

## 第三节 条件分布

- 离散型随机变量的条件分布
- 连续型随机变量的条件分布
- 课堂练习
- 小结 布置作业

在第一章中，我们介绍了条件概率的概念。

在事件 $B$ 发生的条件下事件 $A$ 发生的条件概率

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



推广到随机变量

设有两个*r.v*  $X, Y$ ，在给定 $Y$ 取某个或某些值的条件下，求 $X$ 的概率分布。

这个分布就是条件分布。

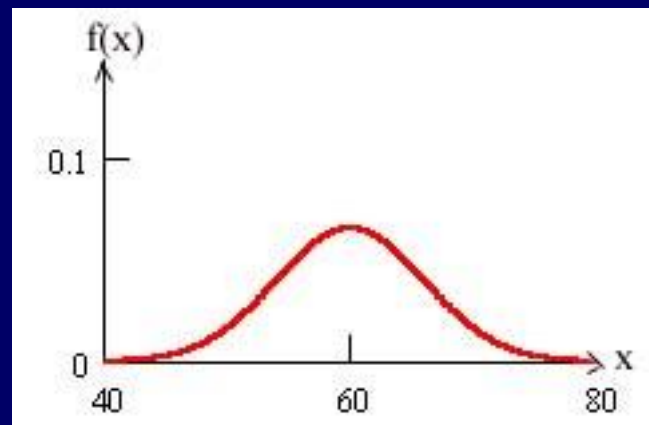


例如，考虑某大学的全体学生，从其中随机抽取一个学生，分别以 $X$ 和 $Y$ 表示其体重和身高。则 $X$ 和 $Y$ 都是随机变量，它们都有一定的概率分布。

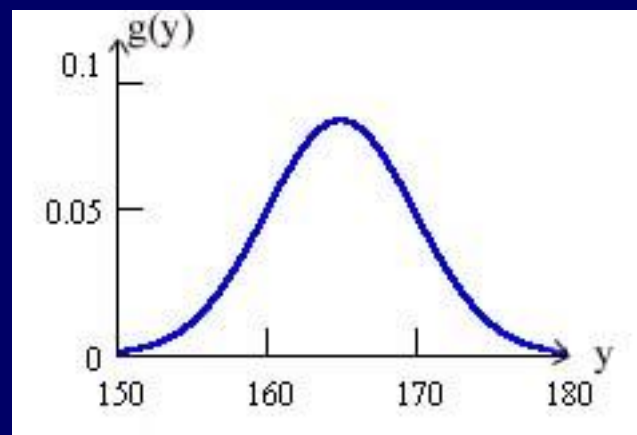


体重 $X$

身高 $Y$



体重 $X$   
的分布

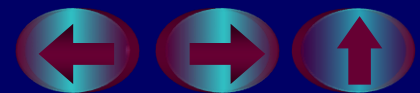


身高 $Y$   
的分布

现在若限制  $1.7 < Y < 1.8$ (米), 在这个条件下去求  $X$  的条件分布, 这就意味着要从该校的学生中把身高在1.7米和1.8米之间的那些人都挑出来, 然后在挑出的学生中求其体重的分布.

容易想象, 这个分布与不加这个条件时的分布会很不一样.

例如, 在条件分布中体重取大值的概率会显著增加.



# 一、离散型随机变量的条件分布

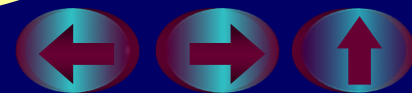
实际形式下的类似定义在  $X=x_i$  条件下随机变量  $Y$  的条件分布律. 念在另一种

**定义1** 设  $(X,Y)$  是二维离散型随机变量, 对于固定的  $j$ , 若  $P\{Y=y_j\} > 0$ , 则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i=1,2,\dots$$

为在  $Y=y_j$  条件下随机变量  $X$  的条件分布律.

作为条件的那个  $r.v.$ , 认为取值是给定的, 在此条件下求另一  $r.v.$  的概率分布.

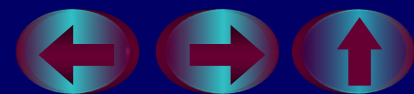


条件分布是一种概率分布，它具有概率分布的一切性质。正如条件概率是一种概率，具有概率的一切性质。

例如：

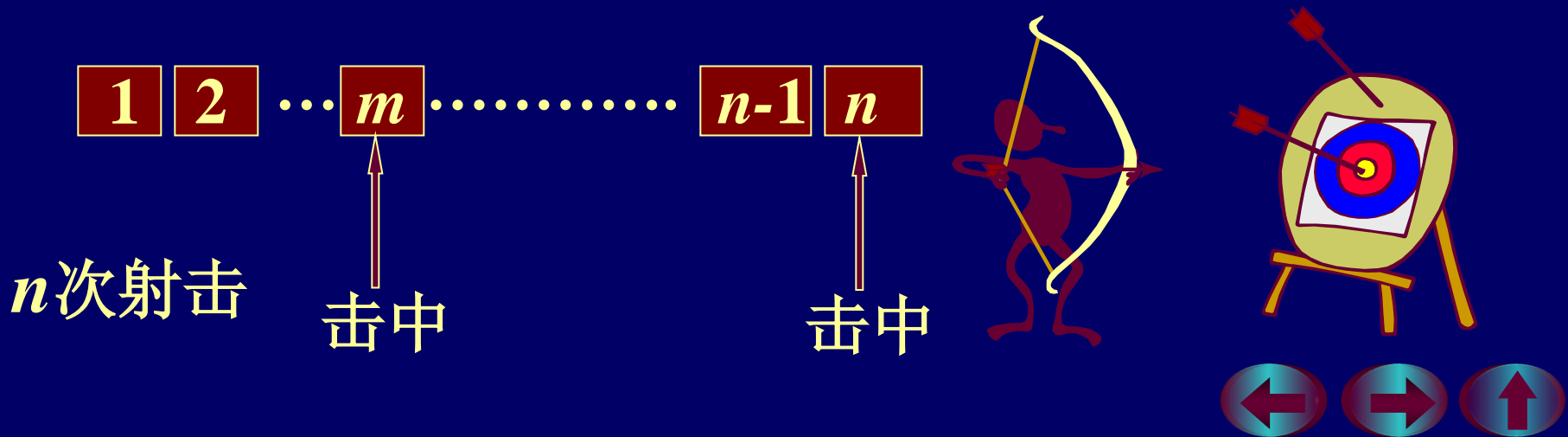
$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} \geq 0 \quad i=1,2, \dots$$

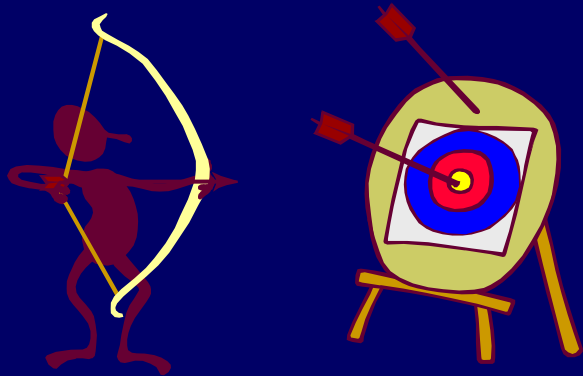
$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = 1$$



**例1** 一射手进行射击，击中目标的概率 $p$  ( $0 < p < 1$ )，射击进行到击中目标两次为止. 以  $X$  表示首次击中目标所进行的射击次数，以  $Y$  表示总共进行的射击次数. 试求  $X$  和  $Y$  的联合分布及条件分布.

**解** 依题意， $\{Y=n\}$  表示在第 $n$ 次射击时击中目标，且在前 $n-1$ 次射击中有一次击中目标.  $\{X=m\}$  表示首次击中目标时射击了 $m$ 次.





$n$ 次射击

1 2 ...  $m$  .....  $n-1$   $n$

击中

击中

每次击中目标的概率为  $p$

不论  $m$  ( $m < n$ ) 是多少,  
 $P\{X=m, Y=n\}$  都应等于

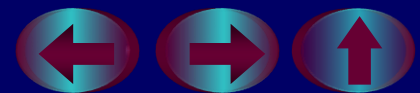
$P\{X=m, Y=n\}=?$

$$P\{X=m, Y=n\} = p^2 (1-p)^{n-2}$$

由此得  $X$  和  $Y$  的联合分布律为

$$P\{X=m, Y=n\} = p^2 (1-p)^{n-2}$$

( $n=2, 3, \dots; m=1, 2, \dots, n-1$ )





为求条件分布，先求边缘分布。

$X$ 的边缘分布律是：

$$P\{X = m\} = \sum_{n=m+1}^{+\infty} P\{X = m, Y = n\}$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 (1-p)^{n-2} = p^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} (1-p)^{n-2}$$

$$= p^2 \frac{(1-p)^{m+1-2}}{1-(1-p)} = p(1-p)^{m-1}$$

$$(m=1, 2, \dots)$$



$Y$ 的边缘分布律是:

$$P\{Y = n\} = \sum_{m=1}^{n-1} P\{X = m, Y = n\}$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$= (n-1)p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$(n = 2, 3, \dots)$$



于是可求得:

当 $n=2,3, \dots$ 时,

$$\begin{aligned}
 & P\{X = m | Y = n\} \\
 &= \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{Y = n\}} \\
 &= \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\
 &= \frac{1}{n-1}, \quad m=1,2, \dots, n-1
 \end{aligned}$$

联合分布

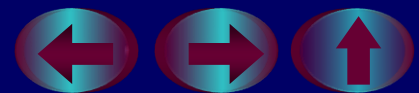
边缘分布

当 $m=1,2,\dots$ 时,

$$\begin{aligned}
 & P\{X = n|Y = m\} \\
 &= \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{X = m\}} \\
 &= \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}} \\
 &= p(1-p)^{n-m-1}, \quad n=m+1, m+2, \dots
 \end{aligned}$$

## 二、连续型随机变量的条件分布

设 $(X, Y)$ 是二维连续型r.v, 由于对任意 $x, y$ ,  $P\{X=x\}=0, P\{Y=y\}=0$  , 所以不能直接用条件概率公式得到条件分布, 下面我们直接给出条件概率密度的定义.



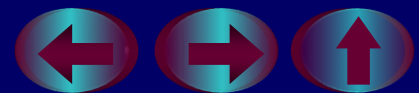
定义2 设  $X$  和  $Y$  的联合概率密度为  $f(x, y)$ ,  $(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘概率密度为  $f_Y(y)$ , 若对于固定的  $y$ ,  $f_Y(y) > 0$ , 则称  $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$  为在  $Y = y$  的条件下  $X$  的条件概率密度. 记为

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

称  $\int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x | y) dx = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$  为在  $Y = y$

的条件下,  $X$  的条件分布函数. 记为

$$P\{X \leq x | Y = y\} \text{ 或 } F_{X|Y}(x | y)$$



即

$$P\{X \leq x | Y = y\} = F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

类似地,可以定义

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$



我们来解释一下定义的含义:

以  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$  为例

$$P\{X \leq x | Y = y\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\}$$

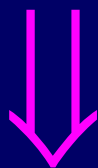
$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\int_{-\infty}^x \left( \int_y^{y+\varepsilon} f(x,y) dy \right) dx}{\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y) dy} = \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^x f(x, y + \theta_1 \varepsilon) dx}{\varepsilon \cdot f_Y(y + \theta_2 \varepsilon)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y + \theta_1 \varepsilon) dx}{f_Y(y + \theta_2 \varepsilon)} \rightarrow \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{f_Y(y)} \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \end{aligned}$$





$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$



$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{d}{dx} F_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

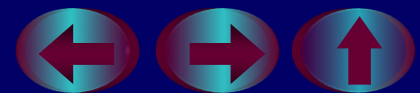
例2 设 $(X,Y)$ 的概率密度是

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

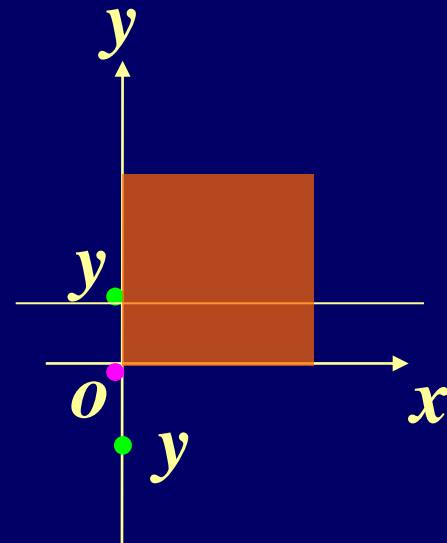
求  $P\{X>1|Y=y\}$ .

$$\text{解 } P\{X > 1|Y = y\} = \int_1^{\infty} f_{X|Y}(x | y) dx$$

为此, 需求出  $f_{X|Y}(x | y)$



$$\begin{aligned}
 \text{由于 } f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} dx = \frac{e^{-y}}{y} [-ye^{-x/y}] \Big|_0^{\infty} \\
 &= e^{-y}, \quad 0 < y < \infty
 \end{aligned}$$



于是对  $y > 0$ ,

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-x/y}}{y}, \quad x > 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{故对 } y > 0, \quad P\{X > 1 | Y = y\} &= \int_1^{\infty} \frac{e^{-x/y}}{y} dx \\
 &= -e^{-x/y} \Big|_1^{\infty} = e^{-1/y}
 \end{aligned}$$

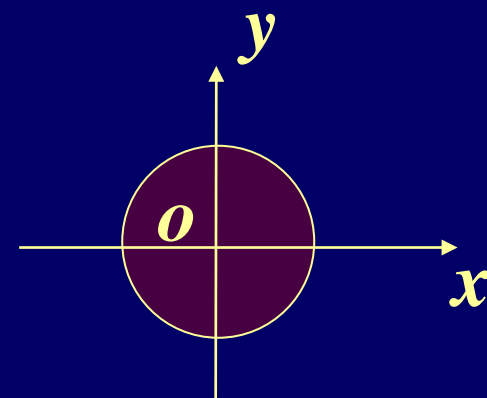


例3 设 $(X,Y)$ 服从单位圆上的均匀分布, 概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $f_{Y|X}(y | x)$

解  $X$ 的边缘密度为



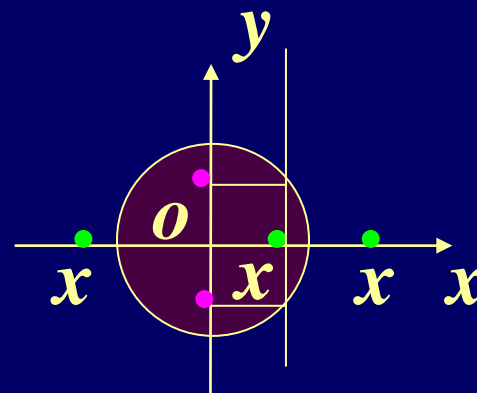
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

当 $|x| < 1$ 时,有

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$



$x$ 作为已知变量

即当  $|x| < 1$  时,有

$$f_{Y|X}(y | x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0, & y \text{ 取其它值} \end{cases}$$

$x$ 已知的条件下  
 $Y$ 的条件密度

这里是 $y$ 的取值范围

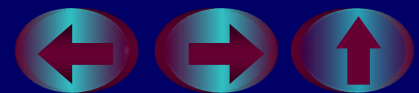
例4 设数  $X$  在区间  $(0,1)$  均匀分布, 当观察到  $X=x$  ( $0 < x < 1$ ) 时, 数  $Y$  在区间  $(x,1)$  上随机地取值. 求  $Y$  的概率密度.

解 依题意,  $X$  具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对于任意给定的值  $x$  ( $0 < x < 1$ ), 在  $X=x$  的条件下,  $Y$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



$X$  和  $Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y | x)$$

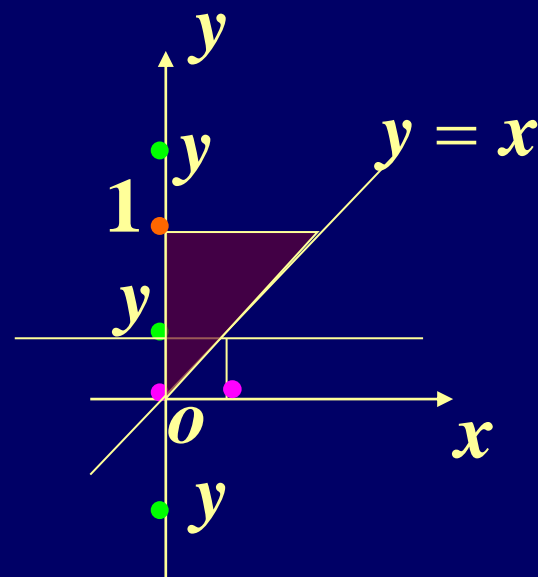
已知边缘密度、  
条件密度，求  
联合密度

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是得  $Y$  的概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$





我们已经知道,

设  $(X,Y)$  是连续型 r.v., 若对任意的  $x,y$ , 有

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

则称  $X,Y$  相互独立.

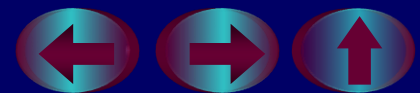
由条件密度的定义:

$$\begin{cases} f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \\ f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \end{cases}$$

可知, 当  $X$  与  $Y$  相互独立时,

$$f_{Y|X}(y | x) = f_Y(y), \quad f_{X|Y}(x | y) = f_X(x)$$

也可用此条件判别二维连续型 r.v.  $(X,Y)$  的两个分量  $X$  与  $Y$  是否相互独立.



对离散型r.v有类似的结论，请同学们自行给出.



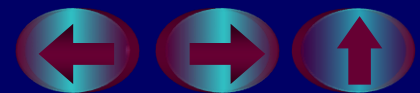
### 三、课堂练习

1. 对于二维正态分布, 在已知  $X=x$  条件下, 求  $Y$  的条件分布.

2. 设  $(X,Y)$  的概率密度是

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & x > 0, y > x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求  $f_{X|Y}(x|y)$ .



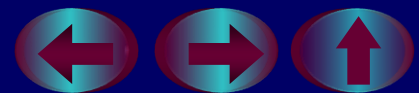
1. 对于二维正态分布, 在已知  $X=x$  条件下, 求  $Y$  的条件分布.

解 设  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则其概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

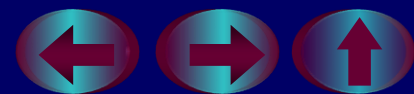
$X$  的边缘密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$



在  $X=x$  条件下,  $Y$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$



2. 设 $(X, Y)$ 的概率密度是

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & x > 0, y > x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求  $f_{X|Y}(x | y)$ .

解  $(X, Y)$ 关于  $Y$  的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$



$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

当  $y > 0$  时, 若  $0 < x < y$ ,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{y}{ye^{-y}} = e^y$$

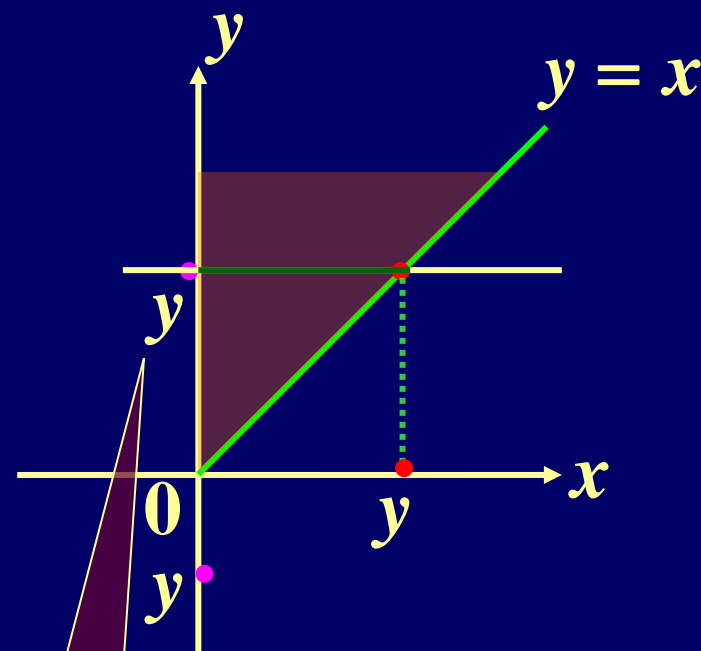
若  $y \leq 0$  或  $y \geq x$ ,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{0}{ye^{-y}} = 0$$

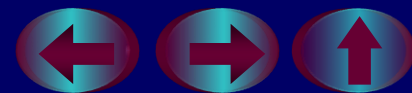
综上 当  $y > 0$  时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} e^y, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

当  $y \leq 0$  时,  
 $f_Y(y) = 0$

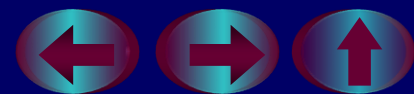


暂时固定



## 四、小结

这一节，我们介绍了条件分布的概念和计算，并举例说明对离散型和连续型随机变量如何计算条件分布。请课下通过练习进一步掌握。





## 五、布置作业

《概率统计》标准化作业(三)

