哈尔滨理工大学

《概率论与数理统计》习题课四

一、填空题

(1)已知$X \sim N(-2, 0.4^2)$,则$E(X+3)^2 = \underline{1.16}$

解:由均值的性质得

$$E(X+3)^2 = E(X^2+6X+9)$$
$$= E(X^2)+6E(X)+9$$
$$= D(X)+E(X)^2+6E(X)+9$$
$$= 0.16+4+6(-2)+9 = 1.16$$

一、填空题

(2)设$X \sim N(10,0.6), Y \sim N(1,2)$, 且$X$与$Y$相互独立,

则$D(3X - Y) = \underline{7.4}$

解：由方差的性质得

$$D(3X - Y) = 9D(X) + D(Y)$$

$$= 5.4 + 2 = 7.4$$

一、填空题

(3)设X的概率密度为$f(x)=Ae^{-x^2}$,则$D(X)=\underline{\dfrac{1}{2}}$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-x^2}dx$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=A\sqrt{\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$A=1/\sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}\\ \Downarrow\\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\end{gathered}}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx=0$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}xde^{-x^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[xe^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}$$

二、选择题

(1)掷一颗均匀的骰子600次,那么出现"一点"次数的均值为<u>B</u>

$(A)50$　　$(B)100$　　$(C)120$　　$(D)150$

解：设X"出现一点的次数",则$X \sim b(600,\frac{1}{6})$

$$E(X)=600\times\frac{1}{6}=100$$

二、选择题

(1)设X_1, X_2, X_3相互独立服从参数$\lambda = 3$的泊松分布，

令$Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$,则$E(Y^2) = \underline{C}$

$(A)1$　　$(B)9$　　$(C)10$　　$(D)6$

解:$E(Y) = E[\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)] = \frac{1}{3} \times 3 \times \lambda = 3$

$$D(Y) = D[\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)] = \frac{1}{9} \times 3 \times \lambda = 1$$

$$E(Y^2) = D(Y) + E(Y)^2 = 1 + 9 = 10$$

二、选择题

(2)设X_1, X_2, X_3相互独立同服从参数$\lambda = 3$的泊松分布,令$Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$,则$E(Y^2) = \underline{C}$

$(A)1$　　$(B)9$　　$(C)10$　　$(D)6$

解:$E(Y) = E(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} E(X_k) = 3$

$$D(Y) = D(\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)) = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{3} D(X_k) = 1$$

$$E(Y^2) = D(Y) + E(Y)^2 = 10$$

二、选择题

(3)对于任意两个随机变量X和Y,若

$E(XY)=E(X)E(Y)$,则$\underline{B}$

(A)$D(XY)=D(X)D(Y)$ (B)$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C)X和Y相互独立 (D)X和Y不相互独立

解:$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$$

$$=D(X)+D(Y)$$

三、解答题

(1)盒中有7个球,其中4个白球,3个黑球,从中任取3个球,求抽到白球数X的期望$E(X)$和方差$D(X)$.

解: X的分布率为

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{C_3^3}{C_7^3}$	$\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}$	$\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}$	$\frac{C_4^3}{C_7^3}$

$$E(X)=12/7$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{24}{49}$$

三、解答题

(2)有一物品的重量为1克,2克,$\cdots$10克是等概率的,为用天平称此物品的重量准备了三组砝码,甲组有五个砝码分别为1,2,2,5,10克,乙组为1,1,2,5,10克,丙组为1,2,3,4,10克,只准备用一组砝码放在天平的一个称盘里称重量,问哪一组砝码称重物时所用的砝码数平均最少?

解: X"甲组砝码称重物时所用的砝码数"

Y"乙组砝码称重物时所用的砝码数"

Z"丙组砝码称重物时所用的砝码数"

物品的重量是一个随机变量 U,

$$U = k \quad (k = 1, 2, \cdots, 10),$$

$$P\{U = k\} = 1/10 \quad (k = 1, 2, \cdots, 10).$$

$$\{X = 1\} = \{U = 1\} + \{U = 2\} + \{U = 5\} + \{U = 10\}$$

$$\{X = 2\} = \{U = 3\} + \{U = 4\} + \{U = 6\} + \{U = 7\}$$

$$\{X = 3\} = \{U = 8\} + \{U = 9\}$$

X	1	2	3
p_k	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

Y	1	2	3	4
p_k	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Z	1	2	3
p_k	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$E(X)=\frac{18}{10},\quad E(Y)=\frac{20}{10},\quad E(Z)=\frac{17}{10}$$

三、解答题

(3)公共汽车起点站于每时的10分,30分,55分发车,该乘客不知发车时间,在每小时内的任意时刻随机到达车站,求乘客候车时间的数学期望.

解: X"乘客到站时间"　　Y"乘客候车时间"

$$X \sim U[0,60] \qquad f(x)=\begin{cases} 1/60 & 0 \le x \le 60 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}10-X\ , & 0\le X\le 10\\ 30-X\ , & 10<X\le 30\\ 55-X\ , & 30<X\le 55\\ 70-X\ , & 55<X\le 60\end{cases}\quad \triangleq g(X)$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

$$=\frac{1}{60}\Big[\int_0^{10}(10-x)dx+\int_{10}^{30}(30-x)dx+$$

$$\int_{30}^{55}(55-x)dx+\int_{55}^{60}(70-x)dx\Big]$$

$=10$分25秒

三、解答题

(4)设排球队A和B比赛,若有一队胜4场,则比赛宣告结束,假定A,B在每场比赛中获胜的概率均为$\frac{1}{2}$,试求平均需比赛几场才能分出胜负?

解:设X"需要比赛的场数"

$$X=4,5,6,7$$

$$\{X=5\}=\{A胜4场\}+\{B胜4场\}$$

$$\{A胜4场\}$$

$$=\{A在前4场中胜3场, B胜1场\}\cap\{第5场A必胜\}$$

$$P(X=4)=2\times(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{8}$$

$$P(X=5)=2\times C_4^3(\frac{1}{2})^3\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=6)=2\times C_5^3(\frac{1}{2})^3\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

$$P(X=7)=2\times C_6^3(\frac{1}{2})^3\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

$$E(X)=4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}\approx 5.8$$

三、解答题

(5)一袋中有n张卡片,分别记有号码$1,2,\cdots n$,从中有放回地抽出k张来，以X表示所得号码之和,求$E(X)$和$D(X)$.

解：X_i"抽取第i张卡片的号码" $i=1,2,\cdots k$

$X_i(i=1,2,\cdots k)$相互独立，令$X=X_1+X_2+\cdots+X_k$

X_i	1	2	3	…	n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

$$E(X_i)=\frac{1}{n}(1+2+\cdots n)=\frac{n+1}{2}$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{k}E(X_i)=k\cdot\frac{n+1}{2}$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-E(X_i)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{(n+1)^2}{4}$$

$$=\frac{1}{n}\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2-1}{12}$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{k}D(X_i)=\frac{k(n^2-1)}{12}$$

四、证明题

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty,$

(1)证明$E(X)=0, D(X)=2$

(2)证明X与$|X|$不相互独立

(3)证明X与$|X|$不相关.

证 ① $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 e^{-|x|}dx=\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx$$

$$=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$$

$$=2\left[-xe^{-x}\right]\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$$

$$=2$$

故 $D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=2$

证明（2）X与$|X|$不相互独立，因为任给$x>0$

$$P(X\le x, |X|\le x) = P(|X|\le x)$$
$$\ne P(X\le x)P(|X|\le x)$$

随机变量函数的数学期望

奇函数

(3) $$E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty} x|x|\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 0$$

$$Cov(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)=0$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$$