수리통계 2 (2017 가을) (7장 추가문제)

(추가 #1)(표본상관계수의 표본분포)(4장 관련 문제)

$(X_1, Y_1)', \cdots, (X_n, Y_n)'\ (n > 2)$이 이변량 정규분포

$$N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),\ \sigma_1^2 > 0,\ \sigma_2^2 > 0,\ -1 < \rho < 1$$

에서의 랜덤표본이고, r이 표본상관계수 즉

$$r = \frac{\sum_1^n (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_1^n (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_1^n (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

이라고 하자.

또한, $Z_i = (X_i - \mu_1)/\sigma_1$

$W_i = \{(Y_i - \mu_2)/\sigma_2 - \rho(X_i - \mu_1)/\sigma_1\}/\sqrt{1-\rho^2}\ (i = 1, \cdots, n)$

이라고 할 때, 다음에 답하여라.

(a) $\dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}} = \dfrac{S_{ZZ}\,\rho/\sqrt{1-\rho^2} + S_{ZW}}{\sqrt{S_{ZZ}S_{WW} - S_{ZW}^2}}$

임을 밝혀라. 여기에서

$S_{ZZ} = \sum_1^n (Z_i - \overline{Z})^2,\ S_{WW} = \sum_1^n (W_i - \overline{W})^2,\ S_{ZW} = \sum_1^n (Z_i - \overline{Z})(W_i - \overline{W}).$

(b) $T = ((Z_1 - \overline{Z})/\sqrt{S_{ZZ}}, \cdots, (Z_n - \overline{Z})/\sqrt{S_{ZZ}})'$라고 할 때, 다음을 밝혀라.

$$\{S_{WW} - S_{ZW}^2/S_{ZZ} = W'\{I - 1(1'1)^{-1}1' - T(T'T)^{-1}T'\}W$$

(c) $(Z_1, \cdots, Z_n)'$과 $(W_1, \cdots, W_n)'$이 서로 독립임을 밝히고, 이를 이용하여 다음을 밝혀라.

$(i)\ S_{WW} - S_{ZW}^2/S_{ZZ} \sim \chi^2(n-2)$이고, $(Z_1, \cdots, Z_n)'$과는 독립이다.

$(ii)\ S_{ZW}/\sqrt{S_{ZZ}} \sim N(0,1)$ 이고 $(Z_1, \cdots, Z_n)'$과는 독립이다.

$(iii)\ S_{WW} - S_{ZW}^2/S_{ZZ},\ S_{ZW}/\sqrt{S_{ZZ}},\ S_{ZZ}$는 서로 독립이다.

(d) (a)와 (b)로부터 다음이 성립함을 밝혀라.

$$\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \overset{d}{\equiv} \frac{\sqrt{V_1}\,\rho/\sqrt{1-\rho^2} + U}{\sqrt{V_2}}$$

$V_1 \sim \chi^2(n-1),\ V_2 \sim \chi^2(n-2),\ U \sim N(0,1)$ 이고 V_1, V_2, U는 서로 독립.

(추가 #2)(상관계수의 표본분포)

이변량 정규분포

$$N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),\ \sigma_1^2>0,\ \sigma_2^2>0,\ -1<\rho<1$$

에서의 랜덤표본 $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1)', \cdots, (\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)'\ (n>2)$을 이용하여 가설

$$H_0: \rho=\rho_0 \quad vs \quad H_1: \rho \neq \rho_0 \quad (\rho_0\text{는 주어진 값})$$

을 검정할 때 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$의 최대가능도비 검정을 하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) $\rho_0=0$인 경우에 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$의 최대가능도비 검정의 기각역이

$$\left|\sqrt{n-2}\,\frac{r_n}{\sqrt{1-r_n^2}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-2)$$

로 주어지는 것을 밝혀라. 여기에서 r_n은 표본상관계수이다.

(b) 표본크기 n이 큰 경우에 근사적으로 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$인 최대가능도비 검정의 기각역이

$$\left|\frac{1}{2}\sqrt{n}\left(\log\frac{1+r_n}{1-r_n}-\log\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)\right| > z_{\alpha/2}$$

로 주어지는 것을 밝혀라.