Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Formalismos

1.1. Introducción a la Teoría de Conjuntos

1.1.1. Definiciones

Definición 1.1.1. Se conoce por **Conjunto** [1] a una estructura finita de elementos que guardan una relación entre si.

Definición 1.1.2. Los elementos que componen un conjunto reciben también el nombre de **objetos**.

Corolario 1.1.3. *Existen dos métodos para describir un conjunto: conjuntos por extensión y conjuntos por compresión.*

i. Se define **Conjunto por Extensión**: Se dice que un conjunto está descrito por extensión cuando todos los elementos que lo componen se puede enumerar. Normalmente se denotan los elementos entre corchetes:

   Ejemplo 1.1.4. El conjunto O, contiene los dígitos de 0 a 9:

$$O = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \tag{1.1}$$

ii. Se define **Conjunto por Compresión**: Se dice que un conjunto está descrito por compresión cuando sus elementos se describen a través de una propiedad.

   Ejemplo 1.1.5. El conjunto P, contiene lus número pares de 0 a 9:

$$P = \{x \;/\; (x\,\%2 = 0) \wedge (x >= 0 \;\&\; x < 10)\} \tag{1.2}$$

Definición 1.1.6. Dos conjuntos son iguales si y sólo si contienen los mismos elementos (incluyendo los repetidos).

Ejemplo 1.1.7. Son iguales los siguientes conjuntos:

$$A = B \Rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 0, 4, 4, 4, 5, 3, 3, 2, 1, 1, 1\} \tag{1.3}$$

Definición 1.1.8. Se dice que un conjunto O es un subconjuto de P, si todos los elementos de O forman parte de P.

Ejemplo 1.1.9. Para los conjuntos: $O = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ y $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ decimos:

$$O \subseteq P \tag{1.4}$$

Definición 1.1.10. Se denomina **Conjunto Universal** al conjunto origen a partir del cual derivan otros conjuntos. Se denota como U.

Ejemplo 1.1.11. El conjunto universal U contiene a todos los números naturales:

$$U = \{1, 2, \ldots, n\} \tag{1.5}$$

Luego P es subconjunto de U porque P se describe como el **conjunto de los números natuales primos**:

$$P = \{1, 2, 3, 5, \ldots, n\} \subseteq U \tag{1.6}$$

Definición 1.1.12. Se denomina **Conjunto Vacío** al conjunto que no contiene ningún elemento. Se denota como: $\varnothing$.

Ejemplo 1.1.13. Se puede decir formalmente que el conjunto vacío:

$$\varnothing \equiv \{\ \} \equiv \{\varnothing\} \tag{1.7}$$

1.1.2. Operaciones

I. Unión:

Definición 1.1.14. Dados los conjuntos O y P se tiene por **Unión** de ambos (denotado mediante el signo $\cup$) $O \cup P$, a otro conjunto que contiene los elementos de: O y P y ambos.

Ejemplo 1.1.15. Sea $O = \{v, o, c, a, l, e, s\}$ y $P = \{a, e, i, o, u\}$. Se tiene:

$$O \cup P = \{a, e, i, o, u, v, c, l, s\} \tag{1.8}$$

Propiedades:

i. Propiedad Conmutativa:

$$O \cup P \equiv P \cup O = \{a, e, i, o, u, v, c, l, s\} \tag{1.9}$$

ii. Propiedad Asociativa: Para $Q = \{a, b, c, d\}$

$$(O \cup P) \cup Q \equiv O \cup (P \cup Q) = \{a, e, i, o, u, v, c, l, s, b, d\} \tag{1.10}$$

iii. Propiedad de Absorción:

$$O \cup U = U \tag{1.11}$$

iv. Propiedad de Idempotencia:

$$O \cup O \equiv O = \{v, o, c, a, l, e, s\} \tag{1.12}$$

v. Propiedad de Neutralidad:

$$O \cup \varnothing \equiv O = \{v, o, c, a, l, e, s\} \tag{1.13}$$

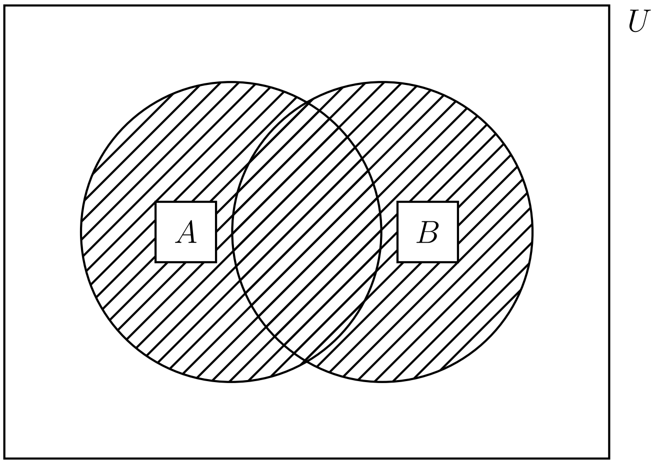


Figura 1.1: Relación de Unión entre dos conjutos genéricos.

II. Intersección:

Definición 1.1.16. Dados los conjuntos O y P se tiene por **Intersección** de ambos (denotado mediante el signo $\cap$) $O \cap P$, a otro conjunto que contiene los elementos comunes a O y P.

Ejemplo 1.1.17. Sea $O = \{v, o, c, a, l, e, s\}$ y $P = \{a, e, i, o, u\}$. Se tiene:

$$O \cap P = \{o, a, e\} \tag{1.14}$$

Propiedades:

i Propiedad Conmutativa:

$$O \cap P \equiv P \cap O = \{o, a, e\} \tag{1.15}$$

ii Propiedad Asociativa: $Q = \{a, b, c, d\}$

$$(O \cap P) \cap Q \equiv O \cap (P \cap Q) = \{a\} \tag{1.16}$$

iii Propiedad de Absorción:

$$\varnothing \cap O \equiv \varnothing = \varnothing \tag{1.17}$$

iv Propiedad de Idempotencia:

$$O \cap O \equiv O = \{v, o, c, a, l, e, s\} \tag{1.18}$$

v Propiedad de Neutralidad:

$$O \cap U \equiv O = \{v, o, c, a, l, e, s\} \tag{1.19}$$

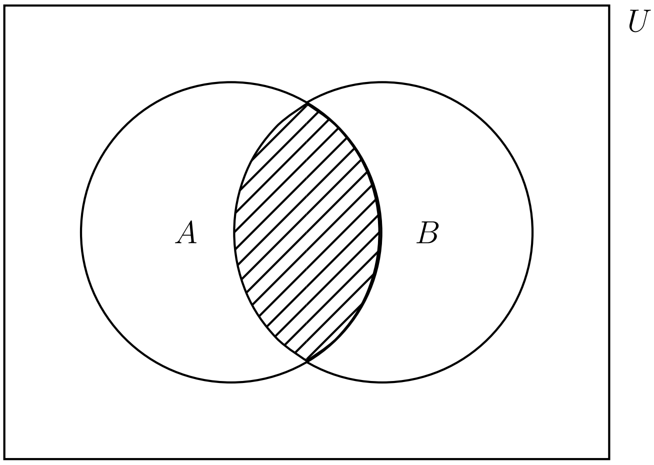


Figura 1.2: Relación de Intersección entre dos conjutos genéricos.

III. Leyes de De Morgan: Nos permiten establecer equivalencias entre los operadores antes vistos (Unión e Intersección)

Definición 1.1.18. Primera Ley:

$$\overline{O \cup P} = \bar{O} \cap \bar{P} \tag{1.20}$$

$$\overline{O \cup P} = \{v, c, l, s\} \equiv \bar{O} \cap \bar{P} = \{v, c, l, s\} \tag{1.21}$$

Definición 1.1.19. Segunda Ley:

$$\overline{O \cap P} = \bar{O} \cup \bar{P} \tag{1.22}$$

IV. Resta de Conjutos:

Definición 1.1.20. Dados los conjuntos O y P se tiene por **Resta** de ambos (denotado mediante el signo $-$) $O - P$, a aquellos elementos de O que no estén en P

$$O \cap P = \{v, c, l, s\} \tag{1.23}$$

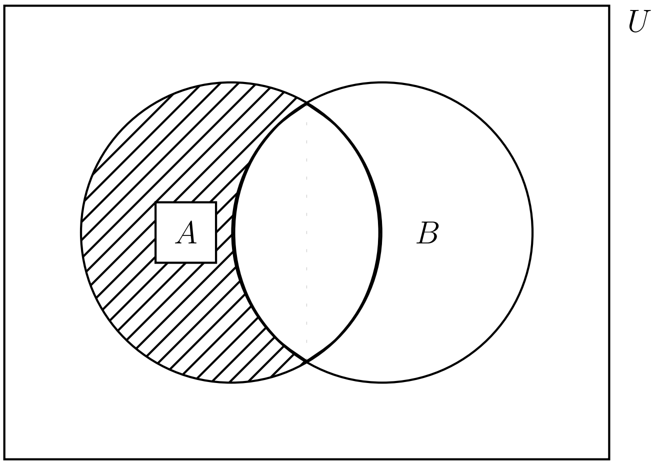


Figura 1.3: Relación de Resta entre dos conjutos genéricos.

V. Disjunción:

Definición 1.1.21. Dos conjuntos son **Disjuntos** cuando su intersección es vacía.

Ejemplo 1.1.22. Dados los conjuntos: $P = \{a, e, i, o, u\}$ y $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$P \cap Q = \varnothing \tag{1.24}$$

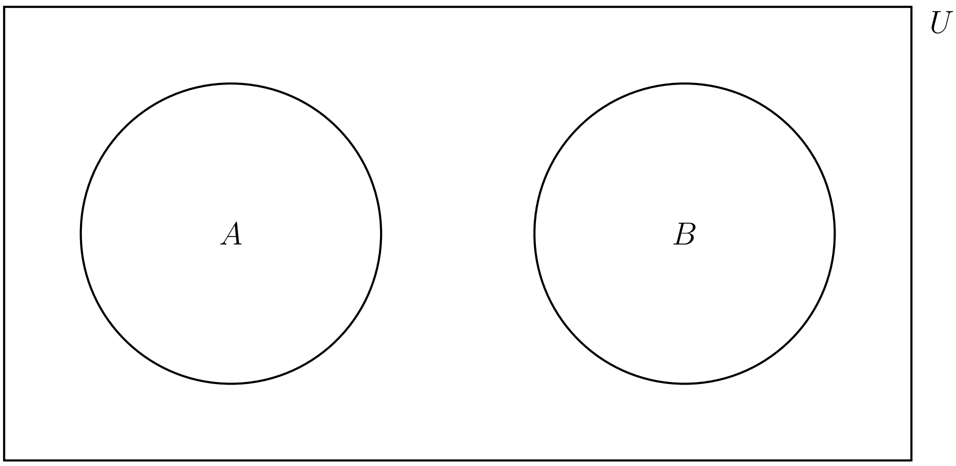


Figura 1.4: Relación de Dijunción entre dos conjutos genéricos.

VI. Diferencia Simétrica:

Definición 1.1.23. Dados los conjuntos O y P se entiende por **Diferencia Simétrica**, denotado como $\oplus$, a todos los elementos que están en O y no en P o todos los elementos que están en P y no en O.

Formalidad 1.1.24. $O \oplus P = (O - P) \cup (P - O)$

Ejemplo 1.1.25. Sea $O = \{a, b, c, d, e, f, g, i\}$ y $P = \{a, e, i, o, u\}$ se tiene:

$$O - P = \{b, c, d, f, g\} \wedge P - O = \{o, u\} \Rightarrow O \oplus P = \{b, c, d, f, g, o, u\} \tag{1.25}$$

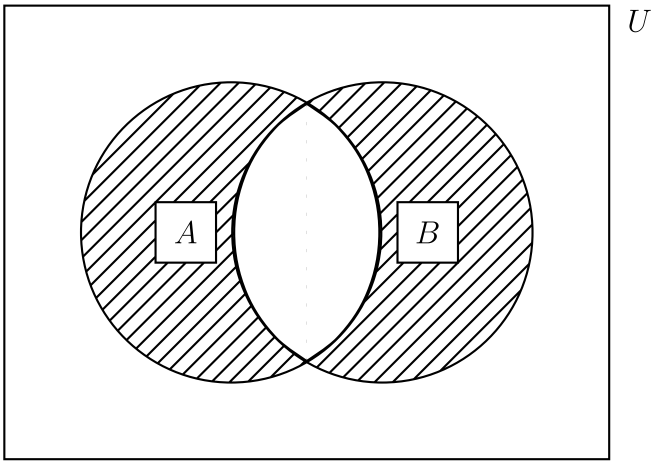


Figura 1.5: Relación de Deferencia Simétrica entre dos conjutos genéricos.

VII. Complemento:

Definición 1.1.26. Dado el conjunto P se tiene por **Complementario** (denotado mediante el signo $\bar{P}$), a aquellos elementos de P que pertenecen a U (en nuestro caso el alfabeto castellano) y no estan en el propio P

$$\bar{P} = \{b, c, d, \ldots, x, y, z\} \tag{1.26}$$

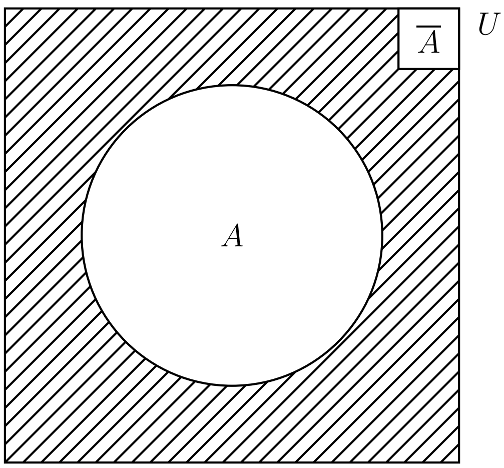


Figura 1.6: Relación de Complemento.

1.2. Relaciones

1.2.1. Definiciones

Definición 1.2.1. Denominamos **Par** a **todo conjunto finito de dos elementos**:

$$P = (a, b) \tag{1.27}$$

de modo que:

i. a es la **primera coordenada** o primer elemento.

ii. b de manera análoga, es la **segunda coordenada** o segundo elemento.

Definición 1.2.2. Dos pares: (a, b) y (c, d) **son iguales** si:

$$a = c \wedge b = d \tag{1.28}$$

Definición 1.2.3. Un Par es **idéntico** si:

$$a = b \tag{1.29}$$

Definición 1.2.4. El Par **recíproco** a (a, b) es:

$$(b, a) \tag{1.30}$$

1.2.2. Producto Cartesiano

Definición 1.2.5. Formalmente diremos que el **Producto Cartesiano** para (a, b) es:

$$A \times B = \{(a, b) \;/\; (a \in A) \;\wedge\; (b \in B)\} \tag{1.31}$$

Ejemplo 1.2.6. Para los conjuntos: $O = \{1, 3, 6\}$ y $P = \{2, 4\}$ tenemos:

$$O \times P = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (6, 2), (6, 4)\} \tag{1.32}$$

Propiedades:

i. **No Conmutativo**: Dados los conjuntos: $R = (a)$ y $S = (b)$ tenemos:

$$R \times S = \{(a, b)/(a \in R) \wedge (b \in S)\} \tag{1.33}$$

Por contra:

$$S \times R = \{(b, a)/(b \in S) \wedge (a \in R)\} \tag{1.34}$$

ii. **Asociativo**: Dados los conjuntos: $R = (a)$, $S = (b)$ y $T = (c)$ tenemos:

$$R \times S \times T = (R \times S) \times T = R \times (S \times T) \tag{1.35}$$

iii. **Distributivo**:

$$R \times (S \cap T) = (R \times S) \cap (R \times T) \tag{1.36}$$

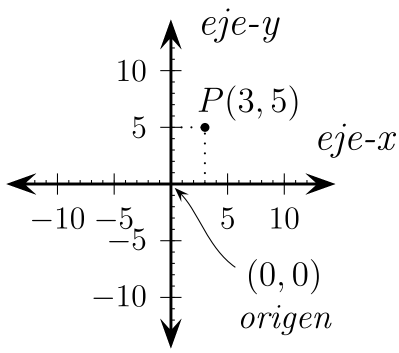
1.2.3. Representaciones

I. **Representación Mediante Tabla**: Para los conjuntos $O = (o_1, o_2, \ldots, o_m)$ y $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, cada elemento de O sería el índice de cada columna y, de manera análoga cada elemento de P constituiria el índice de una fila. **La intesección representa el Par resultado**.

II. **Representación Cartesiana**: Se representa mediante dos ejes. El eje horizontal corresponde al conjunto O y, el eje vertical corresponde al conjunto P. **La interseción de ambos (un Punto) es un Par producto**.

$\varnothing$	O_1	$\ldots$	O_m
P_1	$O \times P_{11}$	$\ldots$	$O \times P_{1m}$
P_2	$O \times P_{21}$	$\ldots$	$O \times P_{2m}$
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
P_n	$O \times P_{n1}$	$\ldots$	$O \times P_{nm}$

(a) Representación mediante tabla.



(b) Representación mediante Sistema Cartesiano.

Figura 1.7: Representaciones genéricas del Producto Cartesiano.

Nota: Para el Ejemplo (1.2.6):

1.2.4. Tipos

I. **Relaciones Binarias:**

Definición 1.2.7. Para dos conjuntos dados A y B y la relación $\Re$ decimos que: *"La Relación Binaria de A hacia B es de la forma"*:

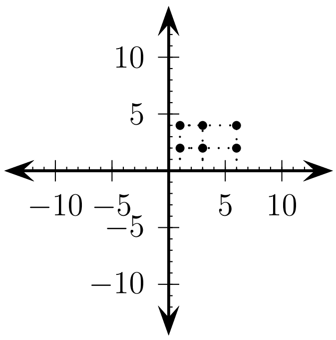
$$\Re = \{(a, b) \diagup (((a, b) \in A \times B) \wedge (a \Re b)) \tag{1.37}$$

Ejemplo 1.2.8. Para el conjunto: $O = \{1, 2, 3\}$; $o_i \Re o_j \Leftrightarrow o_i \cdot o_j$ *es número par*. Por ello tenemos:

$$o_i \Re o_j = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\} \tag{1.38}$$

∅	1	3	6
2	$(1,2)$	$(3,2)$	$(6,2)$
4	$(1,4)$	$(3,4)$	$(6,4)$

(a) Representación mediante tabla.



(b) Representación mediante Sistema Cartesiano.

Figura 1.8: Representaciones el producto cartesiano $O \times P$.

Representaciones de las Relaciones Binarias:

Nota: Para el Ejemplo (1.2.8):

i. Representación Cartesiana: Partiendo de la definición (1.2.3), **la intersección de los conjuntos es un Par de la Relación**.
ii. Representación Sagital: Partiendo de la definición (1.2.3), **el punto de intersección es un Par de la Relación**.
iii. Representación Matricial: Se trata de las transcipción directa de la **Representación Cartesiana** a Matriz donde, **cada a_{ij} representa un Par de la Relación**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Figura 1.9: Representación genérica de una Relación Binaria mediante una Matriz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II. **Relación Inversa:**

Definición 1.2.9. Definimos **Relación Inversa** (denotada como $\Re^{-1}$) a aquella relación entre pares que establece:

$$\Re^{-1} = \{(a,b)|(b,a) \in \Re\} \tag{1.39}$$

Ejemplo 1.2.10. Para el Ejemplo (1.2.8):

$$o_i \ \Re^{-1} o_j = \{(2,1),(1,2),(2,2),(2,3)\} \tag{1.40}$$

III. **Relación Complementaria:**

Definición 1.2.11. Definimos **Relación Complementaria** (denotada como $\overline{\Re}$) a aquella relación entre pares que establece:

$$\forall \ a \in A, b \in B; \ a \ \overline{\Re} \ b \Leftrightarrow a \ \Re \ b \notin (A \times B) \tag{1.41}$$

Ejemplo 1.2.12. Para el Ejemplo (1.2.8):

$$o_i \ \overline{\Re} \ o_j = \{(1,1),(1,3),(2,3),(3,1),(3,3)\} \tag{1.42}$$

IV. **Relaciones Transitivas:**

Definición 1.2.13. Definimos **Relación Transitiva** a aquella que cumple:

$$\forall \ a \in A, b \in B, c \in C; a \ \Re \ b \wedge b \ \Re \ c \Rightarrow a \ \Re \ b \tag{1.43}$$

Ejemplo 1.2.14. Para el Ejemplo (1.2.8) y el conjunto $P = \{4,5,6\} \Rightarrow p_i \ \Re \ p_j$ *es número par* $=$

$$o_i \ \Re \ p_j = \tag{1.44}$$

V. **Relación Compuesta:**

Definición 1.2.15. Definimos **Relación Compuesta** a aquella relación (en nuestro caso, con tres conjuntos origen) que se establece $\forall a \in A, b \in B, c \in C; A \subseteq B \wedge \ a \ \Re \ b$ y $B \subseteq C \wedge b \ \Im \ c$:

$$\Re \circ \Im = \{(a,c) \diagup \exists \ b \in B \Leftrightarrow \ a \ \Re \ b \wedge \ b \ \Im \ c\} \tag{1.45}$$

Ejemplo 1.2.16. Para el Ejemplo (1.2.8) y la relación en el conjunto P $p_i \ \Im \ p_j \Leftrightarrow o_i + o_j \,\%\, 3 = 0$

$$\Re \circ \Im = \{(1,2),(2,1)\} \tag{1.46}$$

1.3. Funciones

Definición 1.3.1. De manera somera podemos decir que una **Función** [2] es una regla que transforma un conjunto (**Conjunto Inicicial** o *Dominio*) **en otro nuevo conjunto** (**Conjunto Imagen** o *Recorrido*). Si establecemos el Conjunto Origen como D_1 y el Conjunto Imagen como R_1 tenemos la relación:

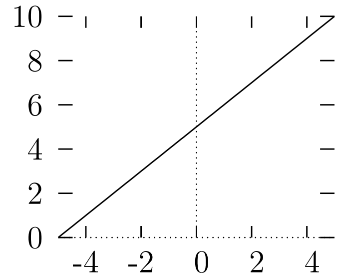
$$f : D_1 \longrightarrow R_1 \tag{1.47}$$

Ejemplo 1.3.2. Tenemos la función $f(x+5)$ y el Conjunto Origen $U = \{0,1,2,3,4,5\}$ por lo que:

$$f(O+5) = \{5,6,7,8,9,10\} \tag{1.48}$$

Dominio	*Recorrido*
0	5
1	6
2	7
3	8
4	9
5	10

(a) Representación mediante tabla.



(b) Representación gráfica.

Figura 1.10: Representaciones para la función: $f(x+5)$.

Definición 1.3.3. Formalmente **una función para una variable** (tomaremos x por convención) que pertenece al conjunto *Dominio*(x) le corresponden uno o varios valores en y que a su vez pertence al conjunto *Recorrido*(x)

$$y = f(x) \tag{1.49}$$

1.3.1. Propiedades

Para la relación: $f : D_1 \longrightarrow R_1$ tenemos la siguientes propiedades:

I. **Representación Gráfica**: el conjunto D_1 es un subconjunto del Producto Cartesiano $D_1 \times R_1$

II. **Imágen**: Establecemos que la Imagen de X como X' por lo que:

$$X\backslash \subset X : f(X') = \{f(x') \ / \ x' \in X'\} \tag{1.50}$$

III. **Imágen Recíproca**: Es la función inversa del Conjunto Imágen es decir:

$$f^{-1} : y \in Y = \{x \in X \ / \ f(x) = y\} \tag{1.51}$$

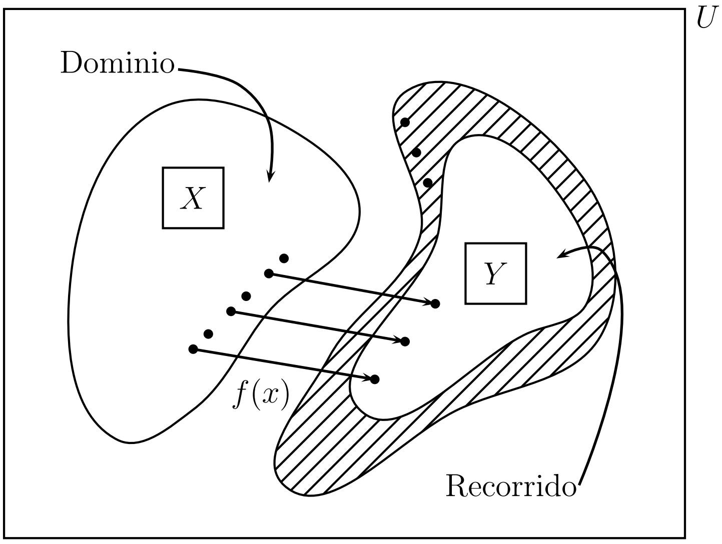


Figura 1.11: Relaciones entre los principales elementos de una función.

IV. **Restrición** de f sobre $U \subset X$:

$$f : U \longrightarrow Y \ / \ \{u_i \in U, u_i \in X, y \in Y\} \tag{1.52}$$

1.3.2. Tipos

Se conocen tres tipos de funciones dada por la relación entre los valores del Conjunto Inicial y los valores del Conjunto Imágen: $f : X \longrightarrow Y$

I. **Funciones Exhaustivas o Suprayectiva**: Una **Función es Exaustiva** si para cada elemento de x existe al menos un elemento en y

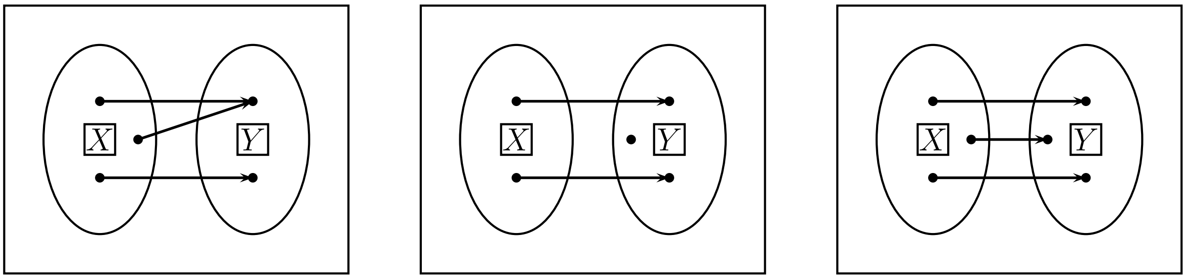
$$\forall \ y \ \in \ Y \ \exists \ x \ \in \ X \ / \ f(x) = y \tag{1.53}$$

II. **Funciones Inyectivas**: Una **Función es Inyectiva** si para cada elemento de y existe como máximo en x

$$\forall \ x \ \in \ X \ \exists \ y \ \in \ Y \ / \ f(x) = y \tag{1.54}$$

III. **Funciones Biyectivas**: Una **Función es Inyectiva** si para cada elemento de x existe un elemento de y

$$\exists \ x \ \in \ X \ y \ \exists \ y \ \in \ Y \ / \ f(x) = y \tag{1.55}$$



(a) Función Suprayectiva α (b) Función Inyectiva β (c) Función Biyectiva γ

Figura 1.12: Tipos de funciones basadas en la relación de Dominio y Recorrido.

1.3.3. Operaciones

Nota: Usaremos las funciones genéricas: $F(x) = (f_1, f_2x, \ldots, f_nx^{n-1})$ y $G(x) = (g_1, g_2x, \ldots, g_nx^{n-1})$ con $\{n \in \Bbbk\}$. A modo de ejemplos tendremos las funciones: $U(x) = \frac{3x+5}{2}$ y $V(x) = 4x^2 - 1$.

I. **Suma**:

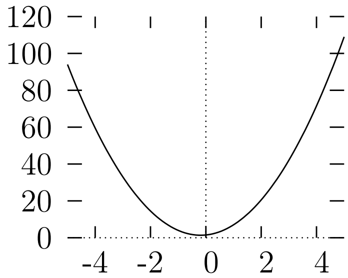
$$F(x) + G(x) = (f_1 + g_1, f_2x + g_2x \ldots, f_nx^{n-1} + g_nx^{n-1}) \ / \ \{n \in \Bbbk\} \tag{1.56}$$

Ejemplo 1.3.4.

$$U(x) + V(x) = \frac{8x^2 + 3x + 3}{2} \tag{1.57}$$

Dominio	*Recorrido*
0	$\frac{3}{2}$
1	7
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{8n^2+3n+3}{2}$

(a) Representación mediante tabla.



(b) Representación gráfica.

Figura 1.13: Representaciones para la función: $\frac{8x^2+3x+3}{2}$.

II. **Resta**:

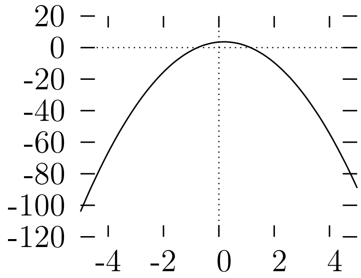
$$F(x) - G(x) = (f_1 - g_1, f_2x - g_2x \ldots, f_nx^{n-1} - g_nx^{n-1}) \ / \ \{n \in \Bbbk\} \tag{1.58}$$

Ejemplo 1.3.5.

$$U(x) - V(x) = \frac{-8x^2 + 3x + 7}{2} \tag{1.59}$$

Dominio	*Recorrido*
0	$\frac{3}{2}$
1	1
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{-8n^2+3n+7}{2}$

(a) Representación mediante tabla.



(b) Representación gráfica.

Figura 1.14: Representaciones para la función: $\frac{-8x^2+3x+7}{2}$.

III. **Producto**:

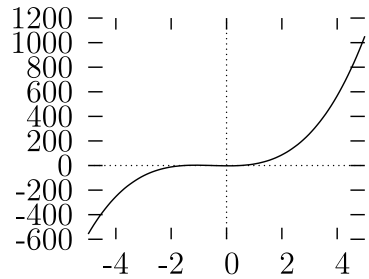
$$F(x) \cdot G(x) = \sum_{i=1}^{i=f_n} \prod_{j=1}^{j=g_n} f_i \cdot g_j \ / \ \{i, j \leqslant n\} \ e \ \{i, j \in \Bbbk\} \tag{1.60}$$

Ejemplo 1.3.6.

$$U(x) \cdot V(x) = \frac{13x^3 + 20x^2 - 3x - 5}{2} \tag{1.61}$$

Dominio	*Recorrido*
0	$\frac{-5}{2}$
1	$\frac{25}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{13n^3+20n^2-3n-5}{2}$

(a) Representación mediante tabla.



(b) Representación gráfica.

Figura 1.15: Representaciones para la función: $\frac{13x^3+20x^2-3x-5}{2}$.

IV. **División**:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{(f_1, f_2x, \ldots, f_nx^{n-1})}{(g_1, g_2x, \ldots, g_nx^{n-1})} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2x}{g_2x} + \ldots, \frac{f_nx^{n-1}}{g_nx^{n-1}} \ / \ \{n \in \Bbbk\} \tag{1.62}$$

Ejemplo 1.3.7.

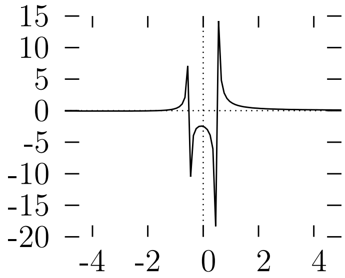
$$\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{3x + 5}{8x^2 - 2} \tag{1.63}$$

V. **Composición**:

$$F(x) \circ G(x) = F(G(x)) = (f_1, f_2(g(x)), \ldots f_n(g(x))) / \ \{n \in \Bbbk\} \tag{1.64}$$

Dominio	*Recorrido*
0	$\varnothing$
1	$\varnothing$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{3n+5}{8n^2-2}$

(a) Representación mediante tabla.



(b) Representación gráfica.

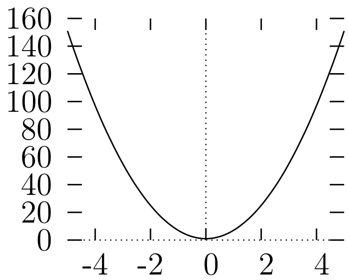
Figura 1.16: Representaciones para la función: $\frac{3x+5}{8x^2-2}$.

Ejemplo 1.3.8.

$$U(x) \circ V(x) = U(V(x)) = \frac{3(4x^2-1)+}{2} = \frac{12x^2+2}{2} = 6x^2+1 \tag{1.65}$$

Dominio	*Recorrido*
0	1
1	7
$\vdots$	$\vdots$
n	$6n^2+1$

(a) Representación mediante tabla.



(b) Representación gráfica.

Figura 1.17: Representaciones para la función: $6x^2+1$.

1.4. Álgebra de Boole

1.4.1. Generalidades

Definición 1.4.1. Un **Álgebra de Boole** se define como una tupla de cuatro elementos (también denomina retícula booleana):

$$(\mathfrak{B}, \sim, \oplus, \odot) \tag{1.66}$$

Dónde:

i. $\mathfrak{B}$: Se trata del **Conjunto de Variables Booleanas**.

ii. $\sim$: Se trata de una **operación interna unitaria** ($\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$) que cumple:

$$a \rightarrow b =\sim a \ / \ \{a, b \in \mathfrak{B}\} \tag{1.67}$$

iii. $\oplus$: Se trata de una **operación binaria interna** ($\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$:) que cumple:

$$(a, b) \to c = a \oplus b \,\diagup\, \{a, b, c \in \mathfrak{B}\} \tag{1.68}$$

iv. $\odot$: Se trata de una **operación binaria interna** ($\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$:) que cumple:

$$(a, b) \to c = a \odot b \,\diagup\, \{a, b, c \in \mathfrak{B}\} \tag{1.69}$$

Siendo las condiciones necesarias:

i. $a \oplus b = b$

ii. $a \odot b = a$

iii. $\sim a \oplus b = U$

iv. $a \odot \sim b = \varnothing$

Definición 1.4.2. Se establece una **relación directa entre el Álgebra de Boole y la Lógica Binaria** de manera que:

$$(\mathfrak{B}, \sim, \oplus, \odot) \equiv (\{0, 1\}, \bar{\ }, +, \cdot) \tag{1.70}$$

1.4.2. Lógica Binaria

Definición 1.4.3. Decimos que x, y son **Variables Booleanas Binarias** si:

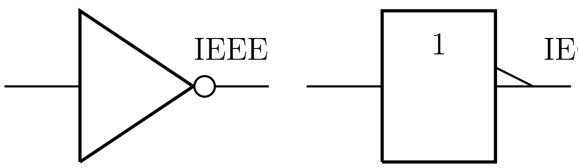
$$x, y \in (\{0, 1\}, \bar{\ }, +, \cdot) \tag{1.71}$$

por lo que cumplen:

I. **Operación Complemento** (Operación NOT):

x	$\bar{x}$	$x + \bar{x}$	$x \cdot \bar{x}$
0	1	1	0
1	0	1	0

(a) Tabla de la Verdad.



(b) Puertas Lógicas para IEEE e IEC.

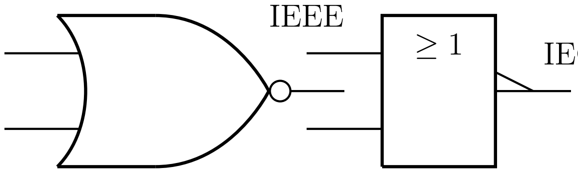
Figura 1.18: Representaciones comunes del Operador Booleano NOT.

II. **Operación de Suma** (Operación OR):

III. **Operación de Producto** (Operación AND):

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(a) Tabla de la Verdad.

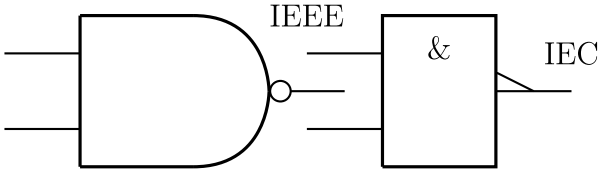


(b) Puertas Lógicas para IEEE e IEC.

Figura 1.19: Representaciones comunes del Operador Booleano OR.

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a) Tabla de la Verdad.



(b) Puertas Lógicas para IEEE e IEC.

Figura 1.20: Representaciones comunes del Operador Booleano AND.

1.4.3. Funciones Booleanas

Definición 1.4.4. Decimos que O es una **Función Booleana**:

$$O = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \Rightarrow u_i \in (\mathfrak{B}, \sim, \oplus, \odot) \tag{1.72}$$

de igual manera decirmos que O en una **Función Booleana Binaria** si:

$$O = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \Rightarrow u_i \in (\{0,1\}, \bar{\ }, +, \cdot) \tag{1.73}$$

Presentacion

Para el Álgebra de Boole tenemos dos operaciones fundamentales:

I. **Operación de Suma** de Funciones Booleanas Binarias para O y P:

$$O + P = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \tag{1.74}$$

II. **Operación de Producto** de Funciones Booleanas Binarias sobre O y P:

$$U \cdot V = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 \cdot v_1, u_2 \cdot v_2, \ldots, u_n \cdot v_n) \tag{1.75}$$

1.5. Nociones sobre Grafos

1.5.1. Definiciones

Definición 1.5.1. Un Grafo G **esta compuesto por tres conjuntos finitos** y necesariamente uno de ellos no vacío:

i. Conjunto V: El Conjunto de sus **Vértices** (**no puede ser vacío**).

ii. Conjunto E: El Conjunto de sus **Aristas**.

$$E \rightarrow V \ x \ V \tag{1.76}$$

iii. Conjunto p: El Conjunto de los **Pesos** o **Etiquetas** por aristas.

$$p : E \rightarrow V \ x \ V \tag{1.77}$$

Por ello establecemos la siguiente notación para describir un Grafo:

$$G = (V, E, p) \tag{1.78}$$

Definición 1.5.2. Para una arista dada: $a_\lambda = (v_1, v_2)$ decimos que:

i. v_1 es el **origen**.

ii. v_2 es el **destino** o **final**.

Ejemplo 1.5.3. Dado el siguiente grafo G_3 (ver Figura **??**):

i. $V = \{a, b, c\}$

ii. $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$

Definición 1.5.4. Decimos que una arista a_λ es **incidente** para dos vertices v_1, v_2 si une dichos vertices:

$$a_\lambda = (v_1, v_2) \ / \ v_1, v_2 \in V, \ \ a_\lambda \in E \tag{1.79}$$

Definición 1.5.5. Un vertice v_1 es **adyacente** sobre otros vertices v_λ si dicho vértice forma parte de la relación:

$$a_\lambda = (v_1, v_\lambda) \ / \ v_\lambda \in V, \ \ a_\lambda \in E \tag{1.80}$$

Definición 1.5.6. Una arista del tipo $a_1 = (v_1, v_1)$ se denomina **bucle** puesto que el vertice origen y destino son el mismo.

Definición 1.5.7. Si (a_1, a_2) inciden sobre el mismo vértice, se dice que son **arístas paralelas**.

Definición 1.5.8. Un vertice v_μ es un **vertice aislado** si para el conjunto E no existe ningún par o relación.

1.5.2. Clasificación

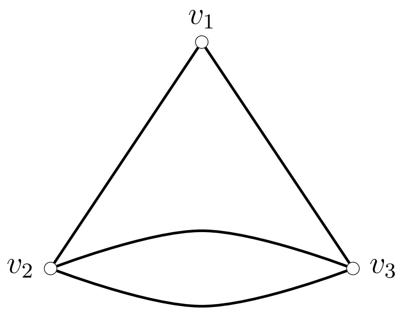
Definición 1.5.9. Un grafo $G = (V, E)$ que contiene más de un par de aristas para uno de sus vertices en un **Grafo Multigrafo**.

Definición 1.5.10. Un grafo $G = (V, E)$ que contiene al menos un bucle y ningún conjuto de aristas paralelas es lo que convencionalmente denominamos **Grafo**.

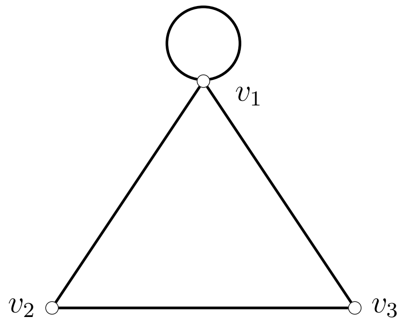
Definición 1.5.11. Para un grafo $G = (V, E, p)$, si $p = \emptyset$ y no existen bucles, se dice que es un **Grafo Simple**.

Corolario 1.5.12. *Si $p = \emptyset$ y existen bucles, el grafo se denomina **Grafo no Simple** .*

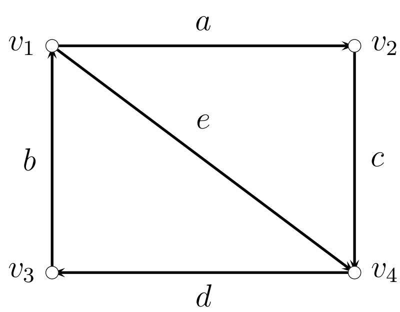
Definición 1.5.13. Para un grafo G de tipo simple, si $p \neq \emptyset$ entonces se denomina **Grafo Dirigido**.



(a) Multigrafo G_4.



(b) Grafo no simple G_5.



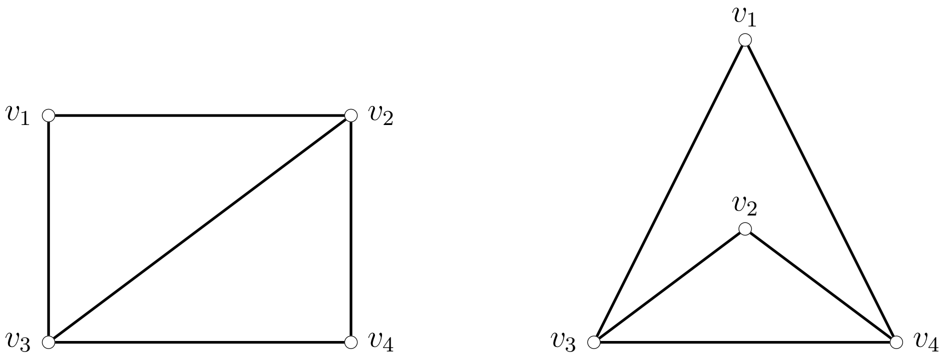
(c) Grafo dirigido G_6.

Figura 1.21: Ejemplo de Multigrafo y Grafo no simple y Grafo dirigido.

Definición 1.5.14. Dos grafos G_1 y G_2 son **Isomorfos** si existe una **Biyección** entre ellos α.

$$V_{G_1} = \{a, b, c\} \equiv \alpha V_{G_1} = V_{G_2} = \{\alpha(a) = d, \alpha(b) = e, \alpha(c) = f\} \tag{1.81}$$

Ejemplo 1.5.15. Para $G_9 \Rightarrow V(G_9) = \alpha\ \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in V(G_8) = \{\alpha(v_1) = v_1\prime,\ \alpha(v_2) = v_2\prime,\ \alpha(v_3) = v_3\prime,\ \alpha(v_4) = v_4\prime\}$



(a) Grafo G_8. (b) Grafo $G_9 \equiv \alpha G_8$.

Figura 1.22: Ejemplo de Grafos Isomorfos.

Definición 1.5.16. Denominamos grado de un vertice v_λ para un grafo $G = (V, E, p)$ al numero de artistas del grafo G en dicho vertice.

$$\delta(v) \diagup v \in V = \sum e_i \diagup \{e \in E, v \in e\} \tag{1.82}$$

Ejemplo 1.5.17. Para $G_4 \Rightarrow \delta(v_1) = 2;\ \delta(v_2) = 2;\ \delta(v_3) = 2;$

Teorema 1.5.18. *La suma de los grados de los vertices de un **grafo no dirigido** es igual al doble del número de aritas.*

$$\sum_{i=0}^{i=n} \delta(v_i) = 2 \cdot |E| \tag{1.83}$$

Ejemplo 1.5.19. Para $G_5 \Rightarrow \delta(v_1) = 3;\ \delta(v_2) = 2;\ \delta(v_3) = 2;\ \delta(v_4) = 3; \equiv 2 \cdot |E| = 2 \cdot 4 = 8$

Teorema 1.5.20. *Para un **grafo dirigido** $G = (V, E, p)$ se cumple:*

$$\sum_{i=0}^{i=n} \delta(v_i)^+ = \sum_{j=0}^{j=n} \delta(v_j)^- = |E| \tag{1.84}$$

Dónde:

i. $\delta(v)^+$: Es el número de arístas que se dirigen a v.

ii. $\delta(v)^-$: Es el número de arístas que parten de v.

Ejemplo 1.5.21. Para G_6:

i. $\delta^+ \Rightarrow \delta(v_1)^+ = 2;\ \delta(v_2)^+ = 1;\ \delta(v_3)^+ = 1;\ \delta(v_4)^+ = 1$

ii. $\delta^+ \Rightarrow \delta(v_1)^- = 1;\ \delta(v_2)^- = 1;\ \delta(v_3)^- = 1;\ \delta(v_4)^- = 2$

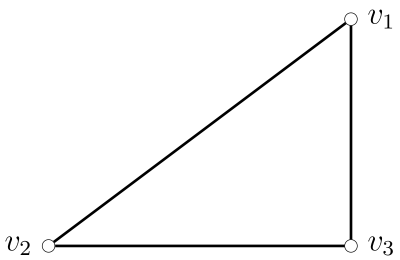
iii. $E = 5$

1.5.3. Tipos

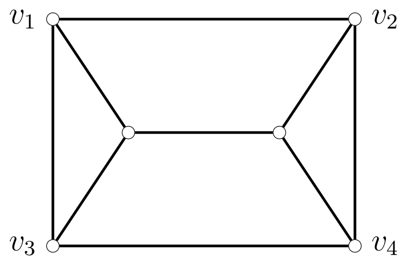
Definición 1.5.22. Se denomina **Grafo Completo** a aquel grafo simple de n vértices que tiene una sóla arista entre cada par de vértices. Se denotan como K_n.

Definición 1.5.23. Se denomina **Grafo Regular** a aquel que tiene en mismo grado en todos sus vértices.

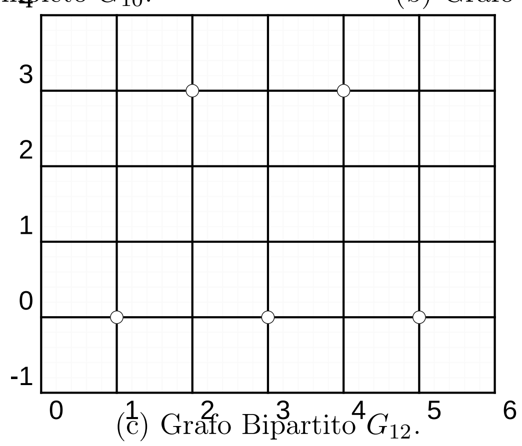
Definición 1.5.24. Se dice que un grafo es **Bipartito** si su número de vértices se pueden dividir en dos conjuntos $G = G_1 \cup G_2$ disjuntos $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.



(a) Grafo Completo G_{10}.



(b) Grafo Regular G_{11}.



(c) Grafo Bipartito G_{12}.

Figura 1.23: Ejemplo de Grafos: Completo, Regular y Bipartito.

1.5.4. Circuitos y Ciclos

I. Recorrido y Circuito Eureliano:

Definición 1.5.25. Un grafo $G = (V, E, p)$ (o multigrafo sin vértices asilados) contiene un camino simple (**Camino Simple de Eurler o Recorrido Eureliano**) que parte de v_0 hasta v_n y que pasa una sola vez por cada uno de los vértices.

Definición 1.5.26. Recibe el nombre de Circuito de Eurler a todo camino que pase una sola vez por todos los lados de un grafo G.

Corolario 1.5.27. *Si un grafo $G = (V, E)$ tiene un Circuito de Euler*[3]*, es un grafo eureliano.*

Teorema 1.5.28. *El Teorema de Euler dice que para un grafo $G = (V, E, p)$) o multigrafo (no digrafo) sin vértices aíslados, G posee un Circuito de Euler si y sólo si G es conexo y cada vertice tiene grado par.*

II. Recorrido y Ciclo Hamiltoniano:

Definición 1.5.29. Para un grafo $G = (V, E, p)$ con $|V| \geq 3$ sin vertices aislados. G tiene un **Camino Hamiltoniano** natural que recorre todos sus vértices.

Definición 1.5.30. Un grafo $G = (V, E, p)$ tiene un **Ciclo Hamiltoniano**[4] si existe un ciclo para todos los vértices de V.

Corolario 1.5.31. *Si un grafo tiene un Ciclo Hamiltoniano se dice que es un grafo hamiltoniano.*

Teorema 1.5.32. *Si un grafo $G = (V, E, p)$ tiene $|V| \geq 3$ y $\delta(v_i) \geq 2$, entonces G es hamiltoniano.*

1.5.5. Árboles

1.5.5.1. Generalidades

Definición 1.5.33. Un Árbol se define como un grafo conectado sin ciclos.

Teorema 1.5.34. *Dado un grafo T = (V,E) decimos que se trata de un árbol sí:*

i. T es un grafo acíclico.

ii. T está tiene un número de vertices n y de arista que las interconectan $(n - 1)$.

iii. Cada par de vértices está conectado únicamente por una arista.

Corolario 1.5.35. *Si para un árbol T eliminamos una arista de un par de vétices (u,v) el grafo resultante T' no tiene estructura de árbol.*

1.5.5.2. Árboles Generadores

Definición 1.5.36. Para una grafo simple $G = (V, E, p)$, existe un Árbol Generador T si y sólo si: $T(E) = G(E)$

Definición 1.5.37. Algoritmo de Prim: Un árbol generador mínimo de un grafo ponderado es un árbol tal que la suma de sus aristas el la mínima posible.

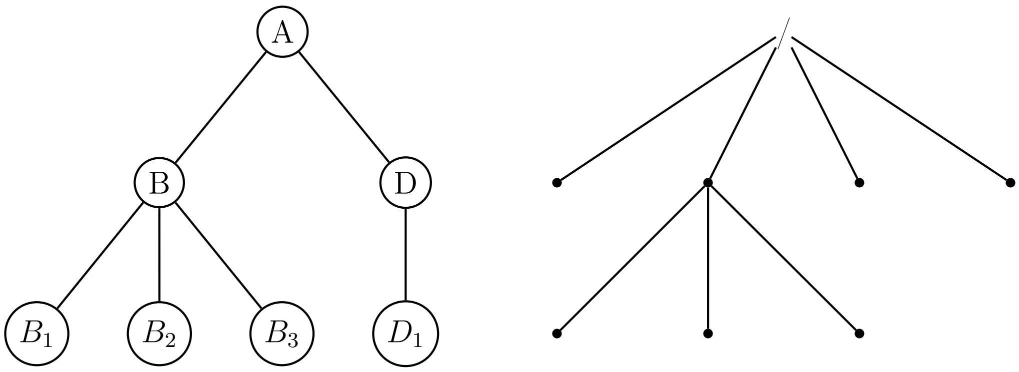
Definición 1.5.38. Dicho algoritmo utiliza una estuctura auxiliar de Cola para generar un nuevo conjunto de vértices partiendo de V inicial junto con su distancia o peso. Por medio de iteraciones ordena los vertices según la menor distancia con sus adyacentes hasta que la Cola de vertices está vacia. El árbol recubridor mínimo está completamente construido cuando no quedan más vértices por agregar.

Programa 1.5.39. Pseudocódigo para el Algoritmo de Prim

```
FUNCTION PRIM(G=(V,E,p)){
  /* $u \in V$ */
  $u$ = RANDOM(V);
  /* Tama\~{n}o de la Cola */
  S = {$u$};
  /* Proceso de a\~{n}adir a la Cola $P$ */
  $\forall v \in (V - S) \Rightarrow P_v = u$;
   /* Padre de $u$ es vac\'{i}o */
  $A' = \varnothing$;
  /* Distancia */
  $D = 0$;
  WHILE ($S \neq V$) {
     /* Obtenemos el m\'{i}nimo */
    $v =$ MIN($y \in (V - S)$) $p(P_y, y) \Rightarrow u = P_y$;
    $S = S \cup \{v\}$;
    $A' = A' \cup \{(u, v)\}$;
     /* Distancia de $v$ es el peso de $\{u, v\}$ */
    $D = D + p(u, v)$;
    $u = v$;
    $\forall v \in (V - S)$ IF ($p(u, v) < p(P_v, v)$) THEN $D = 0$;
    } RETURN (T=(S,E,D));
}
```

1.5.5.3. Árboles Binarios

Definición 1.5.40. Definimos un **Árbol con Raíz** si uno de sus vertices se nombra de esta manera (vértice Raíz R).



(a) Ejemplo de Árbol Binario. (b) Ejemplo de Árbol Raíz Binario.

Figura 1.24: Ejemplo de Árboles Binarios.

Definición 1.5.41. Un **Árbol con Raíz es *m-ario*** (con $m \geq 2$) si de designamos al ńumero máximo de hijos por cada nodo con m.

Corolario 1.5.42. *Los Árboles Binarios son de tipo 2-ario, es decir de profundidad* $m = 2$.

Recorridos: Existen tres tipos de algoritmos para recorrer Árboles Binarios:

I. **Preordén**: Parte de la raíz r para recorrer los vértices de: R_1, R_2, ..., R_n en Preordén.

II. **Postordén**: Recorre los vértices: R_1, R_2, ..., R_n en Postordén para terminar finalmente en r.

III. **Inordén**: Si r ni tiene ningún vértice, entonce r sería el recorrido.

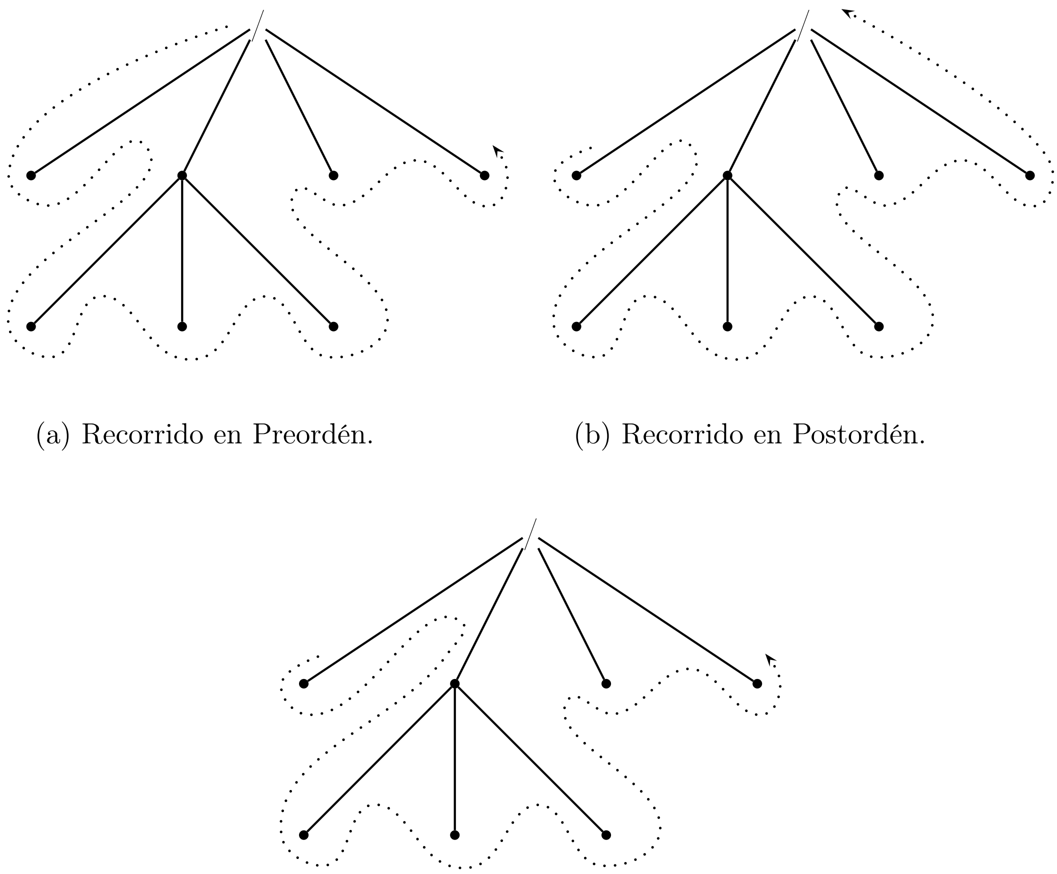
Si r contiene: R_1, R_2, ..., R_n entonces recorre los nodos de izquierda a derecha R_i para volver a r y recorrer en Inordén R_{i+1} hasta finalizar en R_n.

1.6. Teoría de Lenguajes

1.6.1. Definiones

Definición 1.6.1. Decimos que un **Alfabeto** es un conjunto de elementos finito y no vacio denotado como Σ.

Corolario 1.6.2. *Cada uno de estos elementos recibe el nombre de **símbolo**.*



(a) Recorrido en Preordén.

(b) Recorrido en Postordén.

(c) Recorrido en Inordén.

Figura 1.25: Recorridos para Árboles Binarios.

Definición 1.6.3. Existe una palabra común a todos los alfabetos que recibe el nombre de **Palabra Vacía**, denotada como: λ.

Corolario 1.6.4. *El conjunto de todas las palabras de un alfabeto (incluida la palabra vacía) se denota como:* Σ^*.

Ejemplo 1.6.5. El Alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ es un conjunto de símbolos que a su vez forma parte de todas las palabras que utiliza cualquier sistema binario (por ejemplo un Disco Compacto).

Ejemplo 1.6.6. El Alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$ es un conjunto de símbolos que a su vez forma parte de todas las palabras que utiliza la Lengua Castellana (que es un Lenguaje Humano).

1.6.2. Palabras

Definición 1.6.7. Decimos que una Palabra es una concatención de símbolos de un Alfabeto dado.

$$v \in \Sigma \Leftrightarrow v_i \in \Sigma \tag{1.85}$$

1.6.2.1. Operaciones

Nota: Se trabajan con dos palabras: $u = [hola]$ y $v = [Mundo]$. La palabra vacia se denotara con el símbolo $\lambda \Rightarrow |\lambda| = 0$

I. Concatenación: Entendemos que para un alfabeto dado Σ^* y dos palabras $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in \Sigma^*$ con $n, m \in \Bbbk$ por **concatenación** (denotado como $\circ$):

$$u \circ v = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m\} \tag{1.86}$$

Ejemplo 1.6.8. Para las palabras $u \ \wedge \ v$ se tiene por concatenación:

$$uv = [holaMundo] \tag{1.87}$$

Propiedades:

i) Dicha operación es cerrada: ?

ii) Dicha operación es asociativa: Para $w = [azul]$ tenemos:

$$(u \circ v) \circ w \equiv u \circ (v \circ w) = [holaMundoazul] \tag{1.88}$$

iii) Dicha operación tiene elemento neutro:

$$u \circ \lambda \equiv u = [hola] \tag{1.89}$$

iv) Dicha operación no es commutativa:

$$uv = [holaMundo] \neq vu = [Mundohola] \tag{1.90}$$

II. Monoide Libre: ?

III. Longitud:

Definición 1.6.9. Definimos **logitud** de una cadena $u \in \Sigma^*$, al número de símbolos que la componen (incluyendo los símbolos repetidos). Se denota normalmente como: $|u|$

$$|u| = \lambda + |u_1| + |u_2| + \dots |u_n| \tag{1.91}$$

Ejemplo 1.6.10. Sea $u = [hola] \Rightarrow |u| = 4$

IV. Potencia: Entendemos que para un alfabeto dado Σ^* y la palabras $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \in \Sigma^*$ con $n \in \Bbbk$ por **potencia** (denotado como u^n):

$$u^n = u^0 \circ u^1 \circ u^2 \circ \dots \circ u^n \tag{1.92}$$

Ejemplo 1.6.11. Para las palabras u se tiene como:

$$u_0 = \lambda, \ u_1 = hola, \ u_2 = holahola, \ \dots \ u_n = CONCAT_{i=0}^{i=n} u_i \tag{1.93}$$

Propiedades:

i) La potencia unidad de una palabra equivale a esa misma palabra:

$$a^1 = a \tag{1.94}$$

Ejemplo 1.6.12.

$$u^1 = [hola]^1 \equiv u = [hola] \tag{1.95}$$

El producto de distintas potencias de una palabra es igual a esa misma palabra con potencia resultado de la suma de los indices:

$$a^3 \cdot a^6 = a^9 \tag{1.96}$$

Ejemplo 1.6.13.

$$u^2 \cdot u^3 = [holahola] \cdot [holaholahola] \equiv u^5 = [holaholaholaholahola] \tag{1.97}$$

La potencia de una palabra sobre cero es igual a palabra vacía:

$$a^0 = \lambda \tag{1.98}$$

Ejemplo 1.6.14.

$$u^0 = [hola] = \lambda \tag{1.99}$$

El tamaño de una palabra sobre un índice cualquiera es igual al índice por el tamaño de la palabra original:

$$a^i \ = i \cdot |a| \tag{1.100}$$

Ejemplo 1.6.15.

$$u^5 = 5 \cdot Length(hola) = 20 \tag{1.101}$$

Nota: Ver ecuación: (1.97)

V. Reflexión: Entendemos que para un alfabeto dado Σ^* y la palabras $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \in \Sigma^*$ con $n \in \Bbbk$ por **reflexión** (denotado como u^{-1}):

$$u^{-1} = \{u_n, \ldots u_2, u_1\} \tag{1.102}$$

Ejemplo 1.6.16. Para la palabra u se tiene como:

$$u^{-1} \equiv \frac{1}{u} = [aloh] \tag{1.103}$$

Propiedades:

i) El tamaño de una palabra coincide con el de su inversa:

$$Length(a) = Length(a^{-1}) \tag{1.104}$$

Ejemplo 1.6.17.

$$Length(u) = Length(hola) = 4 \equiv Length(u^{-1}) = Length(aloh) = 4 \tag{1.105}$$

1.6.3. Lenguajes

Definición 1.6.18. Un **lenguaje** es un subconjunto de palabras de algún alfabeto dado:

$$L \subseteq \wp(\Sigma) \equiv L \subseteq \Sigma^* \tag{1.106}$$

Definición 1.6.19. Existe el **lenguaje vació** denotado como: $\varepsilon = \{\varepsilon\}$.

1.6.3.1. Operaciones

Nota: Se trabaja con un alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ y con dos lenguajes: $P = \{a, ab\}$ y $Q = \{a, b, bb\}$ / P, Q $\wp(\Sigma)$.

I. Unión: Para los alfabetos P y Q con el símbolo $\cup$, siendo r una palabra de la unión, se tiene que $P \cup Q = \{r \mid r \in P \vee Q\}$

Ejemplo 1.6.20.

$$P \cup Q = \{a, ab, b, bb\} \tag{1.107}$$

Propiedades: Al ser cada alfabeto un conjunto en sí, esta operación conserva todas las propiedades de la Unión.

i) Comuntatividad:

$$P \cup Q \equiv Q \cup P = \{a, ab, b, bb\} \tag{1.108}$$

ii) Asociatividad:

Nota: Con $R = \{aaa, ba\}$.

$$(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R) = \{a, aaa, ab, b, bb, ba\} \tag{1.109}$$

iii) Idempotencia

$$P \cup P \equiv P = \{a, ab\} \tag{1.110}$$

iv) Absorción: ?

$$P \cup W(P) \equiv W(P) \tag{1.111}$$

v) Neutralidad:

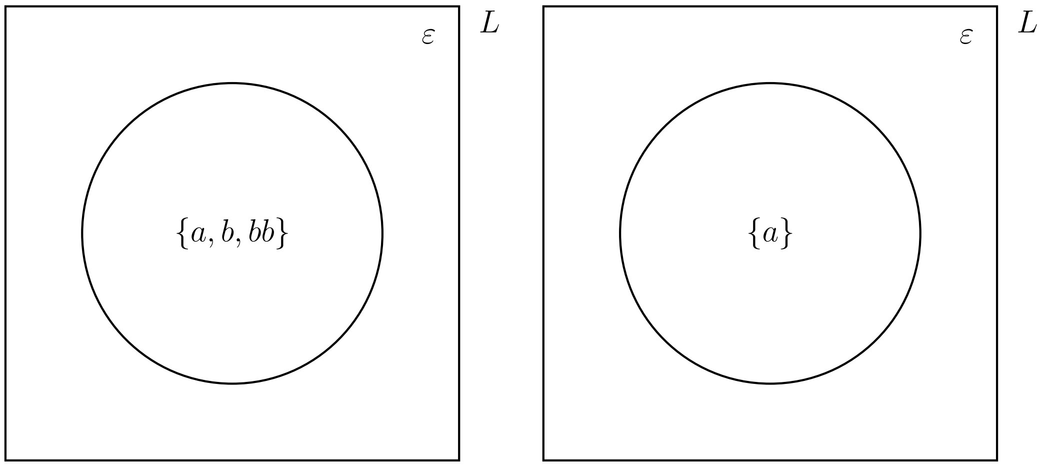
$$P \cup \varepsilon \equiv P = \{a, ab\} \tag{1.112}$$

II. Binoide Libre: ?

III. Intersección: Para los alfabetos P y Q con el símbolo $\cap$, siendo r una palabra de la intersección, se tiene que $P \cap Q = \{r \in P \wedge r \in Q\}$

Ejemplo 1.6.21.

$$P \cap Q = \{a\} \tag{1.113}$$



(a) Diagrama de Venn para la operación: $P \cup Q$.

(b) Diagrama de Venn para la operación: $P \cap Q$.

IV. Diferencia: Para los alfabetos P y Q con el símbolo $-$, siendo r una palabra de la diferencia, se tiene que $P \cap Q = \{r \in P \wedge r \notin Q\}$

Ejemplo 1.6.22.

$$P - Q = \{ab\} \tag{1.114}$$

V. Complemento: Para el alfabeto P se tiene por complemento de $P \Rightarrow \bar{P} = \Sigma^* - P$

Ejemplo 1.6.23.

$$\bar{P} = \{b\} \tag{1.115}$$

VI. Concatenación: Para los conjuntos P y Q, siendo rs una palabra de la concatenación, se tiene que $PQ = \{ rs \mid r \in P \wedge s \in Q \}$

Ejemplo 1.6.24.

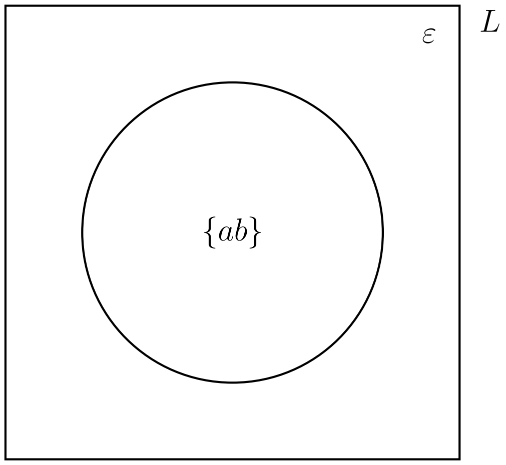
$$PQ = \{aa, ab, abb, ba, bab, bba, bbab\} \tag{1.116}$$

VII. Potencia: Se tiene por Potencia de un albabeto L: L^n dónde L es un alfabeto y $n \in \mathbb{N}$ que representa en número de concatenaciones:

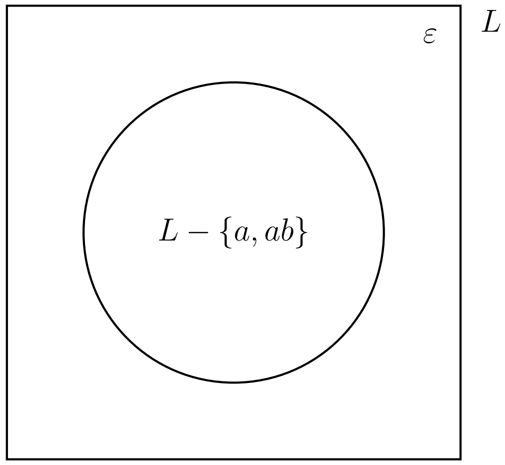
$$L^n = \{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\} \tag{1.117}$$

Ejemplo 1.6.25. Para el alfabéto $P = \{a, ab\}$, se tiene en iteración:

$$P^2 = \{aa, aab, aba, abab\} \tag{1.118}$$



(c) Diagrama de Venn para la operación: $P - Q$.



(d) Diagrama de Venn para la operación: $\bar{P}$.

VIII. Clausura, también denominada: Cerradura de Klenee o Cerradura Estrella:

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{i=n} L^i \tag{1.119}$$

IX. Clausura Positiva:

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{i=n} L^i \tag{1.120}$$

Propiedades:

i. $L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$

$$P^2 \cup \{\lambda\} \equiv \{aa, aab, aba, abab\} \cup \{\lambda\} = \{aa, aab, aba, abab\} \tag{1.121}$$

Demostración 1.6.26. Siendo $L^+ = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ tenemos que:

$$L^+ \cup \{\lambda\} = \{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\} = L^*. \tag{1.122}$$

ii. $L^+ = LL^* = L^*L$

Demostración 1.6.27. Siendo $L^* = \{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ tenemos que:

$$LL^* = L\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\} = L\{L_1, L_2, \ldots, L_n\} \tag{1.123}$$

X. Reflexión: Se denota Reflexión del Lenguaje L a L^{-1}

$$L^{-1} = \{p^{-1} : p \in L\} \tag{1.124}$$

Ejemplo 1.6.28. Para el alfabeto P:

$$P^{-1} = \{ba, a\} \tag{1.125}$$

Lenguaje Regular	Expresión Regular
$\varnothing$	$\varnothing$
$\{\lambda\}$	λ
$\{a\}, a \in \Sigma$	a
$U \cup V$	$(U \cup V)$
$U \circ V$	$(U)(V)$
U^*	$(U)^*$

Cuadro 1.1: Relación de operadores entre Lenguajes Regulares y Expresiones Regulares.

1.7. Lenguajes Regulares

Definición 1.7.1. Decimos que un **Lenguaje es Regular** si contiene los elementos: $\varnothing$, $\{\lambda\}$, $p \in \Sigma$ y está ligado a las operaciones: Unión ($\cup$), Concatenación ($\circ$) y Cerradura de Klenee (p^*).

Nota: $\varnothing$, $\{\lambda\}$, $\{p\}$, $p \in \Sigma$ son los denominados **Lenguajes Regulares Básicos**.

Ejemplo 1.7.2. Sea el $\Sigma = \{a, b, c\}$ tenemos:

$$U = \{a\} \circ \{b\}^* \cup \{c\}^*. \tag{1.126}$$

$$V = \{a\}^* \cup \{b\} \circ \{c\}. \tag{1.127}$$

i. Unión:

$$U \cup V = [\{a\} \circ \{b\}^* \cup \{c\}^* \cup \{a\}^* \cup \{b\} \circ \{c\}] \tag{1.128}$$

ii. Concatenación:

$$U \circ V = [\{a\} \circ \{b\}^* \cup \{c\}^* \circ \{a\}^* \cup \{b\} \circ \{c\}] \tag{1.129}$$

iii. Cerradura de Klenee:

$$U^* = [\{a\} \circ \{b\}^* \cup \{c\}^*]^* \tag{1.130}$$

Corolario 1.7.3. *Todo Lenguaje Finito es un Lenguajes Regular.*

1.8. Expresiones Regulares

Definición 1.8.1. Las **Expresiones Regulares** se forman recursivamente:

i. Por medio de los símbolos: $\varnothing$ y ε

ii. $e \in \Sigma$

iii. Siendo r y s el resultado, por medio de las operaciones $r \cup s, rs, r^*$

Corolario 1.8.2. *Las Expresiones Regulares son conceptaulmente y operativamente lo mismo que los antes descritos Lenguajes Regulares, la diferencia radica en que estas últimas tienen el objetivo de ser lenguajes más legibles, es decir, las Expresiones Regulares son una simplificación de los Renguajes Regulares para mejorar el entendimiento entre el hombre y la máquina.*

$$ER(E) := LR(E) \tag{1.131}$$

Notas del capítulo

[1]**La Teoría de Conjuntos se trata de la síntesis** de siglos de trabajo con el objetivo de llegar a una descripción **formal de un grupo o elementos relacionados**. La figura que finalmente dió forma a estos grupos de elementos es **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor**, nacido el 3 de Marzo de 1845 en San Petersburgo (Rusia) y fallecido el 6 de Enero de 1918 en Halle, Alemania.

[2]**El concepto de Función como unidad estructural del Cálculo se debe** al intenso trabajo de: **René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz** siendo este último, el estableció terminos como: función, variable, constatnte y parámetro. **Gottfried Leibniz** nacido el 1 de Julio de 1646 en el Electorado de Sajonia y fallecido el 14 de Noviembre de 1716 en Hannover, Electorado de Brunswick-Lüneburg, **fue un importante filósofo y matemático del siglo XVII padre del Cálculo Infinitesimal** (desde una perspectiva matemática junto a Isaac Newton (desde un principio físico). **Igualmente inventó el Sistema Binario** que actualmente es la lógica base de cualquier computadora digital.

[3]El origen de la **Teoría de Grafos parte de la famosa publicación "Los siete puentes de Königsberg"** dónde su autor **Leonhard Euler**, nacido el 15 de Abril de 1707 en Basilea (Suiza) y fallecido el 18 de Septiembre de 1783 en San Petersburgo (Rusia), se preguntaba como en la propia cuidad de Königsberg (actual Kalingrad) era posible cruzar los siete puentes una sóla vez del río Pregel iniciando y finalizado el trayecto en el mismo punto. Para ello determinó un modelo:

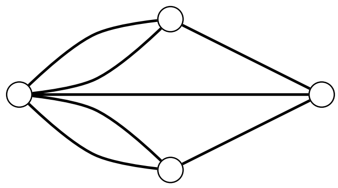


Figura 1.26: Grafo de Königsberg.

y postuló su famoso Teorema. *El Teorema de Euler dice que para un grafo $G = (V, E, p))$ o multigrafo (no digrafo) sin vértices aíslados, G posee un Circuito de Euler si y sólo si G es conexo y cada vertice tiene grado par.*

[4]La figura de **Sir William Rowan Hamilton** nacido el 4 de Agosto de 1805 en Dublin (Irlanda) y fallecido en 1865 en Dublin, reformó el trabajo previo sobre la Teoría de Grafos llegando a la conclusión de que **en ciertas condiciones es posible recorrer un grafo con el mismo punto de origen y destino pasando por todas sus aristas una sóla vez**. Tras este trabajo postuló su Teorema: *Si un grafo $G = (V, E, p)$ tiene $|V| \geq 3$ y $\delta(v_i) \geq 2$, entonces G es hamiltoniano*

Bibliografía

[dB96] Juan de Burgos. *Calculo Infinitesimal de una Variable 2ed.* Mc Graw Hill, 1996.

[dB06] Juan de Burgos. *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana 3ed.* Mc Graw Hill, 2006.

[Mar04] Ricardo Peña Marí. *Diseño de Programas. Formalismos y Abstracción.* Pearson, 2004.

[Mer05] Félix García Merayo. *Matemática Discreta.* Thomson, 2005.

[Ros04] Kenneth H. Rosen. *Matemática Discreta y sus Aplicaciones 5ed.* Mc Graw Hill, 2004.

Índice alfabético