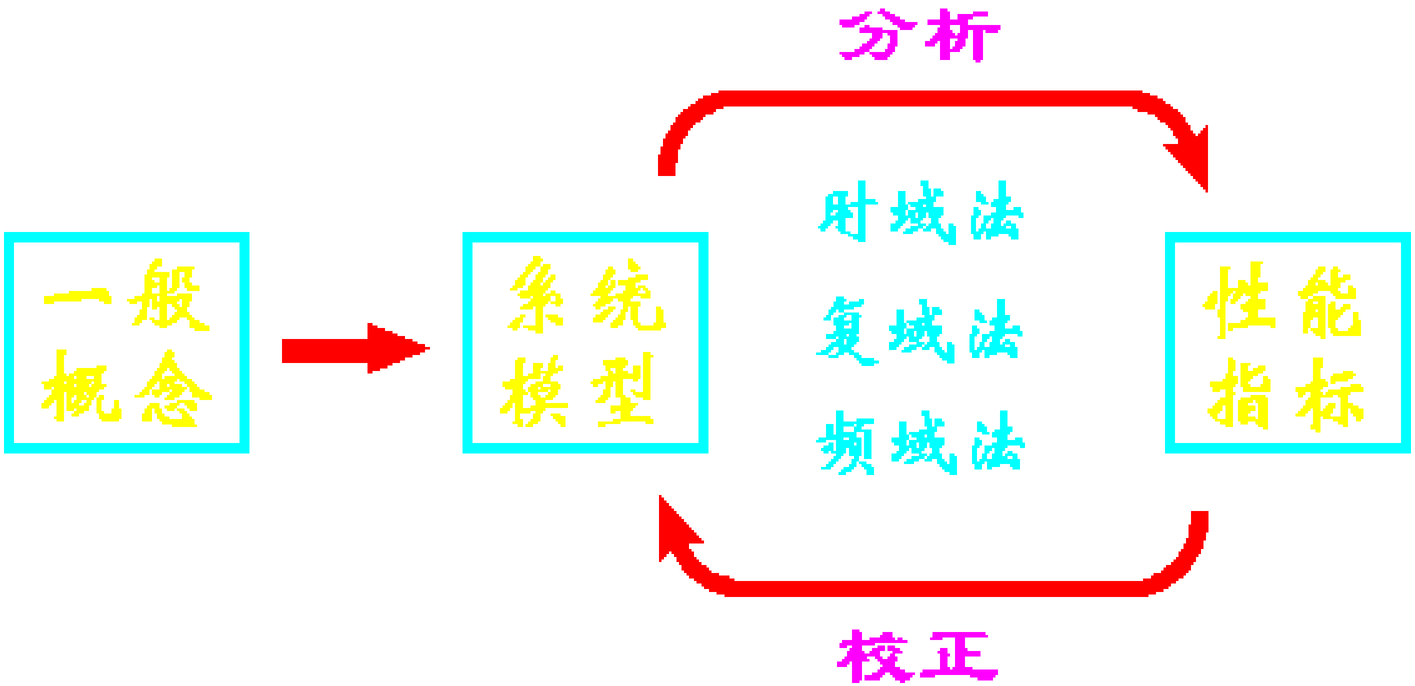
自动控制原理课程的任务与体系结构



课程的体系结构

(第 13 讲)

§4 根轨迹法

§4.1 根轨迹法的基本概念

§4.2 绘制根轨迹的基本法则

§4.3 广义根轨迹

§4.4 利用根轨迹分析系统性能

根轨迹法：三大分析校正方法之一

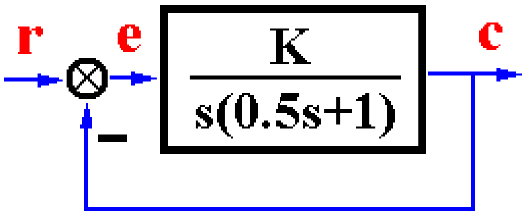
特点：（1）图解方法，直观、形象。
（2）适合于研究当系统中某一参数变化时，系统性能的变化趋势。
（3）近似方法，不十分精确。

§4.1 根轨迹法的基本概念

根轨迹：系统某一参数由$0\rightarrow\infty$变化时，λ在s平面相应变化所描绘出来的轨迹。

§4.1.1 根 轨 迹

例1 系统结构图如图所示，分析 λ 随开环增益K 变化的趋势。



解. $$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}=\frac{K^*=2K}{s(s+2)}$$

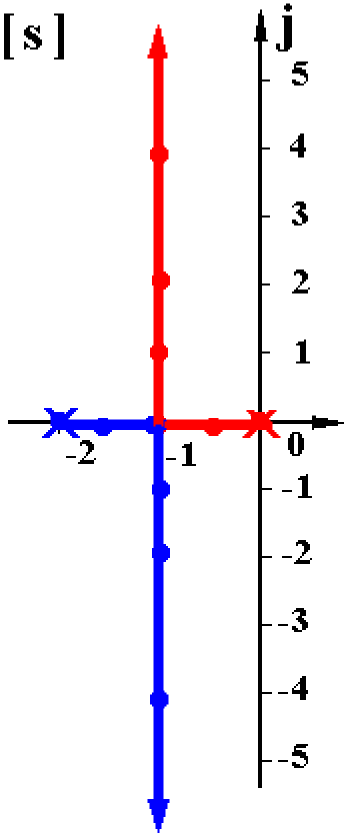
$\begin{cases} K: & \text{开环增益} \\ K^*: & \text{根轨迹增益} \end{cases}$

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K^*}{s^2+2s+K^*}$$

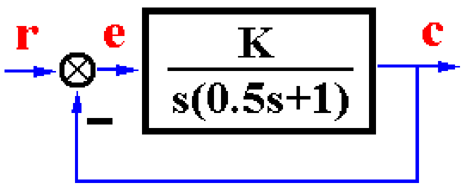
$$D(s)=s^2+2s+K^*=0$$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K^*}$$

K*=2K	λ_1	λ_2
0	0	-2
0.64	-0.4	-1.6
1	-1	-1
2	-1+j1	-1-j1
5	-1+j2	-1-j2
17	-1+j4	-1-j4
⋮	⋮	⋮
∞	-1+j∞	-1-j∞

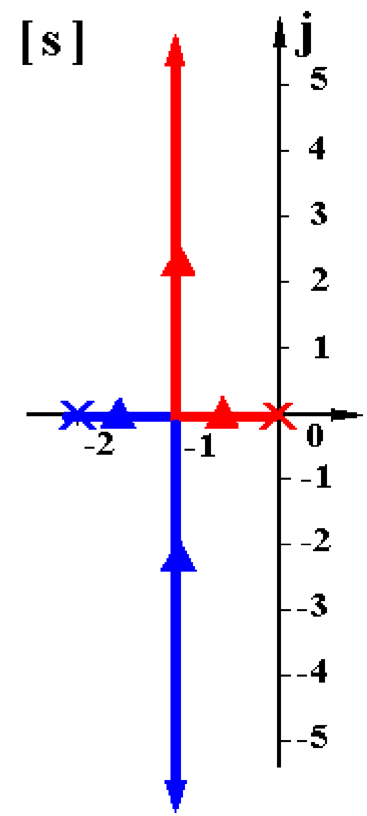


§4.1.2 根轨迹 —— 系统性能



$$D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K^*}$$



$K^*=2K = 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \infty$

动态性能

K^*: 0 → 1	K^*: 1 → ∞
$\xi > 1$	$0 < \xi < 1$
$\sigma\% = 0$	$\beta\uparrow \Rightarrow \xi\downarrow \Rightarrow \sigma\%\uparrow$
$t_s\downarrow$	$t_s = \dfrac{3.5}{\xi\omega_n} \sim$

稳定性

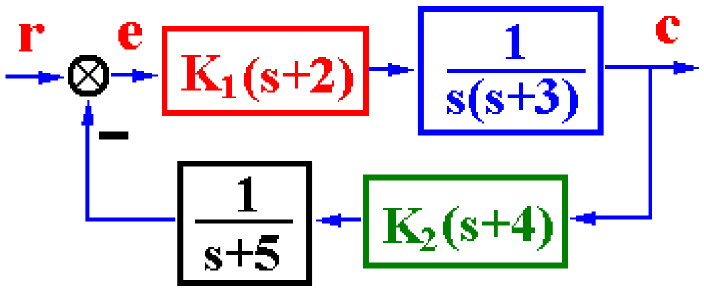
$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] < 0$，系统绝对稳定

稳态误差
[r(t)=At]

$$K^*\uparrow \Rightarrow e_{ss} = \frac{A}{K} = \frac{2A}{K^*}\downarrow$$

§4.1.3 闭环零点与开环零、极点之间的关系

系统结构图如图所示，确定闭环零点



$$G(s)=\frac{K_1K_2(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)}\qquad \begin{cases} K^*=K_1K_2 \\ K=\dfrac{8}{15}K_1K_2 \\ v=1 \end{cases}$$

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K_1(s+2)}{s(s+3)}}{1+\dfrac{K_1K_2(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)}}=\frac{K_1(s+2)(s+5)}{s(s+3)(s+5)+K_1K_2(s+2)(s+4)}$$

闭环零点＝前向通道开环零点＋反馈通道开环极点

闭环极点与开环零点、开环极点及 K^* 均有关

§ 4.1.4 根轨迹方程 (1)

根轨迹方程及其含义

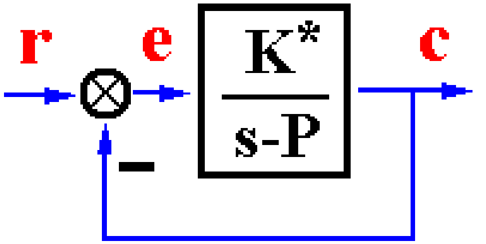
$$G(s)=\frac{K^*}{s-p}$$

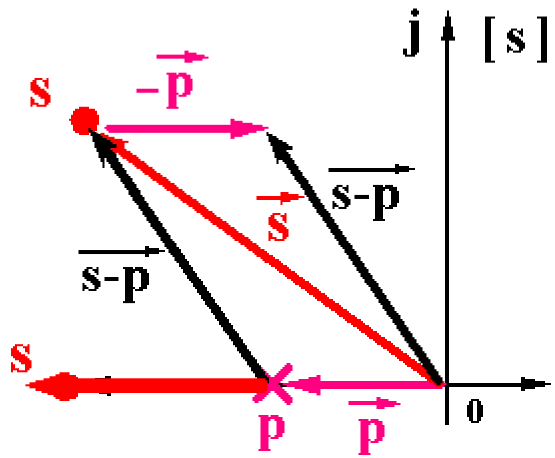
$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$1+G(s)=0$$

$$G(s)=-1$$

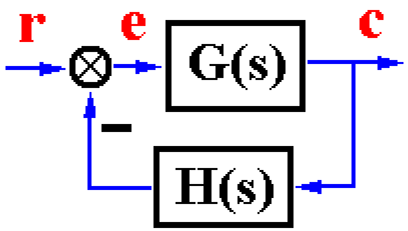
$$\begin{cases} \left|G(s)\right|=\dfrac{K^*}{\left|s-p\right|}=1 \\ \angle G(s)=-\angle(s-p)=(2k+1)\pi \end{cases}$$





§ 4.1.4 根轨迹方程 (2)

一般情况下



$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$K=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|p_j|}$$

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-1$$

$$|G(s)H(s)|=\frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}=1$$

— 模值条件

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi$$

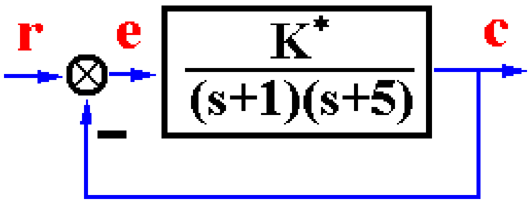
— 相角条件

§ 4.1.4 根轨

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^*|s-z_1|L|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|L|s-p_n|} = K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|} = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j) = (2k+1)\pi$$

例2 判定s_i是否为根轨迹上的点。



解. $G(s)=\dfrac{K^*}{(s+1)(s+5)}$

模值条件 $K^*=|s+1|\,|s+5|$

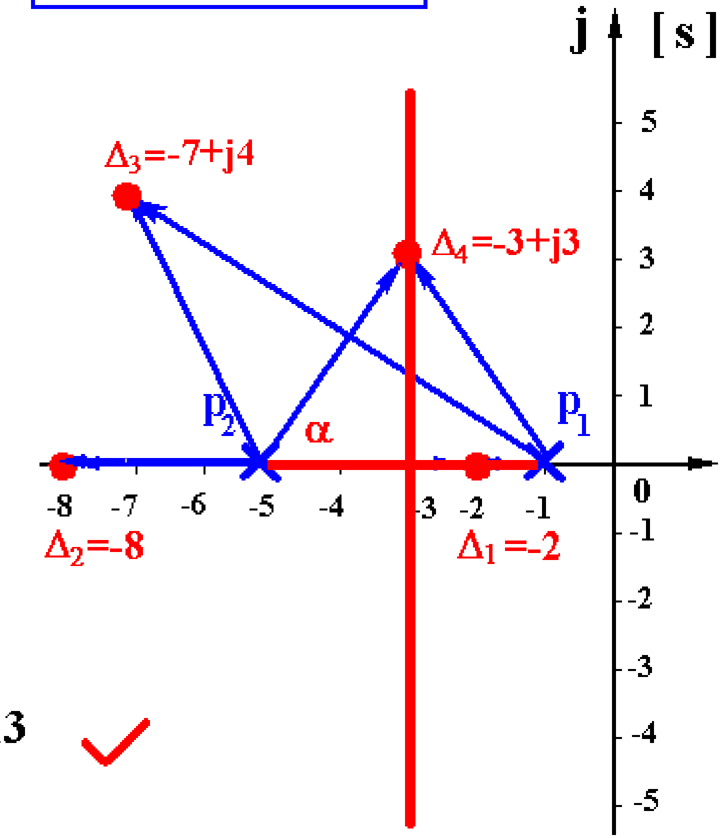
相角条件 $-\angle s-p_1-\angle s-p_2=(2k+1)\pi$

$\Delta_1=-2$ $\begin{cases} K^*_{\Delta_1}=|-2+1||-2+5|=3 \\ -\angle -2+1-\angle -2+5=-180-0=-180 \end{cases}$ ✓

$\Delta_2=-8$ $\begin{cases} K^*_{\Delta_2}=|-8+1||-8+5|=21 \\ -\angle -8+1-\angle -8+5=-180-180=-360 \end{cases}$ ✗

$\Delta_3=-7+j4$ $\begin{cases} K^*_{\Delta_3}=|-7+j4+1||-7+j4+5| \\ \quad =\sqrt{6^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2}=32.25 \\ -\angle -7+j4+1-\angle -7+j4+5 \neq (2k+1)\pi \end{cases}$ ✗

$\Delta_4=-3+j3$ $\begin{cases} K^*_{\Delta_4}=|-3+j3+1||-3+j3+5|=\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}=13 \\ -\angle -3+j3+1-\angle -3+j3+5=-(180-\alpha)-\alpha=-180 \end{cases}$ ✓



§ 4.1.4 根轨迹方程 (4)

- 对s平面上任意的点，总存在一个 K^*，使其满足模值条件，但该点不一定是根轨迹上的点。
- s平面上满足相角条件的点（必定满足模值条件）一定在根轨迹上。

  满足相角条件是s点位于根轨迹上的充分必要条件。
- 根轨迹上某点对应的 K^* 值，应由模值条件来确定。

§ 4.2 绘制根轨迹

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* |s-z_1| L |s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2| L |s-p_n|} = K^* \frac{\prod_{i=1}^{m} |(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n} |(s-p_j)|} = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s-p_j) = (2k+1)\pi$$

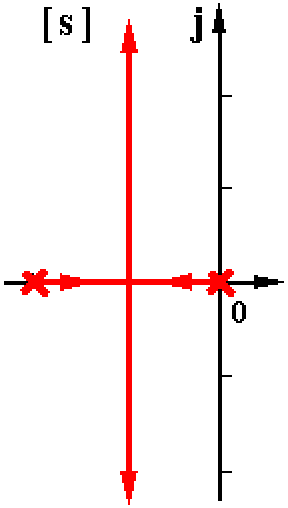
法则1 根轨迹的起点和终点：

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点；如果开环极点个数n大于开环零点个数m ，则有 n-m 条根轨迹终止于无穷远处。

$$K^* = \frac{|s-p_1|\cdots|s-p_n|}{|s-z_1|\cdots|s-z_m|} = \frac{s^{n-m}\left|1-\frac{p_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{p_n}{s}\right|}{\left|1-\frac{z_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{z_m}{s}\right|} = 0 \qquad s = p_i \qquad i = 1, 2, \cdots n$$

$$K^* = \frac{|s-p_1|\cdots|s-p_n|}{|s-z_1|\cdots|s-z_m|} = \frac{s^{n-m}\left|1-\frac{p_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{p_n}{s}\right|}{\left|1-\frac{z_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{z_m}{s}\right|} = \infty \qquad \begin{cases} s = z_j \\ s = \infty \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \cdots m$$



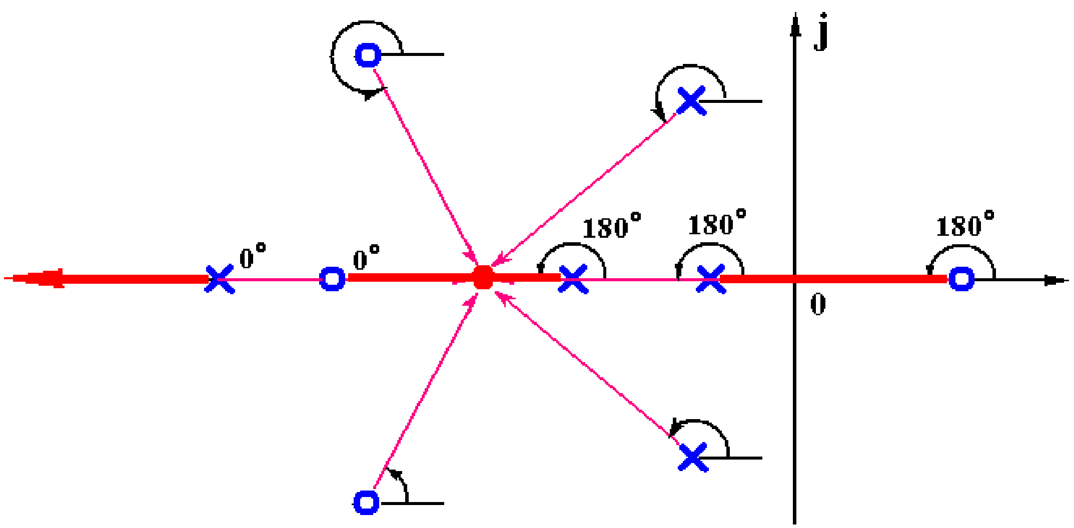
§4.2 绘制根轨迹的基本法则（2）

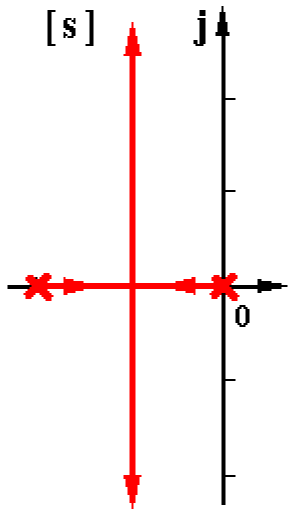
法则2 根轨迹的分支数，对称性和连续性：

根轨迹的分支数=开环极点数；根轨迹连续且对称于实轴。

法则3 实轴上的根轨迹：

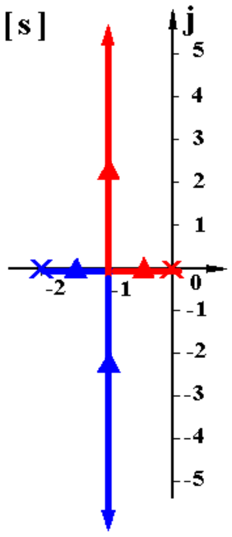
从实轴上最右端的开环零、极点算起，奇数开环零、极点到偶数开环零、极点之间的区域必是根轨迹。





§ 4.2 绘制根轨迹的基本法则（3）

法则4 **根之和：** $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = C \quad (n-m\geq 2)$



n-m ≥ 2时，闭环根之和保持一个常值。

证明： $GH(s)=\dfrac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}=\dfrac{K^*(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$

由代数定理： $-a_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}p_i \; \boxed{=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=-a_{n-1}=C}$

$$D(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+a_{n-3}s^{n-3}+\cdots+a_0$$
$$+K^*s^{n-2}+K^*b_{n-3}s^{n-3}+\cdots+K^*b_0$$

$$=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+(a_{n-2}+K^*)s^{n-2}+(a_{n-3}+K^*b_{n-3})s^{n-3}+\cdots+(a_0+K^*b_0)$$

$$D(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=0$$

n-m ≥ 2时，一部分根左移，另一部分根必右移，且移动总量为零。

§4.2 绘制根轨迹的基本法则 (4)

例3 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$

$K^*=0\to\infty$，证明复平面的根轨迹为圆弧。

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)} \qquad \begin{cases} K=2K^* \\ v=1 \end{cases}$$

$$D(s)=s(s+1)+K^*(s+2)=s^2+(1+K^*)s+2K^*$$

$$s_{1,2}=\frac{-(1+K^*)\pm\sqrt{(1+K^*)^2-8K^*}}{2}$$

$$=\frac{-(1+K^*)}{2}\pm j\frac{\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2}}{2}=\sigma\pm j\omega$$

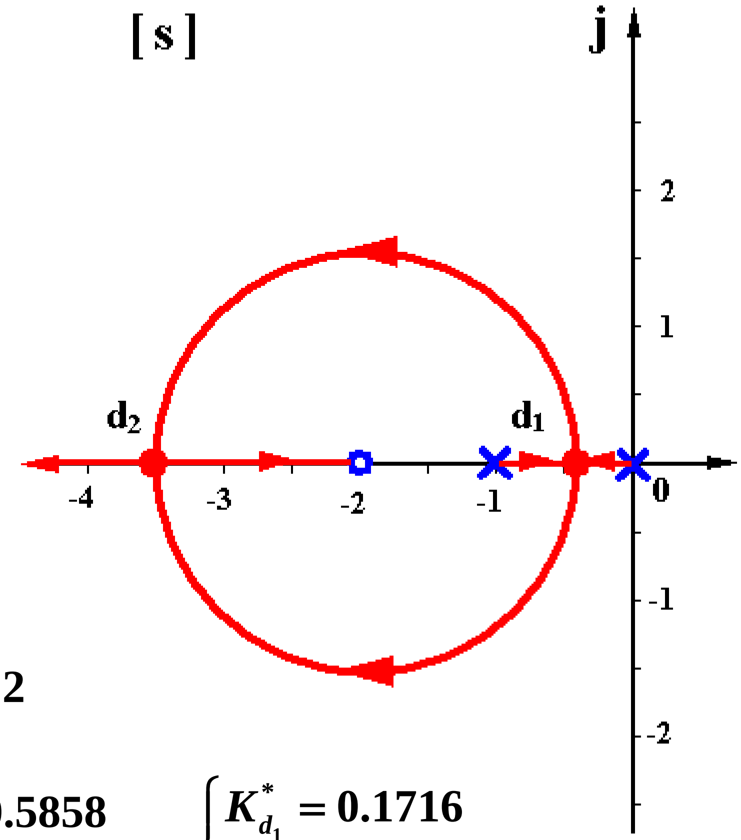
$$\sigma=\frac{-(1+K^*)}{2} \qquad \Rightarrow K^*=-2\sigma-1$$

$$\omega^2=\frac{8K^*-(1+K^*)^2}{4}=\frac{-8(2\sigma+1)-4\sigma^2}{4}=-\sigma^2-4\sigma-2$$

$$\sigma^2+4\sigma+4+\omega^2=2 \qquad (\sigma+2)^2+\omega^2=\sqrt{2}^2$$

$$\Delta=(1+K^*)^2-8K^*=K^{*2}-6K^*+1=0$$

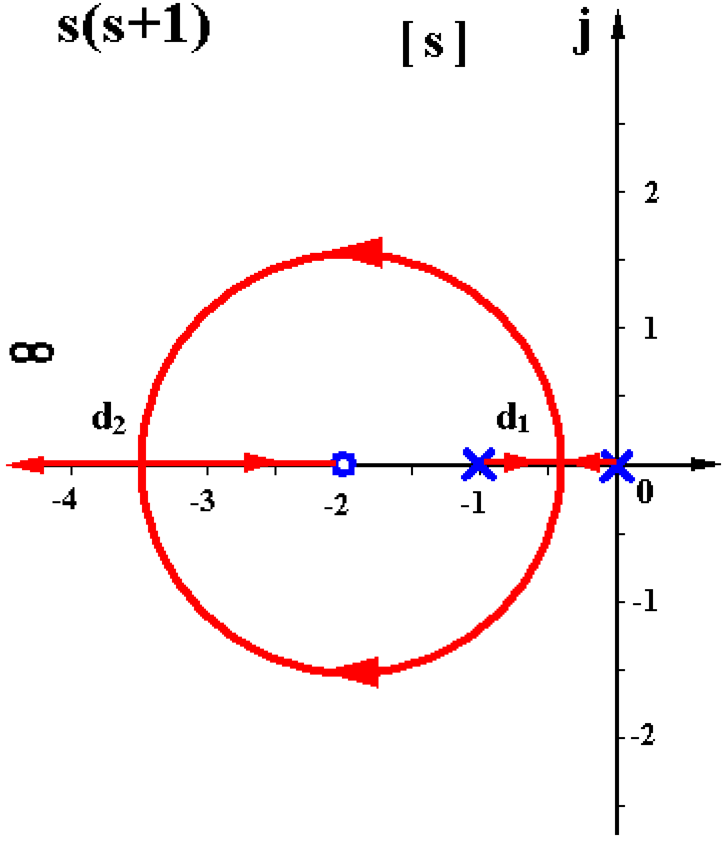
$$\begin{cases} d_1=-0.5858 \\ d_2=-3.4142 \end{cases} \qquad \begin{cases} K^*_{d_1}=0.1716 \\ K^*_{d_2}=5.828 \end{cases}$$



§4.2 绘制根轨迹的基本法则 (5)

例3 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$

$K^*=0 \rightarrow \infty$，证明复平面的根轨迹为圆弧。



系统性能分析

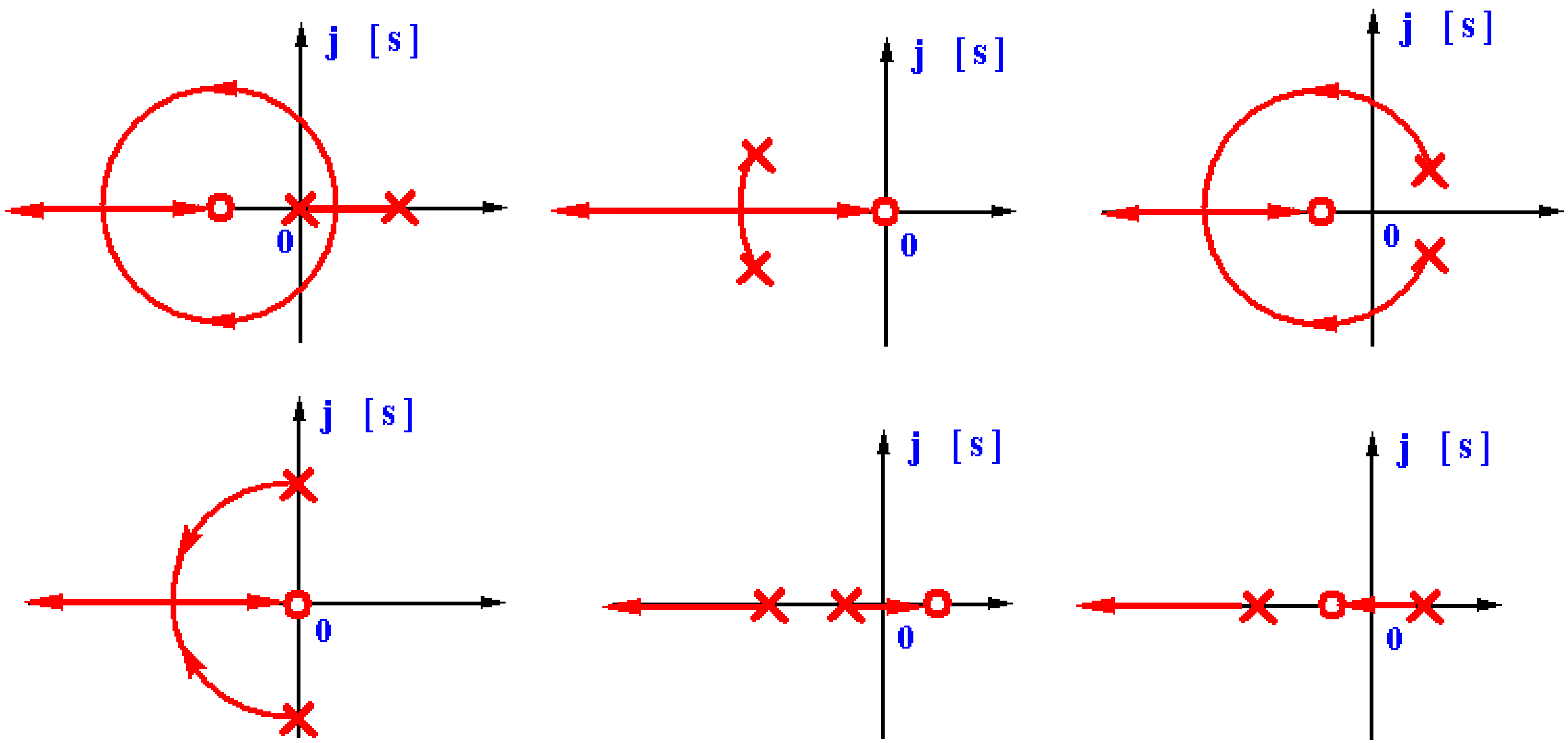
$$K^*=0 \xRightarrow[\substack{t_s\downarrow \\ \sigma\%=0}]{h(t)\text{ 单调}} K^*_{d1}\ (0.1716) \xRightarrow[\substack{t_s\downarrow \\ \sigma\% \frown}]{h(t)\text{ 振荡}} K^*_{d2}\ (5.828) \xRightarrow[t_s\downarrow]{\xi>0} \infty$$

系统绝对稳定

$$K^*\uparrow \Longrightarrow e_{ss} \overset{r(t)=t}{=\!=\!=} \frac{A}{K} = \frac{1}{2K^*}\downarrow$$

§4.2 绘制根轨迹的基本法则（6）

定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



课程小结

§4.1 根轨迹法的基本概念

根轨迹

闭环零点与开环零极点之间的关系

根轨迹方程

§4.2 绘制根轨迹的基本法则

法则1 根轨迹的起点和终点

法则2 根轨迹的分支数，对称性和连续性

法则3 实轴上的根轨迹

法则4 根之和

两个开环极点，一个开环零点时根轨迹的绘制