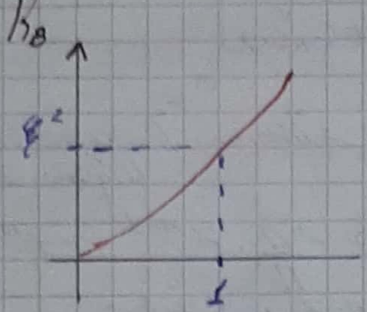
Clase 4 (Videos)

Aproximación Chebyshev y Bessel

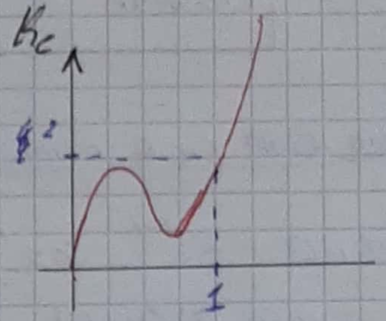
Se impone una fase o retardo de grupo para responder más rápido (o más lento) a la entrada.

Chebyshev

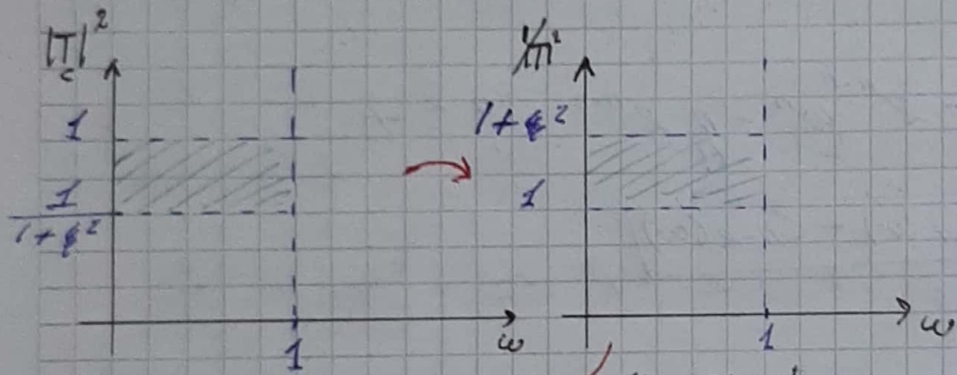
$$|T_B(j\omega)| = \frac{1}{\underbrace{1+\xi^2\omega^{2N}}_{|K(\omega)|^2}}$$

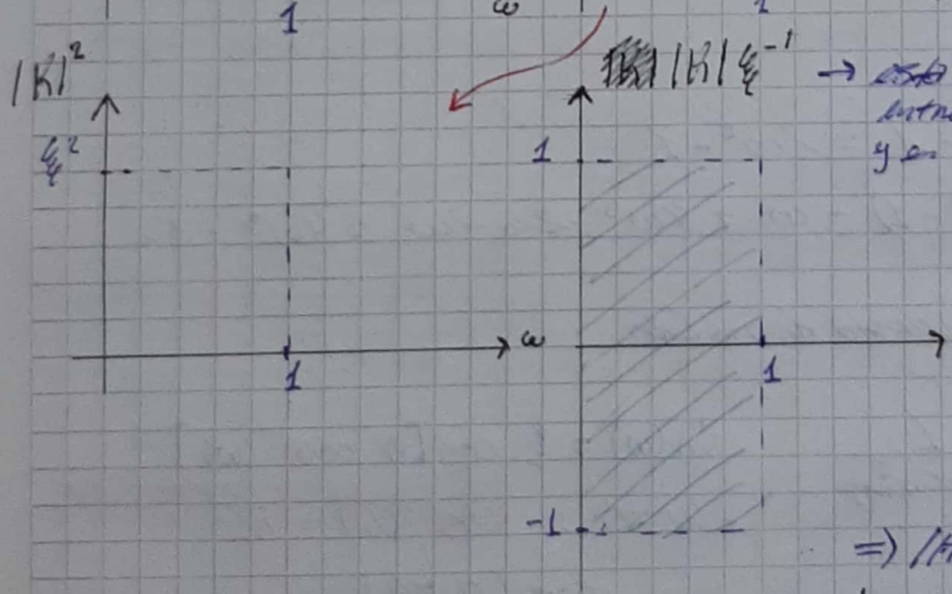


cant de error en la banda de paso es min



distribuye el error monotonamente para que el error esté acotado y que crezca lo más rápido posible al transicionar de la banda de paso a la de stop.





$|K|\xi^{-1}$ → está acotado en imagen entre 1 y -1 y en dominio entre 0 y 1

$$\xi^{-1}\cdot|K| = y$$

$$y = \xi\cos(nx)$$

$$x = \cos^{-1}(\omega)$$

$$\Rightarrow |K| = \xi\cos[n\cdot\cos^{-1}(\omega)]$$

↳ sin embargo, cómo hacemos para $\omega > 1$?

$\cos^{-1}(\omega) = jZ$ ($|\omega| > 1$) $\Rightarrow$ ~~cos~~ $\boxed{\omega = \cos jZ}$ cuando $|\omega| > 1$

NOTA

$$\cos(jz) = \frac{e^{j(jz)} + e^{-j(jz)}}{2} = \cosh z$$

$$w = \cosh(z) \quad y \quad z = \cosh^{-1}(w)$$

$$\boxed{|K| = \xi \cosh[n \cosh^{-1}(w)]} \; ; \; \forall w \in \mathbb{R}$$

$$|K| = C_n(w)$$

$$\boxed{|T_c(jw)|^2 = \frac{1}{1 + C_n^2(w)}}$$

Cómo llevar C_n a forma de polinomio (expansión polinómica de funciones trigonométricas)

$$\cos n\theta = 2^{n-1} \cdot \cos^n \theta - \frac{n}{1!} \cdot 2^{n-3} \cos^{n-2}\theta + \frac{n(n-3)}{2!} \cdot 2^{n-5} \cdot \cos^{n-4}\theta - \frac{n(n-3)(n-5)}{3!} \cdot 2^{n-7} \cos^{n-6}\theta + \dots$$

si $\theta = \cos^{-1}(w)$

$$C_n(w) = \cos[n \cos^{-1}(w)] = 2^{n-1} w^n - \frac{n}{1!} 2^{n-3} \cdot w^{n-2} + \dots$$

$$\boxed{C_n(w) = 2w \cdot C_{n-1}(w) - C_{n-2}(w)}$$

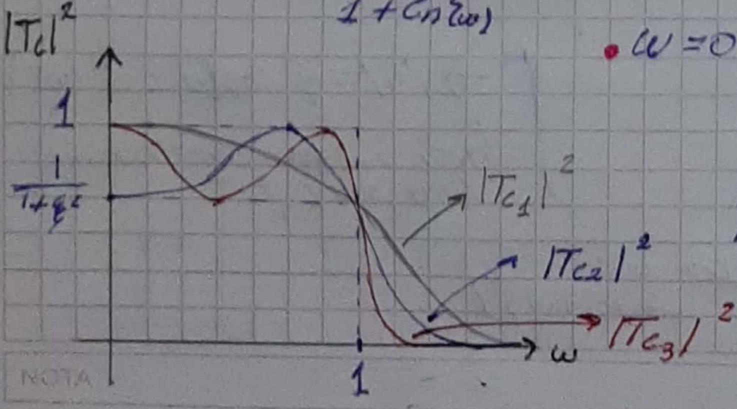
$$\begin{cases} C_0(w) = 1 \\ C_1(w) = w \end{cases}$$

$$C_2(w) = 2w \cdot w - 1 = 2w^2 - 1$$

$$C_3(w) = 2w(2w^2 - 1) - w = 4w^3 - 2w - w = 4w^3 - 3w$$

Análisis de la respuesta de módulo

$$|T_c(jw)^2| = \frac{1}{1 + C_n^2(w)} \qquad C_n(w) = \xi \cdot \cos[n \cdot \cos^{-1}(w)]$$



- $w = 0$: $\cos^{-1}(0) = \pi/2$

$\cos(n\pi/2)$

$\left.\begin{array}{l} n \text{ impar} \longrightarrow 1 \\ n \text{ par} \longrightarrow \frac{1}{1+\xi^2} \end{array}\right\}$ distintos puntos de arranque dependiendo de n par o impar

$$\omega = 1 : \left.\begin{array}{l} \cos^{-1}(1) = 0 \\ \cos(n \cdot 2\pi) = 1 \quad \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow C_n(1) = \frac{1}{1+\xi^2}$$

- Cantidad de "toques" de la región de confinamiento es igual a "n"

Localización de P y Z de $|T_C|^2$

$$|T_C|^2 = \left.\frac{1}{1 + C_{n(\omega)}^2}\right|_{\omega = s/j} = \frac{1}{1 + C_n^2(s/j)} = T(s)\,T(-s)$$

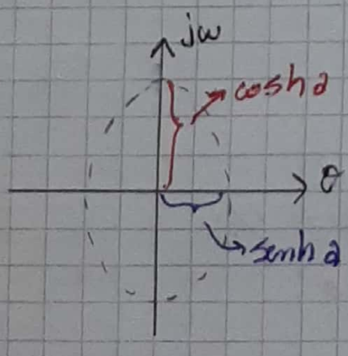
$$C_n(s/j) = \xi \cosh[n \cosh^{-1}(s/j)]$$

Sch 7.3

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_k = -\operatorname{senh} a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \\ \omega_k = \cosh a \cdot \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \end{array}\right\} \forall k \in \mathbb{Z},\ n = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\sigma_k}{\operatorname{senh} a}^2 + \frac{\omega_k}{\cosh a}^2 = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \forall k$$

↳ lugar geométrico de una elipse

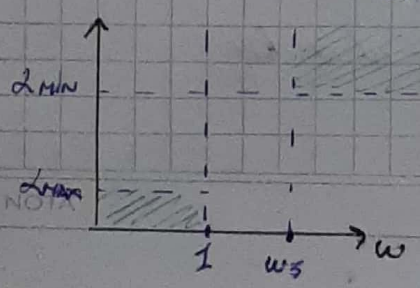


$$\boxed{a = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{senh}^{-1} 1/\xi}$$

Ecuaciones de diseño

$$|T_C(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + C_{n(\omega)}^2}$$

$$C_n(j\omega)^2 = \xi \cosh[n \cosh^{-1}(\omega)]$$



$$\omega = 1 \Rightarrow C_n(1)^2 = \xi^2$$

$$\alpha_{MAX} = \sqrt{1 + \xi^2}$$

- $\alpha_{MAX} = 10 \log(1 + \xi^2)$
- $\xi^2 = 10^{\frac{\alpha_{MAX\,dB}}{10}} - 1$

$\omega = \omega_s$

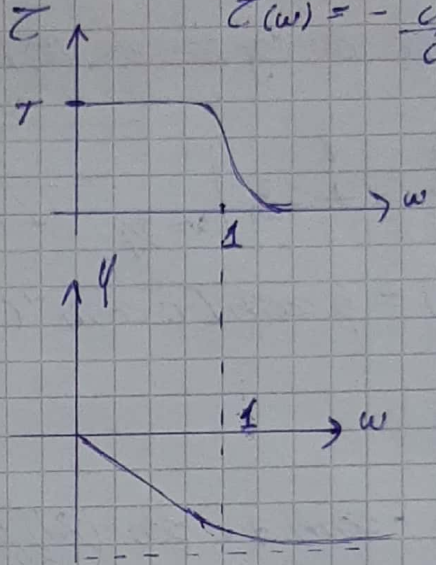
$$\alpha_{MindB} = 10 \log (1 + C_n^2(\omega_s))$$

$$\alpha_{MindB} = 10 \log [1 + \xi^2 \cosh^2[n \cosh^{-1}(\omega_s)]]$$ → iteran con n hasta obtener un $\alpha > \alpha_{Min}$

Aproximación de Bessel → se impone una fase o retardo de grupo

$$\tau(\omega) = - \frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \omega}$$

$$x \to \boxed{\quad} \to y$$



$$\frac{y}{x} = M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$= 1 \cdot e^{j -T\omega}$$

$$H(j\omega) = e^{-j\frac{\omega}{1/T}}$$

$$H(j\omega)\Big|_{\omega = s/j} = e^{-j\, s/j\, T} = e^{-sT}$$

$$e^x = \operatorname{senh}(x) + \cosh(x)$$

$$H(s) = e^{-sT} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\operatorname{senh}(s) + \cosh(s)}$$

$$\operatorname{senh} = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \frac{s^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh = \cancel{s}\ 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^6}{6!} + \dots$$

$$\coth(s) = \frac{\cosh(s)}{\operatorname{senh}(s)} = \frac{1}{s} + \cfrac{1}{\frac{3}{s} + \cfrac{1}{\frac{5}{s} + 1/\dots}}$$

$n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$

$\boxed{n = 1}$

$$\coth(s) = \frac{1}{s} = \frac{\cosh(s)}{\operatorname{senh}(s)} \quad \begin{cases} \cosh(s) = 1 \\ \operatorname{senh}(s) = s \end{cases}$$

$$H(s) = \frac{1}{\operatorname{senh}(s) + \cosh(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow H_{B_1} = \frac{1}{s+1}$$ es igual al de MP y al cheby

NOTA

$\boxed{n=2}$

$$\coth(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s}} = \frac{1}{s} + \frac{s}{3} = \frac{3+s^2}{3s}$$

$$H_{B2}(s) = \frac{\cancel{K}\to 3}{(s^2+3s+3)}$$

Si quiero ganancia unitaria en continua $K=3$

$\to B_2(s)$ polinomio de Bessel para $n=2$

$$\boxed{H_{BN}(s) = \frac{B_{N,0}}{B_N(s)} \to \text{genérico}}$$

$\boxed{n=3}$

$$\coth = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s}+\frac{s}{5}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{15+s^2}{5s}} = \frac{6s^2+15}{s^3+15s}$$

$$\Rightarrow H_{B3}(s) = \frac{15}{s^3+6s^2+15s+15}$$

Volviendo al Bessel de 2do orden:

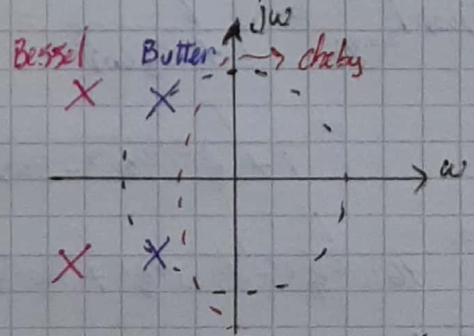
$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2+s\frac{\omega_0}{Q}+\omega_0^2}$$

Si $\omega_0^2 = 3$

$\frac{\omega_0}{Q} = 3$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = Q_{Bes} < Q_{But} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

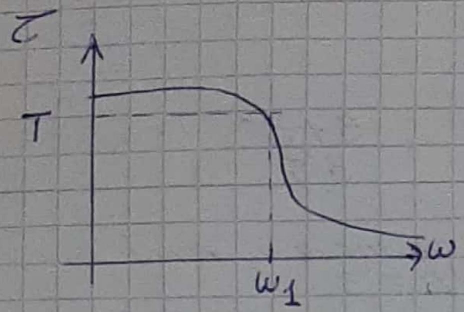
Q de un Bessel de 2do orden es menor al de Butter



A menor Q, más lejos del eje jω

Tabla para diseñar Bessels (Figura 10.12 Sch cap X)

Escaneado con CamScanner



Diseño de Bessel

1° Ripple en banda de paso
2° % error en el delay
3° Atenuación en ω_s

Pag 413 con X del sch

$R.T|_{\omega=\omega_1}$

Tengo 3 restricciones para el n

→ Me quedo con el n menor que cumpla las 3 condiciones.

$\tau(\omega_1) = 0{,}95\, T|_{\omega_1}$ → error de 5% en $\omega = 1$

~~[illegible]~~

Si $\omega_1 = 1$ Me fijo en la tabla que n necesito para tener cierto error

---

Resolución de problema de chebyshev

$\alpha_{MIN} = 50\,dB$ $\quad\omega_p = 1k\ rad/s$

$\alpha_{MAX} = 1\,dB$ $\quad\omega_s = 10k\ rad/s$

$\xi^2 = 10^{\frac{\alpha_{MAX}}{10}} - 1 = 0{,}259$

$\alpha_{MIN} = 10\log(1 + 0{,}259\ \cdot\ ^{2n})$ $\Rightarrow$ Para $n=3$ $\quad \alpha_{3} = 54{,}13\ dB$ ✓

$\Rightarrow \boxed{\xi^2 = 0{,}259 \quad y \quad n = 3}$

$$|T_c(j\omega)|^2_{\omega=s/j} = \frac{1}{1 + C_3(\omega)^2} = T(s).T(-s) = \frac{1}{s^3a + s^2b + sc + d} \cdot \frac{1}{-s^3a + s^2b - sc + d}$$

$$= \frac{1}{1 + \xi^2(4\omega^3 - 3\omega)^2} = \frac{1}{1 + \xi^2(16\omega^6 - 24\omega^4 + 9\omega^2)}$$

$$= \frac{1}{16\omega^6\xi^2 - 24\omega^4\xi^2 + 9\omega^2\xi^2 + 1}$$

$$|T_c(j\omega)|^2_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{-s^6 16\xi^2 - s^4 24\xi^2 - s^2 9\xi^2 + 1} = T(s).T(-s)$$

$-a^2 = -16\xi^2 \Rightarrow a = 4\xi^2$

$d = 1$

~~$b^2 = 2ac$~~
~~$\xi^2 = 2bd$~~

$$\begin{cases} -24\xi^2 = -2ac + b^2 \\ -9\xi^2 = 2bd - c^2 \end{cases}$$

Saco b y c y listo.

NOTA