실험 계획 및 실습

Homework #(**5**)
2014-16757 김보창

---

1 Q1

14.18

y_{ijkl}을 strength라 하면, heat는 vendor마다 다르므로, nested design을 사용해야 한다. 즉, heat은 vendor에 nested된다.

따라서 τ를 bar size, β를 vendor, γ를 heat이라 하면,

모형은 다음과 같다. $y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{k(j)} + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik(j)} + \epsilon_{ijkl}$, $i = 1, 2..a$, $j = 1, ..b$, $k = 1, ...c$, $l = 1, ..n$ 이고,

a = 3, b = 3, c = 3, n = 2이다.

14.16의 경우, τ, β가 fixed, γ가 random이므로, restricted form에서 조건은 다음과 같다.

$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$, $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$, $\gamma_{k(j)} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\gamma^2)$

$\sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij} = 0$, $\sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij} = 0$,

$\sum_{i=1}^{a} (\tau\gamma)_{ik(j)} = 0$, $(\tau\gamma)_{ik(j)} \overset{\text{indep for k,j}}{\sim} N(0, \frac{a-1}{a}\sigma_{\tau\gamma}^2)$, $Cov((\tau\gamma)_{ik(j)}, (\tau\gamma)_{i'k(j)}) = -\frac{1}{a}\sigma_{\tau\gamma}^2, (i \neq i')$ $\epsilon_{ijkl} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$

위의 모형에서, EMS 결과와 그에 따른 F_0의 값은 다음과 같다.

Homework #(**5**)
2014-16757 김보창

14.16 GMS

	F a i	F b j	R c k	R n l	df	GMS	name
τ_i	0	b	c	n	$a-1$	$bcn \frac{\sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a-1} + n\sigma_{\tau r}^2 + \sigma^2$	MSA
β_j	a	0	c	n	$b-1$	$acn \frac{\sum_{j=1}^{b} \beta_j^2}{b-1} + an\sigma_r^2 + \sigma^2$	MSB
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	c	n	$(a-1)(b-1)$	$cn \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} + n\sigma_{\tau r}^2 + \sigma^2$	MSAB
$r_{k(j)}$	a	1	1	n	$b(c-1)$	$an\sigma_r^2 + \sigma^2$	MSC(B)
$(\tau r)_{ik(j)}$	0	1	1	n	$b(a-1)(c-1)$	$n\sigma_{\tau r}^2 + \sigma^2$	MSAC(B)
$\varepsilon_{(ijk)l}$	1	1	1	1	$abc(n-1)$	σ^2	MSE

$H_0: \tau_i = 0$ for all i vs $H_1: \tau_i \neq 0$ any i

$$F_0 = \frac{MSA}{MSAC(B)} \underset{\text{under } H_0}{\sim} F_{(a-1),\, b(a-1)(c-1)}$$

$H_0: \beta_j = 0$ for all j vs $H_1: \beta_j \neq 0$ any j

$$F_0 = \frac{MSB}{MSC(B)} \underset{\text{under } H_0}{\sim} F_{(b-1),\, b(c-1)}$$

$H_0: (\tau\beta)_{ij} = 0$ for all i,j vs $H_1: (\tau\beta)_{ij} \neq 0$ any i,j

$$F_0 = \frac{MSAB}{MSAC(B)} \underset{\text{under } H_0}{\sim} F_{(a-1)(b-1),\, b(a-1)(c-1)}$$

$H_0: \sigma_r^2 = 0$ vs $H_1: \sigma_r^2 > 0$

$$F_0 = \frac{MSC}{MSE} \underset{\text{under } H_0}{\sim} F_{b(c-1),\, abc(n-1)}$$

$H_0: \sigma_{\tau r}^2 = 0$ vs $H_1: \sigma_{\tau r}^2 > 0$

$$F_0 = \frac{MSAC(B)}{MSE} \underset{\text{under } H_0}{\sim} F_{b(a-1)(c-1),\, abc(n-1)}$$

Homework #(**5**)
2014-16757 김보창

14.18의 경우, β가 fixed, τ, γ가 random이므로, restricted form에서 조건은 다음과 같다.
$\tau_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\tau^2)$, $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$, $\gamma_{k(j)} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\gamma^2)$

$\sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij} = 0$, $(\tau\beta)_{ij} \overset{\text{indep for i}}{\sim} N(0, \frac{b-1}{b}\sigma_{\tau\beta}^2)$, $Cov((\tau\beta)_{ij}, (\tau\beta)_{ij'}) = -\frac{1}{b}\sigma_{\tau\beta}^2, (j \neq j')$

$(\tau\gamma)_{ik(j)} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} N(0, \sigma_{\tau\gamma}^2)$ $\epsilon_{ijkl} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$
이에 해당하는 EMS와, 각 H_0에 해당하는 F_0는 다음과 같다.

Homework #(**5**)
2014-16757 김보창

14, 18 EMS

	R a i	F b j	R c k	R n l	df	EMS	name
τ_i	1	b	c	n	$a-1$	$bcn\sigma_\tau^2 + n\sigma_{\tau r}^2 + \sigma^2$	MSA
β_j	a	0	c	n	$b-1$	$acn\dfrac{\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1} + cn\sigma_{\tau\beta}^2 + an\sigma_r^2 + n\sigma_{\tau r}^2 + \sigma^2$	MSB
$(\tau\beta)_{ij}$	1	0	c	n	$(a-1)(b-1)$	$cn\sigma_{\tau\beta}^2 + n\sigma_{\tau r}^2 + \sigma^2$	MSAB
$r_{k(j)}$	a	1	1	n	$b(c-1)$	$an\sigma_r^2 + n\sigma_{\tau r}^2 + \sigma^2$	MSC(B)
$(\tau r)_{ik(j)}$	1	1	1	n	$b(a-1)(c-1)$	$n\sigma_{\tau r}^2 + \sigma^2$	MSAC(B)
$\epsilon_{(ijk)l}$	1	1	1	1	$abc(n-1)$	σ^2	MSE

$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_\tau^2 > 0$

$$F_0 = \frac{MSA}{MSAC(B)} \underset{\text{under } H_0}{\sim} F_{(a-1),\, b(a-1)(c-1)}$$

$H_0 : \beta_j = 0$ for all j vs $H_1 : \beta_j \neq 0$ any j

$$F_0 = \frac{MSB + MSAC(B)}{MSAB + MSC(B)} \underset{\text{approx}}{\overset{\text{under } H_0}{\sim}} F_{p,q},\quad p = \frac{(MSB + MSAC(B))^2}{\frac{MSB^2}{b-1} + \frac{(MSAC(B))^2}{b(a-1)(c-1)}},\quad q = \frac{(MSAB + MSC(B))^2}{\frac{MSAB^2}{(a-1)(b-1)} + \frac{MSC(B)^2}{b(c-1)}}$$

$H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_{\tau\beta}^2 > 0$

$$F_0 = \frac{MSAB}{MSAC(B)} \underset{\text{under } H_0}{\sim} F_{(a-1)(b-1),\, b(a-1)(c-1)}$$

$H_0 : \sigma_r^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_r^2 > 0$

$$F_0 = \frac{MSC(B)}{MSAC(B)} \underset{\text{under } H_0}{\sim} F_{b(c-1),\, b(a-1)(c-1)}$$

$H_0 : \sigma_{\tau r}^2 = 0$ vs $H_1 : \sigma_{\tau r}^2 > 0$

$$F_0 = \frac{MSAC(B)}{MSE} \underset{\text{under } H_0}{\sim} F_{b(a-1)(c-1),\, abc(n-1)}$$

이제, 14.18 문제에서 각 귀무가설에 대해 test를 해보자.
유의수준 α에서 $F_0 > F_{df1,df2}(\alpha)$이면 귀무가설을 기각할 것이다.
이를 구하기 위해 F_0의 값을 구할것인데, 계산을 쉽게 하기 위해 R을 이용할 것이다.
다음 R코드를 이용하여 F_0의 값을 구한다.

```
library(EMSaov) # install.packages("EMSaov")
y <- c(1.230, 1.259, 1.346, 1.400, 1.235, 1.206, 1.316, 1.300, 1.329, 1.362,
    1.250, 1.239, 1.287, 1.292, 1.346, 1.382, 1.273, 1.215, 1.301, 1.263,
    1.346, 1.392, 1.315, 1.320, 1.274, 1.268, 1.384, 1.375, 1.346, 1.357,
    1.247, 1.215, 1.362, 1.328, 1.336, 1.342, 1.247, 1.296, 1.275, 1.268,
    1.324, 1.315, 1.273, 1.264, 1.260, 1.265, 1.392, 1.364, 1.301, 1.262,
    1.280, 1.271, 1.319, 1.323)
vendor <- as.factor(c(rep(1, 18), rep(2, 18), rep(3, 18)))
bar <- as.factor(rep(c(rep(1,6), rep(1.5,6), rep(2,6)), 3))
heat <- as.factor(rep(c(rep(1,2), rep(2,2), rep(3,2)), 9))
df <- data.frame(vendor, bar,  heat, y)

res <- EMSanova(y ~ bar + vendor + heat, data = df, type = c("R", "F", "R"),
    nested = c(NA, NA, "vendor"))
res
```

위 코드를 실행한 결과는 다음과 같다.

```
> df
   vendor bar heat     y
1       1   1    1 1.230
2       1   1    1 1.259
3       1   1    2 1.346
4       1   1    2 1.400
5       1   1    3 1.235
6       1   1    3 1.206
7       1 1.5    1 1.316
8       1 1.5    1 1.300
9       1 1.5    2 1.329
10      1 1.5    2 1.362
11      1 1.5    3 1.250
12      1 1.5    3 1.239
13      1   2    1 1.287
14      1   2    1 1.292
15      1   2    2 1.346
16      1   2    2 1.382
17      1   2    3 1.273
18      1   2    3 1.215
19      2   1    1 1.301
20      2   1    1 1.263
21      2   1    2 1.346
22      2   1    2 1.392
23      2   1    3 1.315
24      2   1    3 1.320
25      2 1.5    1 1.274
26      2 1.5    1 1.268
27      2 1.5    2 1.384
28      2 1.5    2 1.375
29      2 1.5    3 1.346
30      2 1.5    3 1.357
31      2   2    1 1.247
32      2   2    1 1.215
33      2   2    2 1.362
34      2   2    2 1.328
35      2   2    3 1.336
36      2   2    3 1.342
37      3   1    1 1.247
38      3   1    1 1.296
39      3   1    2 1.275
40      3   1    2 1.268
41      3   1    3 1.324
42      3   1    3 1.315
43      3 1.5    1 1.273
44      3 1.5    1 1.264
45      3 1.5    2 1.260
46      3 1.5    2 1.265
47      3 1.5    3 1.392
48      3 1.5    3 1.364
49      3   2    1 1.301
50      3   2    1 1.262
51      3   2    2 1.280
52      3   2    2 1.271
53      3   2    3 1.319
54      3   2    3 1.323
```

df 내부의 값들.

```
> res <- EMSanova(y ~ bar + vendor + heat, data = df, type = c("R", "F", "R"), nested = c(N
A, NA, "vendor"))
> res
                   Df          SS           MS  Fvalue  Pvalue Sig
bar                 2 0.002526259 0.0012631296  1.3742  0.2902
vendor              2 0.008848593 0.0044242963
bar:vendor          4 0.002375407 0.0005938519  0.6461  0.6402
heat(vendor)        6 0.100209333 0.0167015556 18.1698 <0.0001 ***
bar:heat(vendor)   12 0.011030333 0.0009191944  2.2741  0.0373   *
Residuals          27 0.010913500 0.0004042037
                                                                  EMS
bar                                        Error+2bar:heat(vendor)+18bar
vendor             Error+2bar:heat(vendor)+6heat(vendor)+6bar:vendor+18vendor
bar:vendor                           Error+2bar:heat(vendor)+6bar:vendor
heat(vendor)                       Error+2bar:heat(vendor)+6heat(vendor)
bar:heat(vendor)                                 Error+2bar:heat(vendor)
Residuals                                                          Error
```

F-test와 EMS 결과.

EMS로 우리가 구한 값과 같은 결과가 나왔음을 알 수 있고,
각 P-value의 값들을 통해, 유의수준 0.05에서 γ, $\tau\gamma$에 대한 귀무가설을 기각할 수 있음을 알 수 있다.
즉, $H_0 : \sigma^2_\gamma = 0$, $H_0 : \sigma^2_{\tau\gamma} = 0$인 두 귀무가설이 기각된다.
즉, heat에 의한 effect와 bar size, heat과의 interaction efffect 가 존재함을 알 수 있다.
vendor에 대한 귀무가설을 제외한 다른 귀무가설은 기각할 수 없다.
또한, F-test 결과를 보면, vendor에 대한 결과는 나오지 않았음을 알 수 있는데, 이는 앞에서 서술했듯이, vendor에 대한 F-test는 approximate test라 이에 해당하는 결과가 나오지 않았다.
이에 대한 approximate-test를 하기 위해, $\alpha = 0.05$에 해당되는, $F_{p,q}$의 값을 구하고, 이를 vendor에 해당하는 근사-F_0값과 비교해보자.

```
MSB <- 0.044242963
MSAC_B <- 0.0009191944
MSAB <- 0.0005938519
MSC_B <- 0.0167015556

p <- (MSB + MSAC_B)^2/((MSB^2)/(3-1) + (MSAC_B^2)/(3*2*2))
q <- (MSAB + MSC_B)^2/((MSAB^2)/(2*2) + (MSC_B^2)/(3*2))
approx_F <- (MSB + MSAC_B)/(MSAB + MSC_B)
p
q
F_val <- qf(0.95,p,q)
approx_F
F_val
approx_F > F_val
```

위 코드의 결과는 다음과 같다.

Homework #(**5**)
2014-16757 김보창

```
> MSB <- 0.044242963
> MSAC_B <- 0.0009191944
> MSAB <- 0.0005938519
> MSC_B <- 0.0167015556
>
> p <- (MSB + MSAC_B)^2/((MSB^2)/(3-1) + (MSAC_B^2)/(3*2*2))
> q <- (MSAB + MSC_B)^2/((MSAB^2)/(2*2) + (MSC_B^2)/(3*2))
> approx_F <- (MSB + MSAC_B)/(MSAB + MSC_B)
> p
[1] 2.083818
> q
[1] 6.422087
> F_val <- qf(0.95,p,q)
> approx_F
[1] 2.611223
> F_val
[1] 4.908185
> approx_F > F_val
[1] FALSE
> |
```

근사- F-test 값과 비교

이때, $F_0 > F_{p,q}(\alpha)$ 가 성립하지 않으므로, 근사 F-test에서는 vendor에 대한 H_0을 기각할 수 없다.
마찬가지로, 14.16에서의 테스트는 14.18에서 bar effect만 fixed 된것이므로, 다음과 같이 진행하면 된다.

```
res2 <- EMSanova(y ~ bar + vendor + heat, data = df, type = c("F", "F", "R"),
   nested = c(NA, NA, "vendor"))
res2
```

```
> res2 <- EMSanova(y ~ bar + vendor + heat, data = df, type = c("F", "F", "R"), nested = c(NA, NA, "vendor"))
> res2
                  Df          SS           MS  Fvalue  Pvalue Sig                              EMS
bar                2 0.002526259 0.0012631296  1.3742  0.2902          Error+2bar:heat(vendor)+18bar
vendor             2 0.008848593 0.0044242963  0.2649  0.7758        Error+6heat(vendor)+18vendor
bar:vendor         4 0.002375407 0.0005938519  0.6461  0.6402   Error+2bar:heat(vendor)+6bar:vendor
heat(vendor)       6 0.100209333 0.0167015556 41.3196 <0.0001 ***                Error+6heat(vendor)
bar:heat(vendor)  12 0.011030333 0.0009191944  2.2741  0.0373   *            Error+2bar:heat(vendor)
Residuals         27 0.010913500 0.0004042037                                                  Error
> |
```

14.16의 테스트 결과.

각 P-value의 값들을 통해, 유의수준 0.05에서 γ, $\tau\gamma$에 대한 귀무가설을 기각할 수 있고, 나머지는 기각할 수 없음을 알 수 있다.
즉, heat에 의한 effect와 bar size, heat과의 interaction efffect 가 존재함을 알 수 있다.

2 Q2

15.17
y_{ij}를 amount of removed metal이라 하면, 모형은 다음과 같다.
τ_i를 cutting speed effect, x_{ij}를 hardness of the specimen, β를 y와 x간의 regression coeffecient라 하면 모형은 다음과 같다. $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(x_{ij} - \bar{x}_{..}) + \epsilon_{ij}$, $i = 1, 2..a$, $j = 1, ..n$ 이고,
a = 3, n = 5 이다.
주어진 데이터를 ancova를 이용하여 분석해보자.
데이터를 분석하기 위해, treatment effect와, hardness에 의한 effect의 효과에 따라 다음과 같은 가설을 세워 ANACOVA test를 진행한다.

$$H_{0\tau} : \tau_i = 0, \forall i = 1, 2, 3$$
$$H_{1\tau} : \tau_i \neq 0, \exists i$$

$$H_{0\beta} : \beta = 0$$
$$H_{1\beta} : \beta \neq 0$$

로 귀무가설과 대립가설을 세우고, ANACOVA test를 진행하자.
이때, $H_{0\tau}$ 하에서

$$F_{0\tau} = \frac{SS_{E(\text{ reduced }\tau)} - SS_{E(full)}/(a-1)}{SS_{E(full)}/a(n-1)-1} \sim F_{a-1,a(n-1)-1}$$

, $H_{0\beta}$ 하에서

$$F_{0\beta} = \frac{SS_{E(\text{ reduced }\beta)} - SS_{E(full)}/1}{SS_{E(full)}/a(n-1)-1} \sim F_{1,a(n-1)-1}$$

을 따름을 알고,
$SS_{E(\text{ reduced }\tau)}$ 를 구하기 위한 reduced 모델은

$$y_{ij} = \mu + \beta(x_{ij} - \bar{x_{..}}) + \epsilon_{ij} = \alpha + \beta(x_{ij}) + \epsilon_{ij}$$

$(\mu - \beta\bar{x_{..}} = \alpha)$에서, 이는 simple linear regression case와 같으므로,
여기에서 $SS_{E(\text{ reduced }\tau)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_{ij})^2$
에서, $\bar{y_{..}} = \hat{\alpha} + \bar{x_{..}}\hat{\beta}, \hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ 임을 아므로,
$SS_{E(\text{ reduced }\tau)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y_{..}} - \frac{S_{xy}}{S_{xx}}(x_{ij} - \bar{x_{..}}))^2$ 임을 안다.
이때, $SS_{xy} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}(x_{ij} - \bar{x}), SS_{xx} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x_{..}})^2$.
또한,
$SS_{E(\text{ reduced}\beta)}$ 를 구하기 위핸 reduced 모델은 $y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$ 에서, $SS_{E(\text{ reduced }\beta)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y_{i.}})^2$ 임을 안다.
따라서, 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 $F_0 > F_{df1,df2}(\alpha)$이면 각 귀무가설을 기각할 것이다.
이를 구하기 위해 F_0의 값을 구할것인데, 계산을 쉽게 하기 위해 R을 이용할 것이다.
다음 R코드를 이용하여 F_0의 값을 구한다.

```
y <- c(68, 90, 98, 77, 88, 112, 94, 65, 74, 85, 118, 82, 73, 92, 80)
x <- c(120, 140, 150, 125, 136, 165, 140, 120, 125, 133, 175, 132, 124, 141,
   130)
cut_speed <- as.factor(c(rep(1000, 5), rep(1200, 5), rep(1400, 5)))
df2 <- data.frame(cut_speed, x, y)
df2
res_full <- aov(y ~ x + cut_speed ,data = df2)
summary(res_full)
res_tau <- aov(y ~ x ,data = df2)
summary(res_tau)
res_beta <- aov(y ~ cut_speed ,data = df2)
summary(res_beta)
```

```
> y <- c(68, 90, 98, 77, 88, 112, 94, 65, 74, 85, 118, 82, 73, 92, 80)
> x <- c(120, 140, 150, 125, 136, 165, 140, 120, 125, 133, 175, 132, 124, 141, 130)
> cut_speed <- as.factor(c(rep(1000, 5), rep(1200, 5), rep(1400, 5)))
> df2 <- data.frame(cut_speed, x, y)
> df2
   cut_speed   x   y
1       1000 120  68
2       1000 140  90
3       1000 150  98
4       1000 125  77
5       1000 136  88
6       1200 165 112
7       1200 140  94
8       1200 120  65
9       1200 125  74
10      1200 133  85
11      1400 175 118
12      1400 132  82
13      1400 124  73
14      1400 141  92
15      1400 130  80
> res_full <- aov(y ~ x + cut_speed ,data = df2)
> summary(res_full)
            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)    
x            1 3075.7  3075.7 354.455 1.02e-09 ***
cut_speed    2    2.4     1.2   0.139    0.872    
Residuals   11   95.5     8.7                     
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> res_tau <- aov(y ~ x ,data = df2)
> summary(res_tau)
            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)    
x            1 3075.7  3075.7   408.6 3.32e-11 ***
Residuals   13   97.9     7.5                     
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> res_beta <- aov(y ~ cut_speed ,data = df2)
> summary(res_beta)
            Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
cut_speed    2   58.8    29.4   0.113  0.894
Residuals   12 3114.8   259.6               
```

위의 실행 결과.

$SS_{E(\text{ full})} = 95.5$, $SS_{E(\text{ reduced } \tau)} = 97.9$, $SS_{E(\text{ reduced } \beta)} = 3114.8$ 임을 알 수 있다.
따라서 각 H_0를 test하기 위해, 다음과 같이 코드를 짜자.

```
SSE_full = 95.5
SSE_reduce_tau = 97.9
SSE_reduce_beta = 3114.8

F_0_tau <- ((SSE_reduce_tau - SSE_full)/(3-1)) / (SSE_full/(3*4 - 1))
F_0_beta <- ((SSE_reduce_beta - SSE_full)/(1)) / (SSE_full/(3*4 - 1))

F_val_tau <- qf(0.95,2,11)
F_val_beta <- qf(0.95,1,11)

F_0_tau
F_0_beta
F_val_tau
```

```
F_val_beta

F_0_tau > F_val_tau
F_0_beta > F_val_beta
```

```
> SSE_full = 95.5
> SSE_reduce_tau = 97.9
> SSE_reduce_beta = 3114.8
>
> F_0_tau <- ((SSE_reduce_tau - SSE_full)/(3-1)) / (SSE_full/(3*4 - 1))
> F_0_beta <- ((SSE_reduce_beta - SSE_full)/(1)) / (SSE_full/(3*4 - 1))
>
> F_val_tau <- qf(0.95,2,11)
> F_val_beta <- qf(0.95,1,11)
>
> F_0_tau
[1] 0.1382199
> F_0_beta
[1] 347.7728
> F_val_tau
[1] 3.982298
> F_val_beta
[1] 4.844336
>
> F_0_tau > F_val_tau
[1] FALSE
> F_0_beta > F_val_beta
[1] TRUE
> |
```

위의 실행 결과.

결과적으로, $F_{0\tau} > F_{2,11}(\alpha)$가 성립하지 않으므로, $H_{0\tau}$는 기각할 수 없고,
$F_{0\beta} > F_{1,11}(\alpha)$가 성립하므로, $H_{0\beta}$를 기각할 수 있음을 알 수 있다.
즉, hardness에 의한 effect가 존재함을 알 수 있다.