HƯỚNG DẪN BÀI TẬP ÔN THI HOÀN CHỈNH ĐẠI HỌC
(ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH)

CHƯƠNG I : MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Dùng phương pháp *Gauss* hay *Gauss – Jordan* để biến đổi hệ phương trình thành dạng

1/ a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -43/18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 13/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/18 \end{array}\right)$

2/ a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 9 & 17 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

3/ a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/7 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & 17 & -19 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3/17 & 13/17 & 0 \\ 0 & 1 & -19/17 & 20/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

e) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

f) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

4/ a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -14/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17m-4 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -9/17 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -14/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17m-4 \end{array}\right)$: xét $(17m - 4) = 0$ hoặc $(17m - 4) \neq 0$.

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$: xét $(m - 1) = 0$ hoặc $(m - 1) \neq 0$.

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m(m-7) \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -m-1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2m+3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m(m-7) \end{array}\right)$: xét $(m - 7) = 0$ hoặc $(m - 7) \neq 0$.

d) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 13/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 7/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 9/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right)$: $\begin{cases} xet \\ (m-1)=0 \\ hoac \\ (m-1)\neq 0 \end{cases}$

e) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -2a-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-c-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+2d \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 9 & -14 & 3a+d \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -2a-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-c-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+2d \end{array}\right)$:

xét [$(2a - c - d) = 0 = (a + b + 2d)$] hoặc [$(2a - c - d) \neq 0$ hay $(a + b + 2d) \neq 0$]

f) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & m-8 & -12 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & m-8 & -12 \end{array}\right)$: xét $(m - 8) = 0$ hoặc $(m - 8) \neq 0$.

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & (m+3)(m-2) & (m-2) \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -m-3 & 0 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & (m+3)(m-2) & (m-2) \end{array}\right)$: xét $\left[\begin{array}{c} (m-2)=0 \\ (m+3)=0 \\ (m-2)(m+3)\neq 0 \end{array}\right.$

h) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -3/5 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5m+3 \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 2/15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5m+3 \end{array}\right)$: xét $(5m + 3) = 0$ hoặc $(5m + 3) \neq 0$

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 1 & m^2+m \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1-m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 1 & m^2+m \end{array}\right)$: xét $(m-1)=0$ hoặc $(m-1)\neq 0$.

j) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -m-6 & -m-3 \\ 0 & 0 & m(m+5) & m(m+2) \end{array}\right)$ hay $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+3 & m+2 \\ 0 & 1 & -m-6 & -m-3 \\ 0 & 0 & m(m+5) & m(m+2) \end{array}\right)$: xét $\left[\begin{array}{c} m=0 \\ (m+5)=0 \\ m(m+5)\neq 0 \end{array}\right.$

<u>CHƯƠNG 2 :</u> CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN – MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

2/ a) Tính A^2 để suy ra A^{2m} và A^{2m+1} $\forall m \geq 0$. Tổng quát hóa cho trường hợp $A \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A^2 = \mathbf{I_n}$.
b) Tính đến A^4 để suy ra A^k $\forall k \geq 0$ (phân biệt $a = b$ và $a \neq b$ để dễ rút gọn biểu thức).
c) Tính đến A^3 để suy ra A^k $\forall k \geq 0$ (để ý các công thức lượng giác $\cos(mx + x)$ và $\sin(mx + x)$ $\forall m \geq 0$)
d) Tính đến A^3 để suy ra A^k $\forall k \geq 0$
e) Tính đến A^4 để suy ra A^k $\forall k \geq 0$
f) Tính đến A^5 để suy ra A^k $\forall k \geq 0$ [để ý tổng $0 + 1 + 2 + \ldots + (k-1) = 2^{-1}k(k-1)$ $\forall k \geq 1$]
g) Tính đến A^5 để suy ra A^k $\forall k \geq 0$ [để ý tổng $1 + 2 + 3 + \ldots + k = 2^{-1}k(k+1)$ $\forall k \geq 1$]
h) Tính đến A^3 để suy ra A^k $\forall k \geq 0$ (để ý nếu $A^m = \mathbf{O_3}$ thì $A^k = \mathbf{O_3}$ $\forall k \geq m$) .

3/ Tính đến A^3 để suy ra $f(A) = 2A^3 - 5A^2 + 4A - 3\mathbf{I_2}$.

4/ a) $X = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ -1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ u & v & w & & he(2) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ 1 & 0 & 3/4 & 1 & 5/4 \\ 0 & 1 & 11/4 & 4 & 1/4 \\ u & v & w & & he(2) \end{array}\right)$: vô số nghiệm

b) $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ u & v & w & & he(2) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & he(1) & \\ 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -7/2 & 17/2 & -5/2 \\ u & v & w & & he(2) \end{array}\right)$: vô số nghiệm

c) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$: vô số nghiệm

d) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$: nghiệm duy nhất

e) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$: nghiệm duy nhất

f) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 5 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & -8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & -11 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$: nghiệm duy nhất

g) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 3 & -4 & 11 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$: hệ vô nghiệm.

5/ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C^{-1} = 4^{-1}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$D^{-1} = D$ $\quad R_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{I_3}$ $\quad R_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{I_3}$

Dùng các tính chất cơ bản của ma trận khả nghịch để tính nhanh các kết quả.

6/ a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ -17 & -10 & -22 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -16 \\ 15 & 15 & -11 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} -118 & -95 \\ -200 & -161 \end{pmatrix}$ $\quad$ d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ -3 & -1 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} -21 & 9 \\ 5 & -2 \\ 24 & -10 \end{pmatrix}$ $\quad$ f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -53 & -22 & -12 \\ 22 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} -39 & -52 \\ 411 & 549 \\ -170 & -227 \end{pmatrix}$

g) và h) Xét tính khả nghịch hoặc không khả nghịch ở 2 vế của phương trình để thấy phương trình vô nghiệm.

<u>CHƯƠNG III :</u> ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG

Ký hiệu (i) là dòng thứ i và (i)’ là cột thứ i của ma trận đang xét.

1/ a) 100 $\quad$ b) $242m(1 - m)$ $\quad$ c) -324 $\quad$ d) $18ab(a - b)$

e) $|A^t| = |A|$, $\quad |A^3| = |A|^3$, $\quad |A^{-2}| = |A|^{-2}$, $\quad |-4A| = (-4)^3|A|$, $\quad |AB| = |A|.|B|$

2/ a) $(x + 1)^2(2x - 1)$ $\quad$ b) $2(x + 3)(x - 2)$ $\quad$ c) $(x - a)(x - b)(a - b)(x + a + b)$ $\quad$ d) $(x-a)(x-b)(b - a)(ax+ bx+ ab)$

e) (1) + (2) + (3). Sau đó (2)’ – (1)’ và (3)’ – (1)’. Ta có $|A| = -2^{-1}(a + b + c)[\,(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\,]$

f) (1) + (2) + (3) + (4). Sau đó (2)’ – (1)’, (3)’ – (1)’ và (4)’ – (1)’. Khai triển dòng (1). Tiếp theo (1) + (2) và (2)’ – (1)’. Ta có $|A| = -(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$

g) (2) – (1) và (3) – (1). Khai triển cột (4). Sau đó (1) + (3). Ta có $|A| = (2a - b - c - d)$

h) (1) + (2) + (3) + (4). Sau đó (4)' – (1)'. Khai triển cột (4). Tiếp theo (2)' – (1)' và (3)' – (1)'.
Ta có $|A| = (a - b)^2(a + b + 2x)(a + b - 2x)$

i) (4)' – (3)', (3)' – (2)' và (2)' – (1)'. Sau đó (4)' – (3)' và (3)' – (2)' . Để ý ma trận có 2 cột giống nhau.

j) (1)' + (2)' + (3)'. Để ý ma trận có 2 cột tỉ lệ với nhau.

3/ a), b), c) và d) $|A| \neq 0$ và $A^{-1} = |A|^{-1} C^t$ e) và f) $|A| = 0$

4/ a) $|A| = (m + 1)(m + 2)$ b) (1)' – (2)' – (3)'. Sau đó (3) – (1). Ta có $|A| = m^2(m - 1)$

c) $|A| = (c - a)(c - b)(a - b)$ d) $|A| = 1 \quad \forall a \in \mathbf{R}$

5/ $\Delta \neq 0$ và hệ có nghiệm duy nhất là $x_j = \Delta_j / \Delta$ với $j = 1, 2, 3$.

6/ a) $\Delta = (m + 1)(m - 1) = \Delta_2$ và $\Delta_1 = 0$: nghiệm duy nhất hay vô số nghiệm

b) $\Delta = -(m + 1)(m + 4)$, $\Delta_1 = -(m + 1)$, $\Delta_2 = -(m + 1)(m + 2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm

c) $\Delta = m(m + 2)$, $\Delta_1 = (m + 1)(m + 2)$ và $\Delta_2 = -(m + 2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm

d) $\Delta = (2m^2 - 3m + 7) > 0 \quad \forall m \in \mathbf{R}$, $\Delta_1 = (m^2 + 5m - 9)$ và $\Delta_2 = (5 - 2m^2)$: nghiệm duy nhất

e) $\Delta = (m + 1)(m + 3)$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 2(m + 3)$, $\Delta_3 = -(m + 3)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm

f) $\Delta = 8(m + 1)(m - 2)$, $\Delta_1 = -2(2m^2 + 4m - 25)$, $\Delta_2 = 12(m + 1)$ và $\Delta_3 = 18$: nghiệm duy nhất hay vô nghiệm

g) $\Delta = -m(m + 5)$, $\Delta_1 = -2m(m + 2)$, $\Delta_2 = 3m$, $\Delta_3 = -m(m + 2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm

h) $\Delta = m(m + 2)(m - 1)^2$, $\Delta_1 = (m - 1)(m + 2)$, $\Delta_2 = 0$ và $\Delta_3 = m(1 - m)(m + 2)$: nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm

<u>CHƯƠNG IV :</u> KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbf{R}^n$

1/ c), d) $W \leq \mathbf{R}^n$ tương ứng a), b), e) và f) W không phải là không gian vector con của $\mathbf{R}^n$ tương ứng

2/ a) $3u - v - w = 0$ b) $u - 10v - 7w = 0$ c) $u - v + w - t = 0$ d) ($4u - v + 3w = 0 = u - 7v - 9t$)

3/ a), b) và e) S phụ thuộc tuyến tính c) và d) S độc lập tuyến tính f) Tính $\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$ và biện luận theo m

4/ a), b), c) và f) S không phải là cơ sở của $\mathbf{R}^3$ d) và e) S là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$

5/ *Cách bổ sung thêm vector vào cơ sở B của W để có một cơ sở C của* $\boldsymbol{R^n}$: Lập ma trận mà các dòng của nó là các vector của B. Nếu ma trận này chưa có dạng bậc thang thì ta biến đổi nó về dạng bậc thang. Nếu thấy cột thứ j của ma trận dạng bậc thang này *không bán chuẩn hóa được* thì ta thêm vector ε_j (trong cơ sở chính tắc B_o của $\mathbf{R}^n$) vào B ($1 \leq j \leq n$).

a) $3u - 2v = 0$ và $C = B \cup \{ \varepsilon_2 \}$ b) $u = 0 = v - 3w$ và $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_3 \}$

c) $u + v - 9w - 3t = 0$ và $C = B \cup \{ \varepsilon_4 \}$ d) $u = 0 = 25v + 8w - 6t$ và $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_4 \}$

e) $3u - w + 4t = 0 = 9u + 6t + z$ và $C = B \cup \{ \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5 \}$

6/ *Cách bổ sung thêm vector vào cơ sở B của W để có một cơ sở C của* $\boldsymbol{R^n}$: Làm như bài **5/**. Để ý trong bài toán đang xét, ma trận mà các dòng của nó là các vector của B đã có sẵn dạng bậc thang nên không cần biến đổi.

a) Cơ sở $B = \{ (1, 2, 4), (0, 1, 1) \}$ và $2u + v - w = 0$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_3 \}$.

b) Cơ sở $B = \{ (1, 2, -3), (0, 3, -2) \}$ và $5u + 2v + 3w = 0$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_3 \}$.

c) Cơ sở $B = \{ (1, 2, -4, 0), (0, 1, -11, 1), (0, 0, 20, -1) \}$ và $22u - 9v + w + 20t = 0$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_4 \}$.

d) Cơ sở $B = \{ (1, -1, 29, -3), (0, 5, 5, 2) \}$ và ($30u + v - w = 0 = 13u - 2v + 5t$). Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_3, \varepsilon_4 \}$.

7/ Dùng cách tách biến và đặt thừa số chung theo mỗi biến, ta tìm được 1 tập sinh hữu hạn S cho W.
Sau đó làm hoàn toàn tương tự như bài **6/** .

8/ *Cách bổ sung thêm vector vào cơ sở B của W để có một cơ sở C của* $\boldsymbol{R}^n$: Có thể làm như bài **5/** (nhưng sẽ mất thời gian biến đổi ma trận về dạng bậc thang). Trong bài toán đang xét, ta có thể làm nhanh như sau : Khi giải xong hệ $AX = \mathbf{O}$ (phương pháp Gauss hay Gauss – Jordan), nếu thấy cột thứ j của ma trận A bán *chuẩn hóa được* (hoặc *chuẩn hóa được*) thì ta thêm vector ε_j (trong cơ sở chính tắc B_o của $\mathbf{R}^n$) vào B ($1 \leq j \leq n$).
a) Cơ sở $B = \{ (-19, 6, 0, 1) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$.
b) Cơ sở $B = \{ (-1,-1, 1, 2, 0), (7, 5,-5, 0, 8) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$.
c) Cơ sở $B = \{ (-2, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$.
d) Cơ sở $B = \{ (1,-1, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 1, 0), (2,-3, 0, 0, 1) \}$. Ta có $C = B \cup \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$.

9/ Cách 1: $P(S\to T) = P(S\to B_o)P(B_o\to T)$ với B_o là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$. Suy ra $P(T \to S) = [\, P(S\to T)\,]^{-1}$
Cách 2: Tìm $P(S\to T)$ và $P(T \to S)$ bằng cách biến đổi $(X_1^t\ \ X_2^t\ \ X_3^t \mid Y_1^t\ \ Y_2^t\ \ Y_3^t) \to (I_3 \mid P(S \to T))$ và $(Y_1^t\ \ Y_2^t\ \ Y_3^t \mid X_1^t\ \ X_2^t\ \ X_3^t) \to (I_3 \mid P(T \to S))$.
Khi tính tọa độ của vector, có thể dùng công thức đổi tọa độ hay dùng định nghĩa.

10/ a) Lập $A = ([\, E\,]_S\ [\, F\,]_S\ [\, G\,]_S) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ thì $|A| \neq 0$ nên T cũng là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ và ta có $P(S \to T) = A$. Suy ra $P(T \to S) = A^{-1}$.

b) Cách 1 : Do $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix}$ và $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ nên T cũng là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$

và $P(T \to S) = ([\, X\,]_T\ [\, Y\,]_T\ [\, Z\,]_T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Suy ra $P(S \to T) = [P(T \to S)]^{-1}$.

Cách 2 : Đặt $W = \langle T \rangle$ thì $W \leq \mathbf{R}^3$. Do $S \subset \langle T \rangle$ nên $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$, nghĩa là $\mathbf{R}^3 \leq W$.
Vậy $W = \langle T \rangle = \mathbf{R}^3$. T là một tập sinh có 3 vector của $\mathbf{R}^3$(3 chiều) nên T cũng là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.
Ta có $P(T \to S) = ([\, X\,]_T\ [\, Y\,]_T\ [\, Z\,]_T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $P(S \to T) = [\, P(T\to S)\,]^{-1}$.

11/ a) Giải thích S là một cơ sở của W để thấy $\dim W = |S| = 2$. $X = (u,v,w) \in W \Leftrightarrow 3u - 7v + 5w = 0$ (*)
Nếu $X = (u,v,w) \in W$ thì $[\, X\,]_S = 3^{-1}\begin{pmatrix} 2v - w \\ 2w - v \end{pmatrix}$(**). Từ (*), ta có $T \subset W$.
Ta giải thích được T cũng là một cơ sở của W. Từ (**), ta có $P(S \to T) = ([\, E\,]_S\ [\, F\,]_S) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Suy ra $P(T \to S) = [\, P(S\to T)\,]^{-1}$.
Có thể tìm trực tiếp $P(S \to T)$ và $P(T \to S)$ bằng cách biến đổi $(Y^t\ \ Z^t \mid E^t\ \ F^t) \to (I_3 \mid P(S \to T))$ và $(E^t\ \ F^t \mid Y^t\ \ Z^t) \to (I_3 \mid P(T \to S))$.

Ta có $[\, X\,]_T = P(T \to S)\, [\, X\,]_S$.

b) Hoàn toàn tương tự như a), trong đó $X = (u,v,w,t) \in W \Leftrightarrow 7u - 2v + 5w = 0$ (*).

Nếu $X \in W$ thì $[X]_S = 3^{-1}\begin{pmatrix} v-u-w-t \\ 2v-6u-4w-t \\ 3u-v+2w+t \end{pmatrix}$ (**).

$P(S \to T) = ([E]_S \ [F]_S \ [G]_S) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ và $P(S \to T) = [P(T \to S)]^{-1}$.

Có thể tìm trực tiếp $P(S \to T)$ và $P(T \to S)$ bằng cách biến đổi
$(Y^t \ Z^t \ U^t \mid E^t \ F^t \ G^t) \to (I_3 \mid P(S \to T))$ và $(E^t \ F^t \ G^t \mid Y^t \ Z^t \ U^t) \to (I_3 \mid P(T \to S))$.
