수리통계 2 중간 시험 1 (10/11/2018)

[1] (20점 (a)10점 (b)10점)
$N(\theta,\theta^2),\ 0<\theta<+\infty$ 모형에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n\ (n\geq 2)$ 을 이용하여 θ를 추정하려고 한다. (a) θ의 적률이용추정량 $\widehat{\theta_n}^{MME}$ 으로서 항상 양수의 값을 갖는 추정량을 제안하고,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta_n}^{MME}/\theta-1)$$

의 극한분포를 구하여라.

(b) θ의 최대가능도 추정량 $\widehat{\theta_n}^{MLE}$을 구하고 표본 크기 n이 클 때

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta_n}^{MLE}/\theta-1)$$

의 극한분포를 구하여라.

[2] (20점 (a)10점 (b)10점)
$\mathrm{Beta}(\alpha,\alpha),\alpha>0$ 모형에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n$ 을 이용하여 α를 추정하려고 한다.

(a) α의 적률이용추정량 $\widehat{\alpha_n}^{MME}$을 구하여라.

(b) α의 최대가능도추정량 $\widehat{\alpha_n}^{MME}$은 가능도방정식의 하나뿐인 근으로 주어지는 것을 밝혀라. 이에 답하는 과정에서 스털링(Stirling)의 공식

$$\Gamma(m+1)\sim m^{m+1/2}e^{-m}\sqrt{2\pi},\ \ m\to\infty$$

을 이용하여라. 여기에서 $a_m\sim b_m,\ m\to\infty$의 의미는 $\lim_{m\to\infty}a_m/b_m=1$을 뜻한다.

[3] (15점 (a)10점 (b) 5점)
확률밀도함수가

$$f(x;\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}\exp(-x^{\alpha})I_{(0,+\infty)}(x)$$

인 와이불분포 $\mathrm{Weibull}(\alpha,1),\alpha>0$ 모형에서의 랜덤표본 $X_1,\cdots,X_n$을 이용하여 α를 추정하려고 한다.

(a) α의 최대가능도추정량 $\widehat{\alpha_n}^{MLE}$은 가능도방정식의 하나뿐인 근으로 주어지는 것을 밝히고, 이의 일단계 반복법에 의한 근사방법을 설명하여라.

(b) α의 최대가능도추정량 $\widehat{\alpha_n}^{MLE}$에 대하여 표본 크기 n이 클 때

$$\sqrt{n}(\widehat{\alpha_n}^{MLE}/\alpha-1)$$

의 극한분포를 구하여라. 이에 답하는 과정에서 극한분포의 유도를 위한 조건은 모두 만족된다고 전제하고, 다음을 이용하여라. $Z\sim\mathrm{Exp}(1)$일 때

$$E(\log Z)=-0.577,\ \mathrm{Var}(\log Z)=1.6449,\ \ E\{Z(\log Z)^2\}=0.8236$$

[4](15점 (a) 5점 (b)10점)

확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\mathrm{I}_{[\mu,\infty)}(x)$$

로 주어지는 지수분포 $\mathrm{Exp}(\mu,\sigma)$, $-\infty<\mu<+\infty, \sigma>0$ 모형에서의 랜덤표본 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n (n\geq 2)$을 이용하여

μ,σ와 $\eta=\mathrm{P}_{\mu,\sigma}(\mathrm{X}_1>\mathrm{a})$ (a는 주어진 값)

에 대한 추론을 할 때 다음에 답하여라.

(a) μ,σ의 최대가능도 추정량 $\hat{\mu},\hat{\sigma}$ 에 대하여 $(n-1)(\hat{\mu}-\mu)/\hat{\sigma}$의 분포를 구하고, 이를 이용하여 μ의 95% 신뢰구간을 구하여라.

(b) η의 최대가능도 추정량 $\hat{\eta_n}$을 구하고, 표본 크기 n이 클 때 $\sqrt{n}(\hat{\eta_n}-\eta)$의 극한분포를 구하여라.

[5] (15점)

확률밀도함수가

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\frac{e^{(x-\mu)/\sigma}}{(1+e^{(x-\mu)/\sigma})^2}\mathrm{I}_{(-\infty,+\infty)}(x)$$

인 로지스틱분포 $\mathrm{L}(\mu,\sigma),-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$ 모형에서의 랜덤표본을 $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n (n\geq 2)$이라고 할 때 모수 μ,σ의 최대가능도 추정량을 구하는 과정을 설명하여라. (참고: $\eta_1=1/\sigma, \eta_2=\mu/\sigma$를 이용)

[6] (15점 (a) 5점 (b)10점)

모집단 상관계수 ρ 의 값이 $\underline{\rho_0\ (-1<\rho_0<+1)\text{로 알려진}}$ 이변량 정규분포

$$N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho_0\sigma_1\sigma_2\\ \rho_0\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right),-\infty<\mu_1<+\infty,\ -\infty<\mu_2<+\infty,\ \sigma_1^2>0,\ \sigma_2^2>0$$

에서의 랜덤표본 $(\mathrm{X}_1,\mathrm{Y}_1)',\cdots,(\mathrm{X}_n,\mathrm{Y}_n)'\ (n>2)$을 이용하여 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$의 최대가능도 추정량을 구하려고 할 때 다음에 답하여라.

(a) 이 경우에 지수족의 성질을 이용하여 최대가능도 추정량을 구할 수가 없다. 그 이유를 구체적으로 기술하여라.

(b) $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$의 최대가능도추정량 $\hat{\mu_1}^0,\hat{\mu_2}^0,\hat{\sigma_1^2}^0,\hat{\sigma_2^2}^0$이 다음과 같이 주어지는 것을 밝혀라.

$$\hat{\mu_1}^0=\overline{\mathrm{X}},\hat{\mu_2}^0=\overline{\mathrm{Y}},\hat{\sigma_i^2}^0=\frac{1-\hat{\rho}\rho_0}{1-\rho_0^2}\hat{\sigma_i^2}\ (i=1,2)$$

여기에서

$$\hat{\sigma_1^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X_i}-\overline{\mathrm{X}})^2,\ \hat{\sigma_2^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})^2$$

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_1^n(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})}{\sqrt{\sum_1^n(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}\sqrt{\sum_1^n(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})^2}}$$