수리통계 2　중간 시험 2 (11/09/2017)

[1] (20점)

두 정규분포 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2), -\infty < \mu_i < +\infty, 0 < \sigma_i^2 < +\infty\,(i=1,2)$에서 서로 독립인 랜덤표본 $X_{11},\cdots,X_{1n_1}$과 $X_{21},\cdots,X_{2n_2}(n_1 \geq 2, n_2 \geq 2)$를 이용하여

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$의 최대가능도비 검정을 구하여라.

[2] (20점 (a)10점 (b)10점)

확률밀도함수가

$$f(x;\alpha,\beta) = \alpha\beta^{\alpha}x^{-\alpha-1}I_{[\beta,+\infty)}(x)$$

로 주어지는 파레토분포 Pareto(α,β), $\alpha>0, \beta>0$에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n\,(n\geq 2)$을 이용하여 가설

$$H_0 : \alpha = \alpha_0 \quad vs \quad H_1 : \alpha \neq \alpha_0 \ (\alpha_0\text{는 주어진 양수})$$

을 검정할 때 다음에 답하여라.

(a) 유의수준 5% 의 최대가능도비 검정을 구하여라.

(b) 표본 크기 n이 클 때 다음 기각역이 (a)에서의 기각역을 근사하는 것을 설명하여라.

$$2\alpha_0\sum_{r=2}^{n}\log(X_{(r)}/X_{(1)}) \leq \chi^2_{0.975}(2n-2) \text{ 또는 } 2\alpha_0\sum_{r=2}^{n}\log(X_{(r)}/X_{(1)}) \geq \chi^2_{0.025}(2n-2)$$

[3] (20점 (a)10점 (b)10점)

이변량 정규분포

$$N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),\ \sigma_1^2>0,\ \sigma_2^2>0,\ -1<\rho<1$$

에서의 랜덤표본 $(X_1, Y_1)', \cdots, (X_n, Y_n)'\,(n>2)$을 이용하여 가설

$$H_0 : \rho \leq \rho_0 \quad vs \quad H_1 : \rho > \rho_0 \quad (\rho_0\text{는 주어진 값})$$

을 검정할 때 다음에 답하여라. 답하는 과정에서 다음을 증명없이 이용해도 좋다.

1) 표본상관계수를 r_n이라고 하면, $(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$의 최대가능도 추정량은

$$\left(\hat{\mu}_1^{\Omega},\hat{\mu}_2^{\Omega},\hat{\sigma}_1^{2\,\Omega},\hat{\sigma}_2^{2\,\Omega},\hat{\rho}^{\Omega}\right) = \left(\overline{X},\overline{Y},\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2,r_n\right)$$

이고 고정된 ρ에 대하여 $(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$의 최대가능도 추정량은

$$\left(\hat{\mu}_1^{\Omega},\hat{\mu}_2^{\Omega},\frac{1-r_n\rho}{1-\rho^2}\hat{\sigma}_1^{2\,\Omega},\frac{1-r_n\rho}{1-\rho^2}\hat{\sigma}_2^{2\,\Omega}\right)$$

2) $$\frac{r_n}{\sqrt{1-r_n^2}} \overset{d}{\equiv} \frac{\sqrt{\mathrm{V}_1}\,\rho/\sqrt{1-\rho^2}+\mathrm{U}}{\sqrt{\mathrm{V}_2}}$$

$\mathrm{V}_1 \sim \chi^2(n-1),\ \mathrm{V}_2 \sim \chi^2(n-2),\ \mathrm{U} \sim \mathrm{N}(0,1)$ 이고 $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{U}$는 서로 독립

(a) $\rho_0 = 0$인 경우에 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$의 최대가능도비 검정의 기각역이

$$\sqrt{n-2}\,\frac{r_n}{\sqrt{1-r_n^2}} \geq t_\alpha(n-2)$$

로 주어지는 것을 밝혀라.

(b) 표본크기 n이 큰 경우에 근사적으로 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$인 최대가능도비 검정의 기각역이

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}\left(\log\frac{1+r_n}{1-r_n} - \log\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right) \geq z_\alpha$$

로 주어지는 것을 밝혀라.

[4] (20점 (a)5점 (b)5점 (c)10점)

$k\,(k\geq 3)$개의 정규분포 $\mathrm{N}(\mu_i,\sigma_i^2),\ -\infty<\mu_i<+\infty,\ \sigma_i^2>0\ (i=1,\cdots,k)$에서의 서로 독립인 랜덤표본 $\mathrm{X}_{i1},\cdots,\mathrm{X}_{in_i}(i=1,\cdots,k)$를 이용하여 다음 가설을 검정하려고 할 때 다음에 답하여라.

$$H_0:\sigma_1^2=\cdots=\sigma_k^2 \quad vs \quad H_1:\sigma_1^2,\cdots,\sigma_k^2\text{이 모두 같지는 않다.}$$

(a) 최대가능도비 검정통계량이 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라. 다음에서 $\widehat{\sigma^2}^0$는 귀무가설 H_0하에서의 공통인 분산의 최대가능도 추정량을 뜻한다.

$$2\left\{l(\hat{\theta})-l(\hat{\theta}^0)\right\} = -\sum_{i=1}^{k} n_i \log(\widehat{\sigma_i^2}/\widehat{\sigma^2}^0)$$

$$\widehat{\sigma_i^2} = \sum_{j=1}^{n_i}(\mathrm{X}_{ij}-\widehat{\mu_i})^2/n_i,\ \widehat{\mu_i} = \sum_{j=1}^{n_i}\mathrm{X}_{ij}/n_i,\ \widehat{\sigma^2}^0 = \sum_{i=1}^{k} n_i\widehat{\sigma_i^2}/n,\ \ n=n_1+\cdots+n_k$$

(b) 표본 크기에 대하여

$$n_i\to\infty,\ n_i/(n_1+\cdots+n_k)\to\gamma_i\,(0<\gamma_i<1)\ (i=1,\cdots,k)$$

이 만족된다고 할 때, 귀무가설 H_0하에서 최대가능도 검정통계량의 다음과 같은 근사에 대하여 설명하여라.

$$2\left\{l(\hat{\theta})-l(\hat{\theta}^0)\right\} \simeq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(\widehat{\sigma_i^2}/\widehat{\sigma^2}^0-1)^2$$

(c) (b)로부터 최대가능도비 검정통계량이 귀무가설 H_0하에서 근사적으로 $\chi^2(k-1)$ 분포를 따르는 것을 설명하여라.

[5] (20점 (a)10점 (b)10점)

음이항분포 Negbin$(r_i, p_i)(0 < p_i < 1)$ 즉 확률밀도함수가

$$f(x;p_i) = \binom{x-1}{r_i-1} p_i^{r_i}(1-p_i)^{x-r_i},\ x = r_i, r_i+1, \cdots$$

인 분포를 따르고 서로 독립인 $k\,(k \geq 2)$개의 확률변수 $\mathrm{X}_i(i=1,\cdots,k)$를 이용하여 다음 가설을 검정하려고 할 때 다음에 답하여라.

$$H_0 : p_1 = \cdots = p_k \quad vs \quad H_1 : p_1, \cdots, p_k \text{가 모두 같지는 않다.}$$

(a) $$r_i \to \infty,\ r_i / (r_1 + \cdots + r_k) \to \gamma_i\,(0 < \gamma_i < 1)\ (i = 1, \cdots, k)$$

가 만족될 때, 귀무가설 H_0하에서 최대가능도비 검정통계량을 다음과 같이 근사할 수 있음을 설명하여라.

$$2\left\{ l(\hat{p}) - l(\hat{p}^0) \right\} \simeq \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{X}_i - r_i/\hat{p}_i^0)^2}{r_i \hat{q}_i^0 / (\hat{p}_i^0)^2}$$

$$(\hat{p}_i)^{-1} = \frac{\mathrm{X}_i}{r_i},\ (\hat{p}_i^0)^{-1} = \frac{1}{r_{\bullet}} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{X}_j,\ r_{\bullet} = r_1 + \cdots + r_k,\ \hat{q}_i^0 = 1 - \hat{p}_i^0$$

(b) (a)로부터 최대가능도비 검정통계량이 귀무가설 H_0하에서 근사적으로 $\chi^2(k-1)$ 분포를 따르는 것을 설명하여라.

수리통계 2　중간 시험 2 (11/14/2016)

[1] (20점))
확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta - 1} \mathrm{I}_{(0,1)}(x)$$

로 주어지는 베타분포 $B(\theta,1), \theta > 0$에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$ 을 이용하여

$$H_0 : \theta \geq 1 \quad vs \quad H_1 : \theta < 1$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha(0 < \alpha < 1)$의 최대가능도비 검정을 구하여라.

[2] (20점)
확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathrm{I}_{[\mu,\infty)}(x)$$

로 주어지는 두 개의 모수를 갖는 지수분포 $\mathrm{Exp}(\mu,\sigma), -\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$에서 랜덤표본 $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$ 전부를 관측할 수 없고, 이들의 일부분인 순서통계량

$$\mathrm{X}_{(1)} \leq \cdots \leq \mathrm{X}_{(r)} \ (1 < r < n)$$

만을 관측할 수 있다고 한다. 이를 이용하여 가설

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad vs \quad H_1 : \sigma \neq \sigma_0 \quad (\sigma_0\text{는 주어진 값})$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha(0 < \alpha < 1)$의 최대가능도비 검정을 구하여라.

[3] (20점 (a)5점 (b)5점 (c)10점)
확률밀도함수가

$$f(x;\theta_i) = \theta_i x^{-\theta_i - 1} \mathrm{I}_{(1,+\infty)}(x) \ (i = 1, \cdots, k)$$

로 주어지는 $k(k \geq 3)$개의 파레토분포 $\mathrm{Pareto}(1,\theta_i), \theta_i > 0$에서의 서로 독립인 랜덤표본 $\mathrm{X}_{i1}, \cdots, \mathrm{X}_{in_i} (i = 1, \cdots, k)$를 이용하여 다음 가설을 검정하려고 할 때 다음에 답하여라.

$$H_0 : \theta_1 = \cdots = \theta_k \quad vs \quad H_1 : \theta_1, \cdots, \theta_k\text{가 모두 같지는 않다.}$$

(a) 최대가능도비 검정통계량이 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라.

$$2\left\{l(\hat{\theta}) - l(\hat{\theta}^0)\right\} = 2\sum_{i=1}^{k} n_i \left\{-\log(\hat{\theta}_i^0 / \hat{\theta}_i)\right\}$$

$$\hat{\theta}_i = \left(\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} \log \mathrm{X}_{ij}\right)^{-1}, \ \hat{\theta}_i^0 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \log \mathrm{X}_{ij}\right)^{-1}, n = n_1 + \cdots + n_k$$

(b) 표본 크기에 대하여

$$n_i \to \infty, n_i / (n_1 + \cdots + n_k) \to \gamma_i \ (0 < \gamma_i < 1) \ (i = 1, \cdots, k)$$

이 만족된다고 할 때, 귀무가설 H_0하에서 최대가능도 검정통계량의 다음과 같은 근사에 대하여 설명하여라.

$$2\left\{l(\hat{\theta}) - l(\hat{\theta}^0)\right\} \simeq \sum_{i=1}^{k} n_i (\hat{\theta}_i^0 / \hat{\theta}_i - 1)^2$$

(c) (b)로부터 최대가능도비 검정통계량이 귀무가설 H_0하에서 근사적으로 $\chi^2(k-1)$ 분포를 따르는 것을 설명하여라.

[4] (20점 (a)10점 (b)10점)
이변량 정규분포

$$N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),\ \sigma_1^2 > 0,\ \sigma_2^2 > 0,\ -1 < \rho < 1$$

에서의 랜덤표본 $(X_1, Y_1)', \cdots, (X_n, Y_n)'\ (n > 2)$을 이용하여 가설

$$H_0 : \rho \le \rho_0 \quad vs \quad H_1 : \rho > \rho_0 \quad (\rho_0\text{는 주어진 값})$$

을 검정할 때 다음에 답하여라. 답하는 과정에서 다음과 같은 분포에 관한 등식이 성립하는 것을 이용하여도 좋다

$$.\frac{r_n}{\sqrt{1-r_n^2}} \overset{d}{\equiv} \frac{\sqrt{V_1}\,\rho/\sqrt{1-\rho^2}+U}{\sqrt{V_2}}$$

$V_1 \sim \chi^2(n-1),\ V_2 \sim \chi^2(n-2),\ U \sim N(0,1)$ 이고 V_1, V_2, U는 서로 독립.

(a) $\rho_0 = 0$인 경우에 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$의 최대가능도비 검정의 기각역이

$$\sqrt{n-2}\,\frac{r_n}{\sqrt{1-r_n^2}} \ge t_\alpha(n-2)$$

로 주어지는 것을 밝혀라. 여기에서 r_n은 표본상관계수이다.

(b) 표본크기 n이 큰 경우에 근사적으로 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$인 최대가능도비 검정의 기각역이

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}\left(\log\frac{1+r_n}{1-r_n} - \log\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right) \ge z_\alpha$$

로 주어지는 것을 밝혀라.

[5] (20점 (a)10점 (b)10점)
균등분포 $U[-\theta, 2\theta], \theta > 0$에서의 랜덤표본을 $X_1,\cdots,X_n$이라고 할 때 다음에 답하여라.

(a) $S = (\min_{1 \le i \le n} X_i,\ \max_{1 \le i \le n} X_i)^t$가 $\theta \in (0, +\infty)$에 관한 완비통계량이 아님을 밝혀라.

(b) $Y = \max(-X_{(1)}, \frac{1}{2}X_{(n)})$가 $\theta \in (0, +\infty)$에 관한 완비충분통계량임을 밝히고, θ의 전역최소분산불편추정량을 구하여라.

수리통계 2 중간 시험 2 (10/29/2015)

[1] (20점: (a)10점 (b)10점)
확률밀도함수가

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta - 1} \mathrm{I}_{(0,1)}(x)$$

로 주어지는 베타분포 $B(\theta,1)$, $\theta > 0$에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n$ 을 이용하여

$$H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq 1$$

을 검정할 때, 다음에 답하여라.
(a) 유의수준 $\alpha(0 < \alpha < 1)$의 최대가능도비 검정을 구하여라.
(b) 표본 크기 n이 클 때 (a)에서의 기각역이 다음과 같이 근사되는 것을 설명하여라.

$$\text{“}-2n\,\overline{\log \mathrm{X}} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(2n) \quad \text{또는} \quad -2n\,\overline{\log \mathrm{X}} \ge \chi^2_{\alpha/2}(2n)\text{”}$$

[2] (20점)
확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathrm{I}_{[\mu,\infty)}(x)$$

로 주어지는 두 개의 모수를 갖는 지수분포 $\mathrm{Exp}(\mu,\sigma)$, $-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n$을 이용하여

$$H_0 : \mu \le \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu > \mu_0 \quad (\mu_0\text{는 주어진 값})$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha(0 < \alpha < 1)$의 최대가능도비 검정을 구하여라.

[3] (20점: (a)10점 (b)10점)
확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathrm{I}_{[\mu,\infty)}(x)$$

로 주어지는 두 개의 모수를 갖는 지수분포 $\mathrm{Exp}(\mu,\sigma)$, $-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n$을 이용하여 가설

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad vs \quad H_1 : \sigma \neq \sigma_0 \quad (\sigma_0\text{는 주어진 값})$$

을 검정할 때, 다음에 답하여라.
(a) 유의수준 $\alpha(0 < \alpha < 1)$의 최대가능도비 검정을 구하여라.
(b) 표본 크기 n이 클 때 (a)에서의 기각역의 근사에 대하여 설명하여라.

[4] (20점 (a)5점 (b)5점 (c)10점)
$k\,(k \geq 3)$개의 베르누이 분포 Bernoull(p_i), $0 \leq p_i \leq 1\,(i=1,\cdots,k)$에서 서로 독립인 랜덤표본 $X_{i1},\cdots,X_{in_i}$를 이용하여 다음 가설을 검정하려고 할 때 다음에 답하여라.

$$H_0 : p_1 = \cdots = p_k \quad vs \quad H_1 : p_1,\cdots,p_k\text{가 모두 같지는 않다.}$$

(a) 최대가능도비 검정통계량이 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라. 다음에서 $\hat{p}^0$는 귀무가설 H_0하에서의 공통인 비율의 최대가능도 추정량을 뜻한다.

$$2\left\{l(\hat{p}) - l(\hat{p}^0)\right\} = 2\sum_{i=1}^{k}\left\{n_i\hat{p}_i \log(\hat{p}_i/\hat{p}^0) + n_i\hat{q}_i \log(\hat{q}_i/\hat{q}^0)\right\}$$

$$\hat{p}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}/n_i = 1 - \hat{q}_i,\ \hat{p}^0 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}/n = 1 - \hat{q}^0,\ n = n_1 + \cdots + n_k$$

(b) 표본 크기에 대하여

$$n_i \to \infty,\ n_i/(n_1+\cdots+n_k) \to \gamma_i\,(0<\gamma_i<1)\ (i=1,\cdots,k)$$

이 만족된다고 할 때, 귀무가설 H_0하에서 최대가능도 검정통계량의 다음과 같은 근사에 대하여 설명하여라.

$$2\left\{l(\hat{p}) - l(\hat{p}^0)\right\} \simeq \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{X_{i\cdot} - n_i\hat{p}^0}{\sqrt{n_i\hat{p}^0\hat{q}^0}}\right)^2,\ X_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

(c) (b)로부터 최대가능도비 검정통계량이 귀무가설 H_0하에서 근사적으로 $\chi^2(k-1)$ 분포를 따르는 것을 설명하여라.

[5] (20점 (a)5점 (b)5점 (c)10점)
$k\,(k \geq 3)$개의 정규분포 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $-\infty < \mu_i < +\infty$, $\sigma_i^2 > 0\,(i=1,\cdots,k)$에서의 서로 독립인 랜덤표본 $X_{i1},\cdots,X_{in_i}\,(i=1,\cdots,k)$를 이용하여 다음 가설을 검정하려고 할 때 다음에 답하여라.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \cdots = \sigma_k^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2,\cdots,\sigma_k^2\text{이 모두 같지는 않다.}$$

(a) 최대가능도비 검정통계량이 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라. 다음에서 $\widehat{\sigma^2}^0$는 귀무가설 H_0하에서의 공통인 분산의 최대가능도 추정량을 뜻한다.

$$2\left\{l(\hat{\theta}) - l(\hat{\theta}^0)\right\} = -\sum_{i=1}^{k} n_i \log(\widehat{\sigma_i^2}/\widehat{\sigma^2}^0)$$

$$\widehat{\sigma_i^2} = \sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \hat{\mu}_i)^2/n_i,\ \hat{\mu}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}/n_i,\ \widehat{\sigma^2}^0 = \sum_{i=1}^{k} n_i\widehat{\sigma_i^2}/n,\ \ n = n_1 + \cdots + n_k$$

(b) 표본 크기에 대하여

$$n_i \to \infty,\ n_i/(n_1+\cdots+n_k) \to \gamma_i\,(0<\gamma_i<1)\ (i=1,\cdots,k)$$

이 만족된다고 할 때, 귀무가설 H_0하에서 최대가능도 검정통계량의 다음과 같은 근사에 대하여 설명하여라.

$$2\left\{l(\hat{\theta}) - l(\hat{\theta}^0)\right\} \simeq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(\widehat{\sigma_i^2}/\widehat{\sigma^2}^0 - 1)^2$$

(c) (b)로부터 최대가능도비 검정통계량이 귀무가설 H_0하에서 근사적으로 $\chi^2(k-1)$ 분포를 따르는 것을 설명하여라.