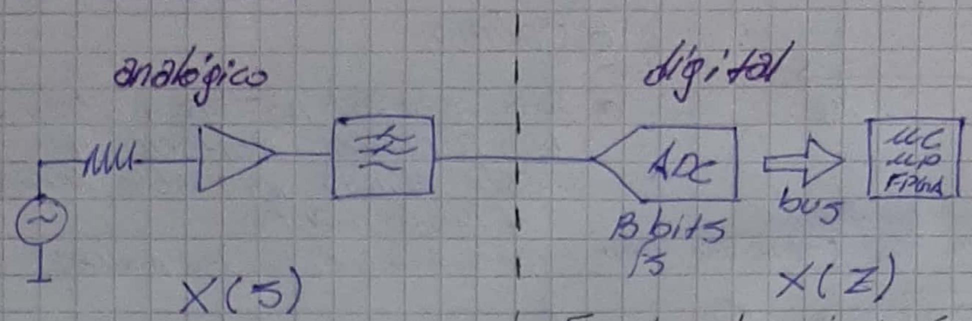
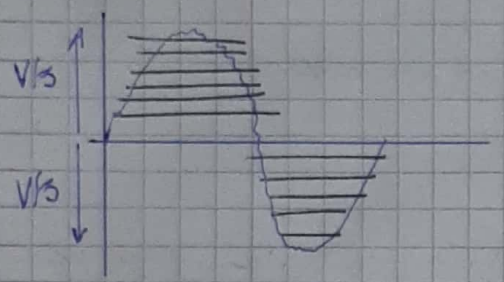
Filtros digitales



↳ Frontend o interfaz A/D



$$q = \frac{2V_{fs}}{2^B}$$ } Paso de cuantización

Ruido de cuantización → la señal está contaminada por el proceso de cuantización.

$n(K)$ → ruido aleatorio

$x'(K)$ ○——(+)——→ $X(K) = X'(K) + n(K)$

→ ruido de cuant.

$K \in \mathbb{Z}$

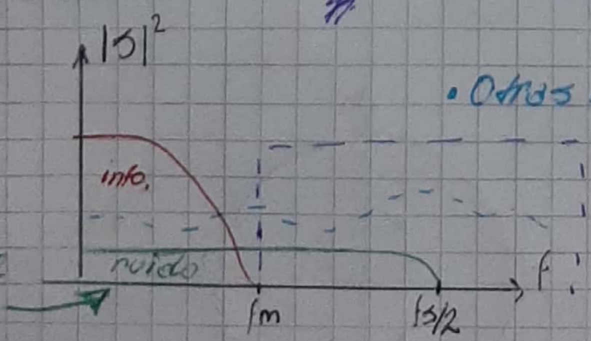
↳ señal discretizada en tiempo

$n \sim U(-q/2, +q/2)$ → $Pot = q^2/12$

→ $RMS = \frac{q}{2\sqrt{3}}$

freq Nyquist : $f_s/2 \geq f_m$

$\Rightarrow f_s \geq 2 f_m$



• Otras fuentes de ruido

→ el filtro pasa bajo tiene que atenuar todo el ruido que está a partir de fm.

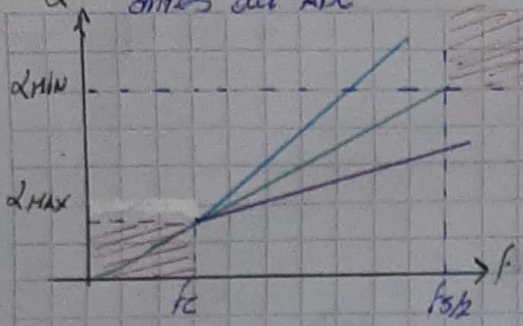
- Evita aliasing (x teorema Nyquist)
- Evita que el ruido se meta en banda

No se puede evitar xq viene del proceso de cuantización

La pot del ruido tiene mayor ancho de banda : su area $q^2/12$

• Si se sabe la pot de ruido en $f_s/2$ ⇒ se sabe que tanto tiene que atenuar el filtro.

Filtro Pasa bajos antes del ADC



- Sobre-esfuerzo: atenúo mucho el ruido aleatorio y la señal para que luego el ruido de cuant. sea muy apreciable
- Óptimo
- Poco esfuerzo: no llego a atenuar bien el ruido aleatorio y este es más apreciable frente al ruido cuant.

→ ruido que se asume senoidal en fs/2 (se puede medir o considerar el peor caso posible)

$$V_x \longrightarrow \boxed{PB} \longrightarrow \quad q_{RMS} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

$$\alpha_{MIN} = 20\log\left(\frac{V_x}{q/2\sqrt{3}}\right)$$

→ amp. de la senoidal

$$\alpha_{MIN_{peor\,caso}} = 20\log\left(\frac{V_{fs}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{q}\right)$$

↳ es decir el peor caso en que se tenga que atenuar

$$= 20\log\left(\frac{q\cdot 2^{B}}{q}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\alpha_{MIN} = 1{,}76 + 6{,}02B \approx \boxed{6\,dB/bit}$$

peor condición.

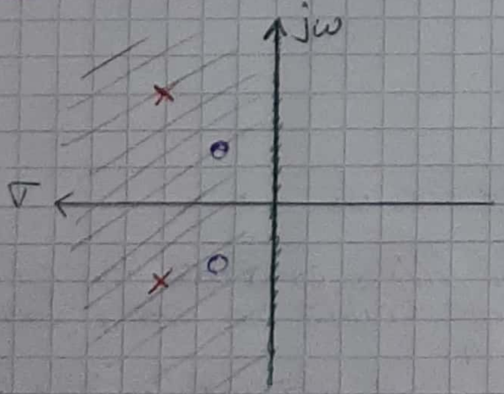
Interfaz A/D: Aparear analógica/digital

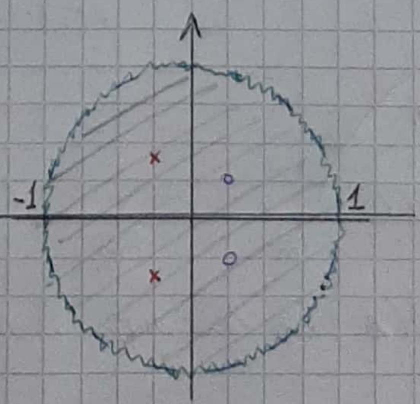
↳ El tratamiento del ruido en la parte analógica y digital debe ser comparable. ~~[illegible]~~ Esto quiere decir que los ruidos de la parte A y D deben ser comparables.

Transformada Z

$$\begin{cases} s = \sigma + j\omega \\ Z = r\cdot e^{j\Omega} \end{cases}$$

→ [rad] apertura angular





NOTA $\boxed{11:00} \rightarrow \boxed{14:00}$ $\boxed{14:55} \rightarrow \boxed{18:40}$ TOT = 7:00

Transformación ~~lineal~~ bilineal

$$s = \frac{2}{T_s}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = f_B(s)$$

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=f_B(s)}$$

$$s = \overset{\nearrow 2f_s}{K}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = K\,\frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{K+s}{K-s} = \frac{K+\sigma+j\omega}{K-\sigma-j\omega}$$

$$|r|^2 = \frac{(K+\sigma)^2+\omega^2}{(K-\sigma)^2+\omega^2}$$

Para $\sigma = 0 \Rightarrow |r|^2 = 1$

$\Rightarrow j\omega \xrightarrow[\text{mapea}]{} r = 1$

recorrer el sigma es estar en radio unitario.

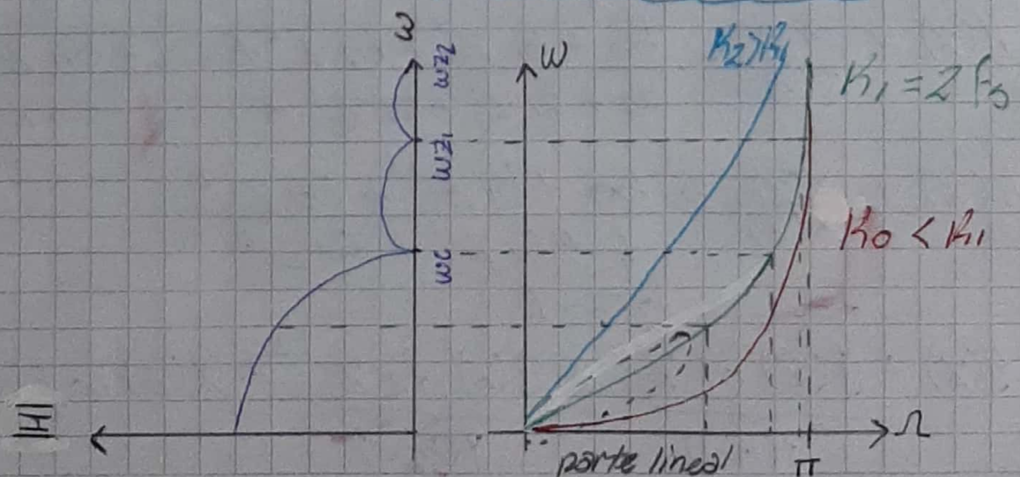
- $SPI \rightarrow r < 1$
  $\sigma < 0$

$$s = \sigma + j\omega = K\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Si $\sigma = 0$ $\quad j\omega = K\,\frac{1-e^{-\Omega}}{1+e^{-\Omega}} = K\,\frac{e^{-\Omega/2}}{e^{-\Omega/2}}\,\frac{(e^{+\Omega/2}-e^{-\Omega/2})}{(e^{+\Omega/2}+e^{-\Omega/2})}$

$$j\omega = K\,\frac{\cancel{j}\cancel{2}\,\text{sen}(\Omega/2)}{\cancel{2}\cos(\Omega/2)} \Rightarrow \underset{\text{analógico}}{\omega} = K\,\frac{\text{sen}(\Omega/2)}{\cos(\Omega/2)} = K\,\underset{\text{digital}}{tg(\Omega/2)}$$

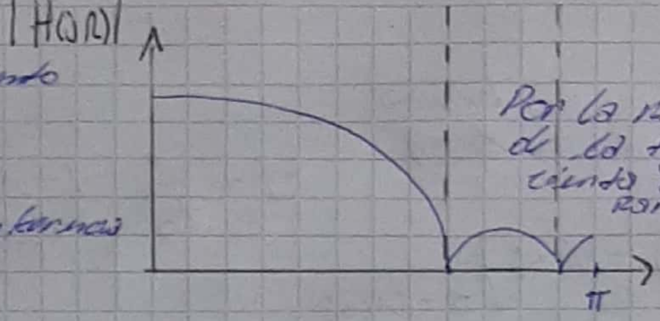
$$\Omega = 2\,tg^{-1}(\omega/K)$$



NOTA: A mayor K, mayor frec. de muestreo. Esto implica que se mapea en Ω frecuencias "bajas" de forma casi lineal.

fs afecta el comportamiento del sistema.

x φ a mayor fs cambia como se mapea la transformación de $\omega \rightarrow \Omega$



Por la no linealidad de la tg hay una cierta distorsión para frec. cercanas a PI.

Definición y transformada Z de una demora unitaria

$$X(Z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \cdot Z^{-i} = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) Z^{-i}$$

$$X(K) = [1, 4, -2, 5] \Rightarrow X(Z) = 1Z^{-0} + 4Z^{-1} - 2Z^{-2} + 5Z^{-3}$$

$$x(K) \longrightarrow \boxed{\text{delay}} \longrightarrow y(K) = x(K-1)$$

$$H(Z) = Z^{-1}$$

$$y(Z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(i) Z^{-i} = \sum_{i=0}^{N-1} X(i-1) Z^{-i} \xrightarrow[i=n+1]{i-1=n} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) Z^{-n-1}$$

nuestra salida actual es la entrada anterior

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(n) \cdot Z^{-n}}_{X(Z)} \cdot Z^{-1} \Rightarrow y(Z) = X(Z) \cdot Z^{-1}$$

demora unitaria

$H(s) \longrightarrow$ filtro analógico

$H(s)\big|_{s=f_B(z)} = H(z) \rightarrow$ versión digital

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1 Z^1 + b_2 Z^2 + \dots + b_n Z^n}{a_0 + a_1 Z^1 + a_2 Z^2 + \dots + a_m Z^m}$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}}$$

↳ $a_0 = 1$

$$y(Z) + \underbrace{y(Z)\, a_1 Z^{-1}}_{y(K-1)} + \underbrace{y(Z)\, a_2 Z^{-2}}_{y(K-2)} = X(Z)\, b_0 + X(z)\, b_1 Z^{-1} + X(z)\, b_2 Z^{-2}$$

NOTA

Z^{-1}

$$\underbrace{y(K) + y(K-1)a_1 + y(K-2)a_2}_{\text{salidas anteriores}} = \underbrace{x(K)b_0}_{\text{entrada actual}} + \underbrace{x(K-1)b_1 + x(K-2)b_2}_{\text{entradas pasadas}}$$

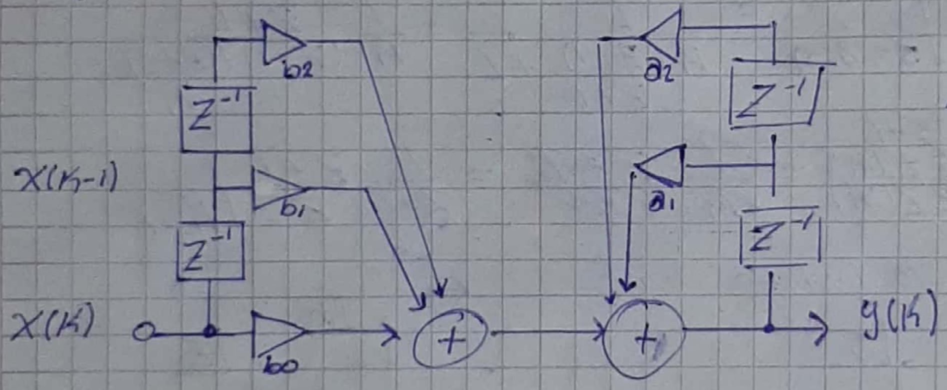
~~y(K)~~ =

$$y(K) = \underbrace{\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} x(K-i)\cdot b_i}_{\text{entradas}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{M-1} y(K-j)\, a_j}_{\text{salidas ant.}}}_{\text{Productos de convolución.}}$$

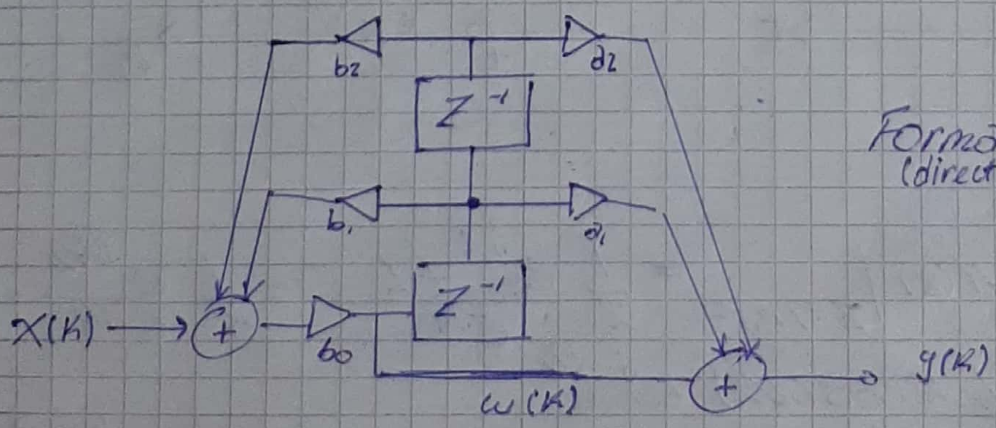
Ec. de diferencias

↳ el ⊖ viene incluido en los a_j

Diagrama en bloques



Forma directa
(direct form 1)



Forma indirecta.
(direct form 2)

→ son recursivos, por lo que tienen dependencia de salidas ant.

IIR: Filtros de respuesta infinita al impulso

$H(z) \xrightarrow{Z^{-1}\{\}} h(k) \rightarrow$ secuencia infinita $\qquad |a_i| > 0 \Rightarrow$ IIR

FIR: Respuesta finita al impulso → No dependen de salidas anteriores

$a_i = 0$

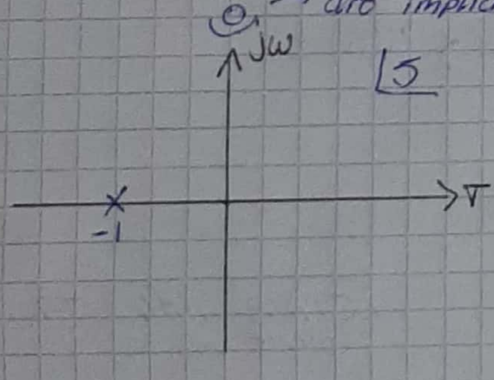
EJ: IIR

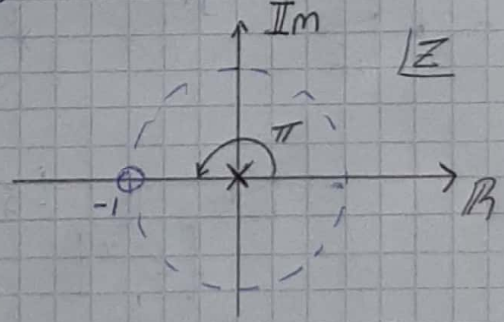
$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=f_B(s)} = \frac{1}{k\frac{(z-1)}{z+1}+1} = \frac{1}{k}\frac{z+1}{(z-1)+\frac{(z+1)}{k}}$$

$$H(z) = \frac{1}{k+1}\frac{z+1}{z+\left(\frac{1-k}{1+k}\right)} = \frac{1}{2}\frac{z+1}{z}\Big|_{k=1}$$

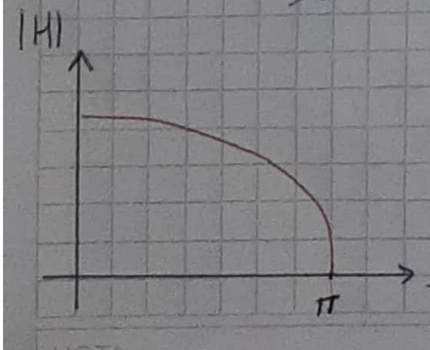
$\ominus$ → cero implícito en inf

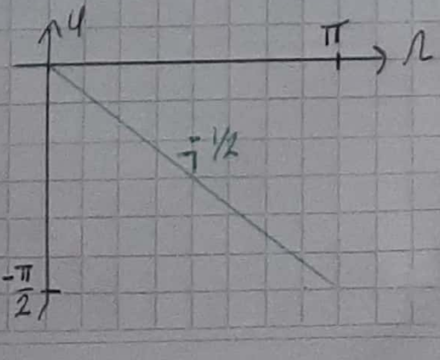


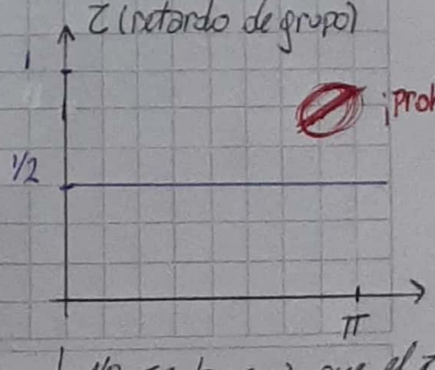


$$H(1.e^{j\Omega}) = H(z)\Big|_{z=1e^{j\Omega}} = \frac{1}{2}\frac{e^{j\Omega}+1}{e^{j\Omega}} = \frac{1}{2}\frac{e^{j\Omega/2}}{e^{j\Omega/2}} \cdot \overbrace{e^{j\Omega/2}+e^{-j\Omega/2}}^{2\cos(\Omega/2)}$$

$$H(j\Omega) = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}\cos(\Omega/2)\, e^{-j\Omega/2}$$







¡Prohibido!

↳ No se busca que el τ sea no entero.

NOTA

⇒ Que sea 1/2 indica que no va a estar ni en una muestra ni en la otra, en alguno de los 2 otro ejemplo

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=f_B(z)} = K^2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \frac{1}{K^2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 - K\sqrt{2}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+1}$$

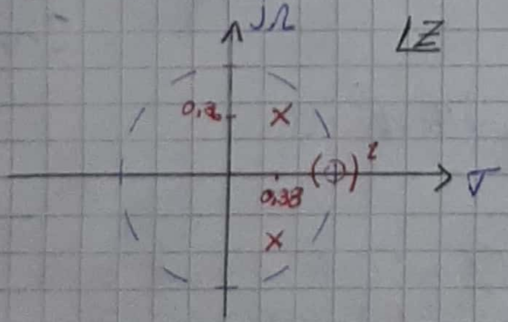
$$H(z) = K^2 \frac{(z-1)^2}{K^2(z-1)^2 - K\sqrt{2}(z-1)(z+1) + (z+1)^2}$$

$$H(z) = K^2 \frac{(z-1)^2}{K^2(z^2-2z+1) + K\sqrt{2}(z^2-1) + (z^2+2z+1)}$$

$$H(z) = K^2 \frac{(z-1)^2}{z^2(K^2+K\sqrt{2}+1) + z(-2K^2+2) + K^2 - K\sqrt{2}+1}$$

- $K = 2f_s \Rightarrow K = 2$ si $f_s = 1\,Hz$

$$H(z) = 4\frac{(z-1)^2}{z^2(5+2\sqrt{2}) + z(-6) + (5-2\sqrt{2})}$$



Mapeo frecuencia a frecuencia "Prewarping"

$$f_B(z) = K\frac{z-1}{z+1} = 2f_s\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$K \rightarrow \frac{2\pi f_p}{tg(\pi\, f_p/f_s)}$$

Hacer prewarp en bajas frec no cambia mucho.

Si se usa $K = 2f_s$ hay una compresión de las frec. analógicas de alto valor en un ancho de banda muy chico (mucha info en poco espacio)
Esto es porque se mapea en función de una tg.

Filtros FIR

$a_i = 0$

$$H(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots}{1} = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$$

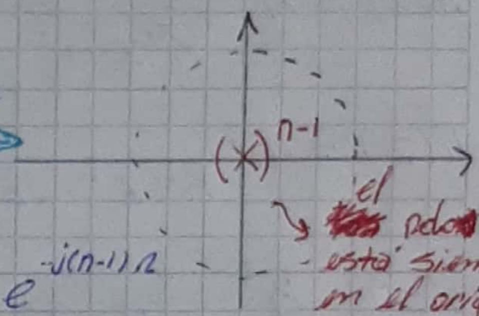
$$Y(Z) = X(Z)\,(b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots$$

$$y(K) = x(K)\,b_0 + x(K-1)\,b_1 + x(K-2)\,b_2 + \dots$$

$$y(K) = \sum_{i=0}^{N-1} x(K-i)\,\underbrace{b_i}_{\text{respuesta al impulso del filtro.}}$$ → conv de los b con la entrada.

$$H(Z) = b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_{n-1} Z^{-(n-1)}$$

$$H(Z) = \frac{b_0 Z^{n-1} + b_1 Z^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{Z^{n-1}}$$ →



el polo está siempre en el origen

Siempre son estables

$$H(j\Omega) = b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega} + b_{n-1} e^{-j(n-1)\Omega}$$

$$= e^{-j\frac{(n-1)}{2}} \left(b_0 \cdot e^{-jPM\Omega} + b_1 e^{-j(PM-1)\Omega} + \dots + b_{PM-1} e^{-j1\Omega} \right.$$

Punto medio (PM) →

$$\left. + b_{PM+2} e^{+j\Omega} + b_{PM+3} e^{+j2\Omega} + \dots b_{N-1} e^{+jPM\Omega} \right)$$

si hay simetría respecto del punto medio ⇒ $\left.\begin{array}{l} b_0 = b_{N-1} \\ \vdots \\ b_{PM-1} = b_{PM+1} \end{array}\right\} \Rightarrow b_{PM-x} e^{-jx\Omega} + b_{PM+x} e^{+jx\Omega} = \cancel{\dots} \; 2 b_{PMx} \cos(x\Omega)$

$$H(j\Omega) = 2 \sum_{i=1}^{M} b_{PM-i} \cdot \cos(i\Omega) \cdot e^{-jPM\Omega}$$

↳ para los M pares de coeficientes

↳ El módulo depende solo de funciones cosenoidales y la fase es lineal

$$\begin{cases} |H(j\Omega)| = 2 \sum_{i=1}^{M} b_{PM-i} \cos(i\Omega) \\ \varphi_H = -\frac{N-1}{2}\,\Omega \end{cases}$$ → la fase lineal solo se da si hay simetría respecto del punto medio

NOTA

Anti simétrico $\begin{cases} b_0 = -b_{N-1} \\ \vdots \\ b_{PH-1} = -b_{PH+1} \end{cases}$

$$H(j\omega) = j2 \sum_{i}^{N/2} b_{PH-i}\, sen(i\Omega) \cdot e^{-jPH\Omega}$$

$\hookrightarrow 1 \cdot e^{j\pi/2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = 2 \sum_{i=1}^{N/2} b_{PH-i}\, sen(i\Omega) \\ \varphi_H = -PH\Omega + \pi/2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ UN FIR antisimétrico también tendrá fase lineal con un corrimiento de de fase.

N

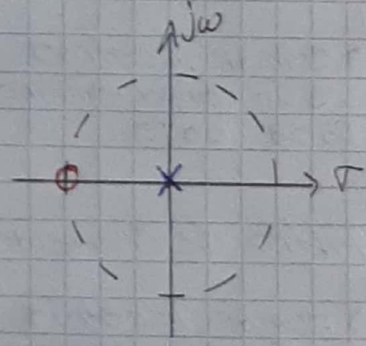
	Par	Impar
Simétrico	$\lvert H(0)\rvert \neq 0$ $\lvert H(\pi)\rvert$ libre	$\lvert H(0)\rvert$ libre $\lvert H(\pi)\rvert$ libre
Antisimétrico		

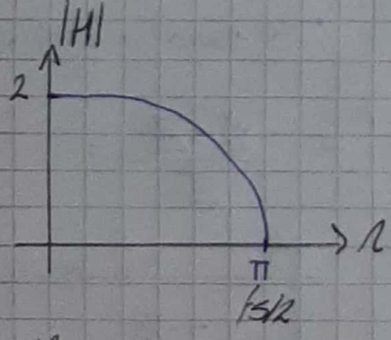
+ un retardo de grupo entero

EJ: FIR

$$h(k) = [1, 1]$$

$$h(Z) = 1 + Z^{-1} = \frac{1+Z}{Z}$$

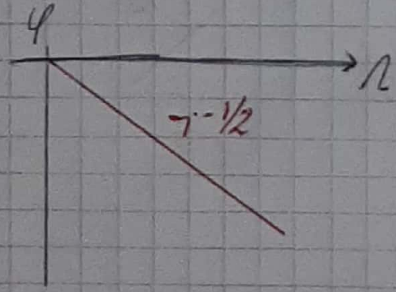




$$H(\Omega) = H(Z)\Big|_{Z=1e^{j\Omega}}$$

$$= e^{j0} + e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2}\left(2\cos(\Omega/2)\right)$$

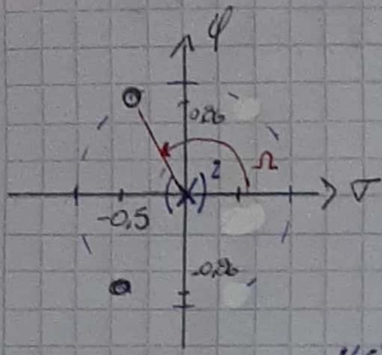
$$H(j\Omega) = 2\cos(\Omega/2) \cdot e^{-j\Omega/2}$$



NOTA

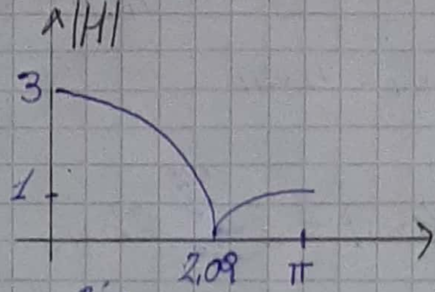
otro ej: $h(k) = [1, 1, 1] \rightarrow$ Filtro promediador (+ ó -)

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$



$$\Omega = tg^{-1}\left(\frac{0,86}{-0,5}\right)$$

$$\Omega = 2,09$$

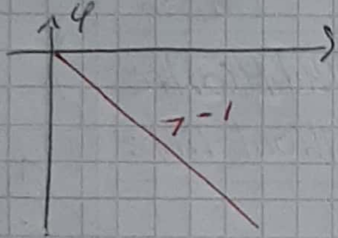


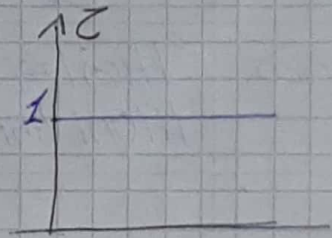
$$H(j\Omega) = e^{j0} + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}$$

$$= \underbrace{e^{-j\Omega}}_{\varphi_H}\underbrace{\left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} + 1\right)}_{2\cos(\Omega)+1 \,=\, |H(j\Omega)|}$$

Como es un fir simétrico la fase es entera e igual al punto medio

$$\varphi_H = -1\,\Omega$$





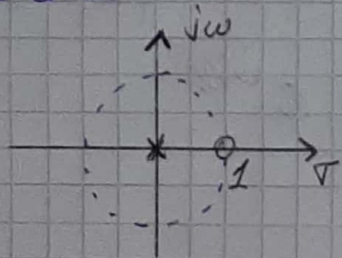
Filtro promediador $\quad y(k) = b \sum x(k-i)$

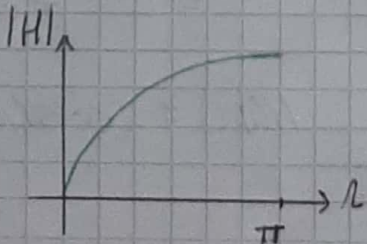
↳ sumar muestras es un comportamiento pasa bajo $\quad y(k) = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} x(k-i)$

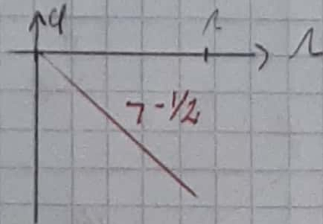
Filtro diferenciador $\quad h = [+1 ; -1]$ (es como un derivador)

↳ sumar muestras de distinto signo es un comp. pasa alto.

$$H(z) = +1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z} =$$



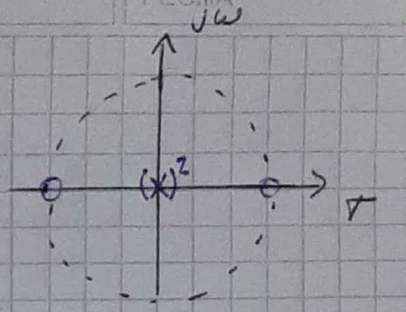




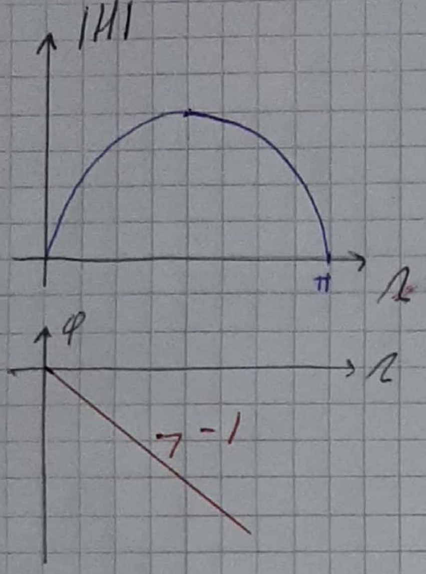
Ejemplo

$$h(n) = (1\ ;\ 0,\ -1)$$

$$H(z) = 1 - z^{-2} = \frac{z^2 - 1}{z^2}$$



Pasa banda



este tipo de derivador es más apropiado ya que no deja pasar altas frec.
Además al tener 3 muestras tiene fase lineal.