

第四节 矩、协方差矩阵

- 原点矩 中心矩
- 协方差矩阵
- n 元正态分布的概率密度
- 小结 布置作业

一、 原点矩 中心矩

定义 设 X 和 Y 是随机变量, 若

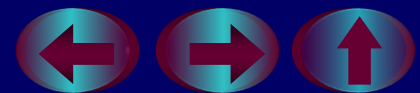
$$E(X^k), k = 1, 2, \dots$$

存在, 称它为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩

若 $E\{[X - E(X)]^k\}, k = 2, 3, \dots$

存在, 称它为 X 的 k 阶中心矩

可见, 均值 $E(X)$ 是 X 一阶原点矩, 方差 $D(X)$ 是 X 的二阶中心矩。



设 X 和 Y 是随机变量，若

$$E(X^k Y^L) \quad k, L=1, 2, \dots \quad \text{存在,}$$

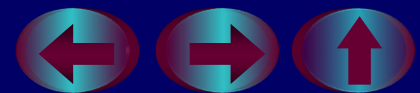
称它为 X 和 Y 的 $k+L$ 阶混合（原点）矩.

若 $E\{[X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^L\}$ 存在,

称它为 X 和 Y 的 $k+L$ 阶混合中心矩.

可见,

协方差 $Cov(X, Y)$ 是 X 和 Y 的二阶混合中心矩.



二、协方差矩阵

将二维随机变量 (X_1, X_2) 的四个二阶中心矩

$$c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\}$$

$$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\}$$

$$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\}$$

$$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\}$$

排成矩阵的形式:
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

这是一个
对称矩阵

称此矩阵为 (X_1, X_2) 的协方差矩阵.



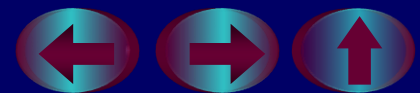
类似定义 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的协方差矩阵.

$$\begin{aligned} \text{若 } c_{ij} &= \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\} \\ &\quad (i, j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

都存在, 称

$$\text{矩阵 } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的协方差矩阵



三、 n 元正态分布的概率密度

设 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是一个 n 维随机向量,
若它的概率密度为

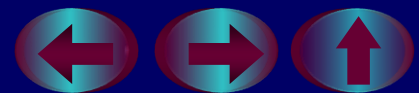
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X - \mu)'C^{-1}(X - \mu)\right\}$$

则称 X 服从 n 元正态分布.

其中 C 是 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的协方差矩阵.

$|C|$ 是它的行列式, C^{-1} 表示 C 的逆矩阵,

X 和 μ 是 n 维列向量, X' 表示 X 的转置.



n 元正态分布的几条重要性质

1. $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 元正态分布



对一切不全为0的实数 a_1, a_2, \dots, a_n ,

$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ 均服从正态分布.

2. 正态变量的线性变换不变性.

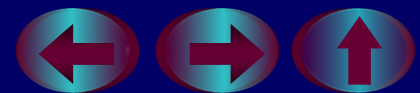
若 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 元正态分布,
 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 是 X_j ($j=1, 2, \dots, n$) 的线性函数,
则 (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) 也服从多元正态分布.

3. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 服从 n 元正态分布, 则

“ X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立”

等价于

“ X_1, X_2, \dots, X_n 两两不相关”



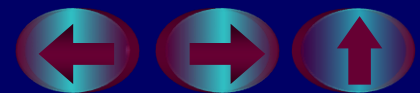
例 设随机变量 X 和 Y 相互独立且 $X \sim N(1,2)$,
 $Y \sim N(0,1)$. 试求 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度.

解: $X \sim N(1,2), Y \sim N(0,1)$, 且 X 与 Y 独立,
故 X 和 Y 的联合分布为正态分布, X 和 Y 的任意线性组合是正态分布.

即
$$Z \sim N(E(Z), D(Z))$$

$$E(Z) = 2E(X) - E(Y) + 3 = 2 + 3 = 5$$

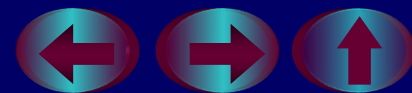
$$D(Z) = 4D(X) + D(Y) = 8 + 1 = 9$$



$$Z \sim N(5, 3^2)$$

故 Z 的概率密度是

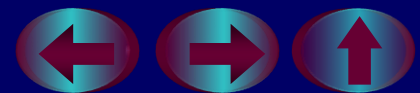
$$f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}, \quad -\infty < z < \infty$$



四、小结

在这一节中我们学习了随机变量的原点矩和中心矩以及协方差矩阵。

一般地，维随机变量的分布是不知道的，或者太复杂，以至于在数学上不易处理，因此在实际中协方差矩阵就显得重要了。



五、 布置作业

《概率论与数理统计》作业（四）

一、填空题第1小题

二、选择题第1、2小题

三、解答题第1、2、3、4小题

