

# Guía de Estudio de Control

Posgrado de Mecatrónica

May 21, 2020

La guía de estudio tiene el propósito de orientar a los aspirantes sobre los temas a evaluar en el examen de admisión en el área de control, con la finalidad de obtener un resultado favorable para su ingreso a la maestría, así como reforzar sus conocimientos.

## **Temario**

- Modelado de sistemas dinámicos
  - Modelado de sistemas mecánicos.
  - Modelado de sistemas eléctricos.
- Representación de una ecuación diferencial en el dominio de la frecuencia y en forma matricial
  - Representación de una ecuación diferencial en el dominio de la frecuencia a través de una función de transferencia
  - Representación de una ecuación diferencial en espacio de estados en su forma canónica controlable
- Reducción de diagramas a bloques.
- Comportamiento de los sistemas de control con retroalimentación
  - Respuesta transitoria de los sistemas de primero orden.
  - Respuesta transitoria de los sistemas de segundo orden.
  - Error en estado estacionario
  - Controlador P, PD, PI y PID
- Diseño de sistemas de control en espacio de estados
  - Controlabilidad
  - Observabilidad
  - Diseño de un control por retroalimentación de estados
  - Diseño de un observador de estado completo

**Ejercicios.-** Los ejercicios propuestos en esta guía de estudio tiene el propósito de orientar al aspirante a los temas del examen de admisión. Además se desea que el candidato reflexione sobre los resultados y el procedimiento de los ejercicios para obtener un mayor entendimiento del tema.

**1. Se tiene un circuito RLC en serie. Resuelva lo siguiente**

- (a) Obtenga el modelo dinámico del circuito RLC
- (b) Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a la carga eléctrica
- (c) Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a la corriente
- (d) Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida al voltaje de la resistencia ( $e_R$ )
- (e) Represente el sistema en espacio de estados en su forma canónica controlable con las salidas  $q$ ,  $e_R$ ,  $e_C$  y  $I$

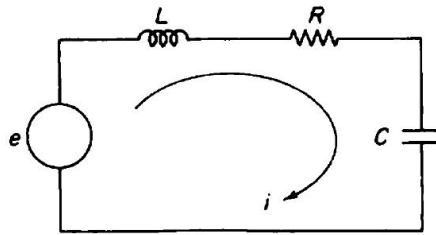


Figure 1: Circuito RLC

Resp. a)

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e$$

Resp. b)

$$\frac{q(s)}{e(s)} = \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Resp. c)

$$\frac{I(s)}{e(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Resp. d)

$$\frac{e_R(s)}{e(s)} = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Resp. f)

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \\ \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

2. Considerando el modelo de dos masas conectadas mediante un resorte como se ilustra en la figura 2, si se aplica un fuerza de entrada  $u$  a la segunda masa, determine lo siguiente:

- Obtenga el modelo dinámico del sistema
- Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a  $x_1$
- Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a  $x_2$
- Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a la velocidad de  $x_1$
- Represente el sistema en espacio de estados en su forma canónica controlable con las salidas  $x_1$  y  $x_2$

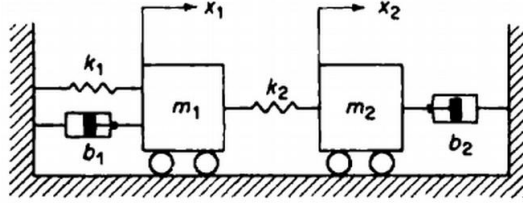


Figure 2: Sistema de dos masas

**Respuesta a los incisos**

Resp. a)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= u \end{aligned}$$

Resp. b)

$$\frac{x_1(s)}{u(s)} = \frac{-k_2}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 b_2 + m_2 b_1) s^3 + (k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2 + b_1 b_2) s^2 + (b_1 k_2 + (k_1 + k_2) b_2) s + k_1 k_2}$$

Resp. c)

$$\frac{x_2(s)}{u(s)} = \frac{m_1 s^2 + b_1 s + k_1 + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 b_2 + m_2 b_1) s^3 + (k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2 + b_1 b_2) s^2 + (b_1 k_2 + (k_1 + k_2) b_2) s + k_1 k_2}$$

Resp. c)

$$\frac{v_2(s)}{u(s)} = \frac{-k_2 s}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 b_2 + m_2 b_1) s^3 + (k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2 + b_1 b_2) s^2 + (b_1 k_2 + (k_1 + k_2) b_2) s + k_1 k_2}$$

Resp. d)

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

3. Determine la función de transferencia en lazo cerrado de  $\frac{Y(s)}{R(s)}$  de la figura 3

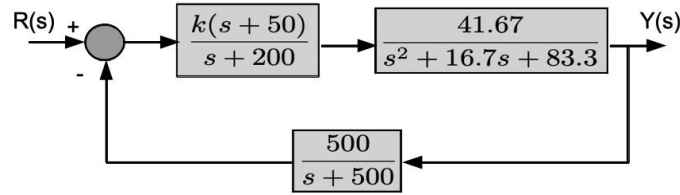


Figure 3: Primer diagrama a bloque

Resp. a)

$$\frac{41.67ks^2 + 22918.5ks + 1041750k}{s^4 + 716.7s^3 + 111773.3s^2 + (20835k + 1728310)s + 1041750k + 8330000}$$

4. Se tiene la siguiente función de transferencia de segundo orden

$$\frac{4}{3s^2 + Ks + 5}$$

determine lo siguiente:

- (a) Encuentre el valor de  $w_n$  y  $\zeta$  con  $K = 9$
- (b) Determine el tipo de respuesta de la función de transferencia con  $K = 9$
- (c) Determine el valor de  $K$  con la intensidad que  $\zeta$  sea igual a 0.7 y mencione el tipo de respuesta
- (d) Calcule los polos cuando  $K = 9$  y  $K = -4$
- (e) Mencione la estabilidad del sistema para el inciso anterior

**Respuesta a los incisos**

Resp. a)

$$w_n = \sqrt{5/3}, \quad \zeta = 1.16$$

Resp. b)

Respuesta sobreamortiguada

Resp. c)

$$K = 1.806, \text{ Respuesta subamortiguado}$$

Resp. d)

$$\begin{aligned} K = 9, \quad s_1 = -8.4051, \quad s_2 = -0.5949 \\ K = -4, \quad s_1 = 2 + i, \quad s_2 = 2 - i \end{aligned}$$

Resp. e)

$$\begin{aligned} K = 9, \text{ estable} \\ K = -4, \text{ inestable} \end{aligned}$$

**5. La figura 6 muestra un diagrama a bloque, resuelva lo siguiente:**

- (a) Obtenga la función de transferencia del sistema  $\frac{C(s)}{R(s)}$
- (b) Obtenga la función de transferencia del sistema  $\frac{E(s)}{R(s)}$
- (c) Obtenga el error en estado estacionario del sistema ante una entrada de escalón unitario  $R(s) = 1/s$
- (d) Considere el sistema en lazo cerrado con una  $k = 22$ . Determine el factor de amortiguamiento relativo, la frecuencia natural del sistema, los polos y mencione el tipo de respuesta del sistema.

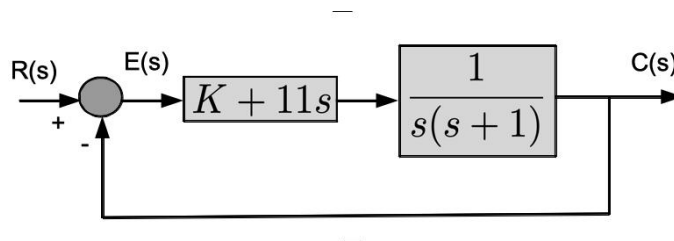


Figure 4: Segundo diagrama a bloque

### Respuesta a los incisos

Resp. a)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{11s + k}{s^2 + 12s + k}$$

Resp. b)

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(s + 1)}{s^2 + 12s + k}$$

Resp. c)

$$e_{ss} = 0$$

Resp. d)

$$\begin{aligned} w_n &= \sqrt{22}, & \zeta &= 1.27 \\ s_1 &= -9.74, & s_2 &= -2.25 \\ &estable \end{aligned}$$

6. Se tiene una función de transferencia de tercer orden

$$G(S) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^3 + 4s^2 + 8s + 3}$$

- (a) Determine la estabilidad de la función de transferencia mediante el criterio de Routh-Hurwitz
- (b) Obtenga los ceros de la función de transferencia

### Respuesta a los incisos

Resp. a)

El sistema es estable y los polos están del lado izquierdo del plano  $s$

Resp. b)

Los ceros del sistema son  $-3$  y  $-1$

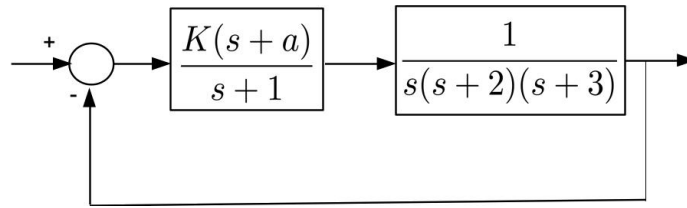


Figure 5: Tercer diagrama a bloque

7. Determine el rango de los coeficientes  $a$  y  $K$  con el propósito que la función de transferencia en lazo cerrado sea estable (ver figura 5). Utilice el criterio de Routh-Hurwitz

**Respuesta**

Resp. a)

$$K < 60; a < \frac{(60-K)(K+6)}{36K}$$

8. El siguiente diagrama a bloques representa un sistema retroalimentado. Considere que

$$G_1(s) = k_1 + k_2s; \quad G_2(s) = \frac{6}{s^2+4s-1}; \quad G_3(s) = 1$$

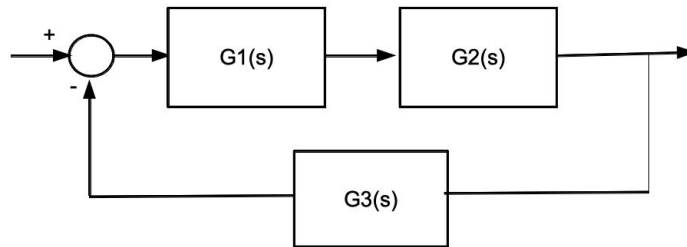


Figure 6: Cuarto diagrama a bloque

- Determine la estabilidad de la función de transferencia de  $G_2(s)$
- Establezca las condiciones de  $k_1$  y  $k_2$  para que el sistema en lazo cerrado sea estable
- Determine las ganancias del controlador con la finalidad que los polos se ubiquen en  $s_1 = -4$  y  $s_2 = -3$
- Considere a  $G_2(s) = \frac{6}{s^3-3s^2+4s-1}$ . Determine si es posible estabilizar el sistema con el controlador PD

- (e) Considere a  $G_1 = 1$ ,  $G_2 = \frac{6}{s^2+4s+1}$  y  $G_3 = 1$ . Determine la estabilidad del sistema en lazo cerrado
- (f) Ahora se propone que  $G_3 = -1$ , mientras que  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  permanecen igual que el inciso anterior. Determine la estabilidad del sistema

**Respuesta a los incisos**

Resp. a)

El sistema es inestable

Resp. b)

Los coeficientes deben cumplir las siguientes desigualdades  $k_1 > \frac{1}{6}$ ;  $k_2 > -\frac{4}{6}$

Resp. c)

$k_1 = 11/6$ ;  $k_2 = 1/2$

Resp. e)

El sistema es estable

Resp. f)

El sistema es inestable

**9. El siguiente espacio de estado está representado en su forma canónica controlable.**

- (a) Encuentre su ecuación característica y determine si el sistema es estable con  $k = 3$
- (b) Determine si el sistema es controlable con  $k = 3$
- (c) Determine si el sistema es estable con  $k = -3$
- (d) Determine si el sistema es controlable con  $k = -3$
- (e) Diseñe un controlador por retroalimentación de estados con la intención de ubicar sus polos en  $s_1 = -2 + 4i$ ,  $s_2 = -2 - 4i$  y  $-10$  con  $k = -3$
- (f) Determine si el sistema es observable con  $k = 3$
- (g) Diseñe un observador de estado completo con  $k=3$ . Suponga que los valores característicos deseados de la matriz de ganancias del observador son  $\mu_1 = -2 + j2\sqrt{7}$ ,  $\mu_2 = -2 - j2\sqrt{7}$  y  $\mu_3 = -7$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Resp. a)

$s^3 + 4s^2 + 2s + 3$ , el sistema es estable

Resp. b)

El sistema es controlable ya que su rango es 3.

Resp. c)



El sistema es inestable

Resp. d)

El sistema sigue siendo controlable

Resp. e)

$k_1 = 197, k_2 = 58, k_3 = 10$

Resp. f)

El sistema es observable

Resp. g)

$L_1 = 7; L_2 = 47; L_3 = 19$

10. **Determine si el siguiente espacio de estados es controlable y observable.**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Resp.

El sistema es controlable y observable