概率论

客观世界中发生的现象

- 确定性的 在一定条件下必然发生的现象
- 随机性的 在一定条件下，具有多种可能的结果，但事先又不能预知确切的结果

① 抛掷一枚硬币，其结果可能是图案面朝上(数字面朝上)，也可能是图案面朝下(数字面朝下)，并且在抛掷之前无法预知抛掷的结果

② 足球比赛，其结果可能是胜、平、负，但在比赛之前无法预知其结果

③ 股市的变化

统计规律性

① 一个射手在一次射击中可能击中目标，也可能未击中目标，但在一个短时间内，每天的命中率却是稳定的

② 同一门炮在同样发射条件下射出的许多炮弹其落点不一样。虽然落点不同，但形成一个椭圆--- 落点分布

③ 命中率的稳定性与落点分布的稳定性都说明随机现象中蕴含着某种确定的规律

历史上抛掷硬币试验的记录

试验者	抛掷次数 (n)	正面次数 (r_n)	正面频率 (r_n/n)
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson K	12000	6019	0.5016
Pearson K	24000	12012	0.5005

随机试验的例子

①观察某射手对固定目标进行射击

②抛一枚硬币三次，观察出现正面的次数

③记录某市120急救电话一昼夜接到的呼叫次数

随机试验

①可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行

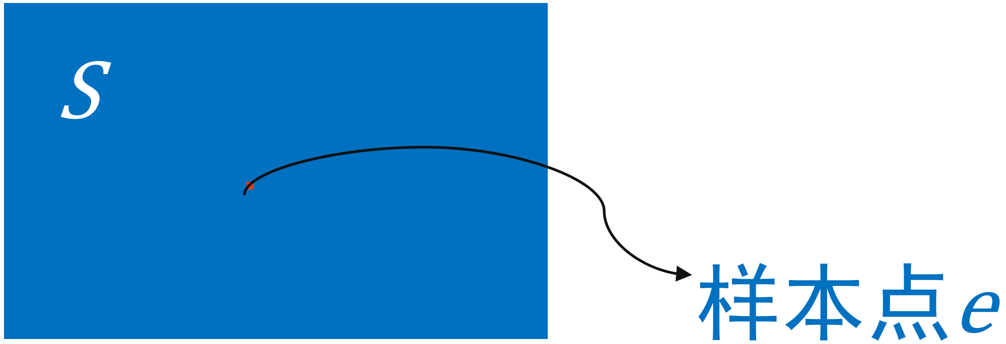
②可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果

③不确定性：每次试验出现的结果事先不能准确预知，但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个

具有上述三个特征的试验称为随机试验，记为E

样本空间

- **样本空间**：由随机试验的一切可能的结果组成的一个**集合**称为试验 E 的样本空间，记为 S 或 Ω
- **样本点**：试验的每一个可能的结果（或样本空间的元素）称为一个样本点，记为 e 或 ω



样本空间的例子

① 在抛掷一枚硬币观察其出现正面或反面的试验中，有两个样本点：正面，反面

$$S=\{\text{正面，反面}\}$$

② 观察某电话交换台在一天内收到的呼叫次数，其样本点有可数无穷多个：i次($i=0, 1, 2, 3,\ldots$)

$$S=\{0, 1, 2, 3,\ldots\}$$

② 观察某电话交换台在一天内收到的呼叫次数，其样本点有可数无穷多个：i次($i=0$, 1, 2, 3,...)

$$S=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

③ 在一批灯泡中任意抽取一个，测试其寿命，其样本点也有无穷多个(且不可数)：

$$S=\{t \mid 0\leq t\}=[0,+\infty)$$

随机试验的样本点与样本空间是根据观察的内容而确定的

a） 若观察取出的两个球的颜色，则样本点为{白，白}，{黑，白}，{黑，黑}，

$$S=\{\{白,白\},\{黑,白\},\{黑,黑\}\}$$

b） 若观察取出的两个球的号码，则样本点为 e_{ij}(取出第 i 号与第 j 号球)，$1\le i<j\le 5$

$$S=\{e_{ij}\,|\,1\le i<j\le 5\}$$

随机事件

- 随机事件：随机试验E的样本空间S的子集为E的随机事件，简称事件

如在掷骰子试验中，观察掷出的点数

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

事件$A = \{$掷出1点$\} = \{1\}$

事件$B = \{$掷出奇数点$\} = \{1, 3, 5\}$

事件$C = \{$出现的点数大于4$\} = \{5, 6\}$

- **基本事件**：由一个样本点组成的单点集（或称简单事件）

  事件$A=\{$掷出1点$\}=\{1\}$

- **必然事件**：在试验中必定发生的事件，常用S表示

  事件$S=\{$掷出点数小于7$\}=\{1,2,3,4,5,6\}$

- **不可能事件**：在试验中不可能发生的事件，常用$\varnothing$表示

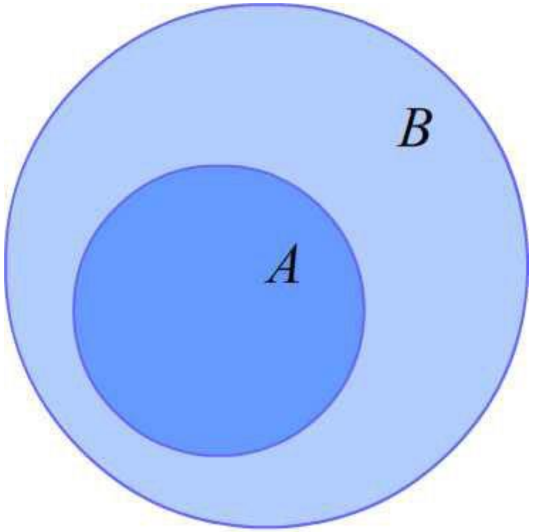
  事件$\varnothing=\{$掷出点数为8$\}$

事件的关系与运算

- 包含：事件A发生必导致事件B发生，也称A是B的子事件

记作$A \subset B$

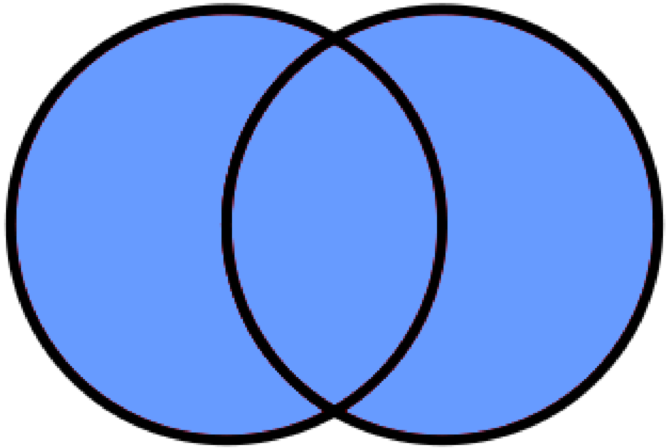
显然 $\varnothing \subset A \subset S$



事件A与B相等：$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$

- **和事件**：事件A与B至少有一个发生，

记作$A \cup B$或 $A+B$

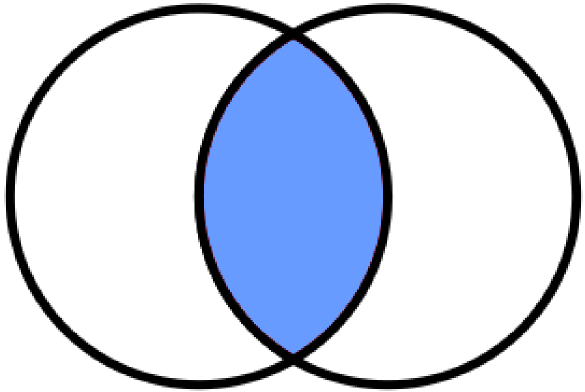


n个事件$A_1, A_2,\ldots, A_n$的和事件记作 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

可数个事件$A_1, A_2,\ldots, A_n \ldots$的和事件记作 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

- **积事件**：事件 A 与 B 同时发生，

  记作 $A \cap B$ 或 AB



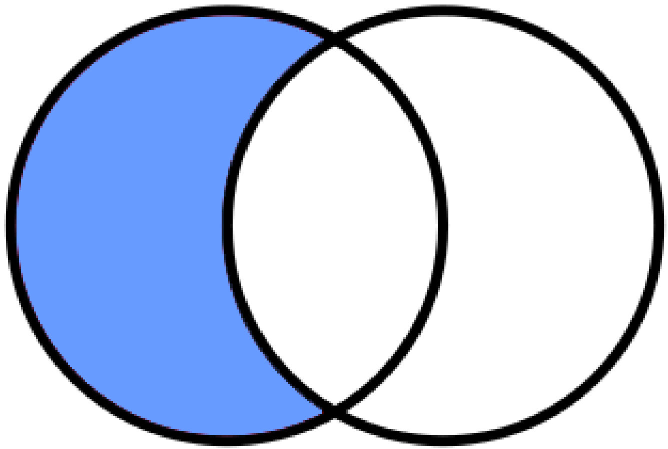
n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的积事件记作 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$

可列个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ 的积事件记作

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$$

- **差事件**：事件A发生而B不发生

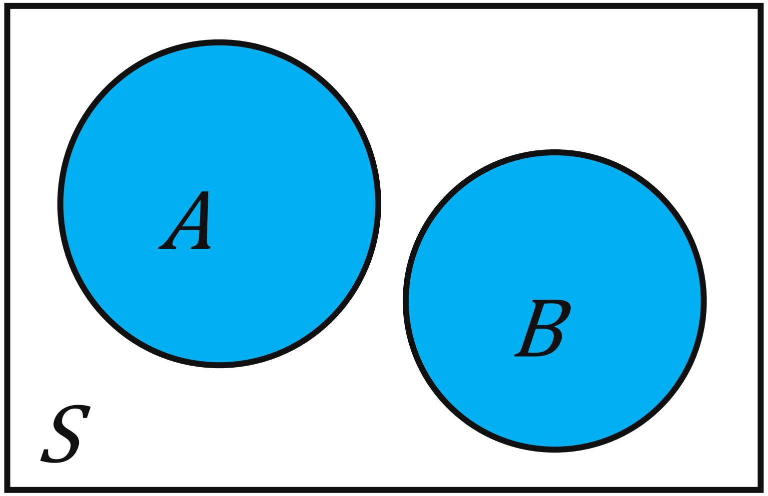
记作$A-B$



何时$A-B=\varnothing$？何时$A-B=A$?

- 互斥事件：事件A与B不能同时发生，又称互不相容

记作$AB=\varnothing$



基本事件是两两互不相容的

- 对立事件：事件 A 与 B 不能同时发生，又不能同时不发生。即在每次试验中，A 与 B

对立事件必为互不相容事件；

互不相容事件未必为对立事件

显然 $B=\overline{A} \Leftrightarrow A=\overline{B} \Leftrightarrow A\cup B=S$, 且 $AB=\varnothing$

显然 $A-B=A\overline{B}$

- 完备事件组：设 $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$ 是有限或可数个事件，若其满足：

① $A_i \cap A_j = \varnothing$ for all $i \neq j$

② $\cup_i A_i = S$

显然 A 与 $\overline{A}$ 是一个完备事件组

运算律

- 交换律：$A\cup B = B\cup A$; $AB = BA$
- 结合律：$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$;

  $(AB)C = A(BC)$
- 分配律：$(A\cup B)C = (AC)\cup(BC)$;

  $(AB)\cup C = (A\cup C)(B\cup C)$
- 对偶(De Morgan)律：

$$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B};\ \overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$$

推广 $\overline{\cup_i A_i} = \cap_i \overline{A_i}$; $\overline{\cap_i A_i} = \cup_i \overline{A_i}$

- $A\overline{A} = \varnothing$; $A \cup \overline{A} = S$; $\overline{A} = S - A$
- 若 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B, AB = A$
- $A - B = A\overline{B} = A - AB$;

  $A \cup B = A \cup (B - A)$
- $\overline{\overline{A}} = A$;

记号	概率论	集合论
S	样本空间	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	单点集
A	事件	子集
$\overline{A}$	A的对立事件	A的余集
$A \subset B$	事件A发生导致事件B发生	A是B的子集
$A = B$	事件A与事件B相等	A与B的相等
$A \cup B$	事件A与B至少有一个发生	A与B的并集
AB	事件A与事件B同时发生	A与B的交集
$A - B$	事件A发生而事件B不发生	A与B的差集
$AB = \varnothing$	事件A和事件B互不相容	A与B没有相同的元素

例

甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以 A、B、C分别表示甲、乙、丙命中目标，试用 A、B、C 的运算关系表示下列事件：

A_1：至少有一人命中目标 $A \cup B \cup C$

A_2：恰好有一人命中目标 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

A_3：恰好有两人命中目标 $AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C$

A_4：最多有一人命中目标 $\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}$

A_5：三人都命中目标 ABC

A_6：三人都未命中目标 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

例

化简下列事件

① $(\bar{A} \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B)$

② $A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}$

$$(\bar{A} \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B) = \left(\bar{A}(\bar{A} \cup B)\right) \cup \left(\bar{B}(\bar{A} \cup B)\right)$$

$$= (\bar{A}\bar{A} \cup \bar{A}B) \cup (\bar{B}\bar{A} \cup \bar{B}B)$$

$$= \bar{A} \cup \bar{A}B \cup \bar{B}\bar{A} \cup \varnothing$$

$$= \bar{A} \cup \left(\bar{A}(B \cup \bar{B})\right) \quad = \bar{A}$$

② $A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B}$

$$
\begin{aligned}
A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B} &= A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{B} \\
&= A\bar{B}\cup\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B} \\
&= (A\cup\bar{A})\bar{B}\cup\bar{A}(B\cup\bar{B}) \\
&= \bar{B}\cup\bar{A} \\
&= \overline{AB}
\end{aligned}
$$

作业

习题1-1（p6）：4、8、10