ĐÁP ÁN PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (KỲ THI LTĐH 2012)

CÂU 1:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & -5 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 10 & 15 \\ 7 & 13 & -5 & m & 15 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & 6 & 5 & 16 \\ 0 & -1 & 2 & m-14 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & m-15 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-17 \end{array}\right) \end{array}$$ a) Nếu $m \neq 17$: vô nghiệm.

b) Nếu $m = 17$: vô số nghiệm với ẩn tự do $z \in \mathbf{R}$, $x = 1 - 3z$, $y = 2z - 2$, $t = 2$.

CÂU 2:

a) $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$. Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $X = A^{-1}ABAA^{-2} = BA^{-1}$, $(X + Y) = A^{-2}ABAA^{-1} = A^{-1}B$ và $Y = (X + Y) - X = A^{-1}B - BA^{-1}$

Vậy $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $(X + Y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ và $Y = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

CÂU 3:

a) $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 17 & -29 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$: hệ có vô số nghiệm

với 2 ẩn tự do : $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_1 = 29b - 17a$, $x_2 = 10a - 17b$ ($a,b \in \mathbf{R}$). Suy ra
$V = \{ X = (29b - 17a, 10a - 17b, a, b) = a(-17,10,1,0) + b(29, -17,0,1) \ / \ a,b \in \mathbf{R} \}$, nghĩa là
V có một cơ sở là $C = \{ X_1 = (-17,10,1,0), X_2 = (29, -17,0,1) \}$ và $\dim_{\mathbf{R}} V = |C| = 2$.

b) Từ a), ta thấy ma trận ở vế trái chỉ có cột 1 và 2 chuẩn hóa được nên khi thêm 2 vector $\varepsilon_1 = (1,0,0,0)$ và $\varepsilon_2 = (0,1,0,0)$ vào C thì $D = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, X_1, X_2 \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

Điều này càng được thấy rõ ràng hơn vì $\begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -17 & 10 & 1 & 0 \\ 29 & -17 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

ĐÁP ÁN PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (KỲ THI LTĐH 2013)

CÂU 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 8 & m \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & m-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-11 \end{array}\right)$$

Nếu $m \neq 11$ thì hệ vô nghiệm.
Nếu $m = 11$ thì hệ có vô số nghiệm với ca1ca63n tự do $z, t \in \mathbf{R}$, $x = 9 - 3z - 4t$, $y = 2z + t - 4$.

CÂU 2:

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 10 & 10 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -50\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 50(1-a).$$

A không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 50(1-a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

CÂU 3:

a) $$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W có một cơ sở là $T = \{ X_1 = (1,-1,1,0), X_2 = (0,1,0,-1), X_3 = (0,0,0,1)\}$ và $\dim W = |T| = 3$.

b) Từ phép biến đổi ma trận ở trên, ta suy ra $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Với $Z = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ thì Z phụ thuộc tuyến tính do ma trận $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ có hạng là $2 < |Z| = 3$.

Do đó Z không phải là một cơ sở của W.

ĐÁP ÁN PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (KỲ THI LTĐH 2014)

CÂU 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -3 & -5 & 11 \\ 2 & 1 & 3 & m \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & m+8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m+5 \end{array}\right)$$

Nếu $m + 5 \neq 0$ (tức $m \neq -5$) thì hệ vô nghiệm.
Nếu $m + 5 = 0$ (tức $m = -5$) thì hệ có vô số nghiệm với ẩn tự do $z \in \mathbf{R}$, $x = -z - 1$, $y = -z - 3$.

CÂU 2:

$$| A | = \begin{vmatrix} a+5 & 5 & 3 \\ 2a+4 & a+4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5 & -2 \\ a & a+4 & -a-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & -2 \\ a & -a-1 \end{vmatrix} = a(a-1).$$

A không khả nghịch $\Leftrightarrow$ $| A | = a(a-1) = 0 \Leftrightarrow$ ($a = 0$ hoặc $a = 1$).

CÂU 3:

a) $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên S là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

$\begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ nên T là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

Tìm $L = (S \to T)$ (*cách 1 dùng trực tiếp định nghĩa*) :

$L = ([\beta_1]_S \ [\beta_2]_S \ [\beta_3]_S)$ được tìm bằng cách biến đổi Gauss – Jordan:

$$\left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \ \middle|\ \beta_1^t \quad \beta_2^t \quad \beta_3^t\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -3 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 10 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 5 & -51 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -5 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 5 & -51 \end{array}\right). \text{ Vậy } L = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 32 \\ 2 & -1 & 10 \\ -10 & 5 & -51 \end{pmatrix}.$$

Tìm $L = (S \to T)$ (*cách 2 gián tiếp thông qua cơ sở chính tắc*) :

$L = (S \to B).(B \to T) = H^{-1}K$ trong đó B là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ và

$$H = (B \to S) = ([\alpha_1]_B \ [\alpha_2]_B \ [\alpha_3]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$K = (B \to T) = ([\beta_1]_B \ [\beta_2]_B \ [\beta_3]_B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Tìm H^{-1} :

$$(H \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & -5 \end{array}\right) = (I_3 \mid H^{-1}) \text{ . Vậy } H^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Suy ra } L = H^{-1}K = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 32 \\ 2 & -1 & 10 \\ -10 & 5 & -51 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } [\gamma]_S = (S \to T) [\gamma]_T = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 32 \\ 2 & -1 & 10 \\ -10 & 5 & -51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -79 \\ -26 \\ 133 \end{pmatrix}.$$

ĐÁP ÁN PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (KỲ THI LTĐH 2015 ĐỢT 1)

CÂU 1:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(m-2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1-m)$$

a) Nếu $m \neq 2$ thì $\Delta \neq 0$: nghiệm duy nhất $x = 2$, $y = (m-2)^{-1}$, $z = (1-m)(m-2)^{-1}$

b) Nếu $m = 2$ thì $\Delta = 0 \neq \Delta_y = 1$: vô nghiệm.

CÂU 2:

a) $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$. Vậy A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $X = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 43 \\ 7 & 9 & 39 \\ 13 & 17 & 69 \end{pmatrix}$.

CÂU 3:

a) $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to S_D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ O \end{pmatrix}$.

W có 1 cơ sở là T = { $\beta_1 = (1,-1,2,0)$, $\beta_2 = (0,1,4,-1)$, $\beta_3 = (0,0,0,1)$} và dimW = rank(D) = | T | = 3.
Do r(D) = 3 < | S | = 4 nên S phụ thuộc tuyến tính.

b) Xét phương trình $a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3 = \alpha$ (*) với a, b và c là 3 ẩn số thực cần tìm.

(*) $\Leftrightarrow$ $a(1,-1,2,0) + b(0,1,4,-1) + c(0,0,0,1) = (2,m,1,1)$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & d \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & d+2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2d+5 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & d+2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2d+4 \end{array}\right) \end{array}$$

Vậy $\alpha = (2, d, 1, 1) \in W = \langle S \rangle$ $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm trên **R** $\Leftrightarrow$ $2d + 4 = 0$ $\Leftrightarrow$ $d = -2$.

ĐÁP ÁN PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (KỲ THI LTĐH 2015 ĐỢT 2)

CÂU 1:

$$\begin{array}{c} \quad x \quad y \quad z \quad t \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 3 & -2 \\ 5 & 11 & -7 & 9 & m \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & m-5 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \quad x \quad y \quad z \quad t \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right) \end{array}$$

Nếu $m \neq 1$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $m = 1$ thì hệ có vô số nghiệm với các ẩn tự do $z, t \in \mathbf{R}$, $x = 9 - 3z - 4t$, $y = 2z + t - 4$.

CÂU 2:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & a-1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & a-1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -8 \\ 1 & 4 & a \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 16(8-a)$

b) A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 16(8 - a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 8$.

CÂU 3:

a) $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ nên B là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

b) $P = (B \to B_o) = ([\varepsilon_1]_B \ [\varepsilon_2]_B \ [\varepsilon_3]_B)$ được tìm bằng cách biến đổi Gauss – Jordan:

$$\left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \;\middle|\; \varepsilon_1^t \quad \varepsilon_2^t \quad \varepsilon_3^t\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right). \text{ Vậy } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Ta thấy $\alpha = 0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 - \alpha_3$ nên $[\alpha]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ĐÁP ÁN PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (KỲ THI LTĐH 2016 – ĐỢT 1)

CÂU 1:

$$\begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad t \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 9 & 17 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 8 & m \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & m-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m-1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad t \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right) \end{array}$$

a) Nếu $m \neq 0$: vô nghiệm.

b) Nếu $m = 0$: vô số nghiệm với ẩn tự do $y \in \mathbf{R}$, $x = y + 13$, $z = -5$, $t = -1$.

<u>CÂU 2:</u>

$$(\,A \mid I_3\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) = (\,I_3 \mid A^{-1}\,)\,.$$

Vậy A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $AB = 2A^2 - 3I_3 \Leftrightarrow B = A^{-1}(2A^2 - 3I_3) = 2A - 3A^{-1} =$

$$= 2\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -5 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>CÂU 3:</u>

a) $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & a & 7 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & a+4 & 3 \\ 1 & 2 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+4 & 3 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 10 = (a+5)(a-2)$

$S(a)$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow (a+5)(a-2) \neq 0 \Leftrightarrow -5 \neq a \neq 2$.

b) $-5 \neq a = 1 \neq 2$ nên $C = S(1) = \{\ \alpha_1 = (1, -1,1),\ \alpha_2 = (4, 1,7),\ \alpha_1 = (1, 1,1)\ \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

Đặt $[\,\alpha\,]_C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1^t & \alpha_2^t & \alpha_3^t & \alpha^t \end{array}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 29 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 29 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

Vậy $[\,\alpha\,]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ĐÁP ÁN PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (KỲ THI LTĐH 2016 – ĐỢT 2)

<u>CÂU 1</u>: Ký hiệu hệ phương trình là $AX = B$.

$$\Delta = |\,A\,| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & -3 \\ 5 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & -4 \\ 5 & 1 & m-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & -4 \\ 1 & m-5 \end{vmatrix} = m^2 - 5m + 4 = (m-1)(m-4).$$

Nếu hệ có vô số nghiệm thì $\Delta = 0$, nghĩa là $m = 1$ hoặc $m = 4$.

Khi $m = 1$ thì hệ là

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

: hệ có vô số nghiệm $z \in \mathbf{R}$, $x = -z$, $y = 4z$.

Khi $m = 4$ thì hệ là $\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array}$: hệ vô nghiệm.

Như vậy hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $m = 1$. Lúc đó nghiệm của hệ là $z \in \mathbf{R}$, $x = -z$, $y = 4z$.

CÂU 2:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -9 & 4 \\ 1 & -9 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -9 \\ 1 & -9 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 1 & -9 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = -35.$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 4a \\ 1 & -3 & 5 & 6a \\ a & a & -2a & a^2 \\ 0 & a & a & a \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 |A|$ (suy từ dòng 3, dòng 4 và cột 4 của B).

Suy ra $|B| = 4a|A| \Leftrightarrow a^3|A| = 4a|A| \Leftrightarrow a^3 = 4a \Leftrightarrow a(a+2)(a-2) = 0 \Leftrightarrow$ ($a = 0$ hoặc $a = \pm 2$)

CÂU 3:

a) $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & b & 6 \\ 1 & -4 & 7 & b-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & b-8 & 2 \\ 1 & -3 & 5 & b-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 3 & b-8 & 2 \\ -3 & 5 & b-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & b-3 & 0 \\ -3 & 5 & b-4 \end{vmatrix} =$

$= (b-3)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & b-4 \end{vmatrix} = 3(b-3)(b-2).$

S phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow$ $= 0$ $\Leftrightarrow$ $3(b-3)(b-2) = 0$ $\Leftrightarrow$ ($b = 2$ hoặc $b = 3$).

b) Khi $b = 2$:

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

W có một cơ sở là $C = \{\gamma_1 = (1,-1,2,1), \gamma_2 = (0,3,-5,2), \gamma_3 = (0,0,-1,0)\}$ và $\dim W = |C| = 3$.

Khi $b = 3$: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & -4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

W có một cơ sở là $D = \{\delta_1 = (1,-1,2,1), \delta_2 = (0,3,-5,2), \delta_3 = (0,0,0,1)\}$ và $\dim W = |D| = 3$.

ĐÁP ÁN PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (KỲ THI LTĐH 2017)

CÂU 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 14 & 10 \\ 2 & -6 & 4 & m & 2m-4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & m-8 & 2m-10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-4 & 2m-8 \end{array}\right)$$

Nếu $m = 4$ thì $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$: hệ có vô số nghiệm như sau z, t $\in$ **R**, x = z – 8t + 5, y = z – 2t + 1.

Nếu $m \neq 4$ thì $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-4 & 2m-8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ **:** hệ có vô số nghiệm như sau

z $\in$ **R**, x = z – 11, y = z – 3, t = 2.

CÂU 2:

a) $|A - aI_3| = \begin{vmatrix} 1-a & 3 & 3 \\ 1 & -a-4 & -5 \\ -1 & 3 & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3 & 3 \\ 1 & -a-4 & -5 \\ 0 & -a-1 & -a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 0 & 3 \\ 1 & 1-a & -5 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{vmatrix} =$

$= -(a+1)\begin{vmatrix} 1-a & 0 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} = -(a+1)(a-1)^2$

Ta có $(A - aI_3)$ không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = -(a+1)(a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

b) $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 7 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 7 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$. Vậy A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -7 & -8 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

CÂU 3:

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & -4 & -1 \\ 6 & -6 & 14 & -15 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & -4 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_B$. Ta có r(B) = 3 < 4 nên S phụ thuộc tuyến tính.

b) Từ a), ta thấy W = < S > có một cơ sở là

C = { β_1 = (1,–2,3,–4,1), β_2 = (0,2,–1,1,–2), β_3 = (0,0,–1,6,0) } và dimW = 3.

ĐÁP ÁN PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (KỲ THI LTĐH 2018)

CÂU 1:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 10 & -5 \\ 7 & 6 & -5 & 17 & m \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & m-7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & m-4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-2 \end{array}\right)$$

a) Nếu $m \neq 2$: vô nghiệm.

b) Nếu $m = 2$: vô số nghiệm với ẩn tự do $z \in \mathbf{R}$, x = 1 – z , y = 2z + 2, t = –1.

CÂU 2:

a) $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$. Vậy A khả nghịch và $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Ta có $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2.$

Suy ra $|B| = |10A^5| = 10^3|A|^5 = 1000(-2)5 = -32.000$.

CÂU 3:

a) $\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ nên B là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

b) P = (B $\to$ B$_o$) = ($[\varepsilon_1]_B$ $[\varepsilon_2]_B$ $[\varepsilon_3]_B$) được tìm bằng cách biến đổi Gauss – Jordan:

$\left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \;\middle|\; \varepsilon_1^t \quad \varepsilon_2^t \quad \varepsilon_3^t\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Vậy $P = (B \to B_o) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $[\alpha]_B = (B \to B_o)\,[\alpha]_{B_o} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
