n)}} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} W(\alpha,1)$$

[4] (15점)
다음과 같은 베타분포의 정규근사를 밝혀라: $\mathrm{B}_{r_1,r_2} \sim \mathrm{Beta}(r_1,r_2)$일 때

$$\sqrt{r_1+r_2}\left(\mathrm{B}_{r_1,r_2} - \frac{r_1}{r_1+r_2}\right) \overset{d}{\to} \mathrm{N}(0, \gamma(1-\gamma))$$

여기에서 극한은 다음과 같이 r_1, r_2가 커지는 것을 전제로 하고 있다.

$$r_1 \to \infty, r_2 \to \infty, \frac{r_1}{r_1+r_2} \to \gamma \ (0 < \gamma < 1)$$

[5] (15점)

베르누이분포 Bernoulli(p)로부터의 랜덤표본 $X_1, \dots, X_n$을 이용한 표본비율

$\widehat{p_n} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$에 대하여

$$\sqrt{n}\left(g(\widehat{p_n}) - g(p)\right) \xrightarrow[n \to \infty]{d} Z,\ Z \sim N(0,1)$$

가 성립하는 분산안정변환 g를 구하고, 이 결과를 이용하여 p에 관한 점근신뢰구간을 구하는 방법을 설명하여라.

[6] (20점 (a) 10점 (b) 10점)

확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-|x-\mu|/\sigma} I_{(-\infty,+\infty)}(x), -\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$$

인 이중지수분포 DE(μ,σ) 모형에서의 랜덤표본$X_1, \cdots, X_n \ (n \geq 2)$에 기초한 표본중앙값과 표본평균절대편차(mean absolute deviation)를 각각

$$\widehat{\mu_n} \equiv X_{([n/2])},\ \widehat{\sigma_n} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i - X_{([n/2])}|$$

이라고 하자.

(a) $\widehat{\sigma_n} \underset{n \to \infty}{\overset{P}{\to}} \sigma$ 임을 밝혀라.

(b) 표본 크기 n이 한없이 커질 때 $\sqrt{n}\dfrac{\widehat{\mu_n} - \mu}{\widehat{\sigma_n}}$의 극한분포를 구하고, 이 결과를 이용하여 μ에 관한 95%근사신뢰구간을 구하는 방법을 설명하여라.