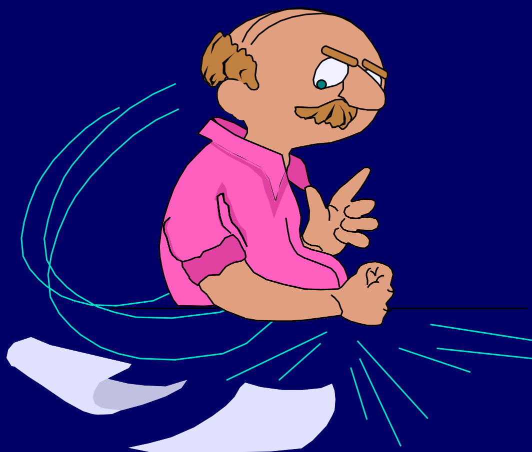
第五节 两个随机变量的函数的分布

- $Z = X + Y$ 的分布
- $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布
- 课堂练习
- 小结 布置作业



在第二章中，我们讨论了一维随机变量函数的分布，现在我们进一步讨论:

当随机变量 X, Y 的联合分布已知时，如何求出它们的函数

$$Z = g(X, Y)$$

的分布?

一、$Z=X+Y$ 的分布

例1　若 X、Y 独立，$P(X=k)=a_k$, $k=0,1,2,\ldots$, $P(Y=k)=b_k$, $k=0,1,2,\ldots$,求 $Z=X+Y$ 的概率函数.

解　$P(Z=r)=P(X+Y=r)$

$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i, Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i)P(Y=r-i)$$

由独立性

$$=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0 \qquad r=0,1,2,\ldots$$

例2 若 X 和 Y 相互独立,它们分别服从参数为λ_1,λ_2的泊松分布, 证明$Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

解 依题意

$$P(X=i)=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!} \quad i=0,1,2,\dots$$

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!} \quad j=0,1,2,\dots$$

于是

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{i}}{i!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{r-i}}{(r-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!(r-i)!}\lambda_1^{i}\lambda_2^{r-i}$$

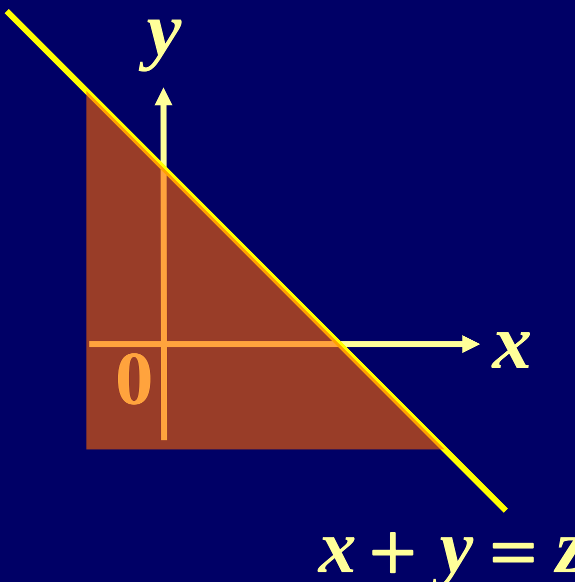
$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^{r},\quad r=0,1,\ldots$$

即Z服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

例3　设X和Y的联合密度为$f(x,y)$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 $Z=X+Y$的分布函数是:

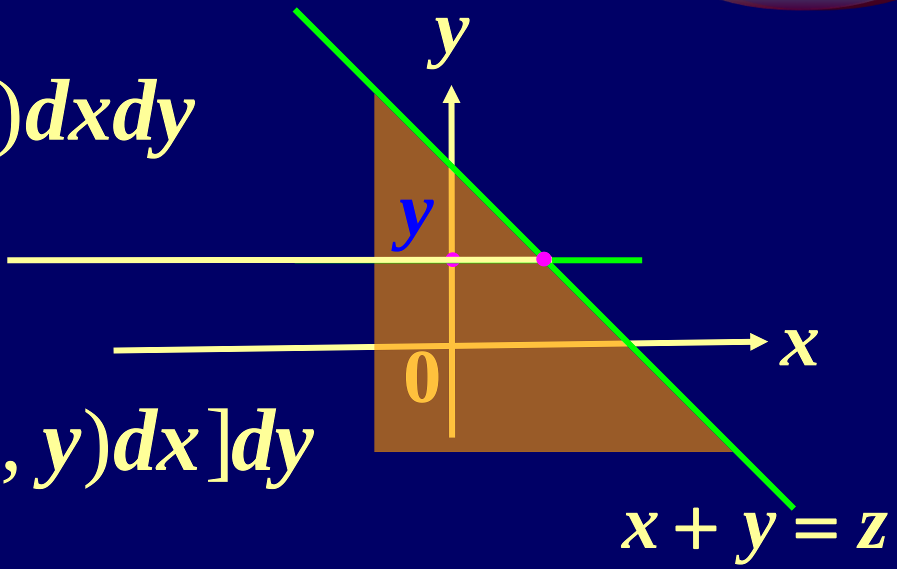
$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$
$$=P(X+Y\le z)$$
$$=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$



这里积分区域 $D=\{(x, y): x+y\le z\}$

它是直线 $x+y=z$ 及其左下方的半平面.

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$



化成累次积分,得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx]dy$$

固定z和y,对方括号内的积分作变量代换, 令 $x=u-y$,

得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du]dy$$

变量代换

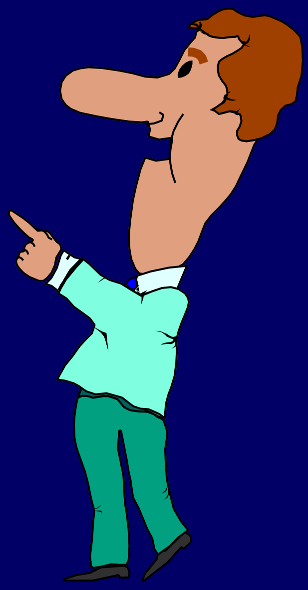
$$=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)dy]du$$

交换积分次序

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u-y,y)dy\right]du$$

由概率密度与分布函数的关系，即得$Z=X+Y$的概率密度为:

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy$$



由X和Y的对称性，$f_Z(z)$又可写成

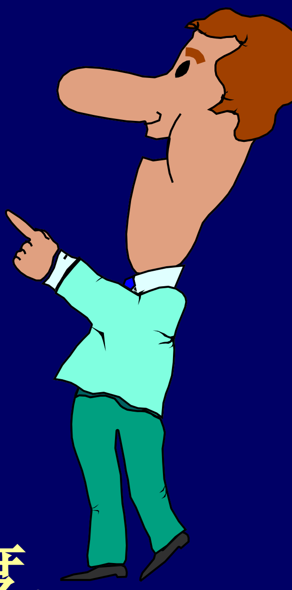
$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$$

以上两式即是两个随机变量和的概率密度的一般公式.

特别地，当 X 和 Y 独立，设 (X,Y) 关于 X , Y 的边缘密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则上述两式化为:

$$\begin{cases} f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \end{cases}$$

卷积公式



下面我们用卷积公式来求$Z=X+Y$的概率密度.

例4　若 X 和 Y 独立, 具有共同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解　由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为 0 的区域

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases} \quad 也即 \quad \begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

暂时固定

故 当 $z<0$ 或 $z\geq 2$ 时，$f_Z(z)=0.$

当 $0\leq z<1$ 时，

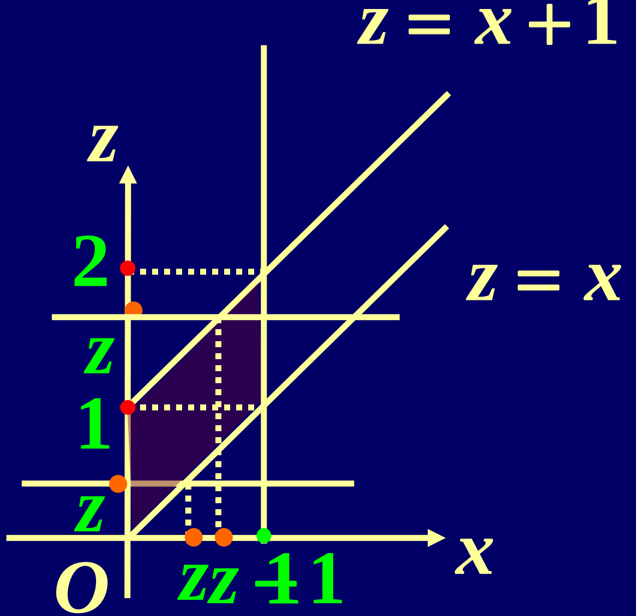
$$f_Z(z)=\int_0^z dx=z$$

当 $1\leq z<2$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^1 dx=2-z$$

于是

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0\leq z<1,\\ 2-z, & 1\leq z<2,\\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$



例5　若X和Y是两个相互独立的随机变量，具有相同的分布 $N(0,1)$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解　由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot e^{-(x^2-zx)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

令 $t=x-\frac{z}{2}$, 得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}$$

可见 $Z=X+Y$ 服从正态分布 $N(0,2)$.

$\Downarrow$

若*X*和*Y*独立，具有相同的分布 *N*(0,1)，则*Z*=*X*+*Y*服从正态分布 *N*(0,2).

若*X*和*Y*独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，结论又如何呢?

用类似的方法可以证明:

$$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

此结论可以推广到*n*个独立随机变量之和的情形，请自行写出结论.

更一般地，可以证明：

有限个独立正态变量的线性组合仍然服从正态分布.

休息片刻再继续

二、$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,我们来求 $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布函数.

1. M = max(X,Y) 的分布函数

$$M \le z \Leftrightarrow \begin{cases} X \le z \\ Y \le z \end{cases}$$

$$F_M(z)=P(M\le z) \quad =P(X\le z, Y\le z)$$

由于 X 和 Y 相互独立,于是得到 $M=\max(X,Y)$ 的分布函数为:

$$F_M(z)=P(X\le z)P(Y\le z)$$

即有 $$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

2. $N=\min(X,Y)$ 的分布函数

$$F_N(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)$$

$$=1-P(X>z,Y>z)$$

$$N>z \Leftrightarrow \begin{cases} X>z \\ Y>z \end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立,于是得到 $N=\min(X,Y)$ 的分布函数为:

$$F_N(z)=1-P(X>z)P(Y>z)$$

即有 $$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

设 $X_1,\ldots,X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为

$$F_{X_i}(z) \quad (i=1,\ldots,n)$$

我们来求 $M=\max(X_1,\ldots,X_n)$ 和 $N=\min(X_1,\ldots,X_n)$ 的分布函数.

用与二维时完全类似的方法，可得

$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为:

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数是

$$F_N(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

特别地，当$X_1,\ldots,X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，有

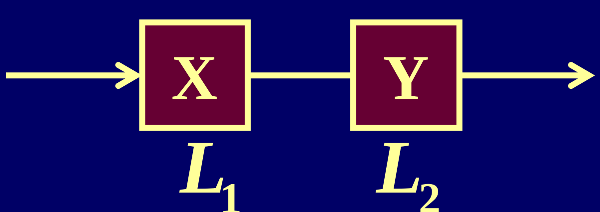
$$F_M(z)=[F(z)]^n$$

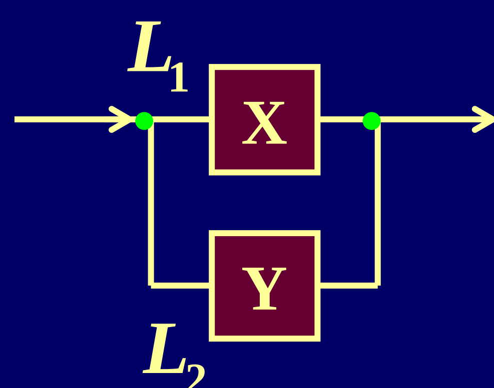
$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^n$$

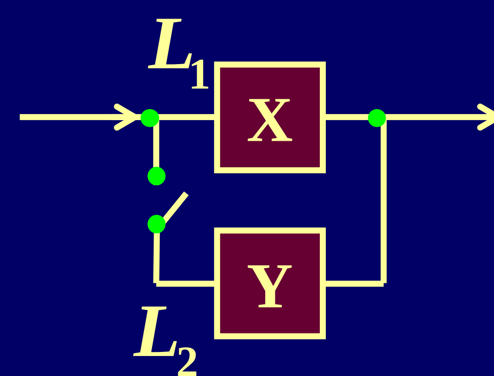
例6 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作) , 如下图所示.设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y, 已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0, \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 且 $\alpha \ne \beta$. 试分别就以上三种连接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.



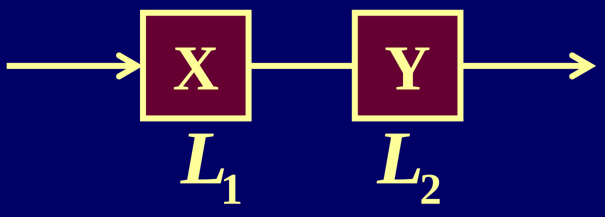




解 (i) 串联的情况

由于当系统 L_1, L_2 中有一个损坏时, 系统 L 就停止工作, 所以此时 L 的寿命为

$$Z = \min(X, Y)$$



因为 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

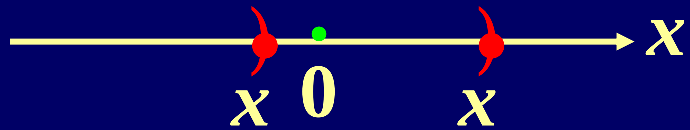
所以 X 的分布函数为

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

当 $x \le 0$ 时， $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

当 $x>0$ 时， $F_X(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} e^{-\alpha t}dt=1-e^{-\alpha x}$



故 $$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0, \\ 0, & x \le 0,\end{cases}$$

类似地，可求得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0, \\ 0, & y \le 0,\end{cases}$$

于是 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_{\min}(z)=1\text{-}[1\text{-}F_X(z)][1\text{-}F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

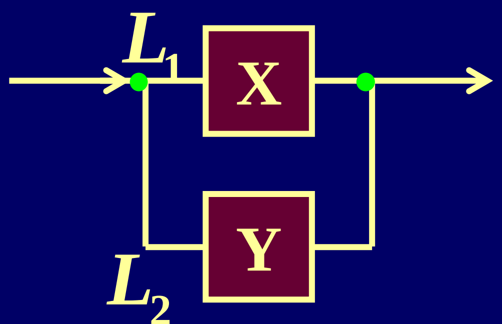
$Z=\min(X,Y)$ 的概率密度为

$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

(ii) 并联的情况

由于当且仅当系统 L_1, L_2 都损坏时, 系统 L 才停止工作, 所以此时 L 的寿命为

$$Z = \max(X, Y)$$



故 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$= \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0, \end{cases}$$

于是 $Z=\max(X,Y)$ 的概率密度为

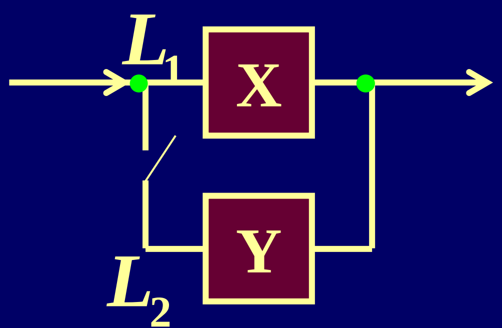
$$f_{\max}(z)=F'_{\max}(z)$$

$$=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

(iii) 备用的情况

由于当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 才开始工作,

因此整个系统 L 的寿命为

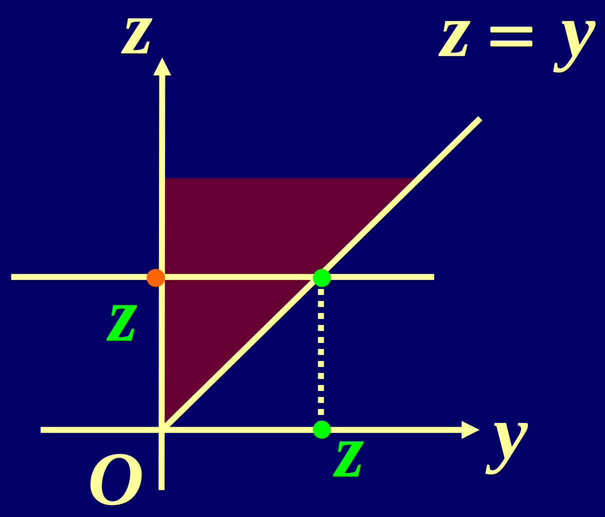


$$Z=X+Y$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

当且仅当

$\begin{cases} y>0, \\ z-y>0, \end{cases}$ 即 $0<y<z$ 时,



上述积分的被积函数不等于零.

故 当 $z \le 0$ 时, $f_Z(z)=0.$

当 $z>0$ 时,

$$f_Z(z)=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy$$

$$f_Z(z)=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy$$

$$=\alpha\beta e^{-\alpha z}\int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}dy$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}).$$

于是 $Z=X+Y$ 的概率密度为

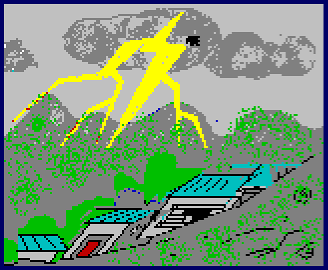
$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

需要指出的是，当$X_1,\ldots,X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时, 常称

$$M=\max(X_1,\ldots,X_n)，N=\min(X_1,\ldots,X_n)$$

为极值 .

由于一些灾害性的自然现象，如地震、洪水等等都是极值，研究极值分布具有重要的意义和实用价值.



三、课堂练习

设 X、Y 是相互独立的随机变量, 它们都服从正态分布 $N\left(0,\sigma^2\right)$.试验证随机变量 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 具有概率密度

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z\geq 0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

四、小结

在这一节中,我们讨论了两个随机变量的函数的分布的求法.

五、布置作业

《概率统计》标准化作业 (三)