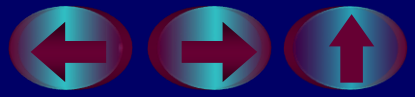
第三节　协方差及相关系数

- 协方差
- 相关系数
- 课堂练习
- 小结　布置作业



前面我们介绍了随机变量的数学期望和方差，对于二维随机变量（X，Y），我们除了讨论X与Y的数学期望和方差以外，还要讨论描述X和Y之间关系的数字特征，这就是本讲要讨论的

协方差和相关系数

一、协方差

1.定义　量$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量X和Y的协方差,记为$Cov(X,Y)$，即

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

2.简单性质

(1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

(2) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$　a,b 是常数

(3) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

3. 计算协方差的一个简单公式

由协方差的定义及期望的性质，可得

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

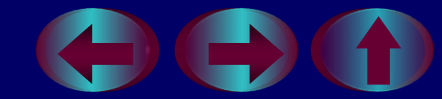
$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

即

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

可见，若X 与 Y 独立， $Cov(X,Y)=0$.



特别地

$$Cov(X,X)=E(X^2)-E(X)^2=D(X)$$

4. 随机变量和的方差与协方差的关系

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$$

例1 已知离散型随机向量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	-1	0	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.05	0.1
2	0.15	0	0.1

求$\mathrm{cov}(X,Y)$

解 计算$E(X)$,

X \ Y	−1	0	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.05	0.1
2	0.15	0	0.1

$x_i p_{ij}$

0	0	0
0.3	0.05	0.1
0.3	0	0.2

求和

$E(X)=0.95$

计算$E(Y)$,

X \ Y	−1	0	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.05	0.1
2	0.15	0	0.1

$y_j p_{ij}$

−0.1	0	0
−0.3	0	0.2
−0.15	0	0.2

求和

$E(Y)=-0.15$

计算$E(XY)$,

X \ Y	−1	0	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.05	0.1
2	0.15	0	0.1

$x_i y_j p_{ij}$

0	0	0
−0.3	0	0.2
−0.3	0	0.4

求和 ⟹ $E(XY)=0$

$E(X)=0.95,\ E(Y)=-0.15,\ E(XY)=0$

于是

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=0.95\times 0.15=0.1425$$

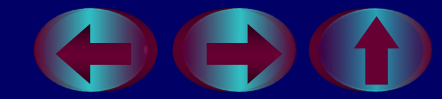
例2 设连续型随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$\mathrm{cov}(X,Y)$和$D(X+Y)$.

解: 由(X,Y)的密度函数求边缘密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

于是

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 x\cdot 4x(1-x^2)\,\mathrm{d}\,x=8/15$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1 y\cdot 4y^3\,\mathrm{d}\,y=4/5$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_x^1 xy\cdot 8xy\,\mathrm{d}\,y=4/5$$

从而得 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15}=\frac{4}{225}.$$

又

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\,4x(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y^2\,4y^3\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

所以

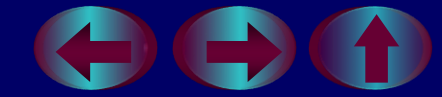
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{8}{15}\right)^2=\frac{11}{225}$$

$$D(Y)=E(Y^2)=[E(Y)]^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}$$

故

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

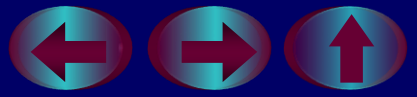
$$=\frac{11}{225}+\frac{2}{75}+\frac{8}{225}=\frac{1}{9}.$$



协方差的大小在一定程度上反映了X和Y相互间的关系，但它还受X与Y本身度量单位的影响. 例如：

$$Cov(kX, kY)=k^2Cov(X,Y)$$

为了克服这一缺点，对协方差进行标准化，这就引入了相关系数 .



二、相关系数

定义： 设$D(X)>0$, $D(Y)>0$, 称

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

为随机变量 X 和 Y 的相关系数 .

在不致引起混淆时，记 ρ_{XY} 为 ρ .

相关系数的性质：

1. $|\rho| \le 1$

证: 由方差的性质和协方差的定义知,

对任意实数 b

$0 \le D(Y-bX) =$

令 $b = \dfrac{Cov(X,Y)}{D(X)}$

由于方差$D(Y)$是正的,故必有

$1-\rho^2 \ge 0$,所以 $|\rho| \le 1$。

$$D(Y-bX) = D(Y) - \frac{[Cov(X,Y)]^2}{D(X)}$$

$$= D(Y)[1 - \frac{[Cov(X,Y)]^2}{D(X)D(Y)}] = D(Y)[1-\rho^2]$$

2. X和Y独立时，$\rho=0$，但其逆不真.

由于当X和Y独立时，$Cov(X,Y)=0$.

故 $$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0$$

但由 $\rho=0$ 并不一定能推出X和Y独立.

请看下例.

例3 设X服从(-1/2, 1/2)内的均匀分布，而$Y=\cos X$.

X的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

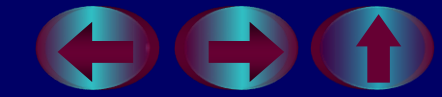
可得$E(X)=0$

$$E(XY)=E(X\cos X)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\cos x f(x)dx=0$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

因而$\rho=0$，　即X和Y不相关.

但Y与X有严格的函数关系，即X和Y不独立.



3. $|\rho| = 1$

$\Longleftrightarrow$ 存在常数 $a,b(b\neq 0)$，使 $P\{Y= a + b X\}=1$,

即 X 和 Y 以概率 1 线性相关.

相关系数刻划了X和Y间“线性相关”的程度.

考虑以X的线性函数$a+bX$来近似表示Y，

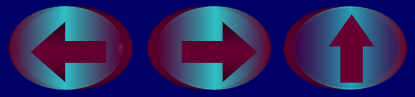
以均方误差

$$e=E\{[Y-(a+bX)]^2\}$$

来衡量以 $a+b\,X$ 近似表示Y 的好坏程度：

e 值越小表示 $a+bX$ 与 Y 的近似程度越好.

用微积分中求极值的方法，求出使e 达到最小时的 a,b



$$e = E\{[Y-(a+bX)]^2\}$$

$$= E(Y^2)+b^2E(X^2)+a^2- 2bE(XY)+2abE(X) - 2aE(Y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0 \\ \dfrac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0 \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} b_0 = \dfrac{Cov(X,Y)}{D(X)} \\ a_0 = E(Y) - b_0E(X) \end{cases}$$

这样求出的最佳逼近为

$L(X)=a_0+b_0X$

这样求出的最佳逼近为$L(X)=a_0+b_0X$

这一逼近的剩余是

$$E[(Y-L(X))^2]=D(Y)(1-\rho^2)$$

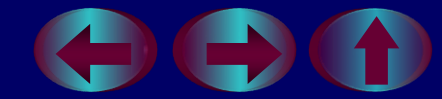
可见，若 $\rho=\pm1$，Y 与 X 有严格线性关系；

若 $\rho=0$，Y 与 X 无线性关系；

若$0<|\rho|<1$，

$|\rho|$ 的值越接近于1，Y 与 X 的线性相关程度越高；

$|\rho|$ 的值越接近于0，Y与X的线性相关程度越弱.



前面，我们已经看到：

若 X 与 Y 独立，则 X 与 Y 不相关，

但由 X 与 Y 不相关，不一定能推出X与Y独立.

但对下述情形，独立与不相关等价

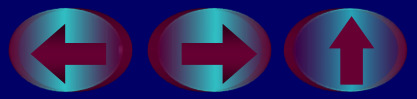
若(X,Y)服从二维正态分布，则

X与Y独立 $\Leftrightarrow$ X与Y不相关

例4 设(X,Y)服从二维正态分布, 它的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

求X和Y的相关系数ρ_{XY}.



解:

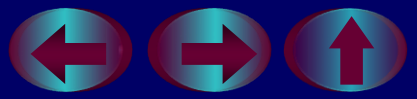
$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

在上式中令

$$t=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},u=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2},\mathrm{d}x=\sigma_1\,\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=\sigma_2\,\mathrm{d}u$$



则

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}tue^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(t^2-2\rho tu+u^2)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

而指数上的

$$t^2-2\rho tu+u^2=t^2-2\rho tu+(\rho u)^2+u^2-(\rho u)^2$$

$$=(t-\rho u)^2+u^2(1-\rho^2),\ \text{因此}$$

$$\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[(t-\rho u)^2+u^2(1-\rho^2)\right]$$

$$=\frac{-(t-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{u^2}{2}$$

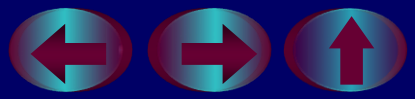
因此,

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}tue^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(t^2-2\rho tu+u^2)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}tue^{-\frac{u^2}{2}}e^{-\frac{(t-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

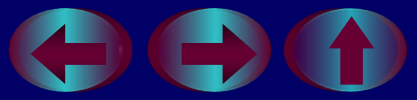
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(u\rho)e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u=\rho\sigma_1\sigma_2$$

于是 $$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho$$



因此二维正态随机变量(X,Y)的概率密度中的参数ρ就是X和Y的相关系数, 因而二维正态随机变量的分布完全可由X,Y各自的数学期望, 方差以及它们的相关系数所确定.

注: 若(X,Y)服从二维正态分布, 则X与Y相互独立, 当且仅当X与Y不相关.



三、 原点矩　中心矩

定义　设X和Y是随机变量，若

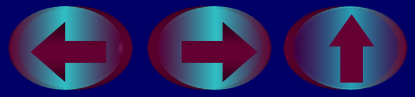
$$E(X^k), k = 1,2,\cdots$$

存在，称它为**X的k阶原点矩**，简称 **k阶矩**

若　$E\{[X - E(X)]^k\}, k = 2,3,\cdots$

存在，称它为**X的k阶中心矩**

可见，均值 E（X）是X一阶原点矩，方差D（X）是X的二阶中心矩。



设 X 和 Y 是随机变量，若

$$E(X^k Y^L) \quad k,L=1,2,\ldots$$ 存在，

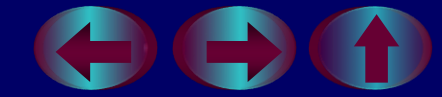
称它为 X 和 Y 的 $k+L$ 阶混合（原点）矩.

若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^L\}$ 存在，

称它为 X 和 Y 的 $k+L$ 阶混合中心矩.

可见，

协方差 $Cov(X,Y)$ 是 X 和 Y 的二阶混合中心矩.



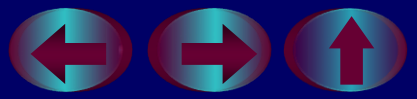
四、课堂练习

1、设随机变量（X，Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y) & 0\le x\le 2,0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X),E(Y),Cov(X,Y),D(X+Y)$。

2、设$X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且设$X$，$Y$相互独立试求$Z_1=\alpha X+\beta Y$和$Z_2=\alpha X-\beta Y$的相关系数(其中$\alpha$，$\beta$是不全为零的常数）。



1、解 $E(X)=E(Y)=\frac{7}{6}, Cov(X,Y)=-\frac{1}{36}, D(X+Y)=\frac{5}{9}$

2、解 $D(X)=D(Y)=\sigma^2$

$$D(Z_1)=D(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2 D(X)+\beta^2 D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

$$D(Z_2)=D(\alpha X-\beta Y)=\alpha^2 D(X)+\beta^2 D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$

$$Cov(Z_1,Z_2)=Cov(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)$$

$$=\alpha^2 Cov(X,X)-\beta^2 Cov(Y,Y)=\alpha^2 D(X)-\beta^2 D(Y)$$

$$=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$$

$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

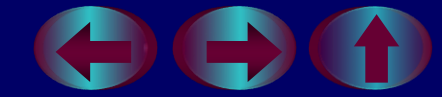
五、小结

这一节我们介绍了协方差、相关系数、相关系数是刻划两个变量间线性相关程度的一个重要的数字特征.

注意独立与不相关并不是等价的.

当(X,Y) 服从二维正态分布时，有

X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow$ X 与 Y 不相关



六、 布置作业

习题4-3（p110）3、6、10