# 수리통계 2 　중간 시험 2 (2018.11.08)

[1] (20점 (a)15점 (b) 5점) 확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\mathrm{I}_{[\mu,\infty)}(x)$$

로 주어지는 두 개의 모수를 갖는 지수분포 $\mathrm{Exp}(\mu,\sigma)$, $-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n\,(n\ge 2)$을 이용하여 가설

$$H_0:\sigma=\sigma_0 \quad vs \quad H_1:\sigma\ne\sigma_0 \quad (\sigma_0\text{는 주어진 값})$$

을 검정할 때 다음에 답하여라.

(a) 유의수준 5% 의 최대가능도비 검정을 구하여라.

(b) 표본 크기 $n$이 클 때 다음 기각역이 (a)에서의 기각역을 근사하는 것을 설명하여라.

$$2n\hat{\sigma}^{MLE}/\sigma_0\le\chi^2_{0.975}(2n-2) \text{ 또는 } 2n\hat{\sigma}^{MLE}/\sigma_0\ge\chi^2_{0.025}(2n-2)$$

[2] (20점) 확률밀도함수가

$$f(x;\theta)=\theta x^{-\theta-1}\mathrm{I}_{(1,+\infty)}(x)$$

로 주어지는 파레토분포 $\mathrm{Pareto}(1,\theta),\theta>0$ 에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n$ 을 이용하여 가설

$$H_0:\theta\le\theta_0 \quad vs \quad H_1:\theta>\theta_0\ (\theta_0\text{는 주어진 값})$$

을 검정할 때 유의수준 5% 의 최대가능도비 검정을 구하여라.

[3] (20점 (a) 15점 (b) 5점) 두개의 베르누이 분포 $\mathrm{Bernoull}(p_i), 0\le p_i\le 1\,(i=1,2)$에서 서로 독립인 랜덤표본 $\mathrm{X}_{i1},\cdots,\mathrm{X}_{in_i}\,(i=1,2)$를 이용하여 다음 가설을 검정하려고 할 때 다음에 답하여라.

$$H_0:p_1\le p_2 \quad vs \quad H_1:p_1>p_2$$

(a) 표본 크기에 대하여

$$n_i\to\infty\,(i=1,2),\ n_1/(n_1+n_2)\to\gamma\,(0<\gamma<1)$$

이 만족된다고 할 때, 귀무가설 $H_0$하에서 최대가능도 검정통계량의 다음과 같은 근사에 대하여 설명하여라.

$$2\left\{l(\hat{p})-l(\hat{p}^0)\right\}\simeq\left(\frac{(\widehat{p_1}-\widehat{p_2})_+}{\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})\hat{\hat{p}}\hat{\hat{q}}}}\right)^2,\quad a_+\equiv\max(a,0)$$

여기에서

$$\widehat{p_i}=\sum_{j=1}^{n_i}\mathrm{X}_{ij}/n_i\,(i=1,2),\ \hat{\hat{p}}=\frac{n_1\widehat{p_1}+n_2\widehat{p_2}}{n_1+n_2}=1-\hat{\hat{q}}$$

(b) (a)에서와 같이 표본 크기가 한없이 커진다고 할 때, (a)에서의 최대가능도 검정통계량의 근사에 대하여 다음이 성립하는 것을 설명하여라.

$$\max_{p_1\le p_2}\lim_{n_i\to\infty}P_{p_1,p_2}\left(\frac{\widehat{p_1}-\widehat{p_2}}{\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})\hat{\hat{p}}\hat{\hat{q}}}}\ge 1.645\right)=0.05$$

[4] (20점 (a)10점 (b)10점) 이변량 정규분포

$$N_2(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix})\ ,\ \sigma_1^2>0,\ \sigma_2^2>0,\ -1<\rho<1$$

에서의 랜덤표본 $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)', \cdots, (\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)'\ (n>2)$을 이용하여 가설

$$H_0: \rho \le \rho_0 \quad vs \quad H_1: \rho > \rho_0 \quad (\rho_0\text{는 주어진 값})$$

을 검정할 때 다음에 답하여라.

(a) $\rho_0 = 0$인 경우에 유의수준 5%의 최대가능도비 검정의 기각역이

$$\sqrt{n-2}\,\frac{r_n}{\sqrt{1-r_n^2}} \ge t_{0.05}(n-2)$$

로 주어지는 것을 밝혀라.

(b) 표본크기 $n$이 큰 경우에 근사적으로 유의수준 5%인 최대가능도비 검정의 기각역이

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}\,(\log\frac{1+r_n}{1-r_n} - \log\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}) \ge 1.96$$

으로 주어지는 것을 밝혀라.

(a), (b)에 답하는 과정에서 다음 (1), (2)를 증명없이 이용해도 좋다.

(1) 표본상관계수를 $r_n$이라고 하면, $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$의 최대가능도 추정량은

$$\left(\hat{\mu}_1^{\Omega}, \hat{\mu}_2^{\Omega}, \hat{\sigma}_1^{2\,\Omega}, \hat{\sigma}_2^{2\,\Omega}, \hat{\rho}^{\Omega}\right) = \left(\overline{X}, \overline{Y}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2, r_n\right)$$

이고 고정된 $\rho$에 대하여 $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$의 최대가능도 추정량은

$$\left(\hat{\mu}_1^{\Omega}, \hat{\mu}_2^{\Omega}, \frac{1-r_n\rho}{1-\rho^2}\hat{\sigma}_1^{2\,\Omega}, \frac{1-r_n\rho}{1-\rho^2}\hat{\sigma}_2^{2\,\Omega}\right)$$

(2)
$$\frac{r_n}{\sqrt{1-r_n^2}} \overset{d}{\equiv} \frac{\sqrt{\mathrm{V}_1}\,\rho/\sqrt{1-\rho^2} + \mathrm{U}}{\sqrt{\mathrm{V}_2}}$$

$\mathrm{V}_1 \sim \chi^2(n-1),\ \mathrm{V}_2 \sim \chi^2(n-2),\ \mathrm{U} \sim \mathrm{N}(0,1)$ 이고 $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{U}$는 서로 독립

[5] (20점 (a)10점 (b)10점) 음이항분포 $\mathrm{Negbin}(r_i, p_i)(0<p_i<1)$ 즉 확률밀도함수가

$$f(x; p_i) = \binom{x-1}{r_i-1} p_i^{r_i}(1-p_i)^{x-r_i},\ x = r_i, r_i+1, \cdots$$

인 분포를 따르고 서로 독립인 $k\,(k\ge 2)$개의 확률변수 $\mathrm{X}_i (i=1,\cdots,k)$를 이용하여 다음 가설을 검정하려고 할 때 다음에 답하여라.

$$H_0: p_1 = \cdots = p_k \quad vs \quad H_1: p_1, \cdots, p_k\text{가 모두 같지는 않다.}$$

(a)
$$r_i \to \infty,\ r_i/(r_1+\cdots+r_k) \to \gamma_i\ (0<\gamma_i<1)\ (i=1,\cdots,k)$$

가 만족될 때, 귀무가설 $H_0$하에서 최대가능도비 검정통계량을 다음과 같이 근사할 수 있음을 설명하여라.

$$2\left\{l(\hat{p}) - l(\hat{p}^0)\right\} \simeq \sum_{i=1}^{k}\frac{(\mathrm{X}_i - r_i/\hat{p}_i^0)^2}{r_i\hat{q}_i^0/(\hat{p}_i^0)^2}$$

$$(\hat{p}_i)^{-1} = \frac{\mathrm{X}_i}{r_i},\ (\hat{p}_i^0)^{-1} = \frac{1}{r_\bullet}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{X}_j,\ r_\bullet = r_1+\cdots+r_k,\ \hat{q}_i^0 = 1-\hat{p}_i^0$$

(b) (a)로부터 최대가능도비 검정통계량이 귀무가설 $H_0$하에서 근사적으로 $\chi^2(k-1)$ 분포를 따르는 것을 설명하여라.