수리통계 1. 1차 중간시험 2016. 07. 04

[1] (10점: (a)5점 (b)5점)
확률 변수 X의 누적분포함수가

$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2/9 & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

이고

$$A_k=\{x:1/k\le x\le 2-1/k\},\ B_k=\{x:2-1/k<x<2+1/k\}\ (k=1,2,\cdots)$$

일 때 다음 사건과 확률의 극한값을 구하여라.

(a) $\lim_{k\to\infty}A_k$ 와 $\lim_{k\to\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}\in A_k)$ (b) $\lim_{k\to\infty}B_k$ 와 $\lim_{k\to\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}\in B_k)$

[2] (20점:(a)10점 (b)10점)
확률변수 X의 적률생성함수가 존재하는 것이 알려져 있고 적률이

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}^r)=r!\{1+(-1)^r\}/2\ (r=1,2,\cdots)$$

로 주어지는 경우에 다음에 답하여라.

(a) X의 확률밀도함수 $f(x)$를 구하여라. (b) X의 첨예도(kurtosis)를 구하여라.

[3] (20점)
표준화된 확률변수 $\mathrm{Z}=(\mathrm{X}-\mu)/\sigma$의 누율생성함수와 X의 누율생성함수의 관계로부터 $\mathrm{Z}=(\mathrm{X}-\mu)/\sigma$의 누율과 X의 누율 사이에 다음 관계가 성립하는 것을 밝혀라.

$$c_r\left(\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}\right)=c_r(\mathrm{X})/\sigma^r\quad(r=3,4,\cdots)$$

[4](20점: (a) 5점 (b) 10점 (c) 5점)
확률변수 X 와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2}(x,y)=xe^{-y}\mathrm{I}_{(0<x<y<\infty)}$$

일 때 다음을 구하여라.

(a) $\mathrm{Y}=y(y>0)$가 주어진 조건에서 X의 조건부확률밀도함수 $f_{1|2}(x|y)$

(b) $\mathrm{Var}[\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y})]$와 $\mathrm{E}[\mathrm{Var}(\mathrm{X}|\mathrm{Y})]$

(c) $\mathrm{Var}[\mathrm{X}+\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y})]$

[5] (20점:(a) 5점 (b) 5점 (c) 10점)
확률변수 X 와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2}(x,y)=3e^{-2x-y}I_{(0<x<y<\infty)}$$

일 때 다음에 답하여라.

(a) X와 Y의 결합적률생성함수 $mgf_{1,2}(t_1,t_2)$를 구하여라.

(b) $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$의 분산을 구하여라.

(c) X와 $Z=Y-X$의 결합적률생성함수 $M_{X,Z}(s,t)$를 구하고, X와 Z가 서로 독립인가를 판단하여라.

[6](10점: (a) 5점 (b) 5점)
확률변수 X 와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같은 각 경우에 X 와 Y가 서로 독립인가를 판단하고, X 와 Y의 공분산을 구하여라.

(a) $f_{1,2}(x,y)=\frac{25}{104}(1+x^4y^4)I_{(-1\le x\le 1,\,-1\le y\le 1)}$

(b) $f_{1,2}(x,y)=(1/6)^x(1/3)^y(1/2)^{1-x-y},\, x,y=0,1,\, x+y=0,1$

수리통계 1. 2차 중간시험 2016. 07. 11

[1](20점: (a) 5점 (b) 10점 (c) 5점)
확률변수 X_1,X_2,X_3의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2,3}(x,y,z)=18e^{-(3x+2y+z)}I_{(0<x<y<z<\infty)}$$

일 때 다음에 답하여라.

(a) $X_1=x$인 조건에서, X_2와 X_3의 조건부확률밀도함수 $f_{2,3|1}(x_2,x_3|x)$를 구하여라.

(b) $Y=(X_2,X_3)^t$라고 할 때 $E(Y|X_1)$, $Var(Y|X_1)$를 구하여라.

(c) $Y=(X_2,X_3)^t$라고 할 때 $Var[E(Y|X_1)]$, $E[Var(Y|X_1)]$ 를 구하여라.

[2](20점: (a) 5점 (b) 5점 (c) 10점)
확률변수 X_1,X_2,X_3의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2,3}(x,y,z)=8xe^{-y-z}I_{(0<x<y<z<\infty)}$$

일 때 다음에 답하여라.

(a) 세 확률변수 X_1,X_2,X_3의 결합적률생성함수 $mgf_{1,2,3}(t_1,t_2,t_3)$를 구하여라.

(b) $X_1+X_2+X_3$의 분산을 구하여라.

(c) X_1, X_2-X_1, X_3-X_2 가 서로 독립인가를 판단하여라.

수리통계 1. 1차 중간시험　　2017. 07. 03

[1] (10점: (a)5점 (b)5점)
확률 변수 X의 누적분포함수가

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ (x^2+1)/9, & 0\le x<1 \\ (x+4)/9, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

이고

$$A_k=\{x:1/k\le x\le 2-1/k\},B_k=\{x:1-1/k<x<2+1/k\}\ (k=1,2,\cdots)$$

일 때 다음 사건과 확률의 극한값을 구하여라.

(a) $\lim_{k\to\infty}A_k$ 와 $\lim_{k\to\infty}P(X\in A_k)$　　(b) $\lim_{k\to\infty}B_k$ 와 $\lim_{k\to\infty}P(X\in B_k)$

[2] (20점:(a)7점 (b)7점 (c) 6점)
확률변수 X의 누율생성함수가 존재하는 것이 알려져 있고 그 r차 누율이

$$c_r=\begin{cases}(2k-1)!2^{-2k+1}, & r=2k \\ 0, & r=2k-1\ (k=1,2,\cdots)\end{cases}$$

로 주어지는 경우에 다음에 답하여라.

(a) X의 r차($r=1,2,\cdots$) 적률을 구하여라.

(b) X의 확률밀도함수 $f(x)$를 구하여라.

(c) X의 첨예도(kurtosis)를 구하여라.

[3] (20점)
표준화된 확률변수 $Z=(X-\mu)/\sigma$의 누율생성함수와 X의 누율생성함수의 관계로부터 $Z=(X-\mu)/\sigma$의 누율과 X의 누율 사이에 다음 관계가 성립하는 것을 밝혀라.

$$c_r\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=c_r(X)/\sigma^r\quad (r=3,4,\cdots)$$

[4](20점: (a) 7점 (b) 7점 (c) 6점)
확률변수 X 와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2}(x,y)=3e^{-2x-y}I_{(0<x<y<\infty)}$$

일 때 다음을 구하여라.

(a) $X=x(x>0)$가 주어진 조건에서 Y의 조건부확률밀도함수 $f_{2|1}(y|x)$

(b) $Var[E(Y|X)]$와 $E[Var(Y|X)]$

(c) $Var[X+Y-E(Y|X)]$

[5](10점: (a) 5점 (b) 5점)
확률변수 X 와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같은 각 경우에 X 와 Y가 서로 독립인가를 판단하고, X 와 Y의 공분산을 구하여라.

(a) $f_{1,2}(x,y) = \frac{25}{104}(1+x^4y^4)\mathrm{I}_{(-1 \le x \le 1,\, -1 \le y \le 1)}$

(b) $f_{1,2}(x,y) = (1/6)^x(1/3)^y(1/2)^{1-x-y},\, x,y = 0,1,\, x+y = 0,1$

[6] (20점:(a) 7점 (b) 7점 (c) 6점)
확률변수 X 와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2}(x,y) = xe^{-y}\mathrm{I}_{(0<x<y<\infty)}$$

일 때 다음에 답하여라.

(a) X와 Y의 결합적률생성함수 $mgf_{1,2}(t_1,t_2)$를 구하여라.

(b) $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$의 분산을 구하여라.

(c) X와 $\mathrm{Z}=\mathrm{Y}-\mathrm{X}$의 결합적률생성함수 $\mathrm{M}_{\mathrm{X,Z}}(s,t)$를 구하고, X와 Z가 서로 독립인가를 판단하여라.

수리통계 1. 2차 중간시험 2017. 07. 10

[1](15점:(a) 10점 (b) 5점)
다차원 확률변수 X_1을 이용한 X_2의 최소제곱선형예측자(Least Mean Squares Linear Predictor)에 대한 다음의 결과를 증명하여라. 여기에서, 다차원 확률변수 X_1, X_2의 평균과 분산을

$$\mathrm{E}\left[\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ \mathrm{X}_2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},, \qquad \mathrm{Var}\left[\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ \mathrm{X}_2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

로 나타내고 있으며 분산행렬은 역행렬을 갖는 정칙행렬임을 전제로 하고 있다.

(a) $\underset{A\mathrm{X}_1+b}{\arg}\, \mathrm{E}[\,\|\mathrm{X}_2-(A\mathrm{X}_1+b)\|^2] = \mu_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\mathrm{X}_1-\mu_1)$

(b) $\underset{A\mathrm{X}_1+b}{\min}\, \mathrm{E}[\,\|\mathrm{X}_2-(A\mathrm{X}_1+b)\|^2] = tr(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})$

[2](15점: (a) 5점 (b) 5점 (c) 5점)
확률변수 $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_3$의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2,3}(x,y,z) = 8xe^{-y-z}\mathrm{I}_{(0<x<y<z<\infty)}$$

일 때 다음에 답하여라.

(a) $\mathrm{X}_1 = x\ (x>0)$인 조건에서, X_2와 X_3의 조건부확률밀도함수 $f_{2,3|1}(x_2,x_3|x)$를 구하여라.

(b) $\mathrm{Y}=(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_3)^t$라고 할 때 $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}_1)$, $\mathrm{Var}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}_1)$를 구하여라.

(c) $\mathrm{Y}=(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_3)^t$라고 할 때 $\mathrm{Var}(\mathrm{Y})$ 를 구하여라.

수리통계 1. 1차 중간시험　2018. 07. 06.

[1] (15점: (a)5점 (b)5점 (c)5점)

사건열 $A_n \, (n=1,2,\cdots)$의 상극한과 하극한을 각각

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \equiv \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \equiv \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$$

으로 정의하고, 특히 상극한과 하극한이 같은 사건인 경우에 그 사건을 사건열 $A_n \, (n=1,2,\cdots)$의

극한사건이라 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{A}_n \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

이러한 정의에 따라 사건열

$$A_n = \{x : 2 - 1/n < x \le 3 - 1/n\} \, (n=1,2,\cdots)$$

과 누적분포함수가

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x/8 & 0 \le x < 2 \\ x^2/9 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

로 주어자는 확률 변수 X에 대하여 다음 사건과 확률을 구하여라.

(a) $\lim_{n\to\infty} A_n$　　(b) $\mathrm{P}(\mathrm{X} \in \lim_{n\to\infty} A_n)$

(c) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} \in A_n)$

[2] (20점:(a)10점 (b)10점)

확률변수 X의 누율생성함수가 존재하는 것이 알려져 있고 그 r차 누율이

$$c_r = (r-1)!\{1 + (-1/2)^r - (1/4)^r\} (r=1,2,\cdots)$$

로 주어지는 경우에 다음에 답하여라.

(a) X의 k차$(k=1,2,\cdots)$ 적률을 구하여라.

(b) X의 확률밀도함수 $f(x)$를 구하여라.

[3] (15점:(a)10점 (b)5점)

(a) 표준화된 확률변수 의 누율생성함수와 X의 누율생성함수의 $Z=(X-\mu)/\sigma$ 관계로부터

$Z=(X-\mu)/\sigma$의 누율과 X의 누율 사이에 다음 관계가 성립하는 것을 밝혀라.

$$c_r\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=c_r(X)/\sigma^r \quad (r=3,4,\cdots)$$

(b) 문제 [2]에서 X의 왜도(skewness)를 구하여라.

[4](20점: (a) 5점 (b) 5점 (c) 10점)

확률변수 X 와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2}(x,y)=8xe^{-2y}I_{(0<x<y<\infty)}$$

일 때 다음을 구하여라.

(a) $Y=y(y>0)$가 주어진 조건에서 X의 조건부확률밀도함수 $f_{1|2}(x|y)$

(b) $E[Var(X|Y)]$

(c) $Var[X+Y-E(X|Y)]$

[5](10점: (a) 5점 (b) 5점)

확률변수 X 와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같은 각 경우에 X 와 Y가 서로 독립인가를 판단하고, X 와 Y의 공분산을 구하여라.

(a) $f_{1,2}(x,y)=\frac{9}{2}x^2y^2I_{(|y|\le|x|\le1)}$

(b)

$f_{1,2}(x,y)=\frac{9}{10}(1/6)^x(1/3)^y(1/2)^{1-x-y}, x+y=0,1,2\,(0\le x\le1, 0\le y\le1$이고, x,y는 정수)

[6] (20점:(a) 7점 (b) 7점 (c) 6점)

확률변수 X 와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{1,2}(x,y)=\frac{1}{2}x^2e^{-y}I_{(0<x<y<\infty)}$$

일 때 다음에 답하여라.

(a) X와 Y의 결합적률생성함수 $mgf_{1,2}(t_1,t_2)$를 구하여라.

(b) X+Y의 분산을 구하여라.

(c) X와 $Z=Y-X$의 결합적률생성함수 $M_{X,Z}(s,t)$를 구하고, X와 Z가 서로 독립인가를 판단하여라.