

Арифметико-логические схемы, триггеры, регистры, плексоры

Луцив Дмитрий Вадимович

Кафедра системного программирования СПбГУ



- 1 Логические схемы
 - Арифметико-логическое устройство
 - Поразрядные логические операции и сдвиг
- 2 Схемы хранения состояния
 - Триггеры
 - Регистры
- 3 (Де)шифраторы и (де)мультиплексоры

Логические схемы

- Арифметико-логическое устройство
- Поразрядные логические операции и сдвиг

Логическая схема — устройство, вычисляющее значения одной или нескольких логических функций

Логическая схема — устройство, вычисляющее значения одной или нескольких логических функций

- Как правило, всё-таки электронное
- *Как правило*, асинхронное
- Не имеет *состояния*, т.е. после стабилизации выходов, их значения полностью определяются входами

- **Сумматор (Adder)** — логическая схема, получающая на входе биты слагаемых и выдающая биты их суммы

Складываем $A + B = S$.

При суммировании двоичных чисел у i -го разряда

- на вход поступают $a_i, b_i, c_{i-1 \rightarrow i}$
- на выходе имеем: $s_i, c_{i \rightarrow i+1}$

При этом:

- $s_i = a_i \oplus b_i \oplus c_{i-1 \rightarrow i}$
- $c_{i \rightarrow i+1} = (a_i \wedge b_i) \vee (b_i \wedge c_{i-1 \rightarrow i}) \vee (c_{i-1 \rightarrow i} \wedge a_i)$

Таким образом, сумматор — логическая схема.

Схема 1-разрядного сумматора

1-разрядный полусумматор

Полусумматор (2 входа)

- $s = a \oplus b$
- $c = a \wedge b$

1-разрядный полный сумматор

- Оптимизируем формулу для переноса с предыдущего слайда:

$$c_{i \rightarrow i+1} = (a_i \wedge b_i) \vee (c_{i-1 \rightarrow i} \wedge (a_i \oplus b_i))$$

- Это позволит создать 1-битный сумматор на основе двух полусумматоров и ещё 1 вентиля
 - на самом деле входы равноправны

Схема многоразрядного сумматора

- Собирается через соединение переносов
- Узкое место по времени — как раз перенос

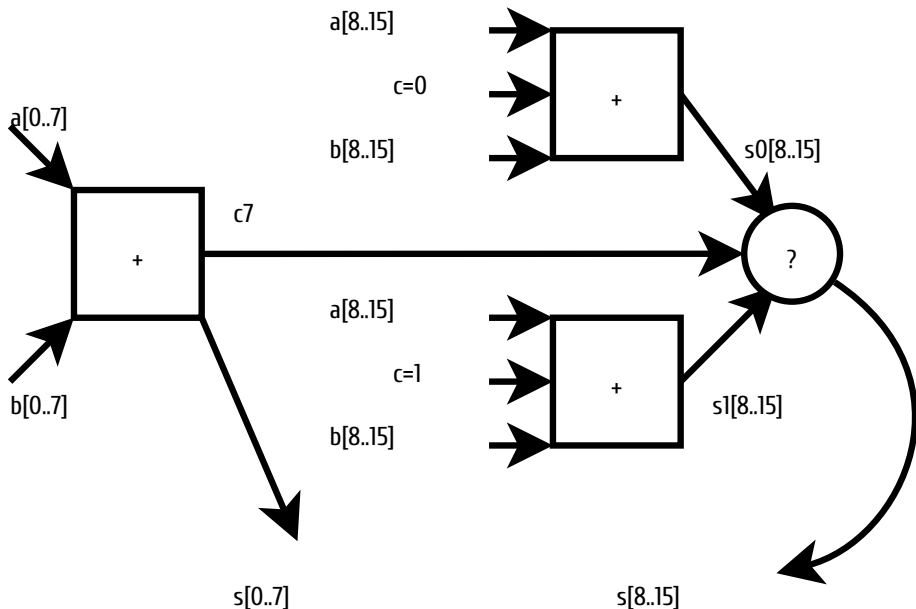
Замечания

Перенос через сумматор распространяется постепенно, поэтому:

- в старших разряде «ответ» есть сразу, но он неправильный
- правильный ответ появляется через какое-то время
- чем больше разрядность операции, тем больше время, даже для одного и того же процессора

Последний бит переноса $c_{N-1} \rightarrow$ можно запомнить и при следующем суммировании использовать в качестве $c \rightarrow 0$. Это позволит соединить несколько сумматоров или несколько раз использовать один и тот же для реализации арифметики произвольной разрядности.

Оптимизация: упреждающий сегментированный сумматор (1)



- (?) — *мультиплексор* — логическая схема, подающая на выход один из входов под действием управляющего сигнала
- Вынашивание полутора детей за 4,5 месяца. Да, оказывается можно!
- Можно сделать 3, 4 или больше сегментов
- Важна золотая середина: сегменты выбираются последовательно \Rightarrow грубая оценка — порядка \sqrt{N} (на самом деле меньше)

$x - y = x + (-y)$. Задача – вычислить $-y$, зная y .

$[-y] = [P - y] = [P - 1 + 1 - y] = [1] + [(P - 1) - y]$ – уже легче, осталось вычислить $(P - 1) - y$ (а сумматор, только прибавляющий 1, можно дополнительно оптимизировать)

Для $P = 2^N$ справедливо $P - 1 = \sum_{i=0}^{N-1} 2^i$.

Т.е. это число со всеми двоичными единицами. Чтобы вычесть из него y , достаточно инвертировать все биты y при помощи вентиля НЕ, т.к. заёма при вычитании не возникает

При умножении на 1 бит числа x мы можем пользоваться логической схемой:

$$x \times b = x \wedge b.$$

Тогда для многоразрядных чисел справедливо (\ll — операция сдвига):

$$x \times y = \sum_{i=0}^{N-1} (y_i \wedge (x \ll i))$$

Т.е. выразили умножение через известные операции.

Разрядность произведения — сумма разрядностей множителей.

Алгоритм деления «в столбик» для системы счисления с произвольным основанием:

- 1 сдвигаем делитель влево, пока он меньше делимого;
- 2 вычитаем, пока вычитается, прибавляя к очередному разряду частного;
- 3 сдвигаем делитель вправо (и меняем позицию в частном), пока нельзя вычитать, потом (2);
- 4 если делитель вернулся на исходную позицию относительно сдвига, то от делимого остался остаток.

Для двоичной:

- вычитаем, если (а не пока) вычитается.

Алгоритм деления «в столбик» для системы счисления с произвольным основанием:

- 1 сдвигаем делитель влево, пока он меньше делимого;
- 2 вычитаем, пока вычитается, прибавляя к очередному разряду частного;
- 3 сдвигаем делитель вправо (и меняем позицию в частном), пока нельзя вычитать, потом (2);
- 4 если делитель вернулся на исходную позицию относительно сдвига, то от делимого остался остаток.

Для двоичной:

- вычитаем, если (*а не пока*) вычитается.

Деление медленное, многие компиляторы умеют заменять деление на константу умножением, пользуясь свойствами кольца, например, для 64-битных машин $\mathbb{Z}/2^{64}$. Так,

`a / 7`

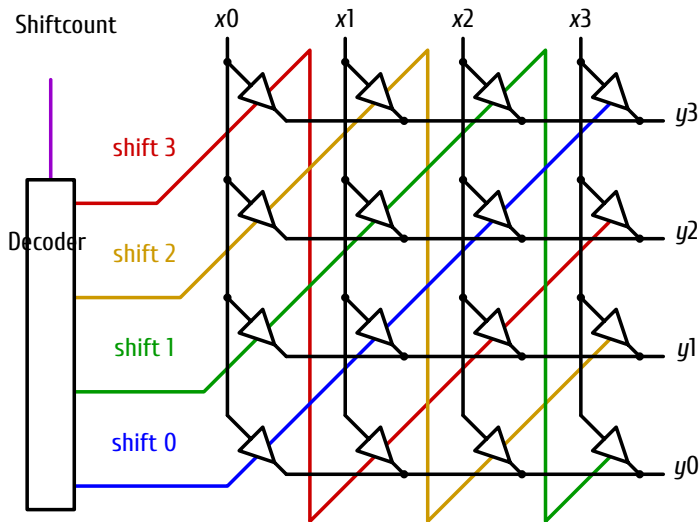
компилируется для x86_64 в

`imul rcx, rax, 0xfffffffff92492493`

- Мультипликатор, как и сумматор, можно реализовать логической схемой, но очень громоздкой, поэтому часто его делают микропрограммой. А на простых архитектурах — программой.
- Есть аппаратные логические делители — большие и «горячие» микросхемы, используются очень редко. Делитель — почти всегда микропрограмма (или программа).
- Умножение чисел произвольной длины возможно, однако перенос эффективнее делать по слову (старшей половине произведения), а не по биту.

Очевидно

Барабанная схема сдвига (Barrel shifter)



Схемы хранения состояния

- Триггеры
- Регистры

Триггер — логическая схема, запоминающая состояние

- 1 RS-триггер
- 2 Некорректные состояния триггера

- ❶ Синхронизация по уровню тактового импульса
- ❷ Синхронизация по фронту
- ❸ D-триггер
- ❹ Связка Master-Slave

- 1 JK-триггер
- 2 T-триггер
 - На основе JK
 - На основе D

- **Регистр** — запоминающая схема на 1 или несколько битов
 - На практике — с возможностью выполнения некоторых операций, т.е. с частью логики

- На базе Т и D, по фронту и по спаду
- Увеличивающие и уменьшающие
- С заданным начальным состоянием
 - С использованием сумматора

- Загружающий
- Выгружающий
 - Требуется мультиплексор

- Тоже требует мультиплексора

- Тоже требует мультиплексора

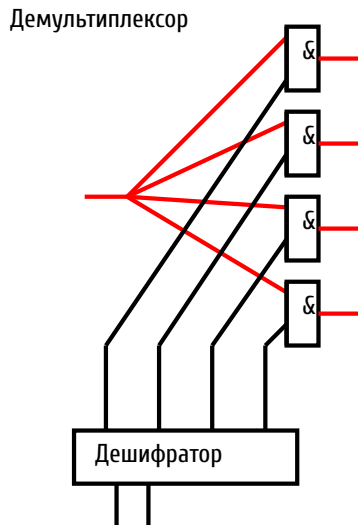
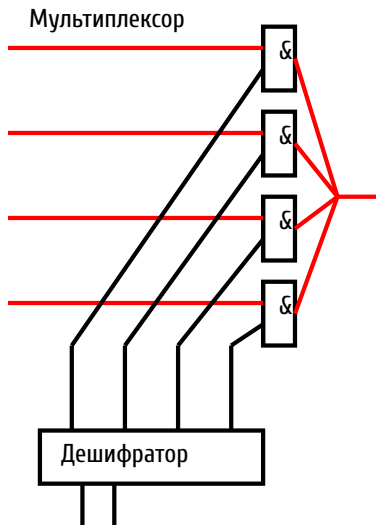
В процессоре на входе всех блоков мультиплексоры, которые выбирают, откуда прочитать входные данные по тактовому сигналу. Фактически (особенно в RISC) машинный код в необходимой последовательности переключает мультиплексоры, обеспечивая прохождение данных по нужным маршрутам.

Аналогично динамической (про которую позже), но на базе мультиплексоров и регистров из D-триггеров

(Де)шифраторы и (де)мультиплексоры

- **Шифратор (encoder)** — логическая схема, выдающая в двоичном виде номер активного (того, на котором 1) входа
- **Дешифратор (decoder)** — логическая схема, выдающая 1 на выход, заданный номером в двоичном виде
- С криптографией не связаны =)

Мультиплексор и демультиплексор



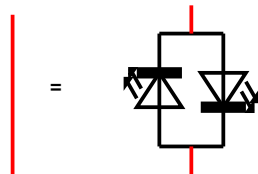
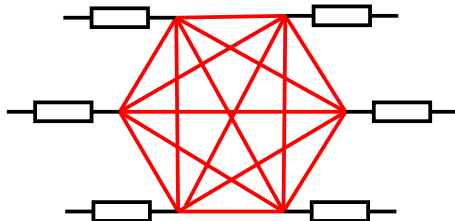
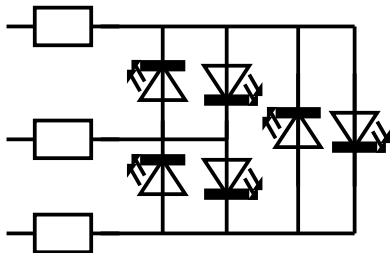
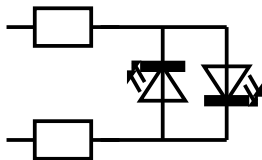
Вычислительная техника

То, что было выше (сумматоры, регистры...) и то, что будет ниже =)

Теле- . . . связь, системы упаковки и свёртки/развёртки

- Красным — сигнальные линии, м.б. аналоговые, м.б. многобитные.
- В I половине XX века для временного мультиплексирования телефонных линий применялись ламповые (де)мультиплексоры.

Чарлиплексор



Позволяет выразить $\varnothing 2\binom{n}{2} = 2C_2^n = \frac{n!}{(n-2)!2!}$ комбинаций на n входах. Используется свойство светодиодов открывать одну самую короткую из параллельных цепей.

Вопросы

- Что такое триггер?
- Что такое синхронизация по уровню, фронту и спаду тактового сигнала?
- Что такое регистр?
- Какие виды триггеров Вы знаете?
- Какие регистры Вы знаете?
- Что такое статическая память и на основе чего она создаётся
- Что такое ширатор и дешифратор?
- Что такое мультиплексор и демультиплексор?
- На каком принципе основан и для чего используется Чарлиплексор?

Упражнения

- «Нарисуйте» в Logisim или Logisim Evolution простые схемы

Вопросы



[EDU.DLUCIV.NAME](https://edu.dluciv.name) 