



第一章 信号及信号分析

1.1 概述

信息总是通过某些物理量的形式表现出来的，这些物理量就是信号。

信号：电信号、光信号、位移信号、速度信号等不同物理量。

但在研究、分析信号及其变换规律的科学中，往往并不考虑信号的具体物理性质，而是将信号抽象为变量之间的函数关系。

1.2 信号分类与描述

1.2.1 信号的分类

根据信号随时间变化关系，可将信号分成静态信号和动态信号两大类，针对动态信号，可以有如下分类方法：

1 按时域特征的表象分类：

确定性信号、非确定性信号

2 按信号相对于变量的连续性分类：

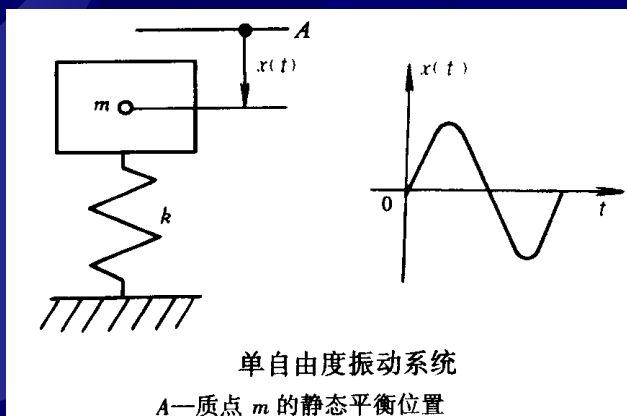
连续（模拟）信号、离散信号

3 按信号的能量关系分类：

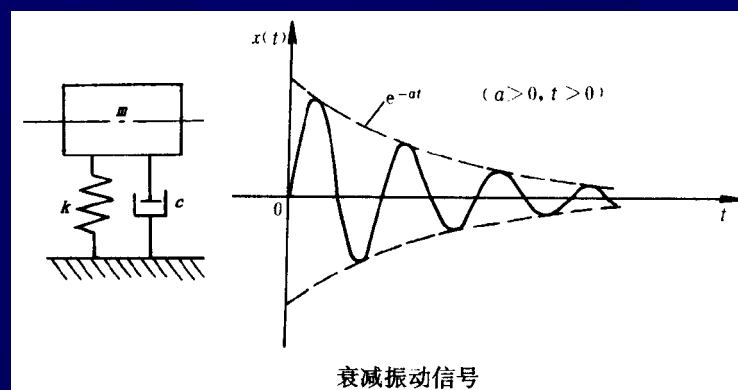
能量信号、功率信号

几个例子

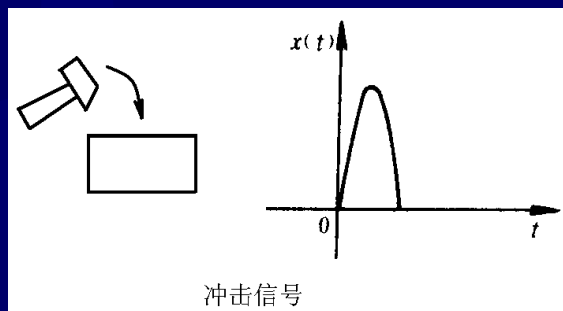
例 1：单自由度无阻尼振荡系统



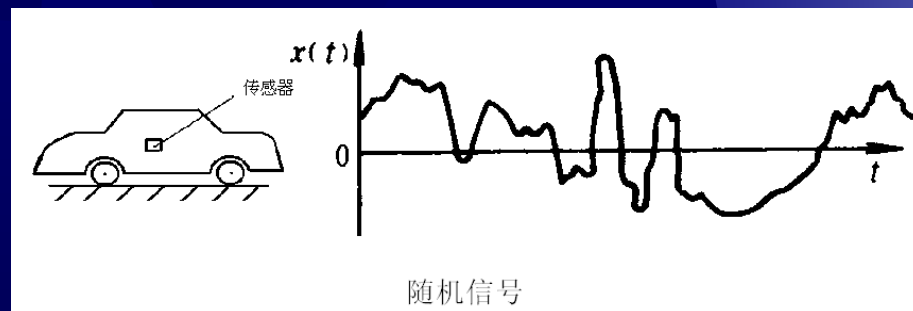
例 2：阻尼振荡



例 3：冲击



例 4：传感器测振动



1. 确定性信号和非确定性信号

信号

静态信号（包括变化缓慢的准静态）

动态
信号

确定性信号

非确定性信号
(随机信号)

周期信号

非周期信号

简谐周期信号

复杂周期信号

准周期信号

瞬态非周期信号

非平稳随机信号

平稳随机信号

各态历经随
机信号

非各态历经
随机信号



信号

静态信号（包括变化缓慢的准静态）

确定性信号

周期信号

简谐周期信号

复杂周期信号

准周期信号

瞬态非周期信号

非平稳随机信号

各态历经随机信号

确定性信号

- 确定性信号——可以用数学模型或数学关系完整地描述信号随时间变化的情形，因而可确定其任何时刻的量值。



周期信号

➤ 周期信号——服从一定规律，按一定的时间间隔周而复始重复出现的信号。

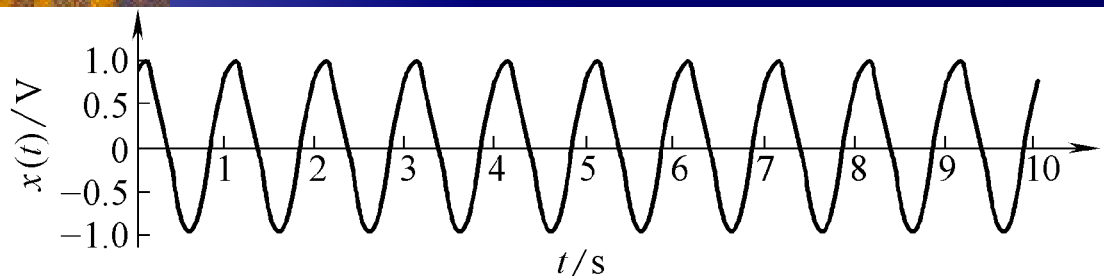
$$x(t) = x(t + nT_0)$$

式中

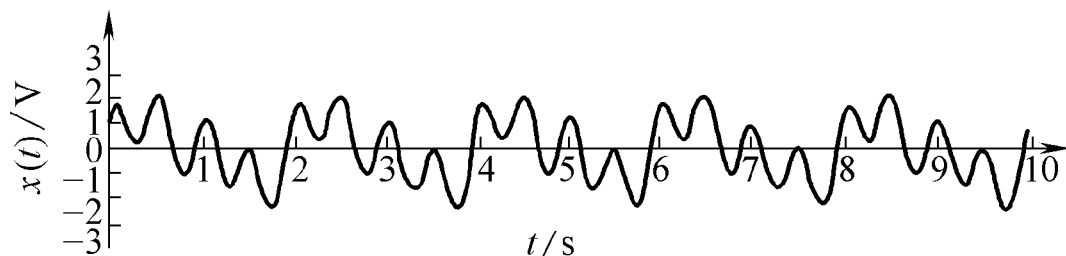
$n=1,2,3,$

.....

T_0 ——周期



a)

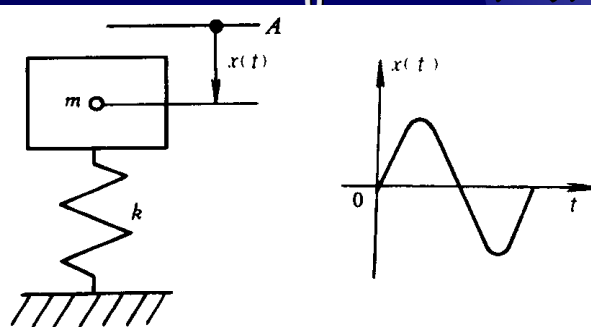


b)

图1-1 周期信号

a) 简谐周期信号

b) 复杂周期信号



单自由度振动系统

A—质点 m 的静态平衡位置

非周期信号

非周期信号——确定性信号中不具有周期重复性的信号

- 准周期信号——由多个简谐信号叠加而成，但各组成谐波分量间无法找到公共周期，因而无法按某一时间间隔周而复始地出现。
- 瞬态非周期信号——是一些或在一定时间区间内存在，或随时间的增长而衰减为零的信号。

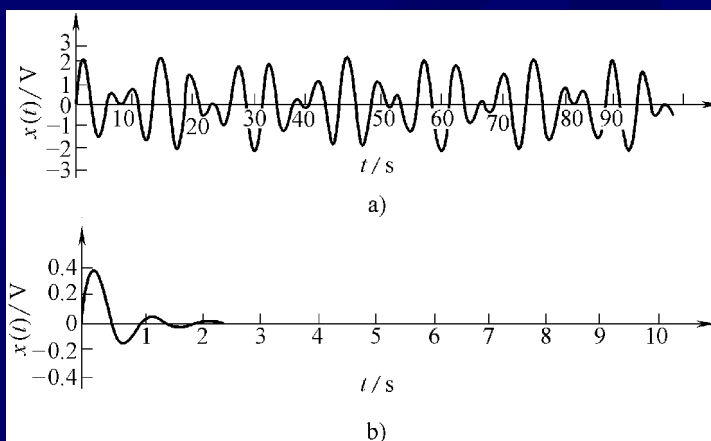
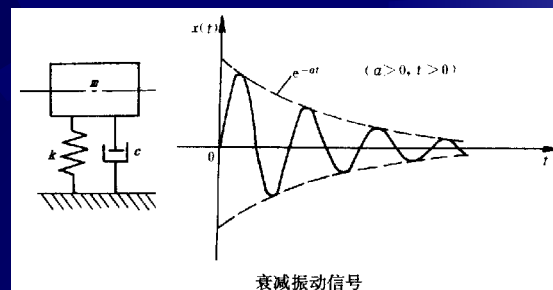
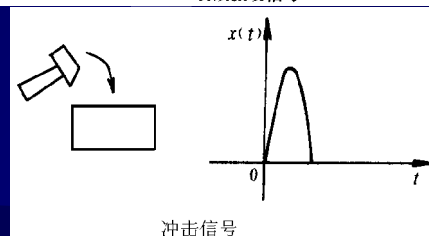


图1-2 非周期信号

a) 准周期信号 b) 瞬态非周期信号



衰减振动信号

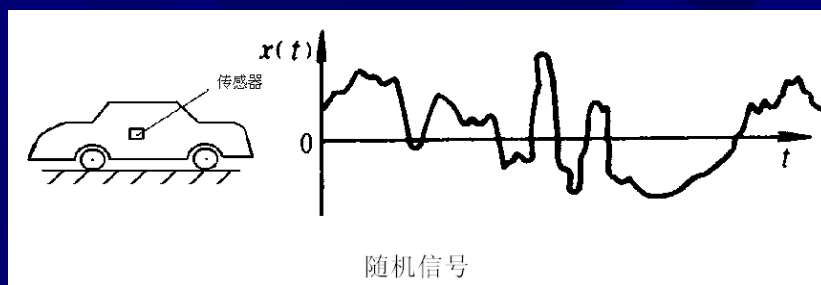


冲击信号



随机信号

随机信号——是一种不能准确预测其未来瞬时值，也无法用数学关系式来描述的信号。但是，它具有某些统计特征，可以用概率统计方法由其过去来估计其未来。



平稳和非平稳随机信号

平稳随机信号——其统计特征参数不随时间而变化的。

非平稳随机信号——其统计特征参数随时间而变化的。

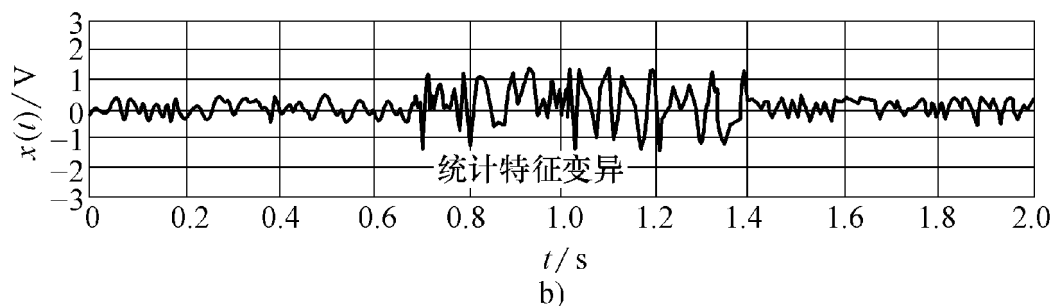
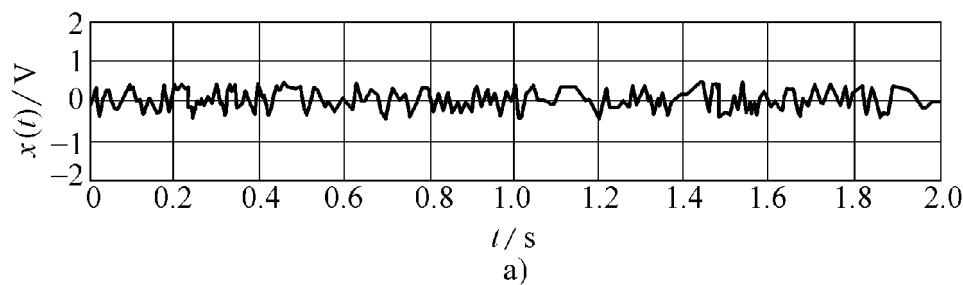


图1-3 非确定性信号

a) 平稳随机信号 b) 非平稳随机信号

各态历经随机过程

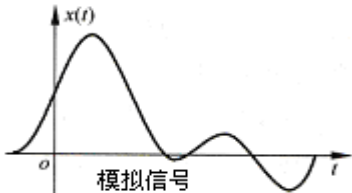
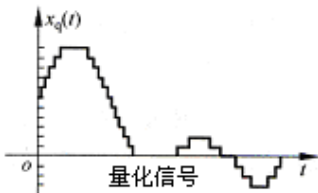
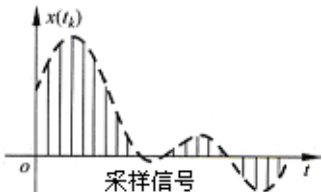
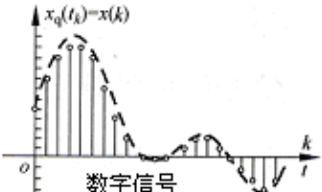
各态历经随机过程——在平稳随机过程中，若任一单个样本函数的时间平稳统计特征等于该过程的集合平均统计特征，这样的平稳随机过程就是各态历经随机过程。



2. 连续信号和离散信号

- 连续（模拟）信号——信号数学表达式中的独立变量取值是连续的。
- 离散信号——独立变量仅取离散值，其可用离散图形或数字序列表示。

表 1-1 信号按形态分类的形式

时间	幅 值	
	连 续	离 散
连续		
离散		

3. 能量信号和功率信号

- 在实际测量中，常把被测信号转换为电压或电流信号来处理。
- 若把电压信号加到单位电阻 R ($R=1\Omega$) 上，得到瞬时功率：

$$P(t) = \frac{x^2(t)}{R} = x^2(t)$$

- 将 $x^2(t)$ 对时间积分得到能量 $E(t)$ ，即

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

能量信号和功率信号

当信号 $x(t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

时则认为信号能量有限的，并称它为能量有限信号。简称能量信号。

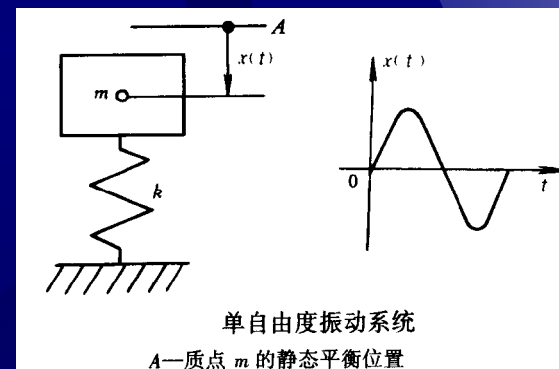
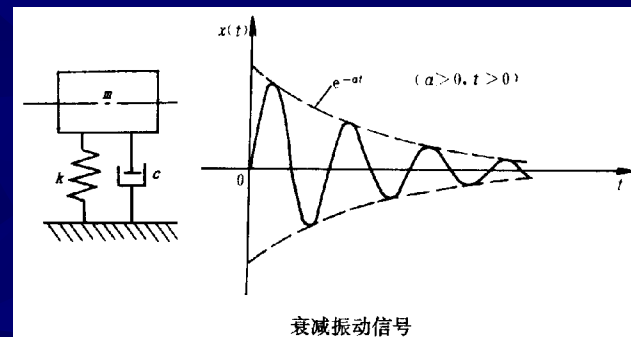
若信号在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的能量是无限的

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \rightarrow \infty$$

但在有限区间 (t_1, t_2) 的平均功率是有限的，即

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt < \infty$$

则称为功率有限信号，或功率信号。



在实际使用中，人们不考虑信号的实际量纲，而把信号 $x(t)$ 的平方 $x^2(t)$ 及其对时间的积分分别称为信号的功率和能量。所以信号的功率和能量未必具有真实的功率和能量的量纲。

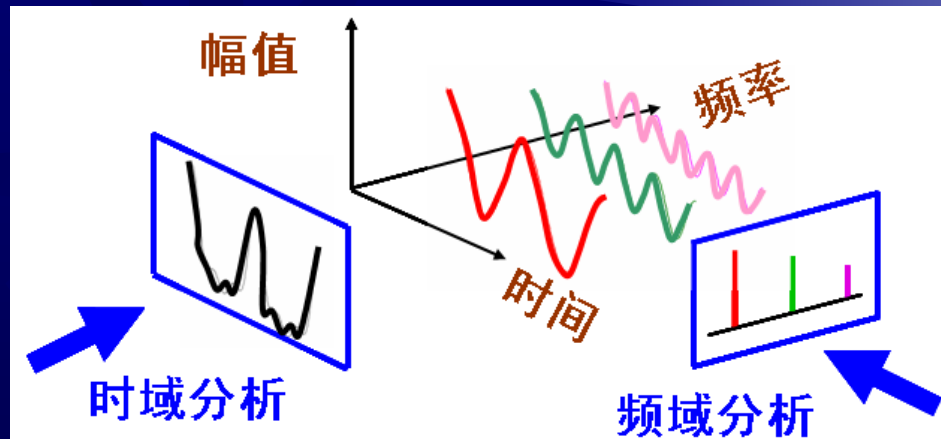
1.2.2 信号的时域描述和频域描述

把信号的时域描述通过适当的方法变成频域描述。

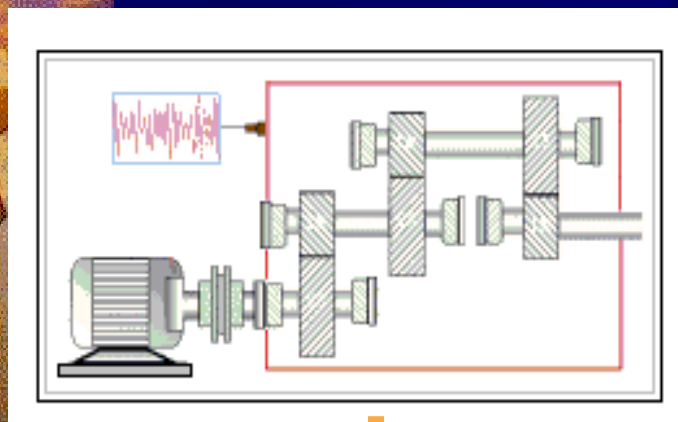
对信号进行频谱分析，

- 1 信号的时域描述——信号幅值按时间变化的规律，即以时间为独立变量来描述信号。
- 2 信号的频域描述——以频率为独立变量来描述信号。

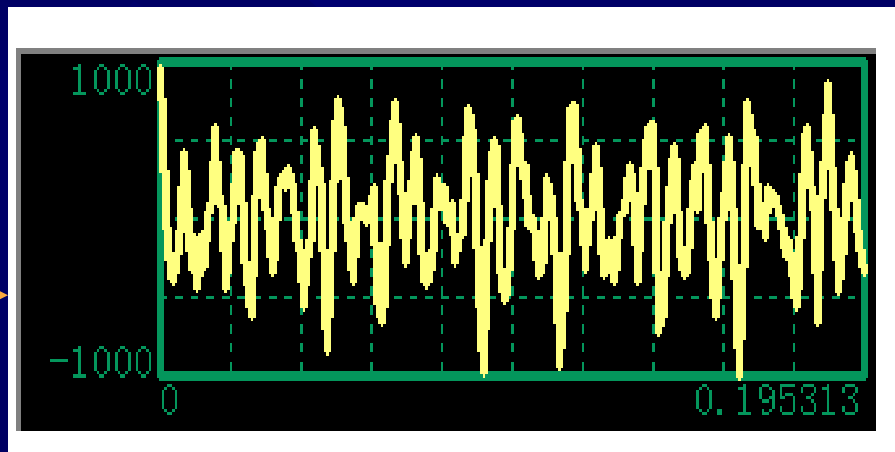
频域描述目的：为了研究信号的频率结构和各频率成分的幅值、相位的关系。



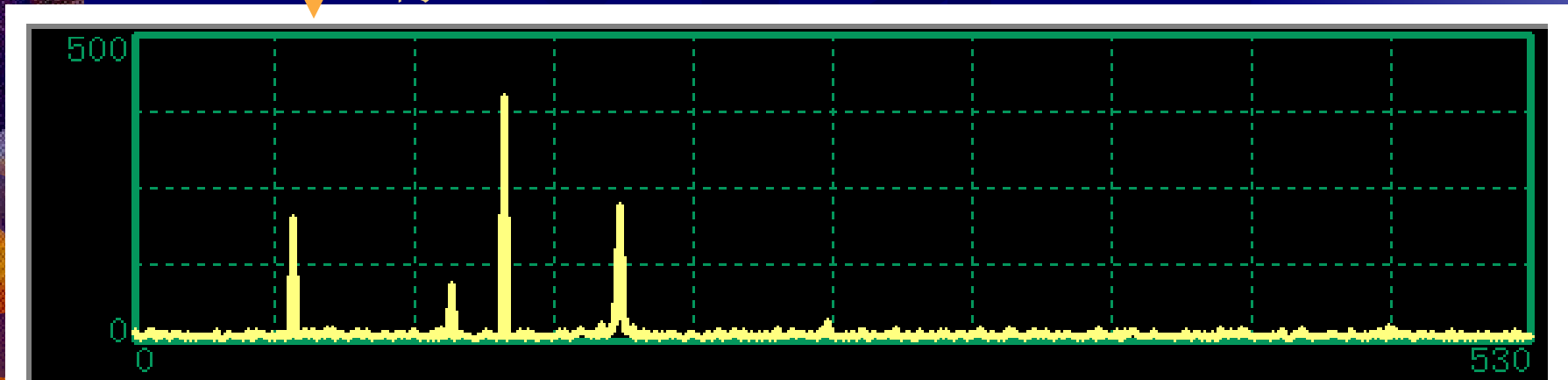
例如：大型空气压缩机传动装置故障诊断



时域波形



频率结构



例：时域图形、幅频谱和相频谱三者的关系

信号从时域变换到频域后，将组成信号的各频率成分找出来，按序列排列，得出信号所谓的“频谱”。若以频率为横坐标、分别以幅值或相位为纵坐标，便分别得到信号的幅频谱或相频谱。

以周期方波为例：右图是该周期方波的时域图形、幅频谱和相频谱三者的关系。

信号频谱 $X(f)$ 代表了信号在不同频率分量成分的大小，能够提供比时域信号波形更直观，丰富的信息。

相位频谱

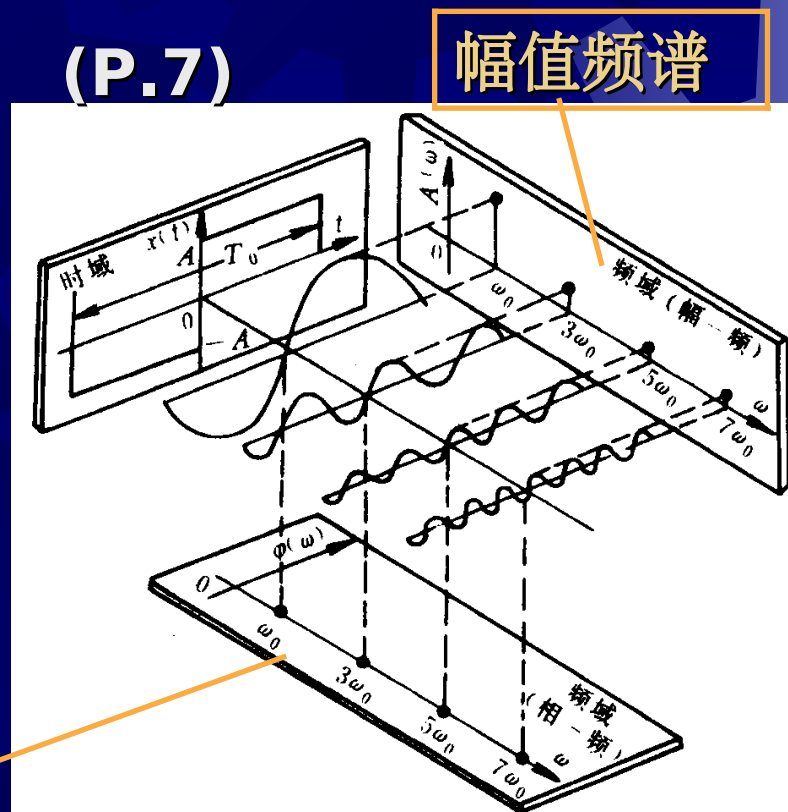
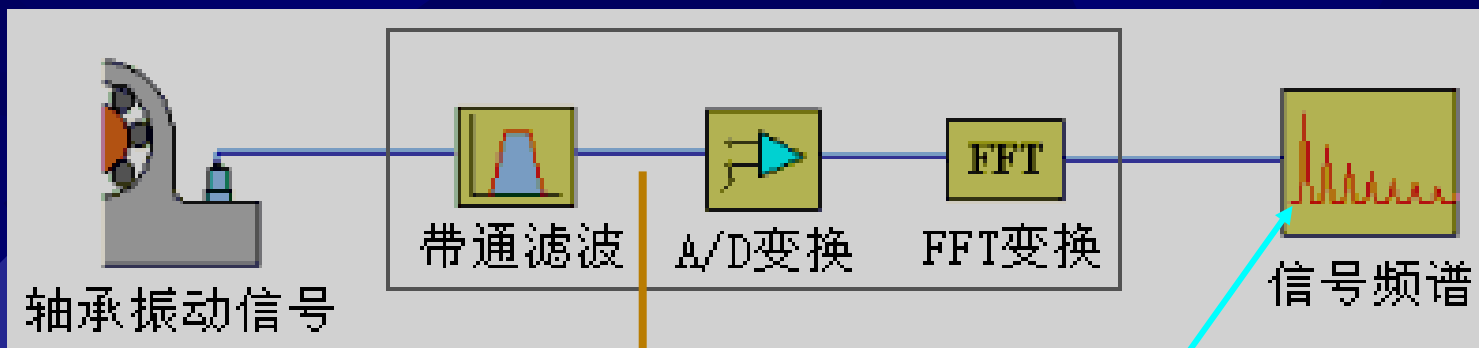
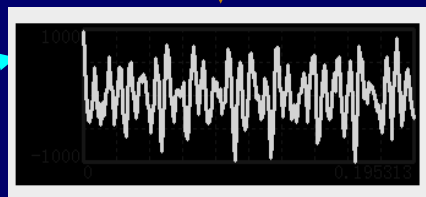


图 1-5 周期方波的描述

时域、频域描述的不同作用



波形图：信号的性质、周期、幅值等信息



频谱图：频率组成及其幅值、相角之大小

信号时域、频域两种不同描述方法完全是为了解决不同问题，掌握信号不同方面的特征需要。例如，

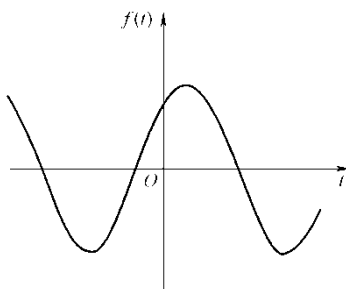
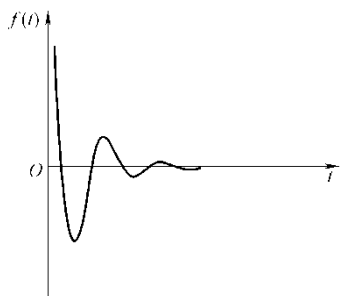
- 评定机器振动程度，需用振动速度的均方根值来作为判据，采用时域描述，就能很快求得均方根值。
- 在寻找振源时，需要掌握振动信号的频率分量，这就需采用频域描述。

必须指出的是这两种描述方法能相互转换，而且包含同样的信息量。

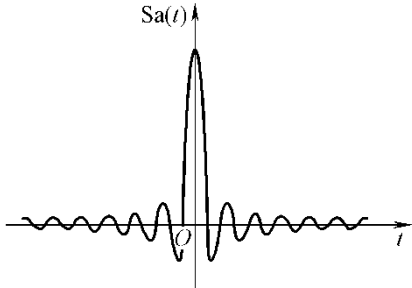
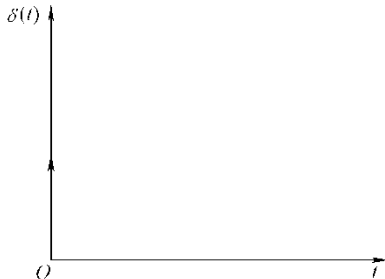
1.3 信号的时域分析

1.3.1 信号分析中的常用函数

(见 P.8-10 表 1-2)

函数表达式	信号波形	备注
正、余弦函数 $f(t) = A\sin(\omega t + \theta)$		A 为振幅； ω 为角频率； θ 为初相位（或称初相角、初位相等）
复指数函数 $f(t) = Ae^{st}$		$s = \alpha + j\omega$ 为复数； 根据欧拉公式： 得其与正、余弦函数关系： $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t})$ $\sin \omega t = \frac{j}{2}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t})$

信号分析中的常用函数

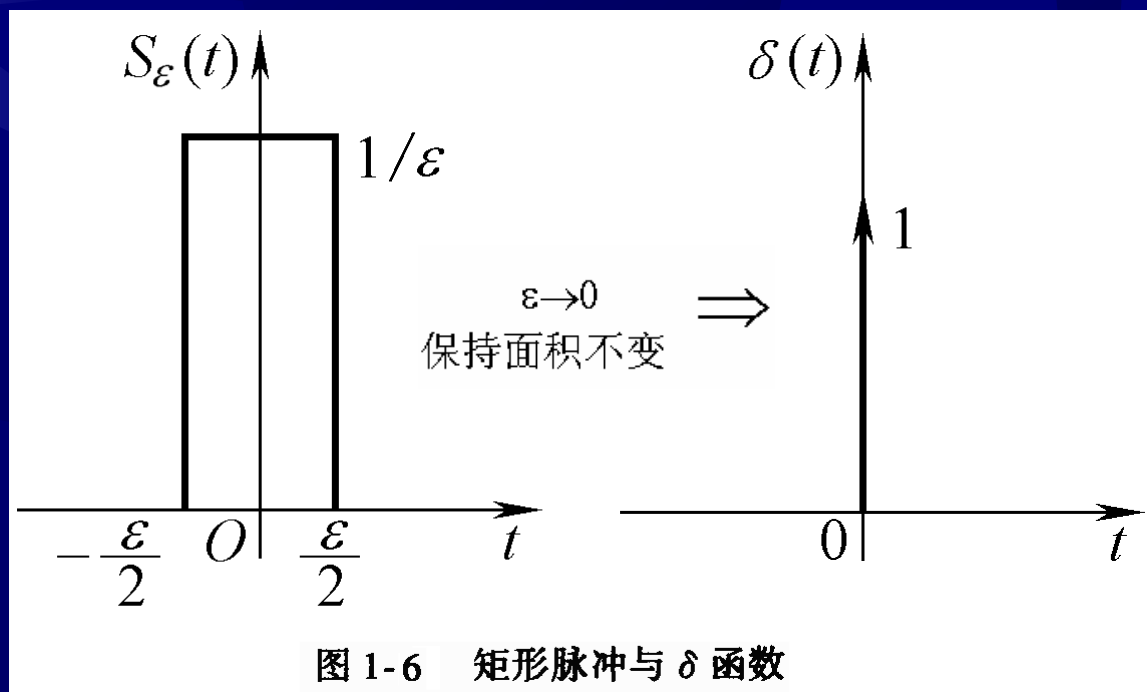
函数表达式	信号波形	备注
<p>Sa 函数</p> $S_a(t) = \frac{\sin t}{t}$ $\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} = S_a(\pi \cdot t)$		<p>广义偶函数</p> <p>$S_a(t)=0, t=n\pi$</p> <p>$\text{Sinc}(t)=0, t=n$</p> <p>$(n=\pm 1, \pm 2, \dots)$</p>
<p>δ 函数</p> $\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \end{cases}$		<p>也称单位脉冲函数</p>

δ 函数（单位脉冲函数）

在信号分析中 δ 函数出现频率最高，它是一个广义函数。

δ 函数也称单位脉冲函数。

(P.10)



1.3.2 信号的时域运算

- 信号的时域运算包括展缩、平移、翻转、相加、相乘、微分、积分、卷积等基本运算。

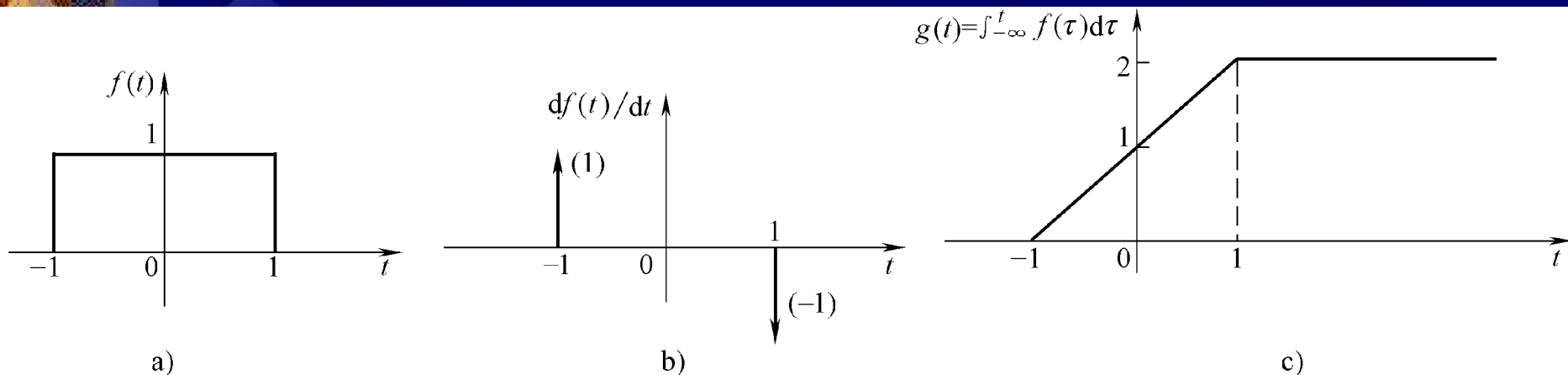


图1-7 信号时域的微分、积分运算

a) 原函数 b) 微分函数 c) 积分函数

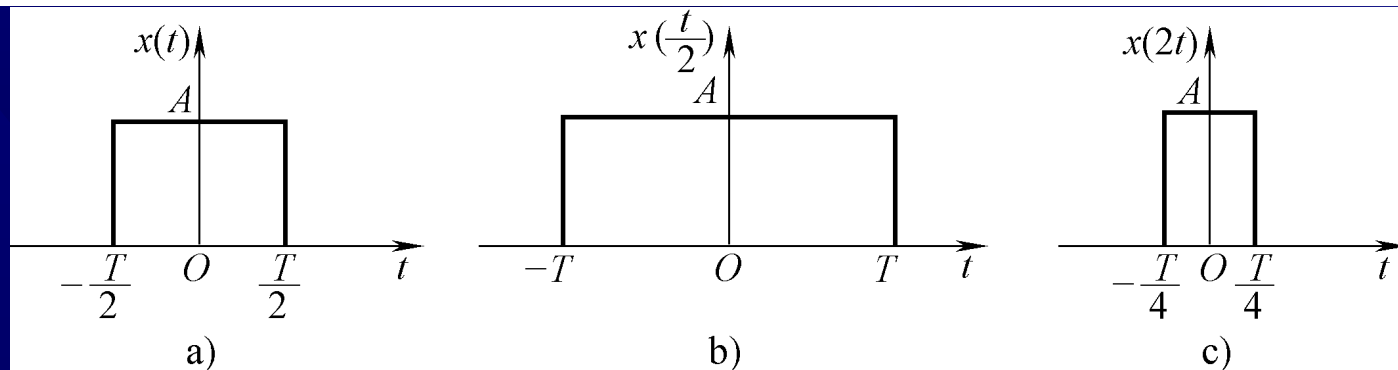


图1-8 信号时域展缩

a) 原信号 b) 信号扩展 c) 信号压缩

(P.1
1)

卷积运算——线性系统中时域分析的重要方法之一

➤ 定义:

$$f_1(t) \star f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

➤ 服从的代数定律:

① 交换律: $f_1(t) \star f_2(t) = f_2(t) \star f_1(t)$

② 分配律:

$$f_1(t) \star [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) \star f_2(t) + f_1(t) \star f_3(t)$$

③ 结合律:

$$[f_1(t) \star f_2(t)] \star f_3(t) = f_1(t) \star [f_2(t) \star f_3(t)]$$

1.3.3 信号的时域分解

为便于在时域进行信号分析，一个复杂信号可以分解为一系列具有不同时延的矩形窄脉冲的叠加。

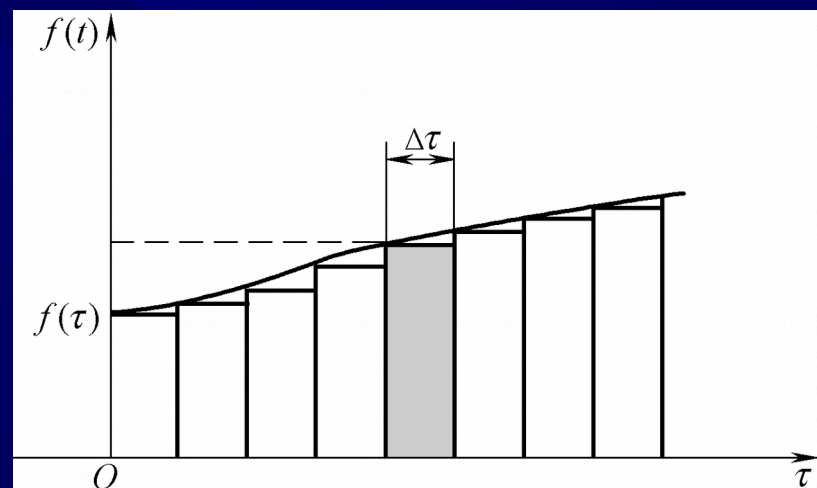


图1-9 信号的时域分解

$$f(t) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad \left. \begin{matrix} \text{P.1} \\ 1 \end{matrix} \right)$$

时域里任一函数等于这一函数与单位脉冲函数的卷积，卷积的几何解释就是上述一系列矩形窄脉冲的求极限过程。

1.3.4 周期信号的强度

(P.12)

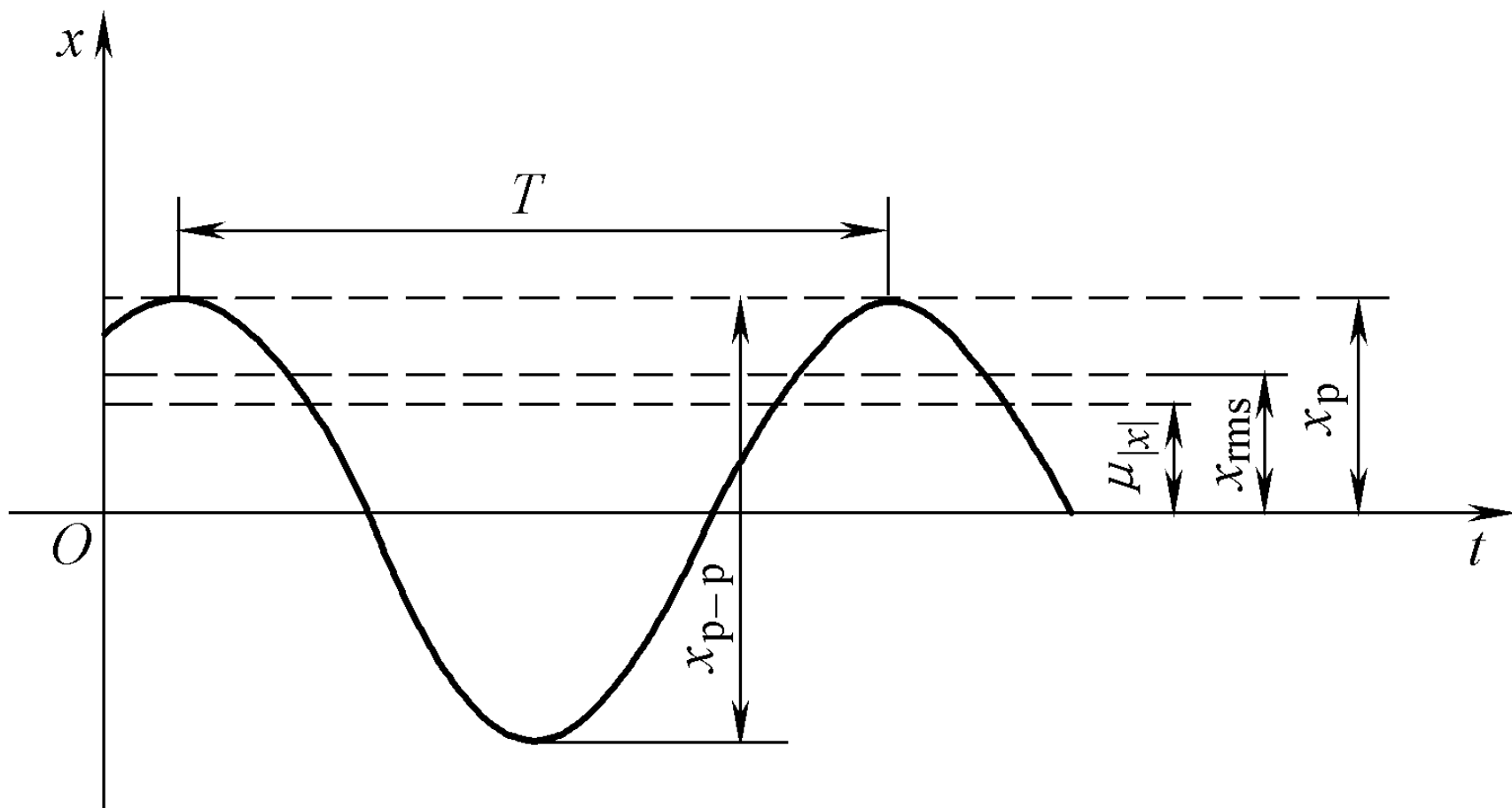


图1-10 周期信号的强度表示

周期信号的强度描述

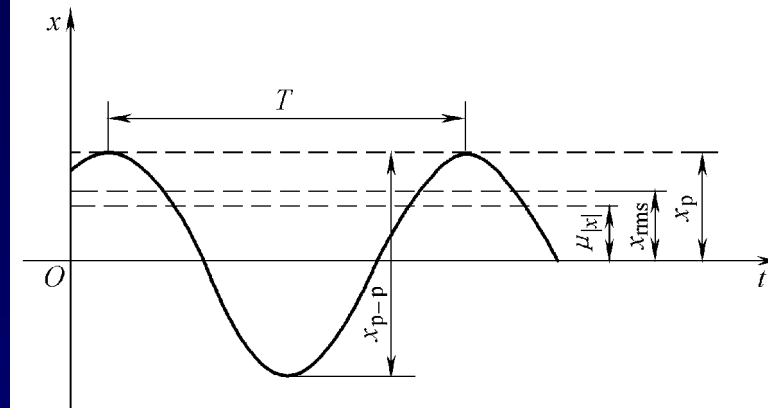
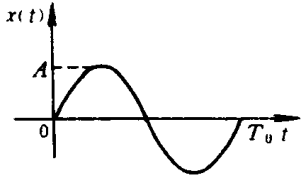
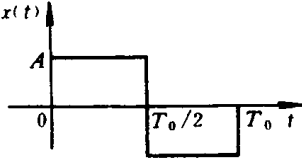
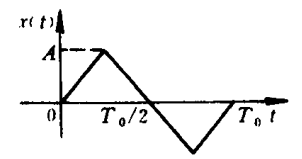
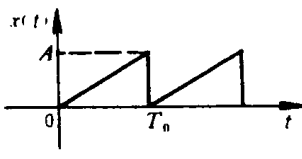



图1-10 周期信号的强度表示

强度描述值	含义	表达方式
峰值 x_p	最大瞬时幅值	$x_p = x(t) _{\max}$
均值 μ_x	常值分量，一周期内幅值对时间的平均	$\mu_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$
绝对均值 $\mu_{ x }$	周期信号全波整流后的均值	$\mu_{ x } = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$
有效值 x_{rms}	信号的均方根值，反映信号的功率大小	$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt}$
平均功率 p_{av}	有效值的平方，即均方值	$P_{av} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt$

几种典型周期信号的强度 (P.12)

表1-3 几种典型信号的强度

名 称	波 形 图	傅里叶级数展开式	x_p	μ_x	$\mu_{ x }$	x_{rms}
正 弦 波		$x(t) = A \sin \omega_0 t$ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	A	0	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$
方 波		$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right)$	A	0	A	A
三 角 波		$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin \omega_0 t - \frac{1}{9} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \sin 5\omega_0 t - \dots \right)$	A	0	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\sqrt{3}}$
锯 齿 波		$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{\sin 2\omega_0 t}{2} + \frac{\sin 3\omega_0 t}{3} + \dots \right)$	A	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\sqrt{3}}$
正弦整流		$x(t) = \frac{2A}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega_0 t - \frac{2}{15} \cos 4\omega_0 t - \frac{2}{35} \cos 6\omega_0 t - \dots \right)$	A	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A}{\sqrt{2}}$



1.4 周期信号及其频域分析

周期信号分类

$$x(t) = x(t + nT_0)$$

式中 $n=1,2,3,\dots$

T_0 ——周期

- 简单周期信号——正（余）弦信号，只有一个频率成分
- 复杂周期信号——具有周期函数形式→傅里叶级数→将复杂的周期函数展开成由简单的周期函数组成的级数

1.4.1 傅里叶级数的三角函数展开式

狄里赫利条件（收敛定理）：

设信号 $x(t)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足条件：（1）在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，（2）并且至多只有有限个极值点，则 $x(t)$ 的傅里叶级数收敛，也就是说信号 $x(t)$ 在一个周期内是绝对可积的。

$$\int_{T/2}^{T/2} |x(t)| dt \rightarrow \text{有限值}$$

复杂周期信号展开成三角级数

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

直流分量

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt & \text{—— 常值分量} \\ a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt & \text{—— 余弦分量} \\ b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt & \text{—— 正弦分量} \end{array} \right.$$

T_0 —— 周期

$\omega_0 = 2\pi/T_0$ $n=1,2,3,\dots$

三角函数展开式 (2)

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_0 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega_0 t \right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos \varphi_n \cos n\omega_0 t + \sin \varphi_n \sin n\omega_0 t)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$



$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\tan \varphi_n = - \frac{b_n}{a_n}$$



ω_0 ——基频

$n\omega_0$ ——谐波频率

$A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ —— 基波分量或一次谐波

$A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$ —— n 次谐波分量



三角函数展开式（有些教材）

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_0 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega_0 t \right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\sin \varphi_n \cos n\omega_0 t + \cos \varphi_n \sin n\omega_0 t)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$



谐波分析

谐波分析——将复杂周期函数展开成三角级数，这种展开在工程上就称为谐波分析。

谐波分析的物理意义——是将一个比较复杂的周期信号看成是许多不同频率的正余弦信号的叠加。



频谱图

- $A_n - \omega$ ——幅值频谱图，简称幅频谱
- $\varphi_n - \omega$ ——相位频谱图，简称相频谱

例 1-1：周期性三角波展开成傅里叶级数

$$x(t) = \begin{cases} A + \frac{2A}{T_0}t & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq 0 \\ A - \frac{2A}{T_0}t & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

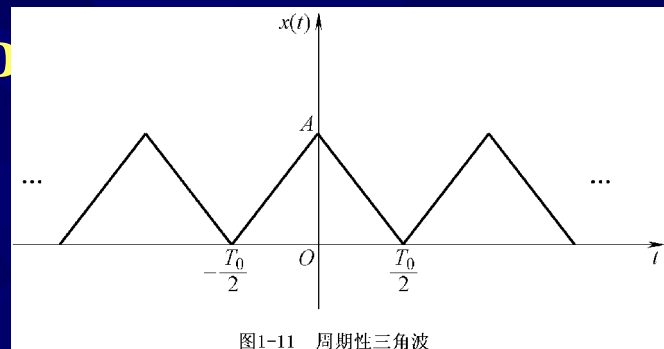


图1-11 周期性三角波

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} (A - \frac{2A}{T_0}t) \cos n\omega_0 t dt \quad (P.1)$$

$$= \frac{4A}{n^2\pi^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{4A}{n^2\pi^2} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin \omega_0 t dt = 0$$

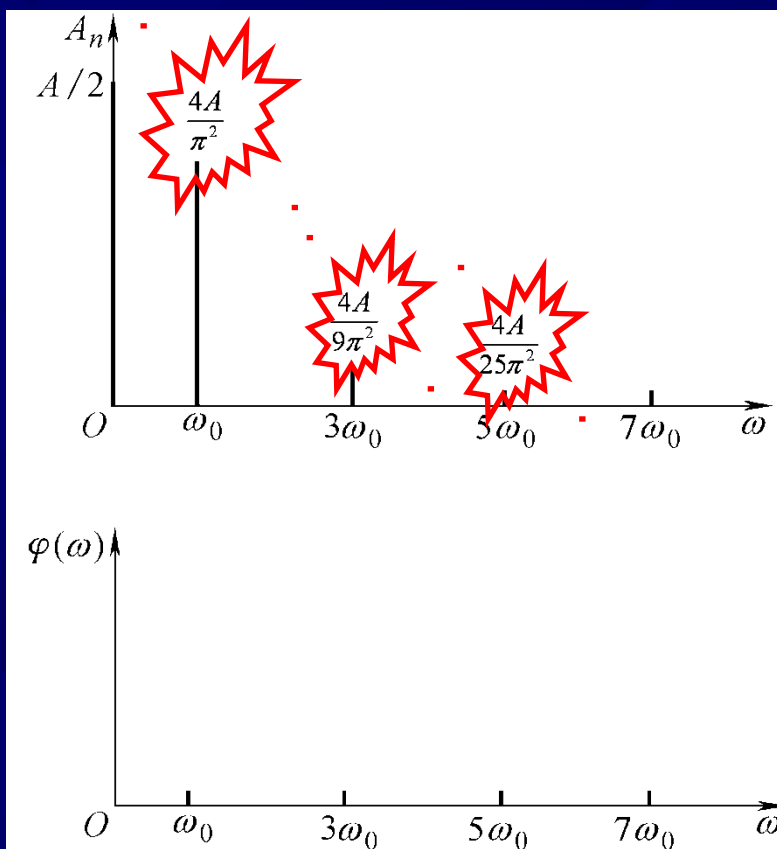
$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right)$$

结论：(1) 只剩下余弦分量的奇次谐波

(2) 各项谐波的幅值以 $1/n^2$ 的规律衰减

周期性三角波的频谱

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} (\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots)$$



(P.15)

图1-12 周期性三角波的频谱

例：周期方波的傅里叶级数

$$x(t) = \begin{cases} -A & -\frac{T}{2} \leq t \leq -\frac{T}{4} \\ A & -\frac{T}{4} \leq t \leq +\frac{T}{4} \\ -A & +\frac{T}{4} \leq t \leq +\frac{T}{2} \end{cases}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

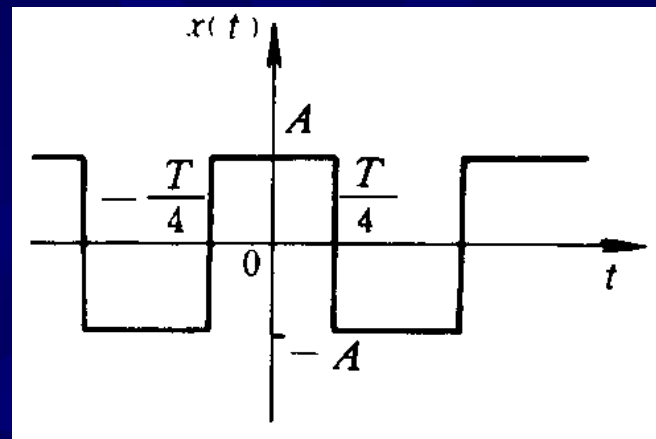
$$= \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n=1,3,5,\dots \\ 0 & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin \omega_0 t dt = 0$$

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t + \dots \right)$$

结论：(1) 只剩下余弦分量的奇次谐波

(2) 各项谐波的幅值以 $1/n$ 的规律衰减



傅立叶级数项叠加逼近周期信号

多个不同频率、不同幅值和相位的傅立叶级数项叠加可以逼近一个周期信号，而且所取的项的数目越多，即 n 越大，近似的程度就越高。

(P.15)

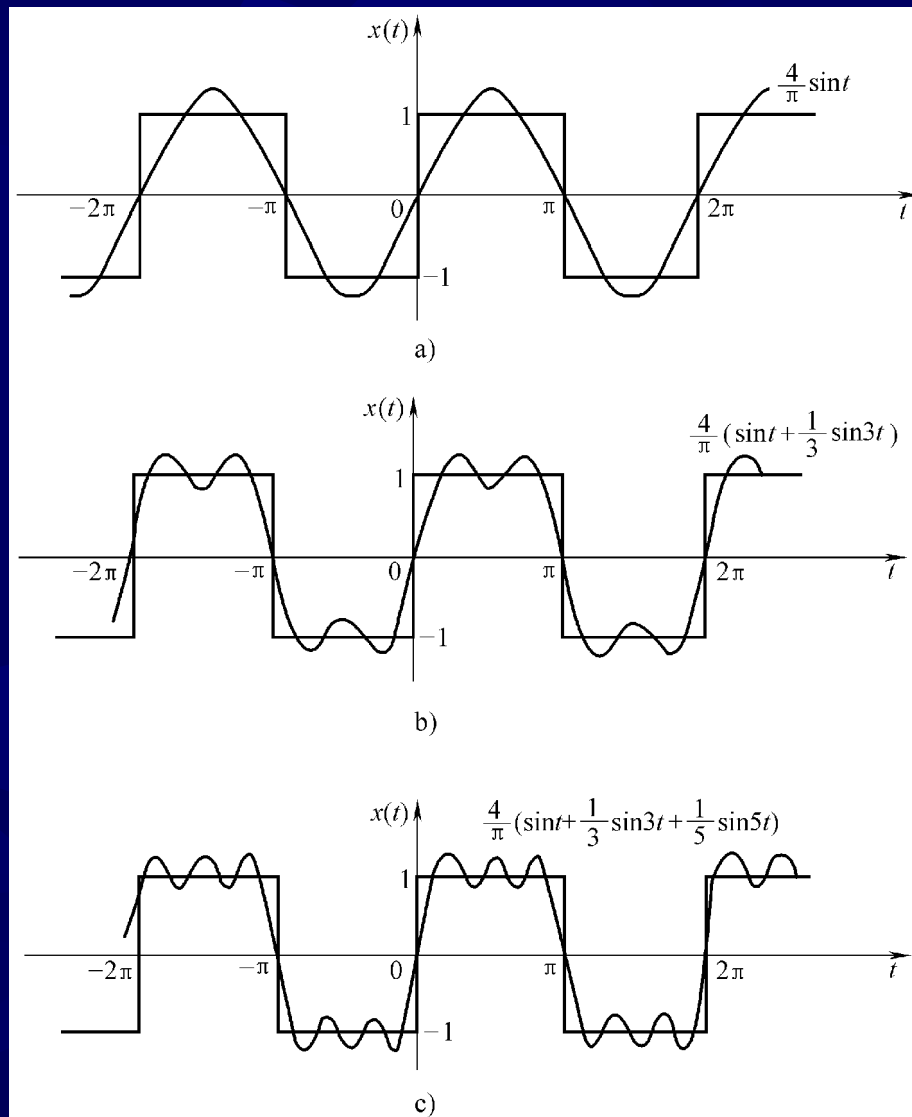
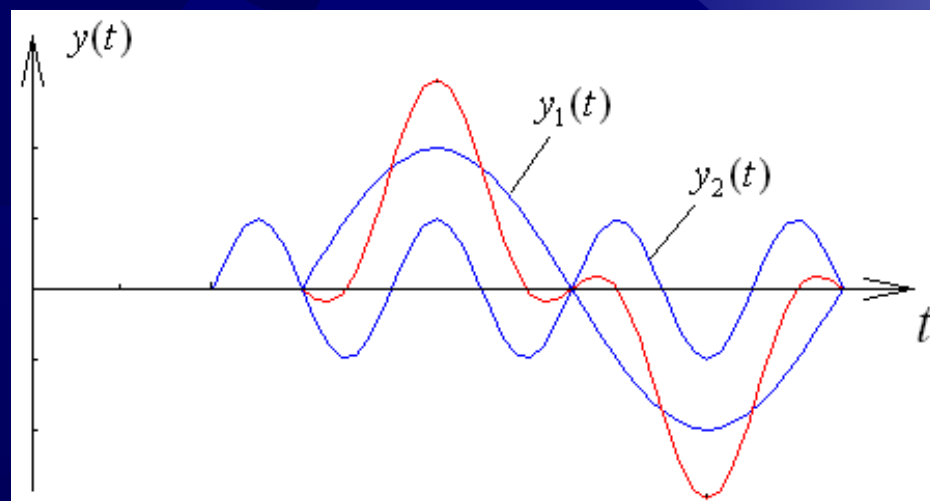
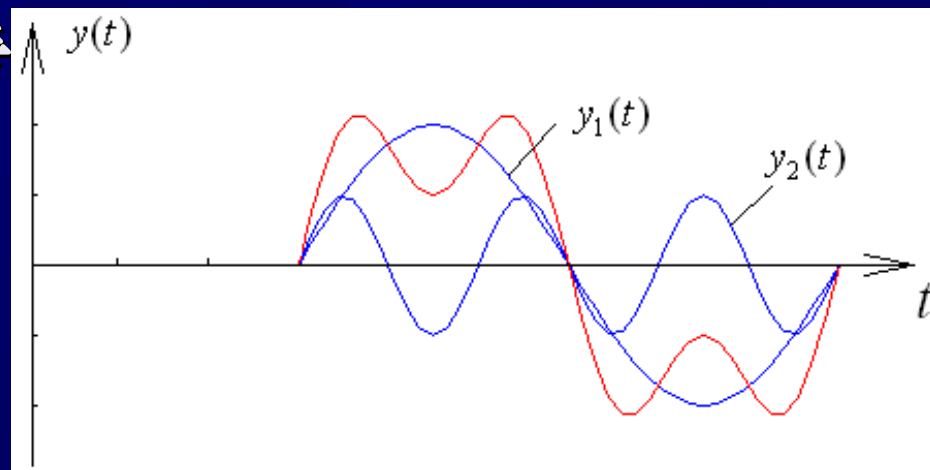


图1-13 方波信号及其各阶谐波叠加逼近的情形

a) 用一次谐波逼近 b) 用一次、三次谐波之和逼近 c) 用一次、三次、五次谐波之和逼近

幅频谱和相频谱的重要性

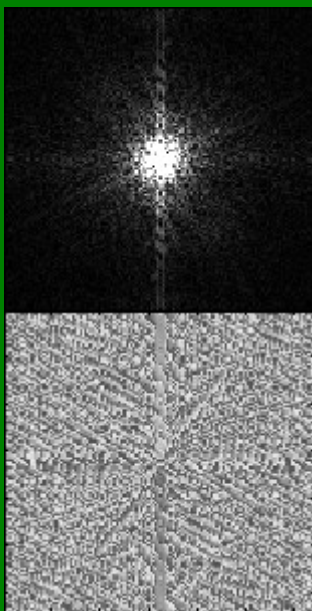
从测试角度看，相频谱和幅频谱一样的重要，因为如果 $A_n-\omega$ 完全相同而 $\varphi_n-\omega$ 不一样的两个信号叠加其波形是完全不一样的。



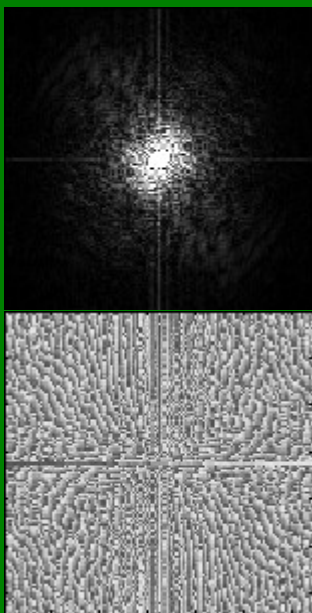
相频谱和幅频谱一样的重要



幅值



幅值

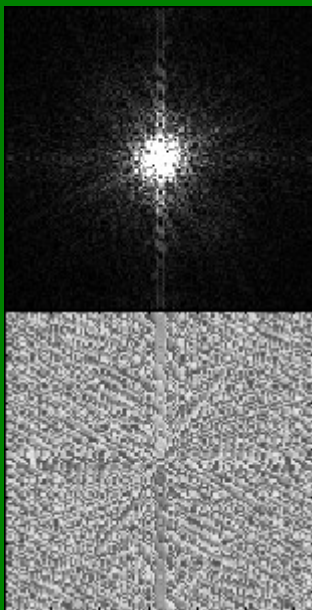


位相

相频谱和幅频谱一样的重要



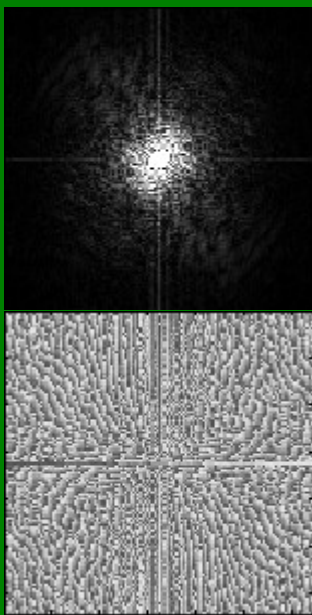
幅值



位相



幅值



位相



1.4.2 傅里叶级数的复指数函数展开式

根据欧拉公式:

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

$$\begin{cases} \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) \\ \sin \omega t = j \frac{1}{2} (e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \end{cases}$$

复指数展开式

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} \right]$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

令

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

$$c_0 = a_0$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

或

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

系数的含义

$\text{Re}C_n$

$\text{Im}C_n$

$$C_n = C_{nR} + jC_{nI} = |C_n| e^{j\varphi_n}$$

$$\begin{cases} |C_n| = \sqrt{C_{nR}^2 + C_{nI}^2} & C_n \text{ 的幅值} \\ \varphi_n = \arctan \frac{C_{nI}}{C_{nR}} & C_n \text{ 的相位} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |C_n| - \omega \text{ 作图, 复幅频图} \\ \varphi_n - \omega \text{ 作图, 复相频图} \end{cases} \begin{cases} C_{nR} - \omega & \text{实频图} \\ C_{nI} - \omega & \text{虚频图} \end{cases}$$

用复指数形式与用三角函数形式表示的频谱的区别

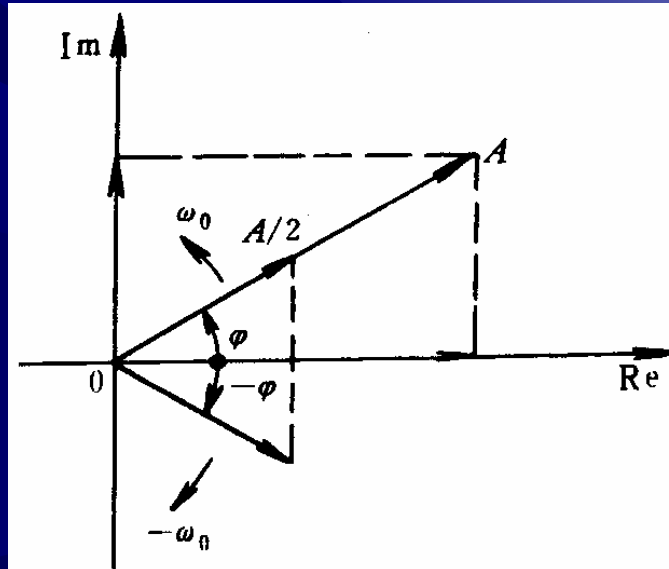
1. 三角函数展开式 $n=1,2,3,\dots,+\infty$ 代表阶次，且只有正频率，是单边谱；

复指数展开式 $n=0,\pm1,\pm2,\dots$ 有正负频率，是双边谱。

2. C_n 与 A_n 的关系

$$|C_n| = \frac{1}{2} A_n \quad |C_0| = a_0$$

3. 负频率的解释



负频率的说明

例 1-2 作出余弦、正弦函数的实、虚部频谱图以及单边谱和双边谱

(P.1
9)

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{-jn\omega_0 t} + e^{jn\omega_0 t})$$

$$= C_{-1} e^{-jn\omega_0 t} + C_{+1} e^{jn\omega_0 t}$$

$$\sin \omega_0 t = j \frac{1}{2} (e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t})$$

$$= C_{-1} e^{-jn\omega_0 t} + C_{+1} e^{jn\omega_0 t}$$

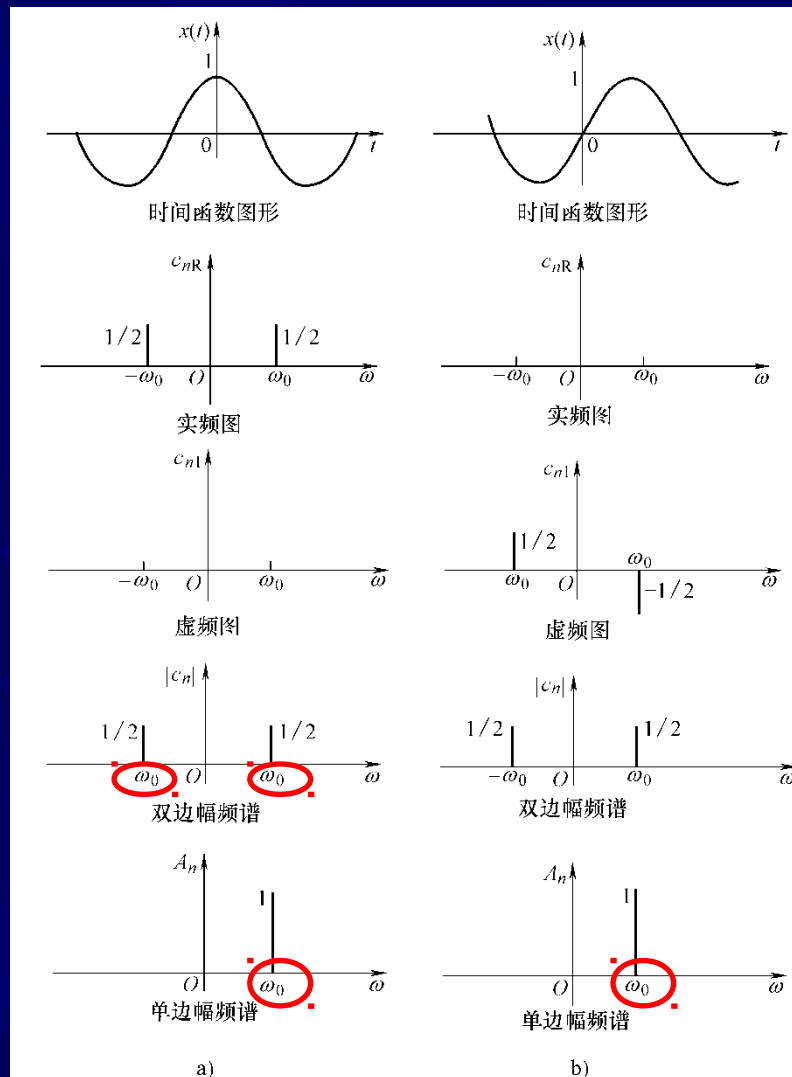


图 1-14 正、余弦函数的频谱图

a) 余弦函数 $x(t) = \cos \omega_0 t$ 情况 b) 正弦函数 $x(t) = \sin \omega_0 t$ 情况

周期信号的频谱三个重要特征:

- 周期信号的频谱是离散的。
- 每条谱线只出现在基波和基波频率的整数倍上，基波频率是诸分量频率的公约数。
- 各频率分量的谱线高度表示该谐波分量的幅值和相位角。

周期信号的幅值谱中各个频率的分量的幅值随着频率的升高而减少，即频率越高，幅值越小。因此在频谱分析中没有必要取那些频率过高的谐波分量。

1.4.3 周期信号的功率及功率谱

- 周期信号是功率信号。
- 周期信号的平均功率的定义：

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt \quad \text{—— 时域}$$

P.18-19 推导

$$: \quad P = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2 \quad \left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty}} \right\} \text{频域}$$

$$P = |C_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

巴塞伐尔 (Parseval) 定理

- 周期信号在时域中的信号功率等于该信号在频域中的信号功率。
- 这个定理表明，只要求出信号的傅立叶级数的系数，就可以得到信号的功率谱。

周期信号的功率谱

$$P_n = |C_n|^2 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

P_n ——表示信号的第 n 个功率谱点
功率谱具有的性质：

- (1) P_n 是非负数。
- (2) P_n 是 n 的偶函数。
- (3) P_n 不随时移 τ 而改变。

例 1-3 求图 1-15a 所示周期矩形脉冲信号的功率 (P.20)

并考察其功率谱的组成情况，设脉宽 $\Delta T=0.2s$ ， $T=1s$ 。

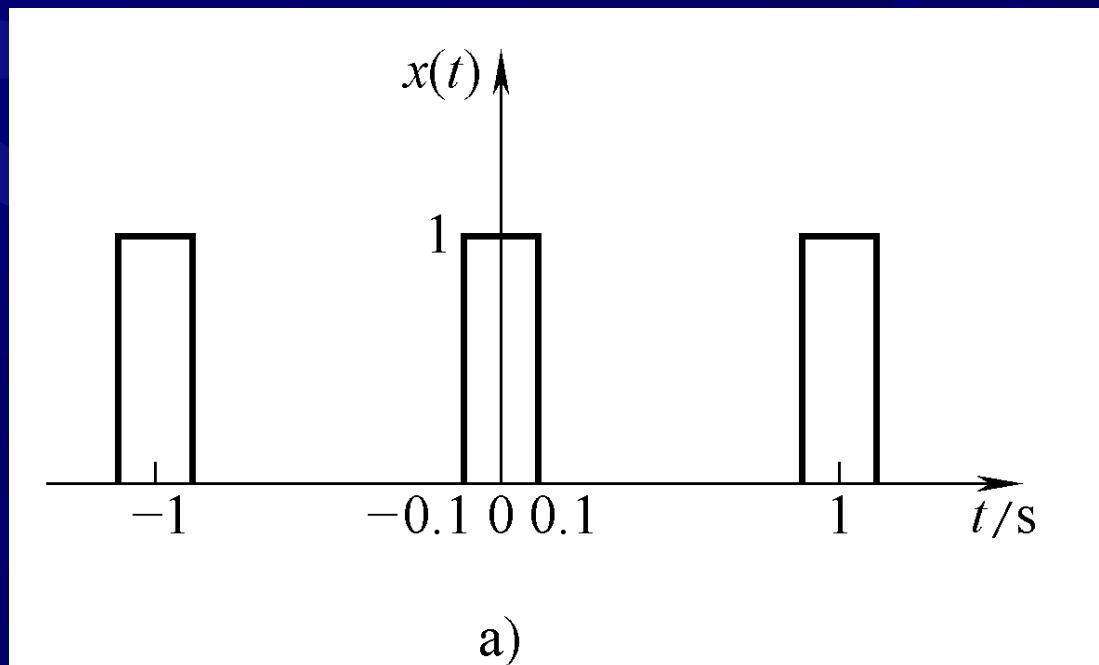


图1-15 周期矩形脉冲信号及其频谱

a) 周期矩形脉冲信号

功率和频谱

➤ 周期矩形脉冲信号的功率

$$P = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\Delta T/2}^{\Delta T/2} x^2(t) dt = 0.2$$

➤ $x(t)$ 展开的傅里叶系数及其频谱

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= 0.2 \frac{\sin(0.2n\pi)}{0.2n\pi}$$

$$= 0.2 \operatorname{sinc}(0.2n)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

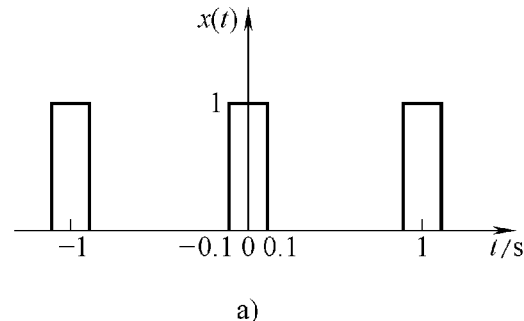


图1-15 周期矩形脉冲信号及其频谱

a) 周期矩形脉冲信号

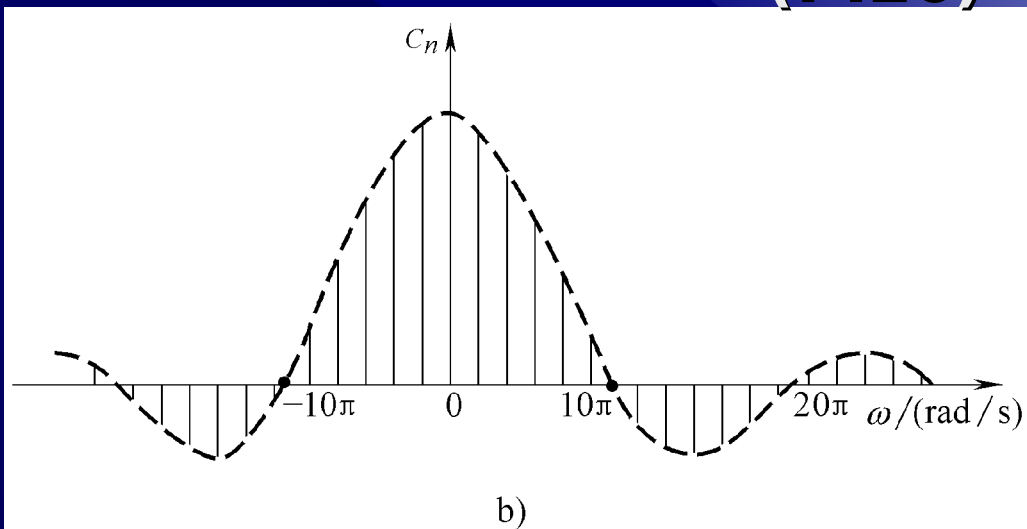


图1-15 周期矩形脉冲信号及其频谱

b) 周期矩形脉冲信号的频谱

(P.20)

功率谱的组成

- 频谱中第一个过零点内所含各频率分量的功率总和 P'

$$P' = \sum_{n=-5}^{n=5} |C_n|^2 = 0.181$$

- 第一个过零点内频率分量的功率和占总功率的百分比

$$\frac{P'}{P} = \frac{0.181}{0.2} = 90.3\%$$

说明信号频率中第一个过零点以内（或称频谱主瓣）所含的频率分量的功率之和已占信号总功率的绝大部分。

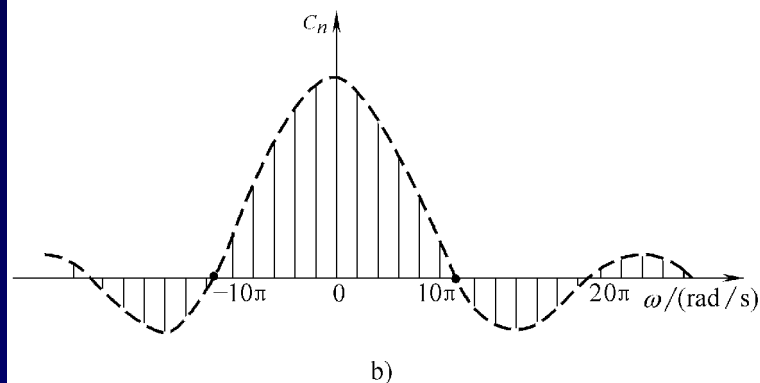


图1-15 周期矩形脉冲信号及其频谱
b) 周期矩形脉冲信号的频谱

1.5 非周期信号及其频域分析

(P.21)

非周期信号分类

非周期信号包括准周期信号和瞬变非周期信号两种。

➤ 准周期信号:

若各简谐成分的频率比不是有理数，其各简谐成分在合成后不可能经过某一时间间隔后重演，其合成信号就不是周期信号。但这种信号有离散频谱，故称为准周期信号。

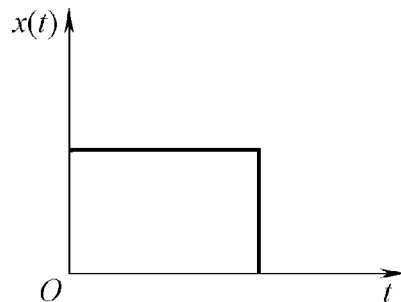
➤ 瞬变非周期信号

通常所说的非周期信号为瞬变非周期信号。

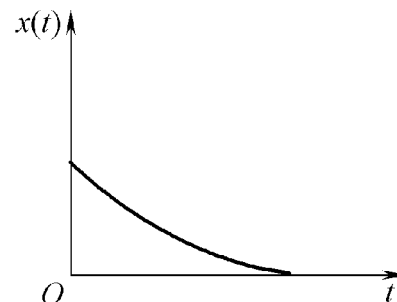
常见的瞬变非周期信号

(P.21)

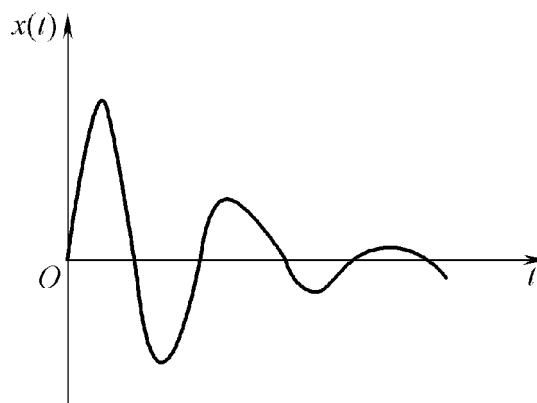
- 矩形脉冲信号
- 指数衰减信号
- 衰减振荡信号
- 单一脉冲信号



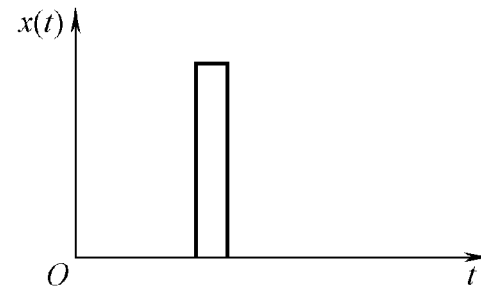
a)



b)



c)



d)

图1-16 常见瞬变非周期信号

a) 矩形脉冲信号 b) 指数衰减信号 c) 振荡衰减信号 d) 单一窄脉冲信号

1.5.1 傅里叶变换

(一) 从傅里叶级数到傅里叶变换

	周期信号		非周期信号
周期	T_0 ——有限值		$T_0 \rightarrow \infty$
频率间隔	$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	引伸	$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow 0$ 即频率间隔无限小，可用 $d\omega = \Delta\omega$
频谱	离散谱 $n\omega_0 (n=1, 2, \dots)$	预测	$n\omega_0 \rightarrow n d\omega \rightarrow \omega \rightarrow$ 连续频谱
分析工具	傅里叶级数		傅里叶变换

从傅里叶级数到傅里叶积分

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t}$$

对于非周期信号，相当于 $T_0 \rightarrow \infty$ ，频率间隔 $\Delta\omega = d\omega$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶变换对

(P.2

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{傅里叶变换(FT)}} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow X(\omega) = F[x(t)]$$

$$X(\omega) \xrightarrow{\text{傅里叶逆变换(IFT)}} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = F^{-1}[X(\omega)]$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

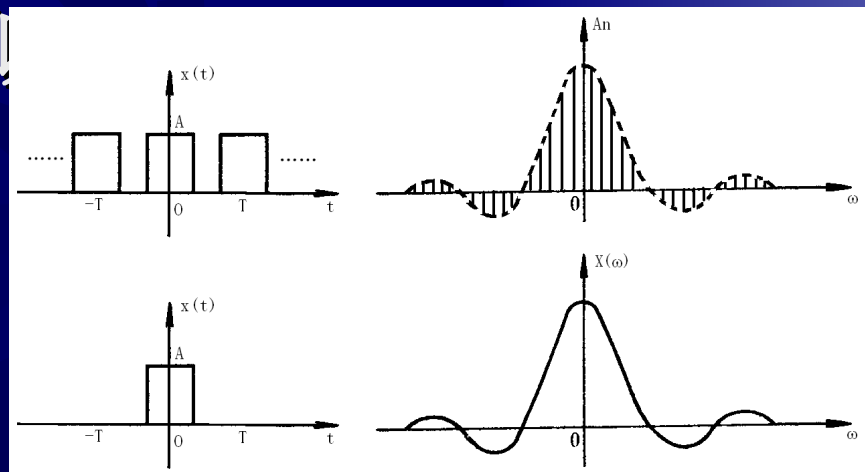
(二)、傅里叶变换的物理意义

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} c_n T_0 = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{c_n}{f_0}$$

1. $X(\omega)$ 代表单位频率谐波的幅值，称作频谱密度函数，简称频谱函数。

$c_n \rightarrow 0$ 但不等于零，各次谐波幅值之间仍然保持一定关系，可以预计具有相类似波形的非周期信号与周期信号其谐波分布规律相似

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$



傅里叶变换的物理意义 (2)

2. $X(f)$ 是实变量 f 的复函数, 可以写成如下的形式:

$$X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)} = R_e X(f) + jI_m X(f)$$

$|X(f)|$ — $x(t)$ 的连续幅频谱

$\varphi(f)$ — $x(t)$ 的连续相频谱

$|X(f)|$ 和 $|c_n|$ 的区别：

$|X(f)|$ ——是单位频宽上的幅值，故确切地说是频谱密度函数

$|C_n|$ ——量纲与周期信号的幅值量纲相同

非周期信号总结

- 分析工具：傅里叶变换
- 频域描述：频谱密度函数
- 频谱特征：连续频谱，高次谐波幅值是衰减的，可忽略高频分量，用有限的频带来合成信号以代替原来无限频带的信号。

例 1-4 图 1-17 是一个矩形脉冲函数 (又称窗函数) $x(t)$, 求该函数的频谱

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (\text{P.2 3})$$

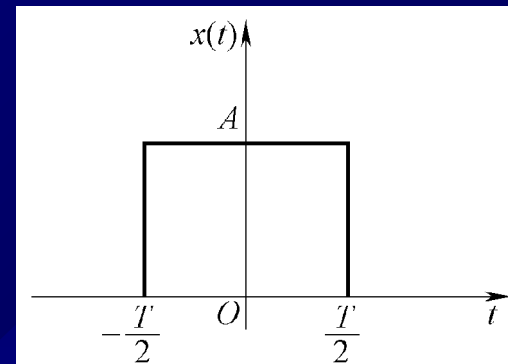


图 1-17 矩形脉冲函数

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T})$$

$$\sin(\pi f T) = -\frac{1}{2j} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}) \quad (\text{P.2 4})$$

$$X(f) = AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(fT)$$

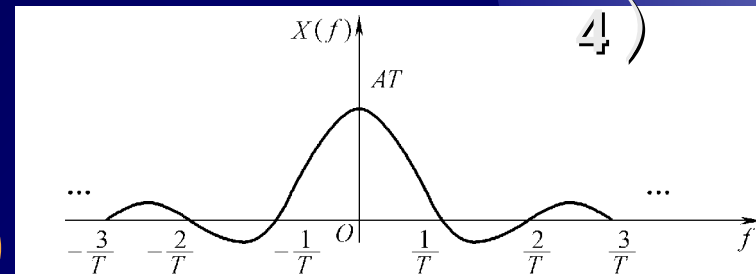
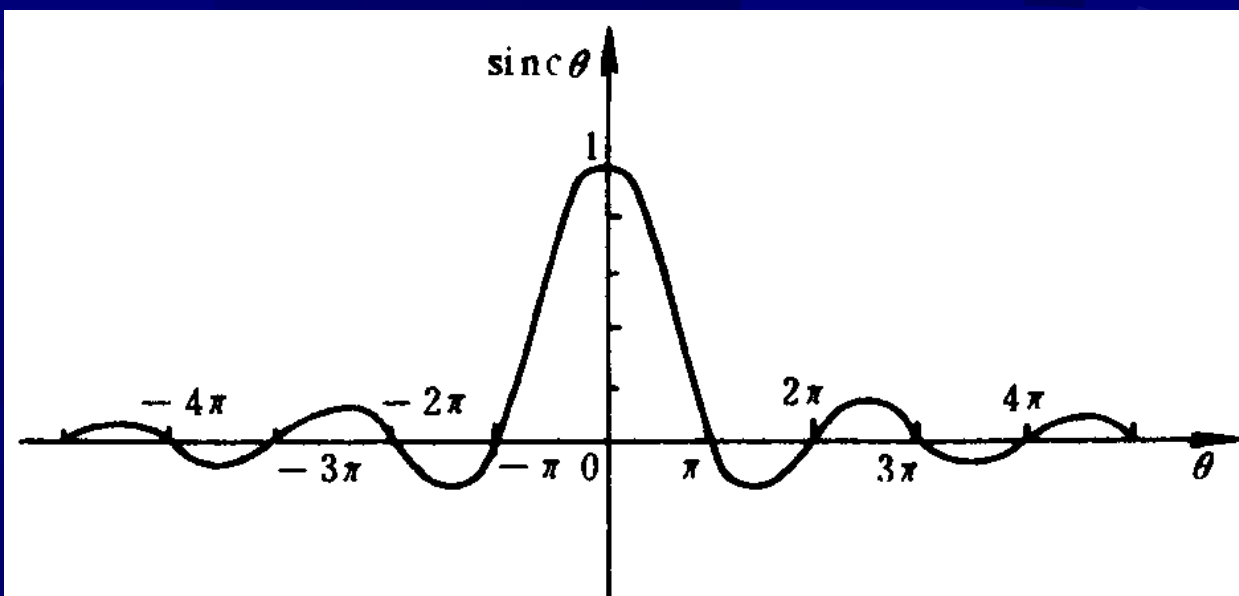


图 1-18 矩形脉冲函数的频谱

sinc θ 函数

$$\lim_{f \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right) = 1$$

$$\sin(\pi f T) = 0 \text{ 时}, f = \frac{n}{T}$$



sinc θ 的图形

$X(f)$ 的相位

$$|X(f)| = AT |\text{sinc}(fT)|$$

- $X(f)$ 的相位频谱视 $\text{sinc}(fT)$ 的符号而定。
当 $\text{sinc}(fT)$ 为正值时相角为零，当
 $\text{sinc}(fT)$ 为负值时相角为 π 。

(P.24)

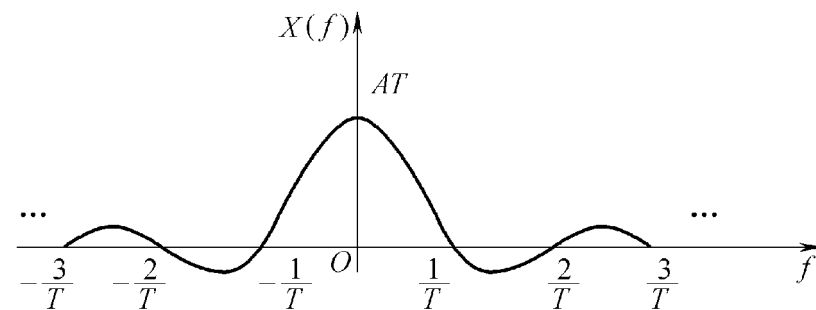
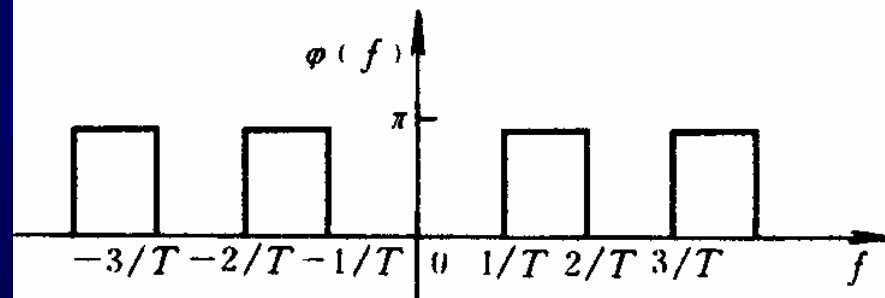


图 1-18 矩形脉冲函数的频谱



1.5.2 能量谱

- 非周期信号是能量信号
- 非周期信号 $x(t)$ 的能量定义

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) X(-\omega) d\omega$$

非周期信号的能量

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- 巴塞伐尔方程或能量等式。
- 它表示一个非周期信号 $x(t)$ 在时域中的能量可以由它在频域中连续频谱的能量来表示。

能量谱密度函数

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \\ = \int_0^{+\infty} S(\omega)^2 d\omega$$

- $S(\omega)$ —— $x(t)$ 的能量谱密度函数，简称能量谱密度
- 信号的能量谱 $S(\omega)$ 是 ω 的偶函数，它仅取决于幅频谱的模 $|X(\omega)|$ ，而与相位无关。

矩形脉冲函数的能量谱曲线及能量

- 周期信号中每个谐波分量与一定量的功率可以联系起来;
- 能量信号中的能量同连续的频带也可以联系起来。

(P.25)

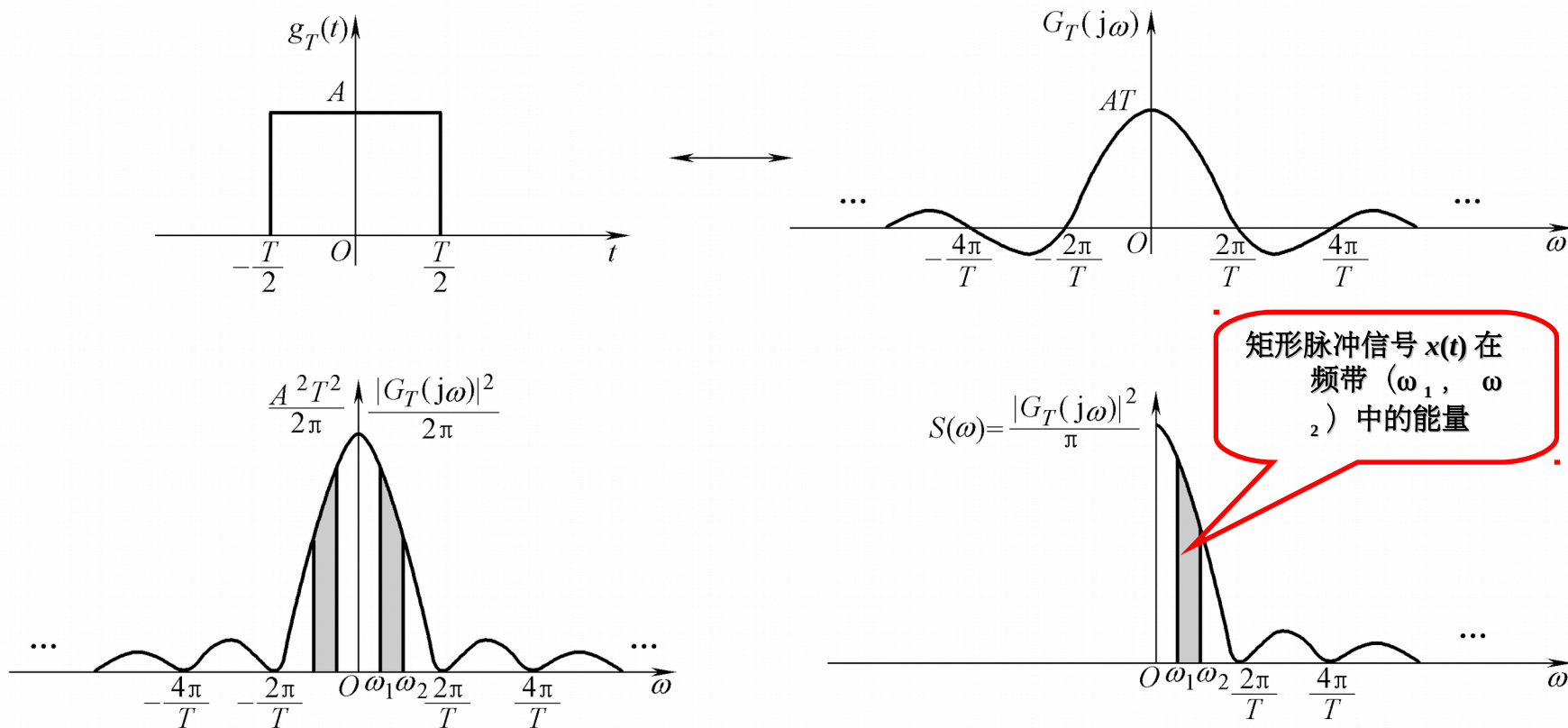


图 1-19 矩形脉冲函数的能量谱曲线及能量

1.5.3 傅里叶变换的主要性质

(P.25)

表 1-5 傅里叶变换的主要性质

性 质	时 域	频 域	性 质	时 域	频 域
函数的奇偶虚实性	实偶函数	实偶函数	频 移	$x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$X(f \pm f_0)$
	实奇函数	虚奇函数	翻 转	$x(-t)$	$X(-f)$
	虚偶函数	虚偶函数	共 轭	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
	虚奇函数	实奇函数	时域卷积	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f)X_2(f)$
线性叠加	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$	频域卷积	$x_1(t)x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$
对 称	$X(t)$	$x(-f)$	时域微分	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
尺度改变	$x(kt)$	$\frac{1}{k}X\left(\frac{f}{k}\right)$	频域微分	$(-j2\pi t)^n x(t)$	$\frac{d^n X(f)}{df^n}$
时 移	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$	积 分	$\int_{-\infty}^t x(t)dt$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f)$

1. 奇偶虚实性

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \text{Re } X(f) - j \text{Im } X(f)$$

$$\text{Re } X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi ft dt \quad \text{— 说明实部为偶函数}$$

$$\text{Im } X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi ft dt \quad \text{— 说明虚部为奇函数}$$

奇偶虚实性结论:

- 若 $x(t)$ 为实函数, $X(f)$ 为具有实部与虚部的复函数。

$$\text{Re } X(f) = \text{Re } X(-f)$$

$$\text{Im } X(f) = -\text{Im } X(-f)$$

- 若 $x(t)$ 为实偶函数 $\Rightarrow X(f)$ 为实偶函数

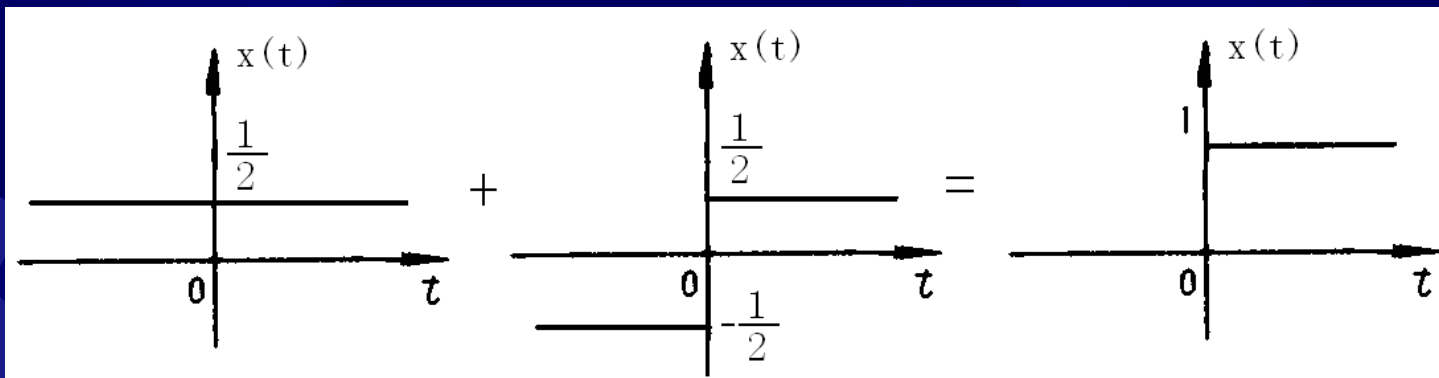
$$X(f) = \text{Re } X(f) = X(-f)$$

- 若 $x(t)$ 为实奇函数 $\Rightarrow X(f)$ 为虚奇函数

$$X(f) = -j \text{Im } X(f) = -X(-f)$$

- 若 $x(t)$ 为虚函数, 则上述结论的虚部位置也相互交换。

2. 线性叠加性



若 $x_1(t) \rightarrow X_1(f)$

$x_2(t) \rightarrow X_2(f)$

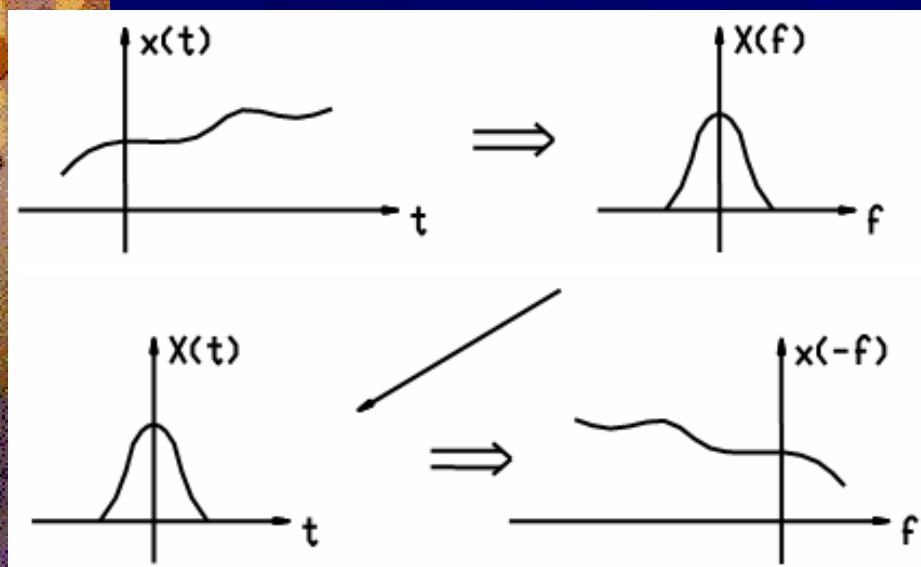
则 $ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$

结论:

- 1 合成信号的频谱是各个分量频谱之和;
- 2 信号增强 k 倍, 则频谱也增加 k 倍。

3. 对称性 (见 P.26 例 1-5)

若 $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ 则 $X(t) \Leftrightarrow x(-f)$



(P.26)

如果 $x(t)$ 是偶函数，那么 $x(-f)$ 就与它本身完全一样。

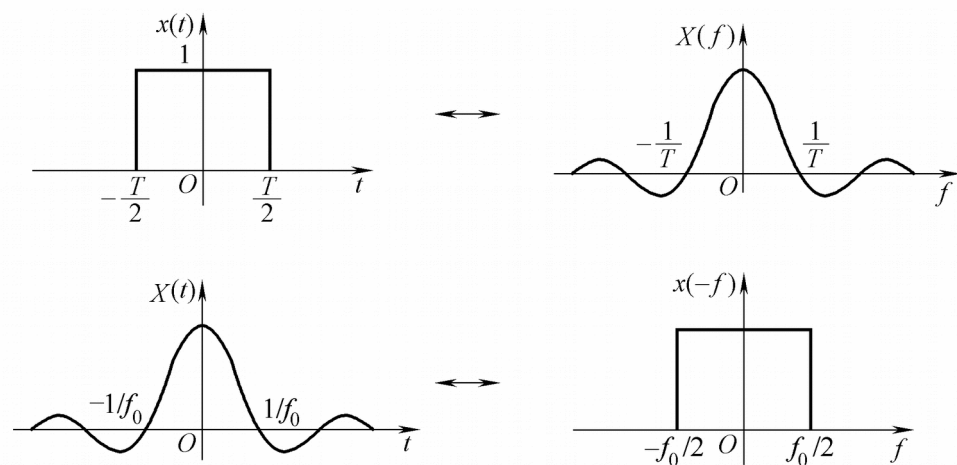


图 1-20 傅立叶变换对称性运用的例子

4. 时间尺度改变特性（展缩特性）

若 $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ 则 $x(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right)$

时间尺度改变特性表明，信号的持续时间和信号占有的频带宽度成反比。

- 若 $k > 1$ ，则时间尺度压缩：频带加宽，幅值压低；
- 若 $k < 1$ ，则时间尺度扩展：频带变窄，幅值增高。

(P.27)

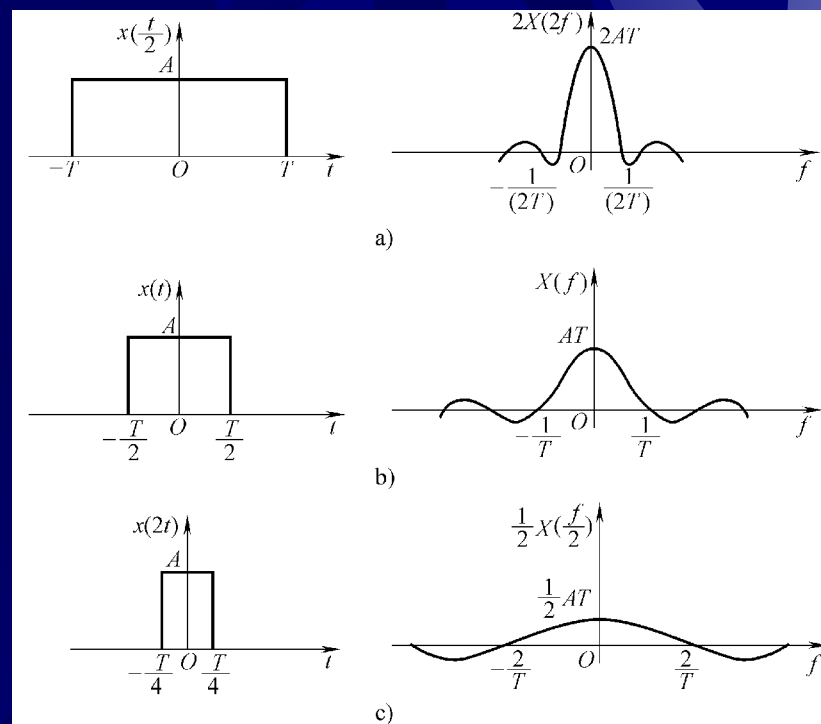


图1-21 时间尺度改变特性举例

a) $k=0.5$ b) $k=1$ c) $k=2$

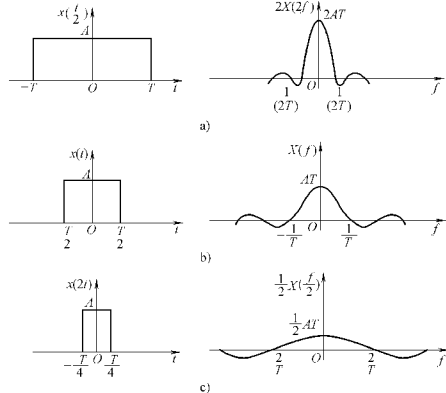


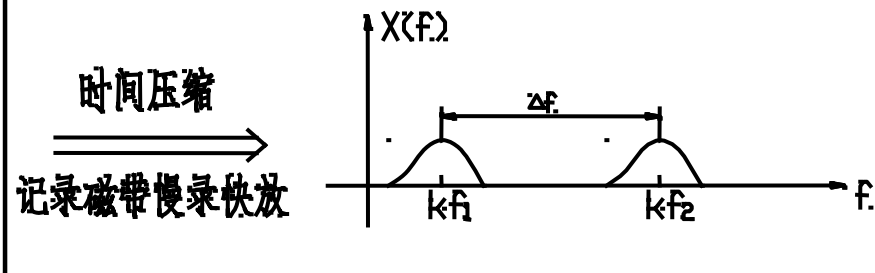
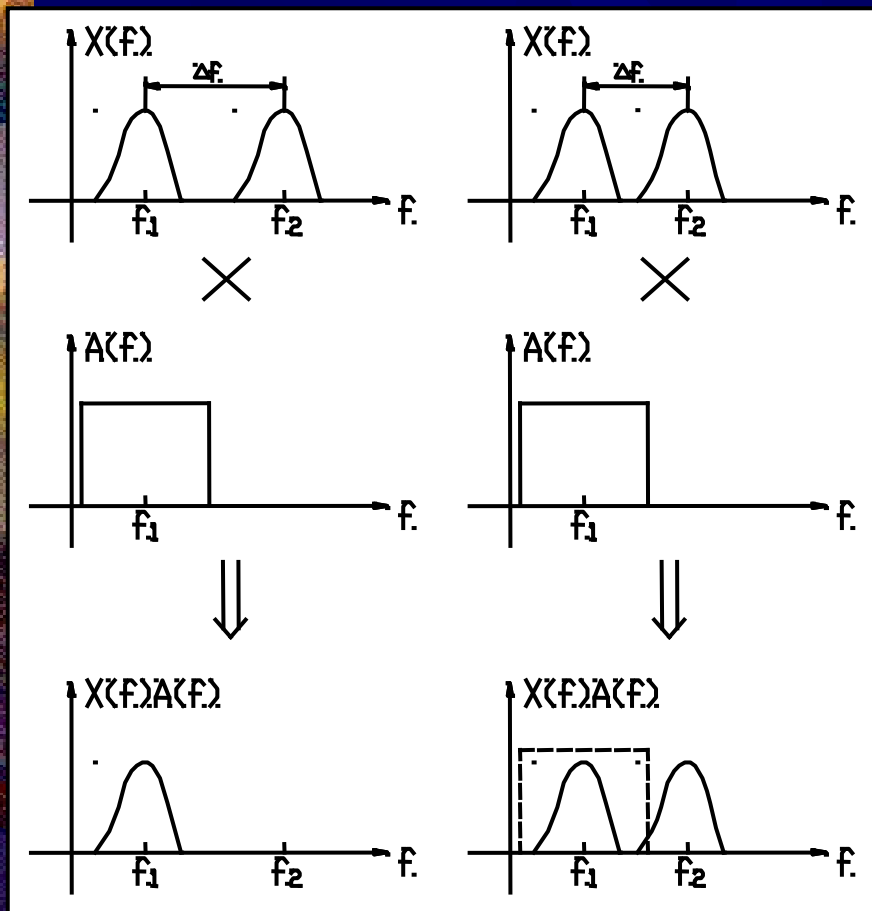
图1-21 时间尺度改变特性举例

a) $k=0.5$ b) $k=1$ c) $k=2$

例 1-6 利用傅立叶变换时间尺度改变特性，解释磁带记录仪信号记录和播放时速度不一致导致的处理效率与带宽问题。

- 图 1-21b 表示的是磁带记录仪按正常速度记录和播放时的信号时域和频域。
- 当记录仪快放时，意味着时间尺度压缩，处理信号效率提高，但同时信号的频带会加宽（图 1-21c 所示）。倘若信号的频宽超过了信号后置处理设备（如滤波器）的通频宽度，那么就会导致信号失真。
- 当记录仪慢放时，时间尺度展宽，信号的处理效率降低，但信号频带变窄，从而使得对信号的后置处理设备通频带宽的要求可以降低（图 1-21a 所示）。

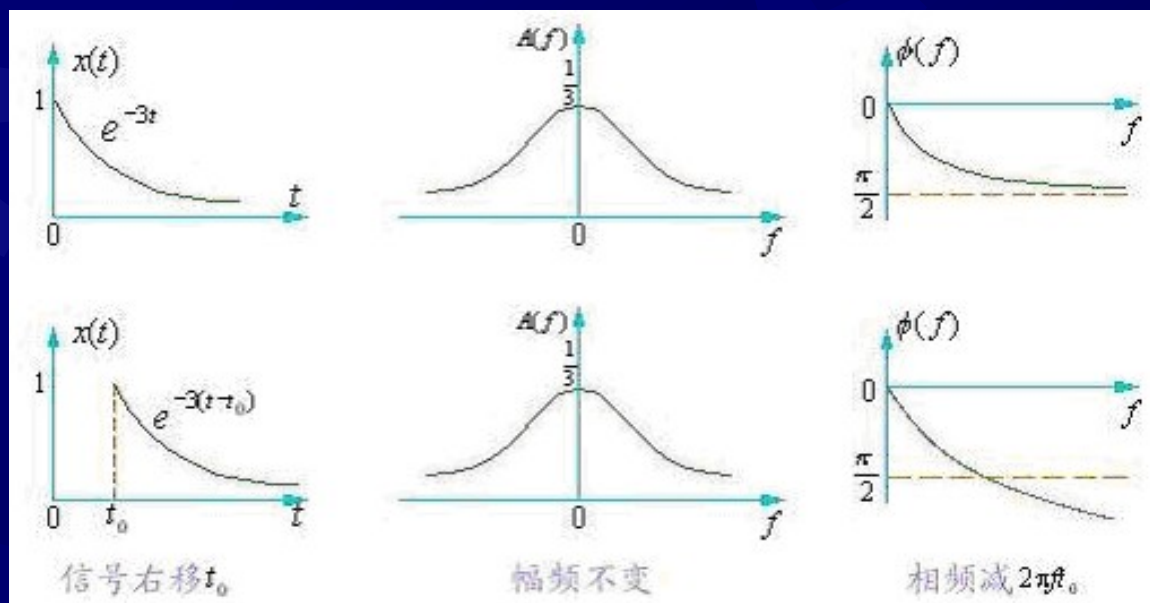
应用举例



5. 时移和频移特性

1) 时移特性

若 $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ 则 $x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$



经过时移后，幅值频谱是不变的，只改变相位频谱，且相角改变是与频率成正比的。

例 1-8 求图 1-22 所示的矩形脉冲的
频谱，已知它的宽度为 T ，幅值为 A 。

(P.28)

(P.27)

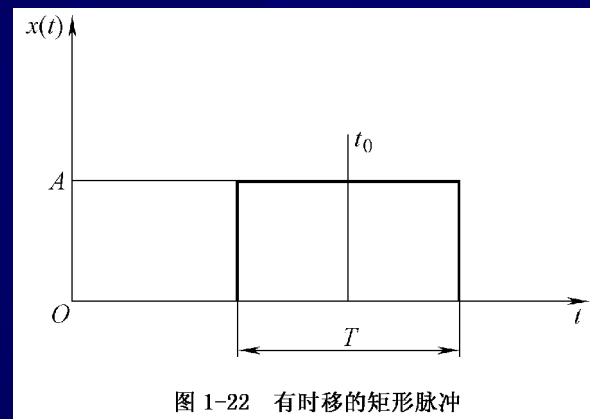


图 1-22 有时移的矩形脉冲

$$X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$|X(f)| = AT |\operatorname{sinc}(fT)|$$

$$\varphi(f) = \begin{cases} -2\pi f t_0 & \operatorname{sinc}(ft) \geq 0 \\ -2\pi f t_0 \pm \pi & \operatorname{sinc}(ft) < 0 \end{cases}$$

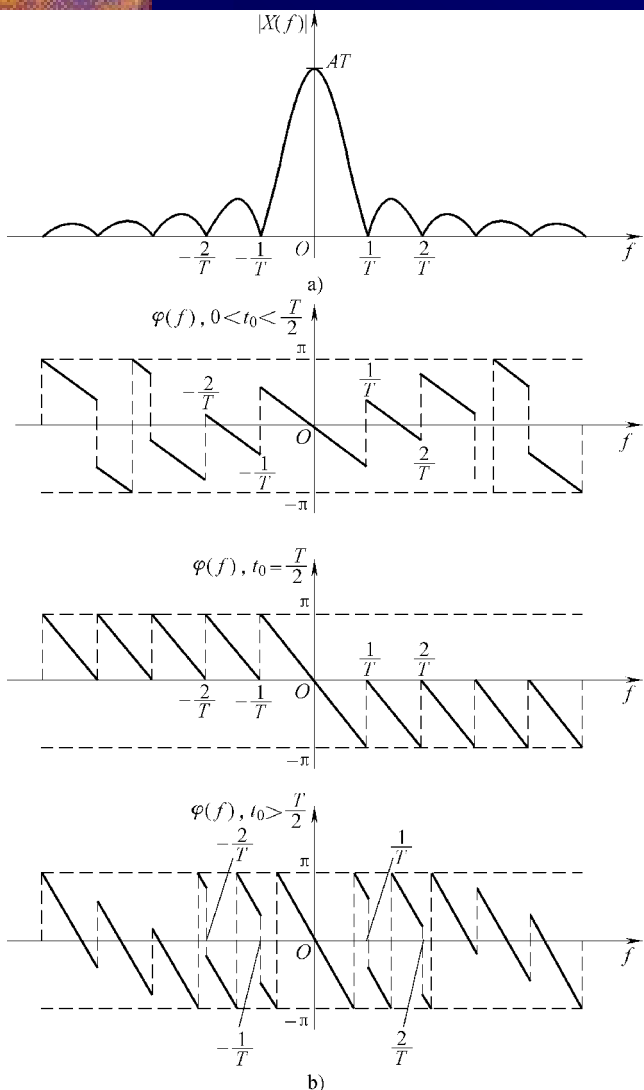


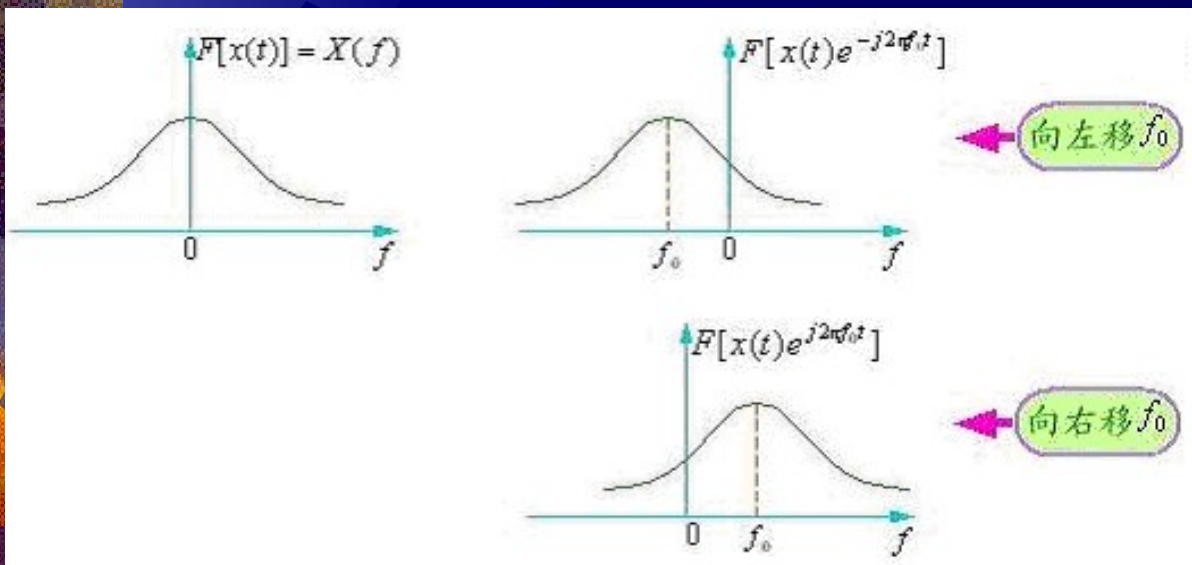
图 1-23 有时间位移的矩形脉冲的幅频谱和相频谱

a) 幅频谱 b) 相频谱

2) 频移特性

若 $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ 则 $x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f \mp f_0)$

$e^{j2\pi f_0 t}$ 代表以 $2\pi f_0 t$ 旋转的单位矢量，
 $x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}$ 等于将每个旋转矢量的旋转速度都改变了，其改变量就是 f_0 ，那么其信号的频谱就等于将原来的频谱在频率轴上平移 f_0 。

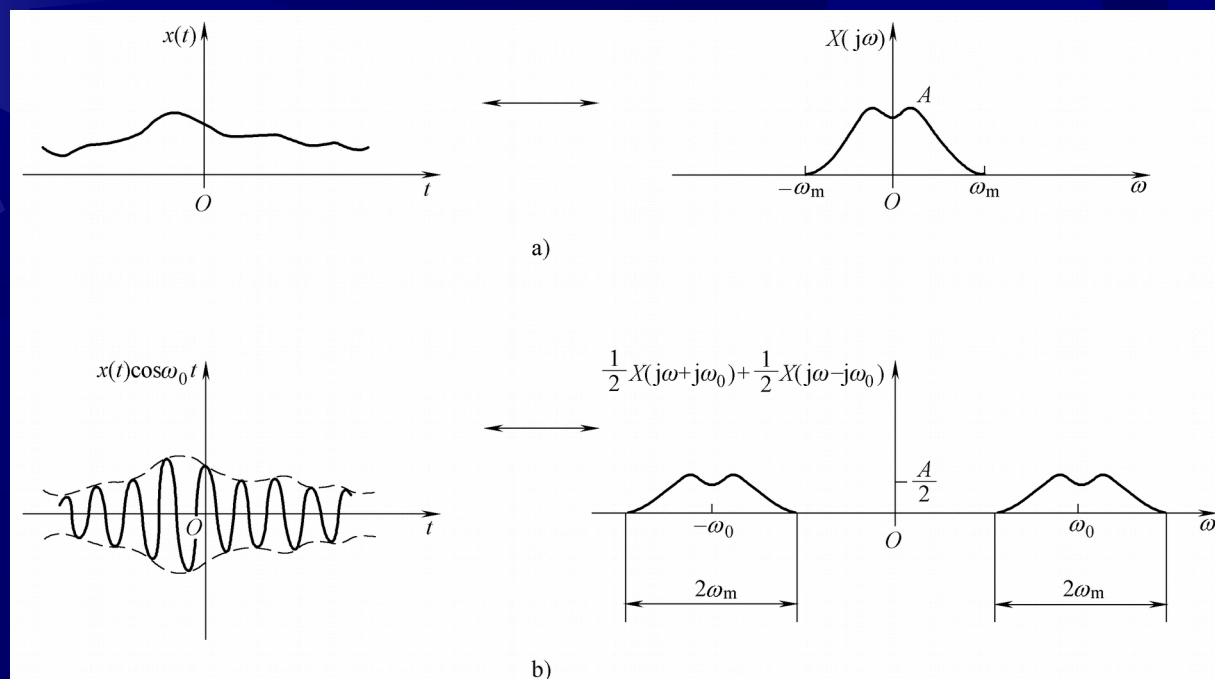


信号与复指数相乘会导致信号频率平移，同时引起信号波形的巨大变化，这个相乘的过程叫调制。

例 1-9 设 $x(t)$ 是调制信号， $\cos\omega_0 t$ 为载波信号，求两者的乘积，即调制后的信号的频谱。

$$F[x(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}\{F[x(t)e^{j\omega_0 t}] + F[x(t)e^{-j\omega_0 t}]\}$$

$$= \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$



(P.29)

图1-24 $x(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱

a) 时域相乘 b) 频域平移

6. 卷积特性

$$x_1(t) \star x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

若 $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(f)$ $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(f)$

则 $x_1(t) \star x_2(t) \Leftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$

时域卷积特性

$x_1(t) \cdot x_2(t) \Leftrightarrow X_1(f) \star X_2(f)$

频域卷积特性

7. 微分和积分特性

若 $x(t) \Leftrightarrow X(f)$

则微分特性：
$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

$$(-j2\pi f)^n x(t) \Leftrightarrow \frac{d^n X(f)}{df^n}$$

积分特性：
$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

1.5.4 典型功率信号的频谱

(P.27~32)

1 单位脉冲 δ 函数的性质和频谱

δ 函数——单位脉冲函数，它是为了分析方便采用的人为分析工具。

δ 函数的定义（图 1-6）

(P.10)

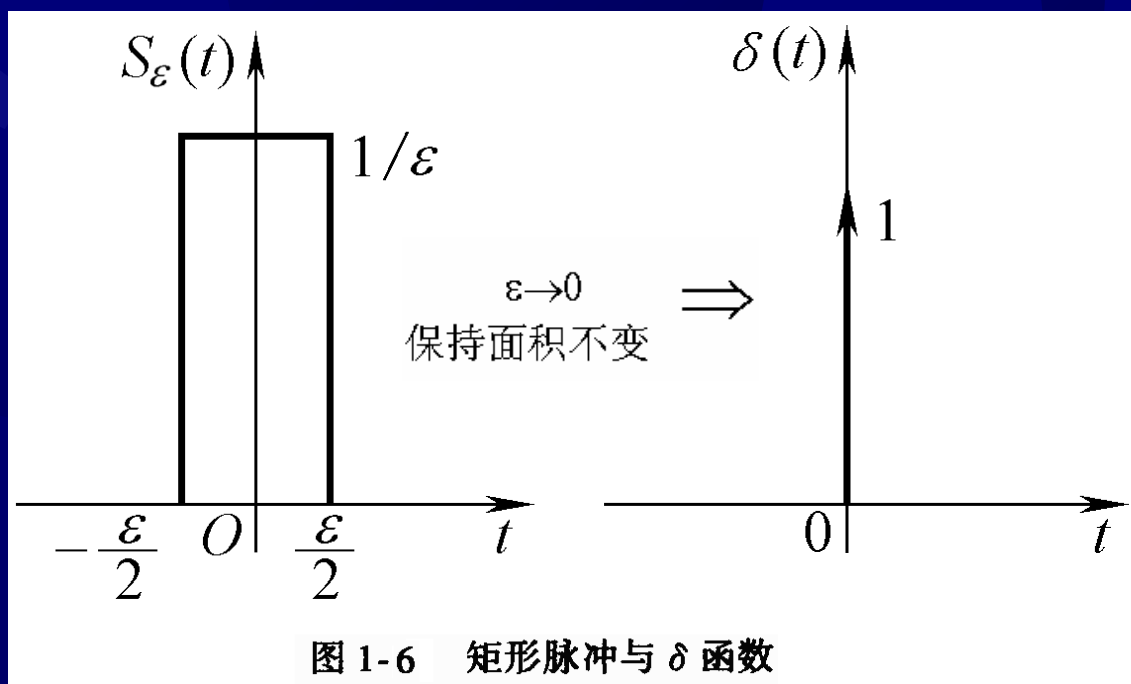


图 1-6 矩形脉冲与 δ 函数

$\delta(t)$ 函数的特点:

➤ 从函数极限角度看

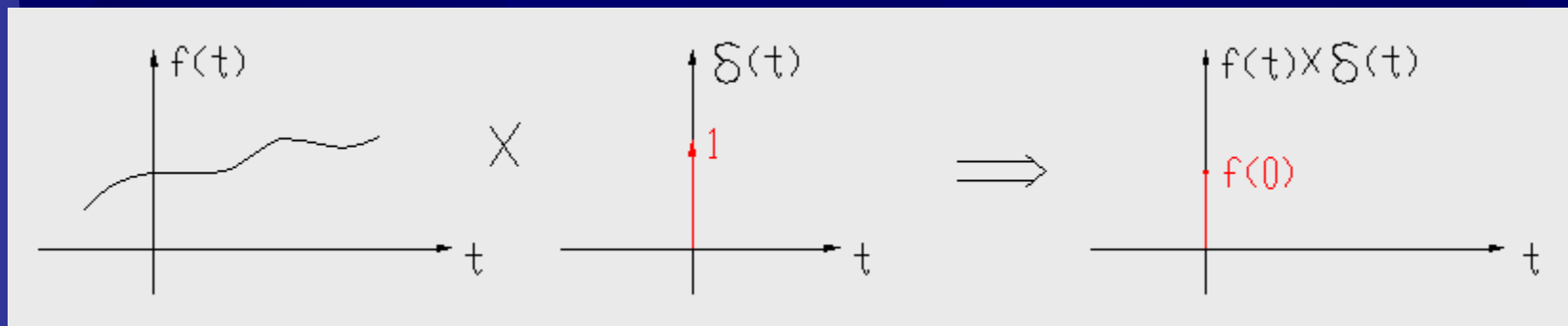
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

➤ 从面积（强度）角度看

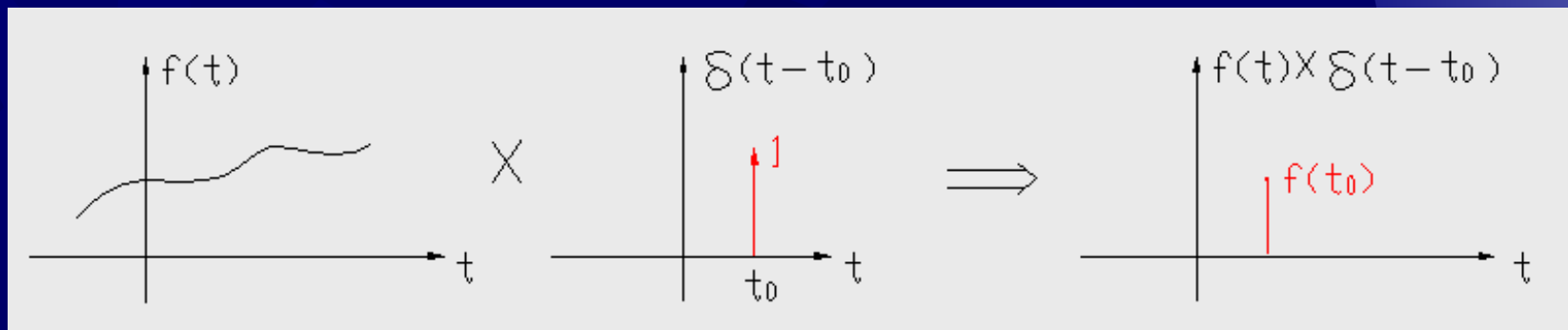
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\varepsilon}(t) dt = 1$$

1) δ 函数的筛选特性

如果 $\delta(t) \times f(t)$, 则在 $t=0$ 时得到 $f(0) \times \delta(t)$, 其余 $t \neq 0$ 时均为零。



如果 $\delta(t) \rightarrow \delta(t - t_0)$, 则 $\begin{cases} t = t_0 \text{ 时} & f(t_0) \delta(t - t_0) \\ t \neq t_0 \text{ 时} & 0 \end{cases}$



2) δ 函数的取样特性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(0) dt$$

$$= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t_0) dt$$

$$= f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

3) 卷积特性

两个函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 卷积定义为

$$x_1(t) \star x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

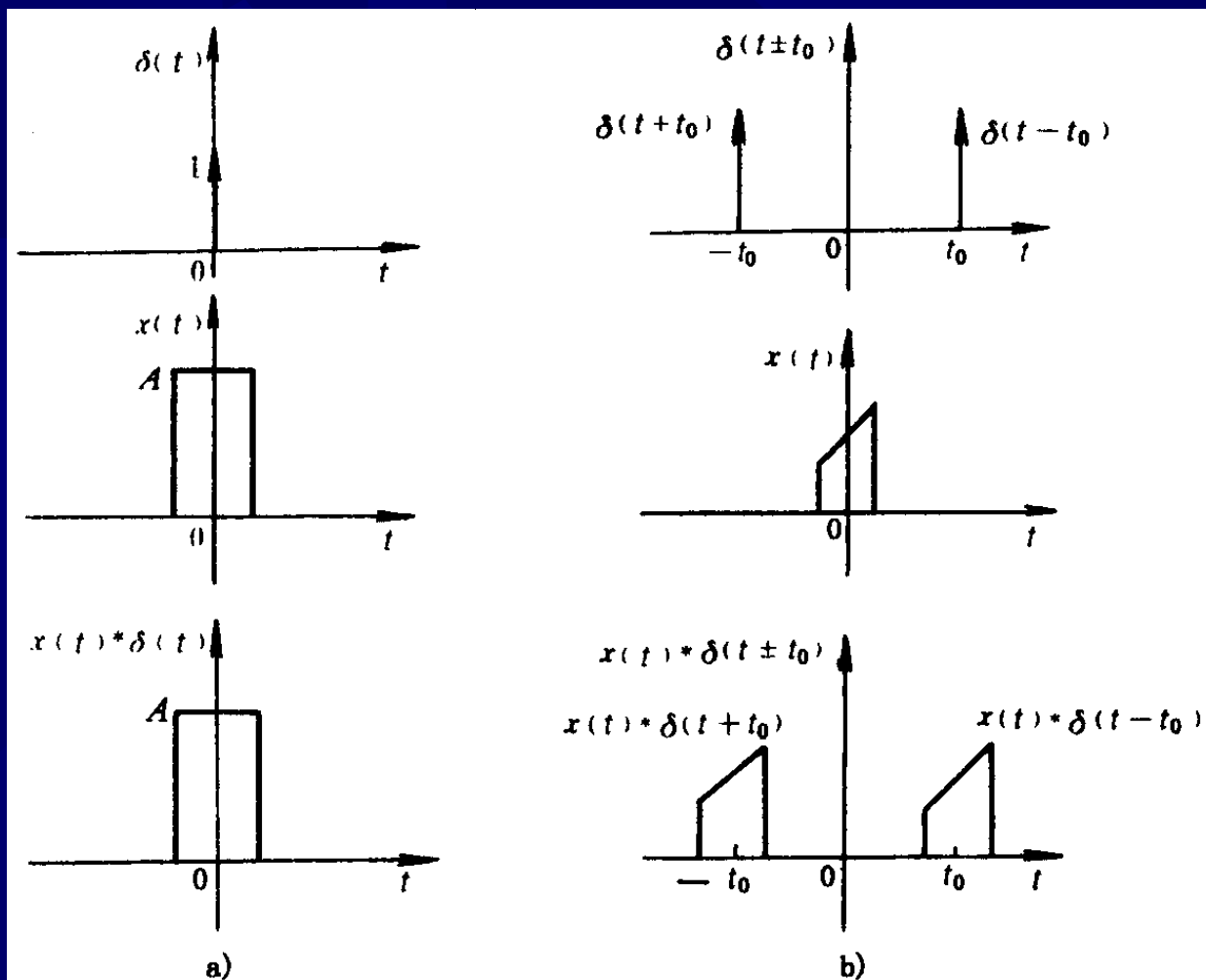
$$x(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = x(t)$$

$$x(t) \star \delta(t \pm t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t \pm t_0 - \tau) d\tau$$

$$= x(t \pm t_0)$$

δ 函数与其它函数的卷积



δ 函数与其它函数的卷积示例

$x(t-t_1)$ 和 $\delta(t-t_0)$ 的卷积

$$\begin{aligned}x(t-t_1) * \delta(t-t_0) &= x(t-t_0) * \delta(t-t_1) \\ &= x(t-t_1-t_0)\end{aligned}$$

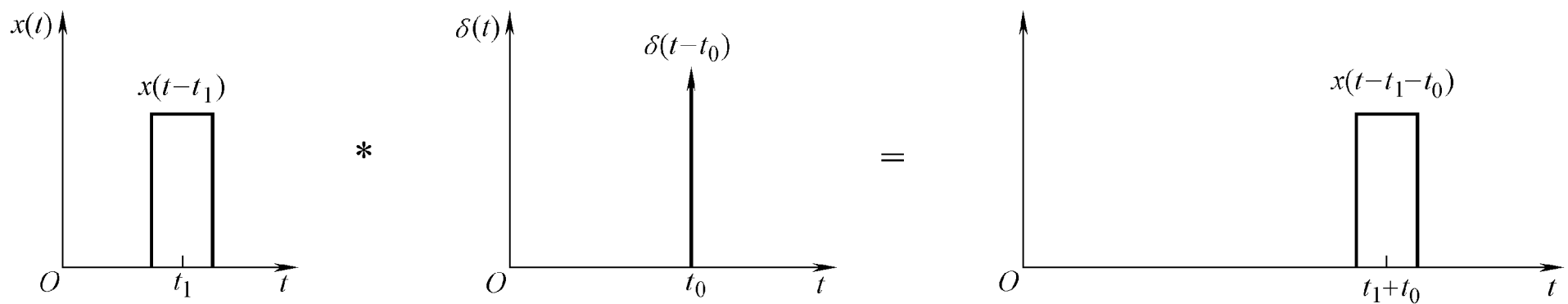
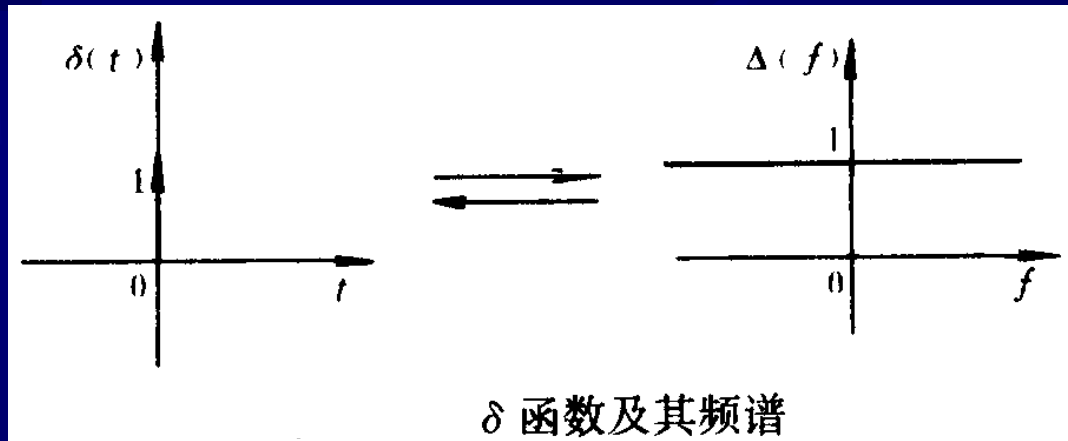


图 1-25 $x(t-t_1)$ 和 $\delta(t-t_0)$ 的卷积

4) $\delta(t)$ 的频谱

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^0 = 1$$



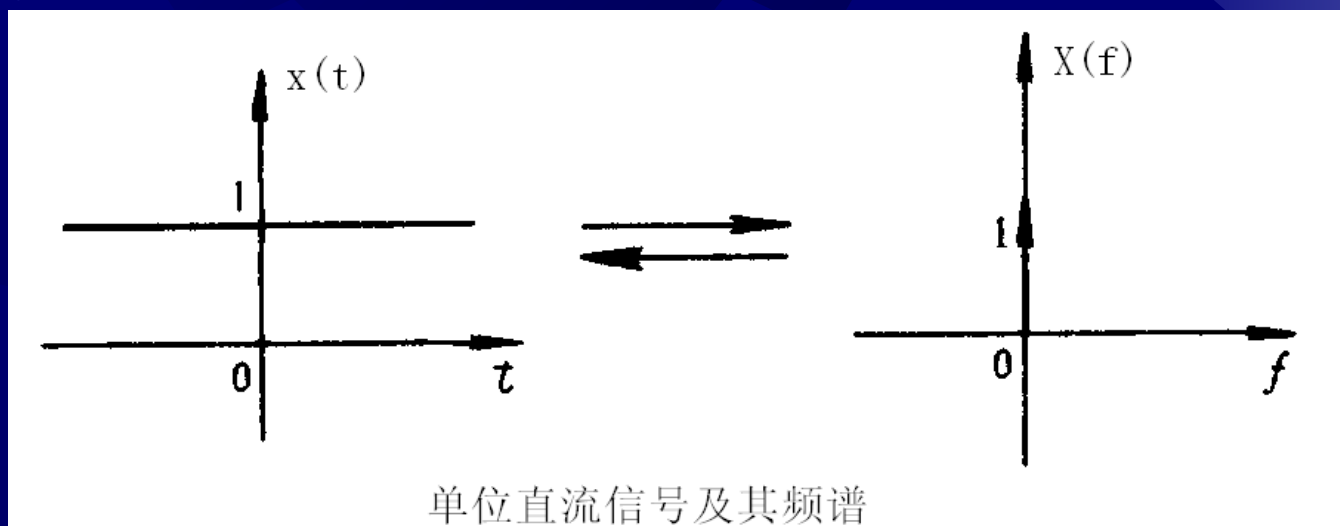
δ 函数及其频谱

δ 函数具有无限宽广的频谱，而且在所有的频段上都是等强度的，这种频谱称为“均匀谱”。

2. 单位直流信号及其频谱

$$x(t) = 1$$

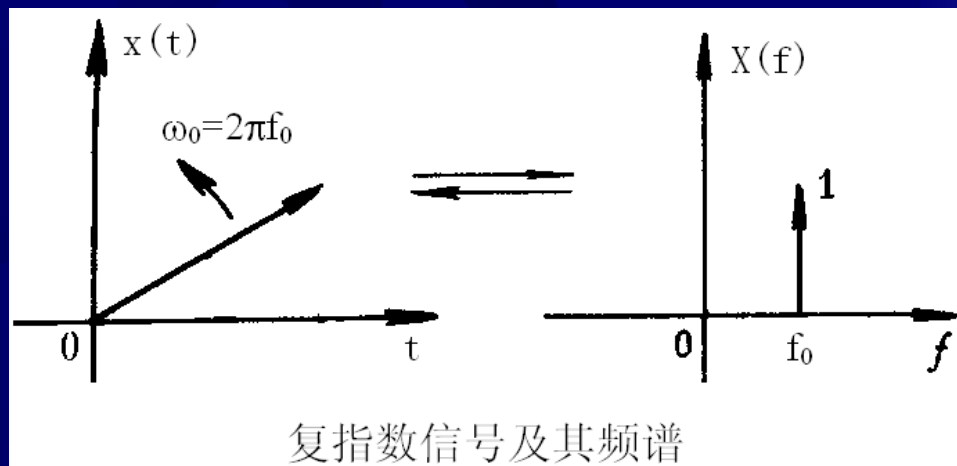
$$F[1] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} F[1 \cdot e^{-\sigma|t|}] = \begin{cases} \infty & \text{当 } f = 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } f \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$$



3. 复指数信号及其频谱

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

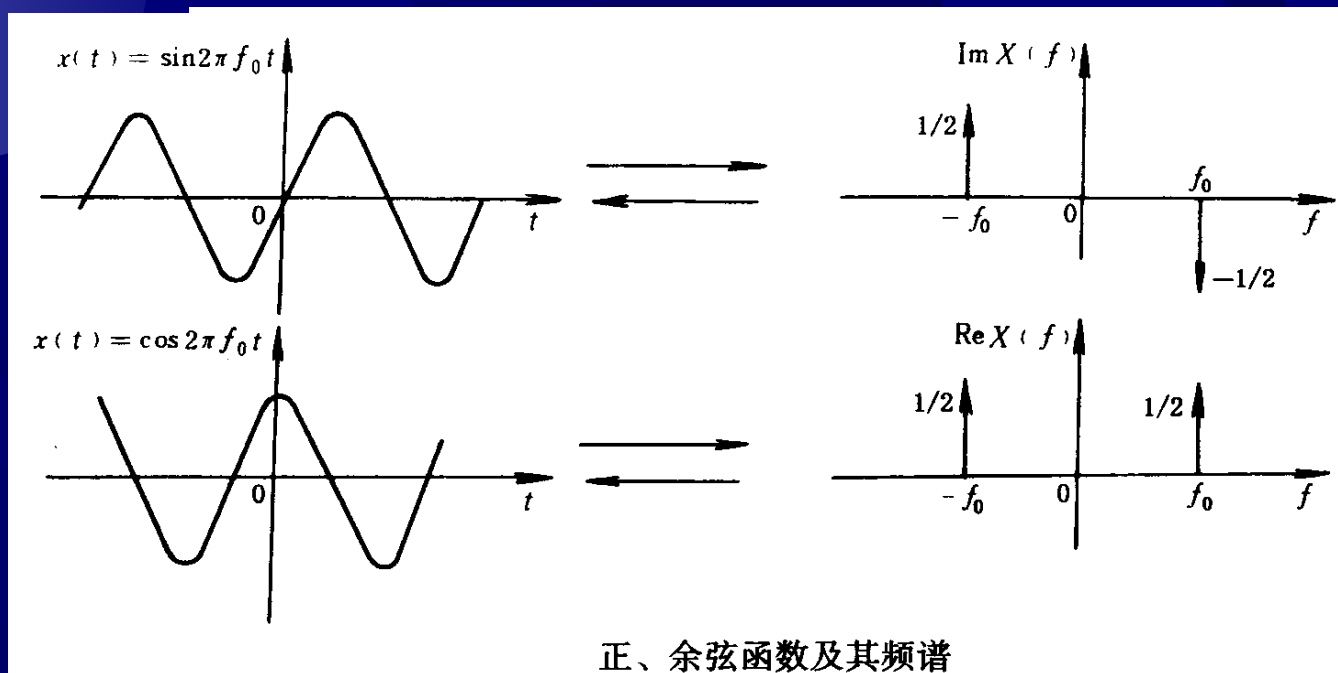
$$\begin{aligned} F[e^{j2\pi f_0 t}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f - f_0) t} dt \\ &= \delta(f - f_0) \end{aligned}$$



4. 单位正（余）弦信号的频谱

$$\sin 2\pi f_0 t = j \frac{1}{2} (e^{-j2\pi f_0 t} - e^{j2\pi f_0 t}) \Leftrightarrow j \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2} (e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$



(P.30)

5. 符号函数及其频谱 (P.31)

➤ 利用傅立叶变换的微分性质求 $\text{sgn}(t)$ 的频谱

$$x(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad F[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$$

(P.32)

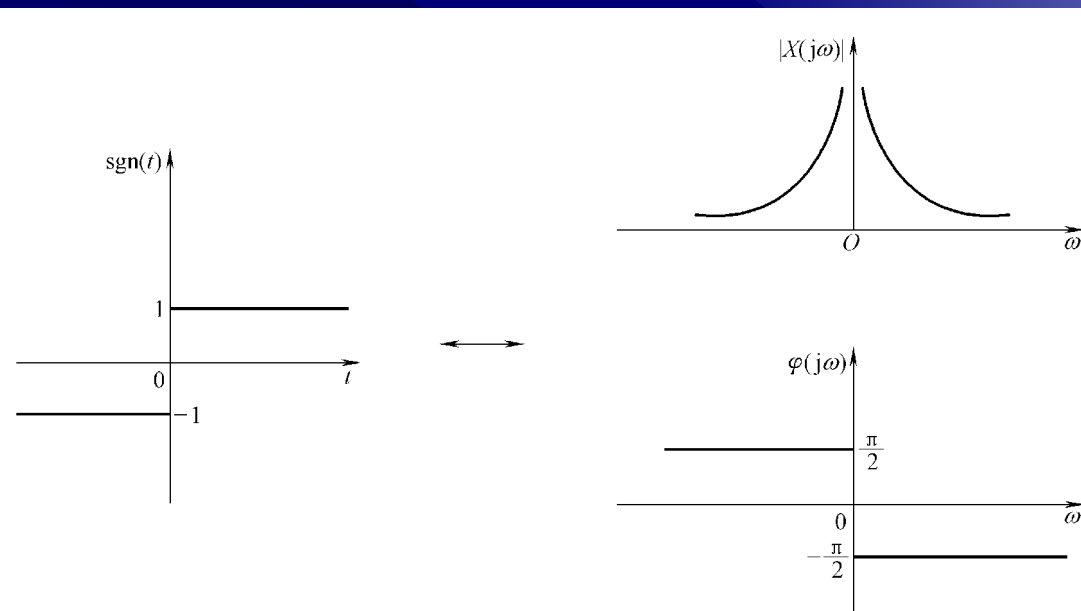
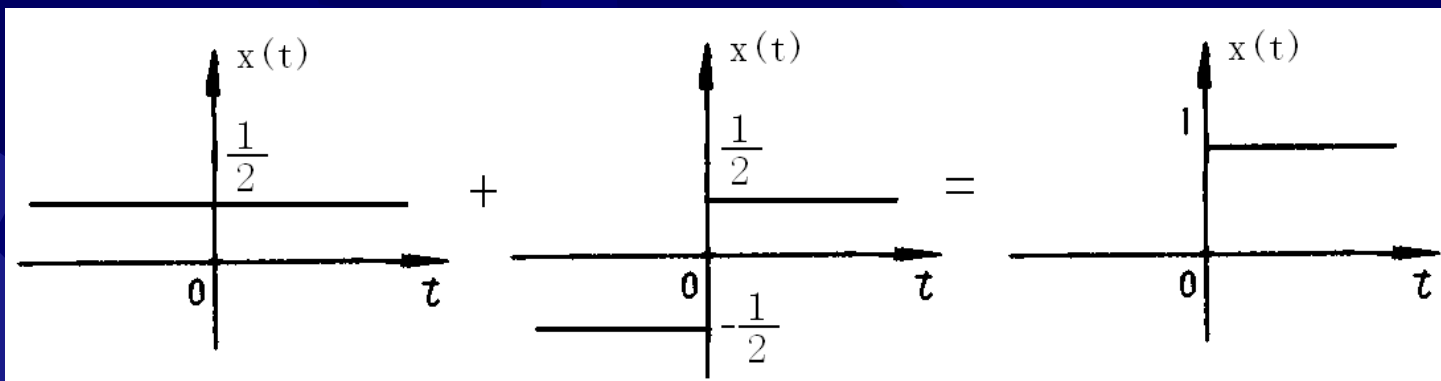
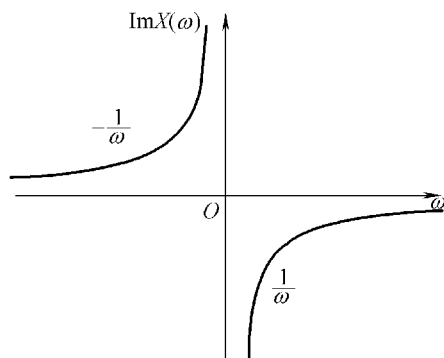
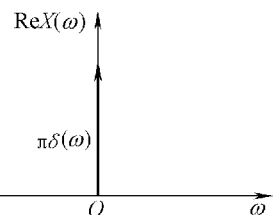
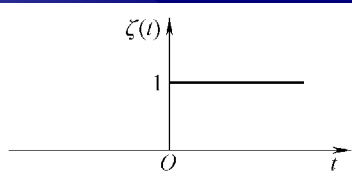


图 1-27 符号函数及其频谱

6. 单位阶跃信号及其频谱



(P.32)



$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

$$F[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

图 1-28 单位阶跃函数及其频谱

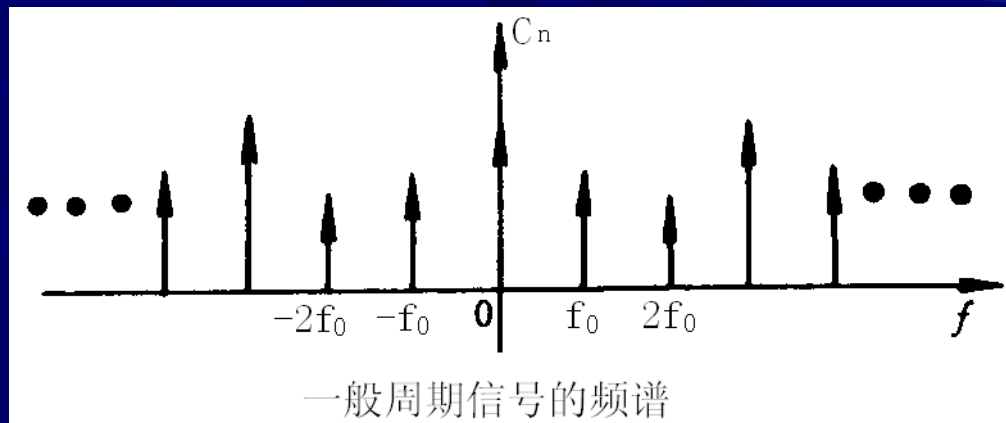
7. 一般周期信号的频谱 $x_T(t)$

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2n\pi f_0 t}$$

$$F[x_T(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2n\pi f_0 t} \right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2n\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_0)$$



例 1-10 求图 1-29 所示的周期性开关脉冲序列的傅立叶变换 (P.33)

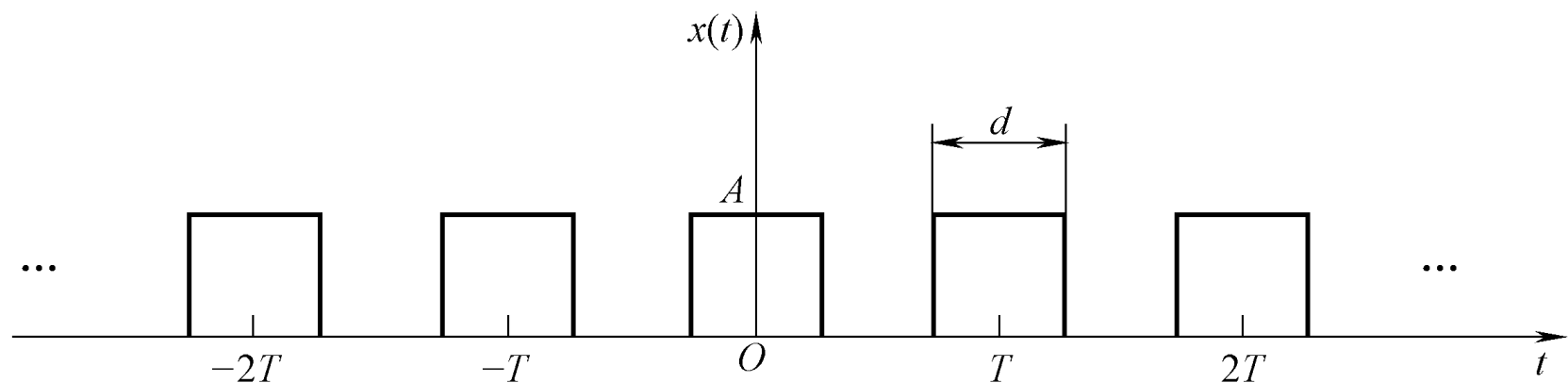


图 1-29 周期性开关脉冲列

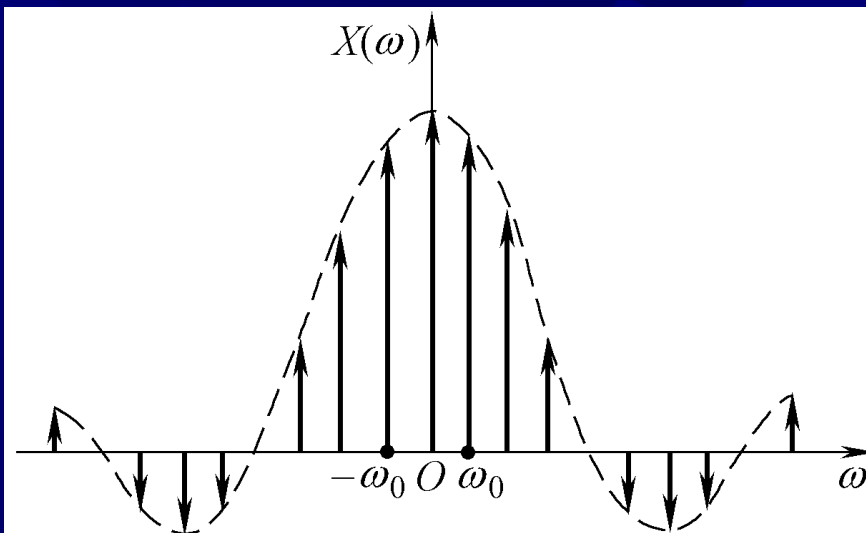


图 1-30 周期性开关脉冲序列的频谱

8. 梳状函数的频谱

等间隔的周期单位脉冲序列——梳状函数，用 $\text{comb}(t, T_s)$ 表示

$$\text{comb}(t, T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad \text{式中 } T_s \text{——周期} \quad f_s = 1/T_s$$
$$n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\text{comb}(f, f_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

(P.34)

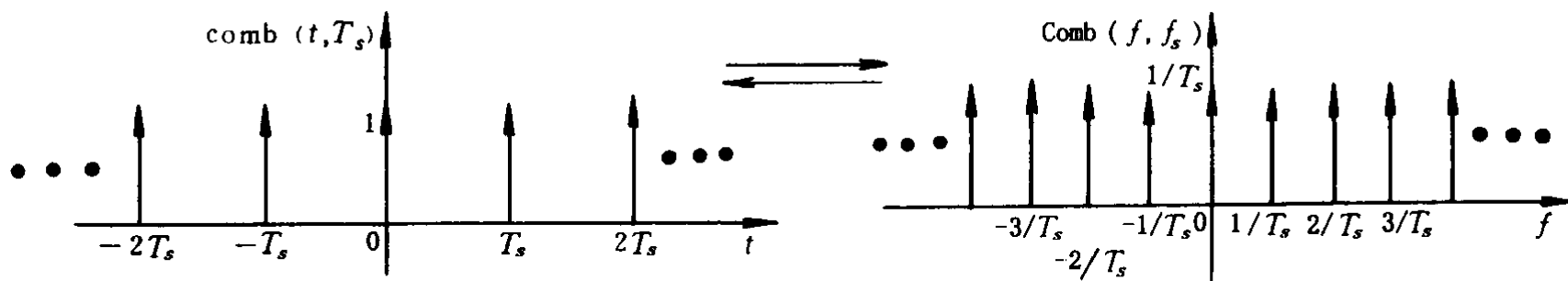


图1-31 周期单位脉冲序列及其频谱



1.6 随机信号及其分析

(P.34)

1.6.1 概述

- 样本函数——对随机信号按时间历程所作的各次长时间观测记录，记作 $x_i(t)$
- 样本记录——在有限区间上对随机信号所作的观测记录
- 随机过程——在同一试验条件下，全部样本函数的集合（总体），记作 $\{x(t)\}$

$$\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots\}$$

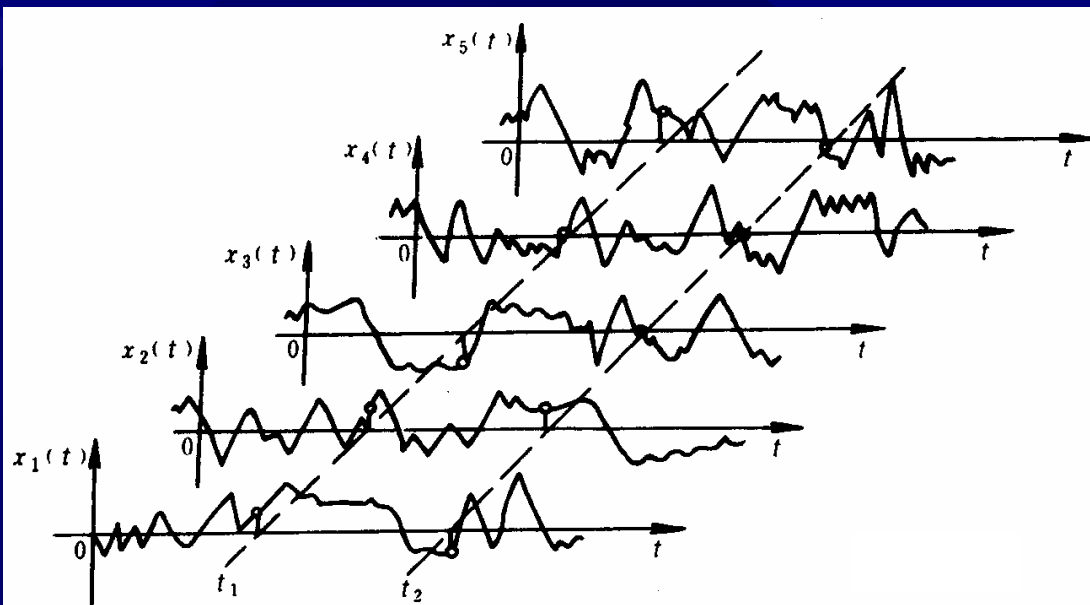


图1-32 随机过程与样本函数

(P.35)

一般随机过程的信号描述

➤ 对于一个一般的随机过程，其信号描述必须用它的总体参数来表示。

(P.35)

例：平均值

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t_1) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \sum_{i=1}^i (x_i(t_1)) \\ u(t_2) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \sum_{i=1}^i (x_i(t_2)) \\ \vdots \end{array} \right.$$

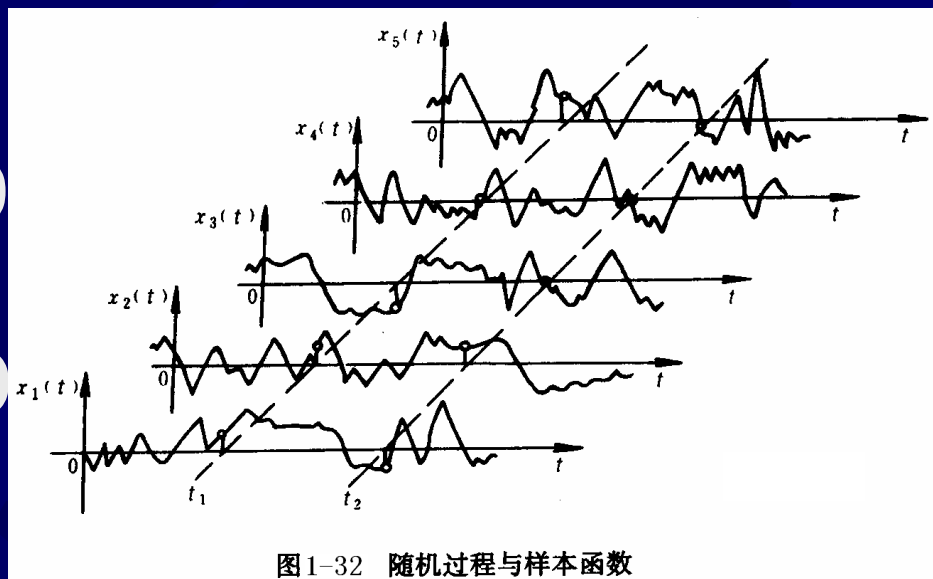


图1-32 随机过程与样本函数

因此，需做无限次实验，且每次测量时间无限长，显然，这是不可能的。

非平稳与平稳随机过程

非平稳随机过程 —— 特征参数随时间而变化的
(信号) 随机过程。

例：平均值 $u(t_1) \neq u(t_2) \neq \dots$

平稳随机过程 —— 特征参数不随统计时间的变化
(信号) 而变化。

例：平均值 $u(t_1) = u(t_2) = \dots$

因此，对平稳随机过程只要对集合中某一时刻的特征参数作统计分析就能反映总体的特征。但是仍需记录无限次。

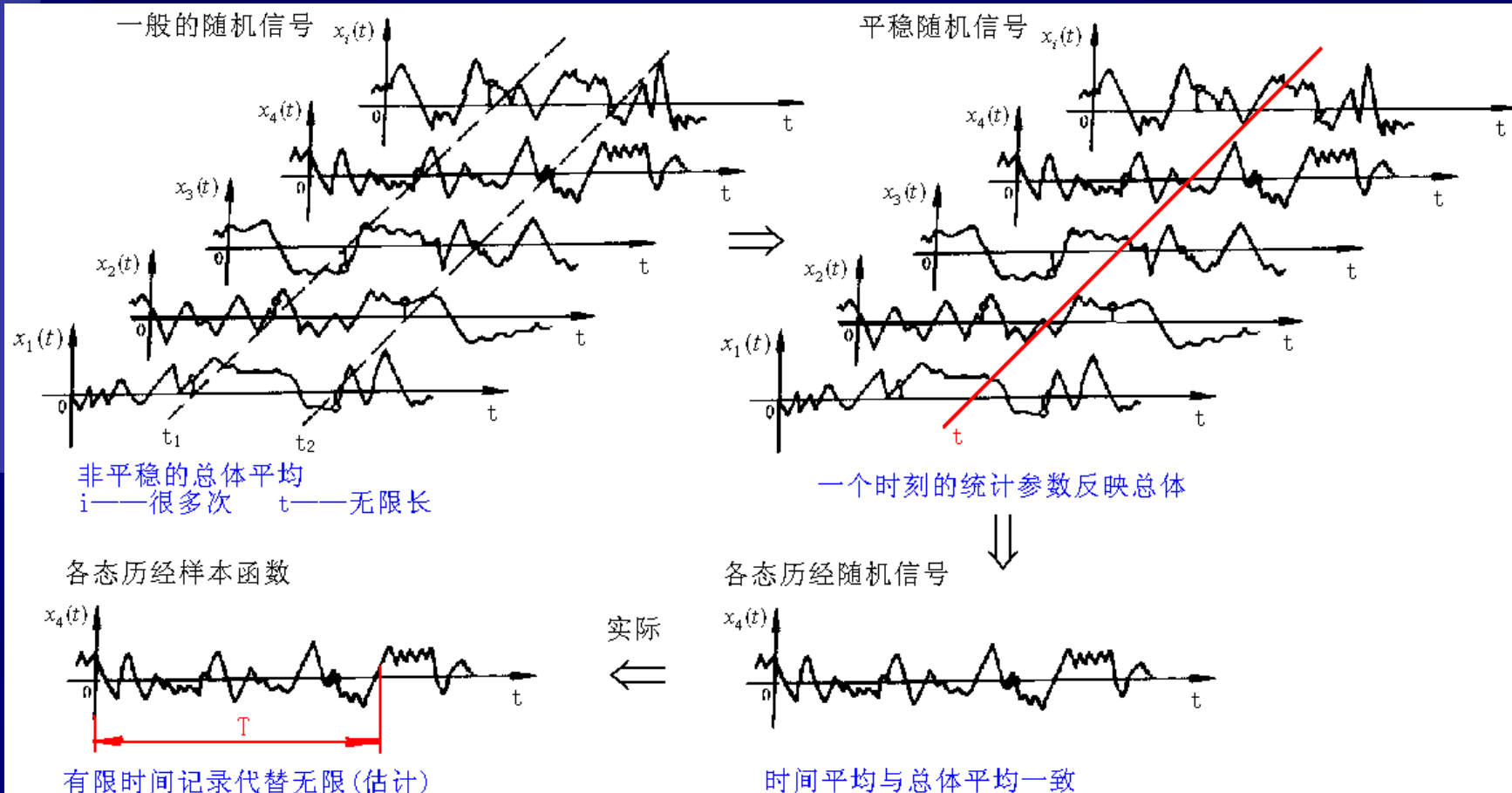
各态历经随机过程（信号）：

在平稳随机过程中，若任一单个样本函数的时间平均统计特性等于该过程的集合平均统计特性，这种随机过程就是各态历经随机过程。

$$u_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = u(t_1)$$

在工程上，很多随机信号都具有各态历经的特性或近似把它看作各态历经的信号。

一般随机过程与各态历经随机过程的关系



1.6.2 各态历经随机信号的主要特征参数

随机信号常采用下列三种方法来加以描述:

- 随机信号的幅值描述: 均值、方差、均方值、概率密度函数
- 随机信号的时域描述: 自相关函数和互相关函数
- 随机信号的频域描述: 功率谱密度函数

随机信号的幅值描述

1 均值 μ_x ——表示信号的常值分量

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

2 方差 σ_x^2 ——描述随机信号的波动分量，是 $x(t)$ 偏离均值 μ_x 的平方的均值

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad \sigma_x - \text{标准差}$$

3 均方值 ψ_x^2 ——描述随机信号的强度，是 $x(t)$ 平方的均值

$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

$$\sigma_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2$$

随机信号特征参数的估计值

用时间平均计算随机信号的特征参数，需要进行 $T \rightarrow \infty$ 的极限运算，这意味着要使样本函数观测时间为无限长，这是不可能的。实际上只能截取有限时间的样本记录来计算出特征参数，即样本参数，并以它们作为随机信号特征参数的估计值。

$$\hat{\mu}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \hat{\mu}_x]^2 dt$$

$$\hat{\psi}_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

集合平均计算随机信号的特征参数

$$\mu_{x,t_1} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i(t_1)$$

记录样本的总数

$$\psi^2_{x,t_1} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^2(t_1)$$

样本记录序号

$$\hat{\mu}_{x,t_1} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i(t_1)$$

观察时间

$$\hat{\psi}^2_{x,t_1} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^2(t_1)$$

随机信号的幅值描述

4. 概率密度函数——表示信号幅值落在指定区间内的概率。(P.37)

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x}$$

$$P[x < x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T}$$

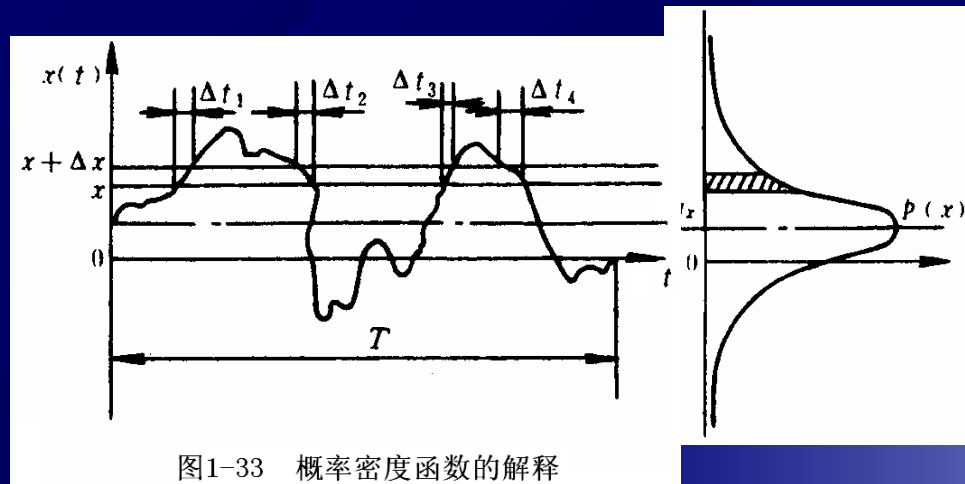


图1-33 概率密度函数的解释

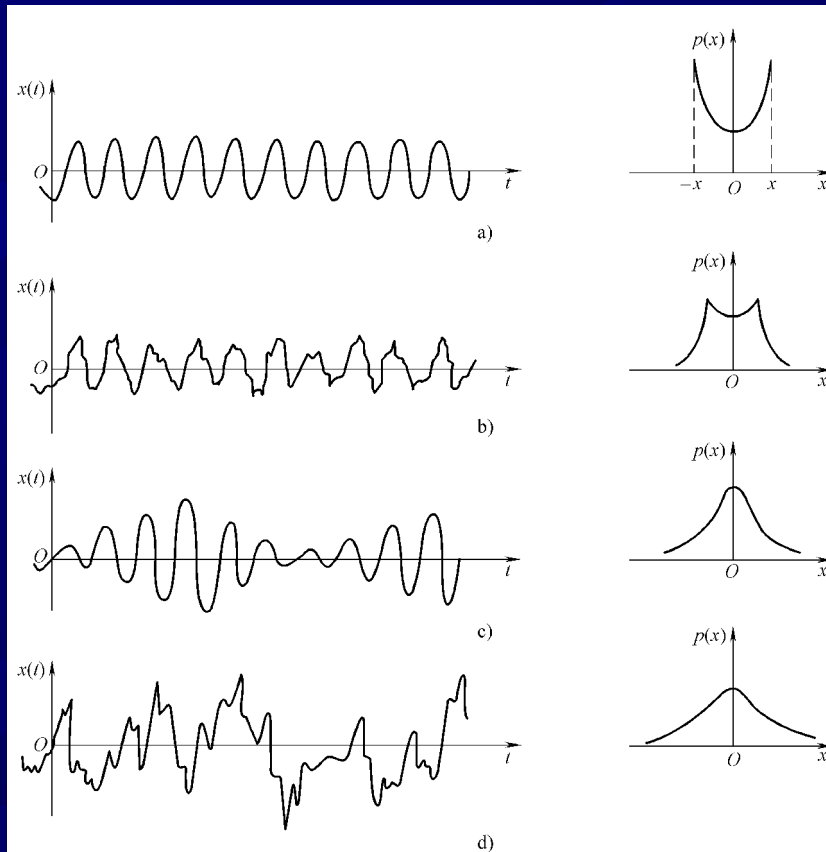
$P[x < x(t) \leq x + \Delta x]$ ——当样本函数的记录时间 T 趋于无穷大时， T_x/T 的比值就是幅值落在区间内的概率

T_x —— $x(t)$ 落在 $(x, x + \Delta x)$ 区间内的时间

$$T_x = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$$

常见随机信号的概率密度函数图形

概率密度函数提供了随机信号幅值分布的信息，是随机信号的主要特征参数之一。不同的随机信号有不同的概率密度函数图形，可以借此来识别信号的性质。



(P.38)

图1-34 四种随机信号的概率密度函数
a) 正弦信号 (初相角为随机量) b) 正弦信号加随机噪声
c) 窄带随机信号 d) 宽带随机信号

概率分布函数

- 概率分布函数 $P(x)$ ——表示随机信号的瞬时值低于某一个给定值 x 的概率

$$P[x(t) \leq x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T'}{T}$$

其中 T' —— $x(t)$ 小于或等于 x 值的总时间。

正态分布随机过程的概率密度函数和概率分布函数的图形

(P.39)

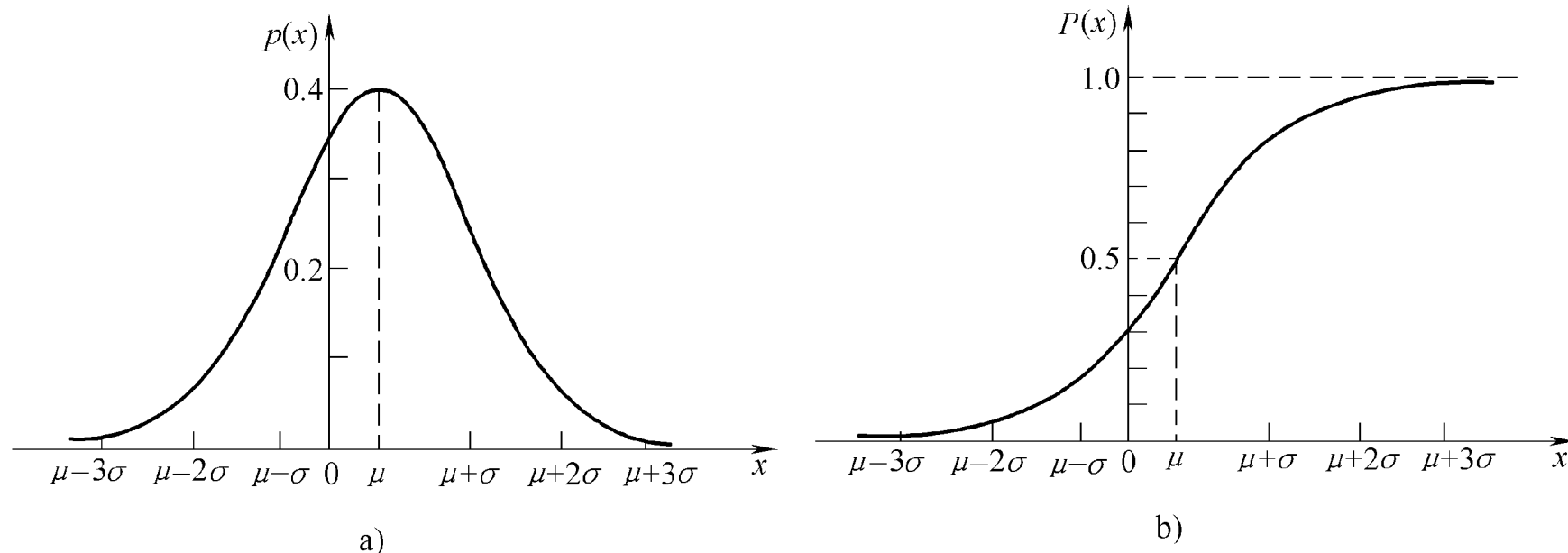


图1-35 正态过程的概率密度函数和概率分布函数

a) 概率密度函数 b) 概率分布函数

随机信号的其它描述

随机信号还有在时域和频域中描述的两个特征参数：相关函数和功率谱密度函数。

研究信号的构成和特征值——信号分析

把信号经过必要的变换以获得所需信息——信号处理

时域中的相关分析和频域中的功率谱分析就是有效的方法。而相关函数和功率谱密度函数就是从中得到的。



1.6.3 相关分析及其应用

(P.38)

随机信号的时域描述

描述两个时间函数之间相似程度或相互依赖关系的函数称为相关函数。

随机信号在时域内可以用自相关函数和互相关函数来描述。

- 单个信号的时域相关特性用自相关函数描述
- 两个信号之间的时域相关特性用互相关函数描述

一、两随机变量的相关关系

函数关系——两个变量之间存在着一一对应的确定关系。

相关关系——当两个随机变量之间具有某种关系时，随着某一个变量数值的确定，另一变量却可能取许多不同的值，但取值有一定的概率统计规律，这两个变量存在着相关关系。

(P.39)

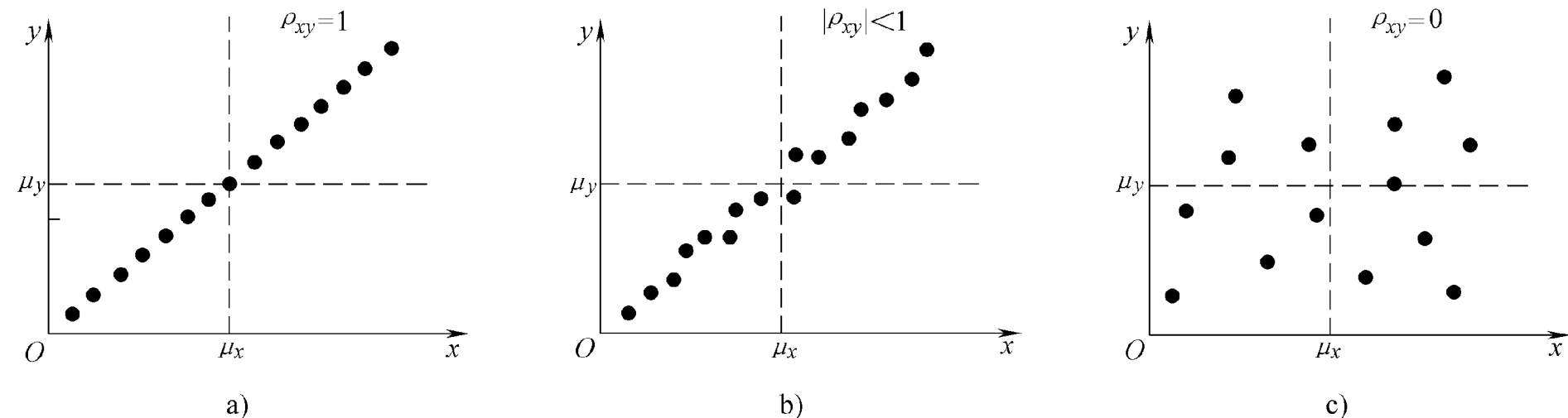


图1-36 两个随机变量的相关性

a)完全相关 b)部分相关 c)完全不相关

相关系数

相关系数 ρ_{xy} ——表示 x 和 y 两变量之间的相关程度。

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y}$$

$|\rho_{xy}| \leq 1$, $\rho_{xy} = \pm 1$ 线性相关

$\rho_{xy} = 0$ 完全无关

式中 E ——数学期望

μ_x ——随机变量 x 的均值, $\mu_x = E[x]$

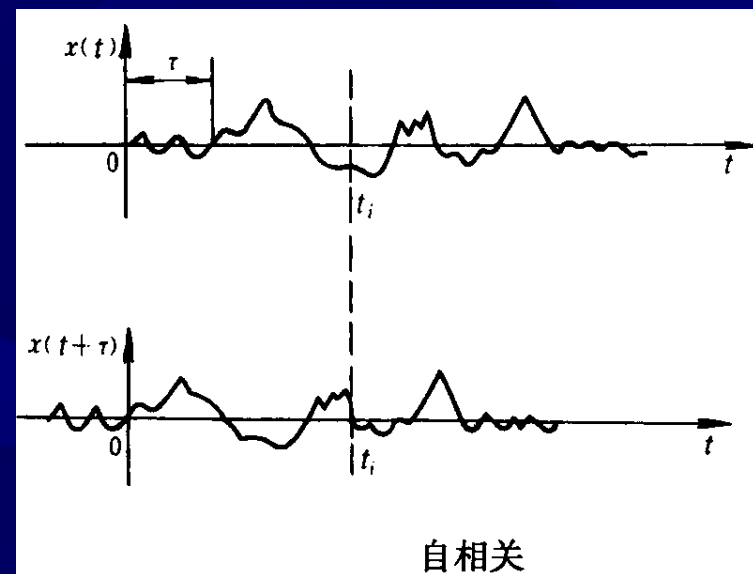
μ_y ——随机变量 y 的均值, $\mu_y = E[y]$

σ_x 、 σ_y ——随机变量 x 、 y 的标准差

二、信号的自相关函数

1 自相关函数 $R_x(\tau)$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$



$x(t)$ —— 某各态历经随机过程中的一个样本记录
 $x(t+\tau)$ —— $x(t)$ 时移 τ 后的样本

自相关系数

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau) - \mu_x^2}{\sigma_x^2} \quad (\text{P.4 } 0)$$

- $\rho_x(\tau)$ 和 $R_x(\tau)$ 均随 τ 而变化, 且呈线性关系
- 若 $\mu_x = 0$, 则 $\rho_x(\tau) = R_x(\tau) / \sigma_x^2$

2. 自相关函数的性质

(P.40)

- $R_x(\tau)$ 的最大变动范围在 $\mu_x^2 - \sigma_x^2$ 和 $\mu_x^2 + \sigma_x^2$ 内

$$\mu_x^2 - \sigma_x^2 \leq R_x(\tau) \leq \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

- 若 $\tau=0$, $R_x(0) = \psi_x^2 = \mu_x^2 + \sigma_x^2 = R_{x\max}$

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+0)dt = \psi_x^2$$

- 当 τ 足够大或 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $R_x(\infty) = \mu_x^2$, $\rho_x(\infty) = 0$, 说明 $x(t+\tau)$ 和 $x(t)$ 不相关。
- 自相关函数是偶函数 $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$
- 周期函数的自相关函数仍然是同频率的周期函数, 其幅值与原周期信号的幅值有关, 但丢失了原信号的相位信息。

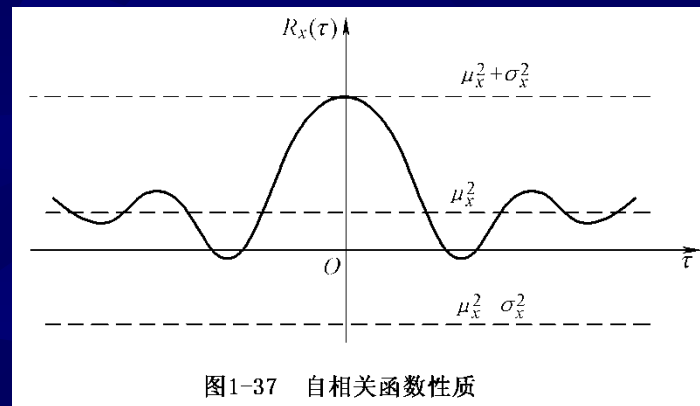


图1-37 自相关函数性质

例 1-11 (P.41)

求正弦函数 $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的自相关函数，初始相角 φ 为一随机变量。

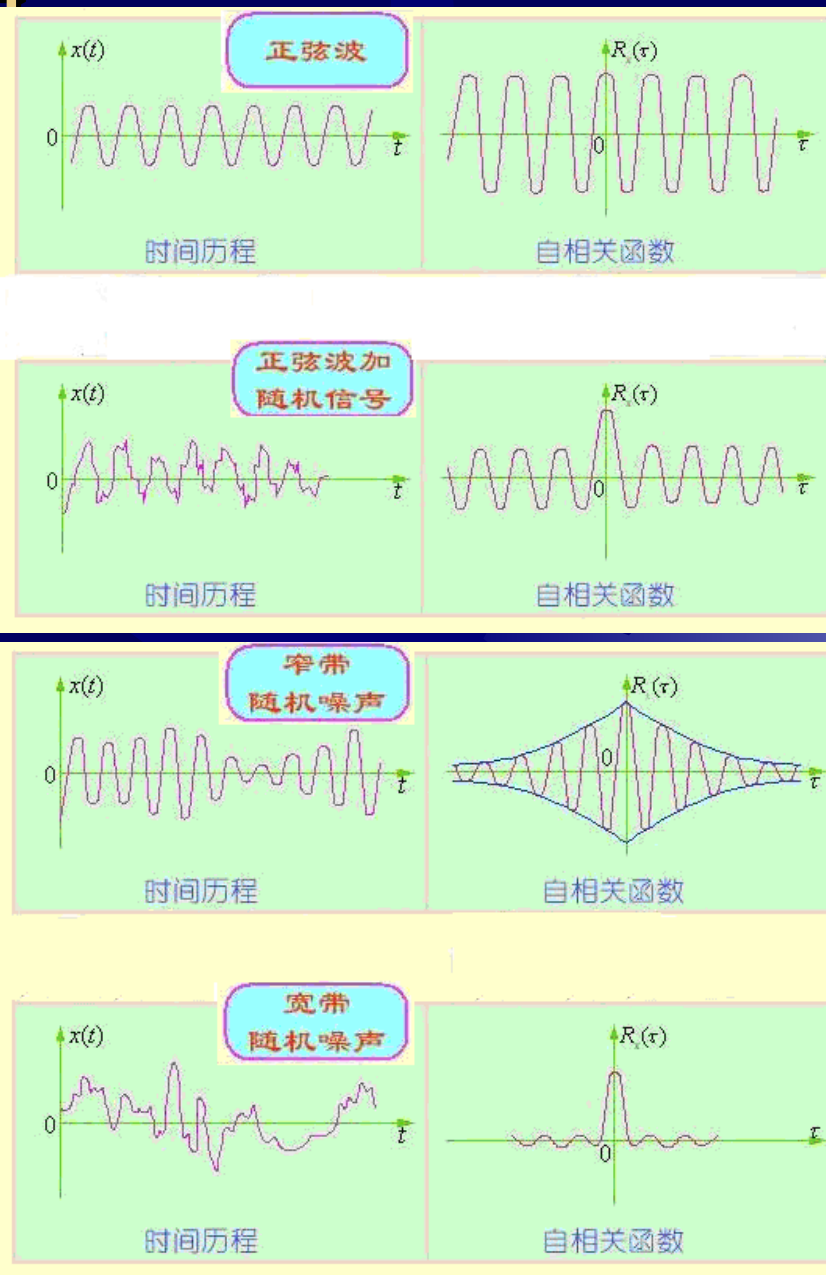
$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t + \tau) + \varphi] dt \end{aligned}$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau$$

3. 自相关的应用

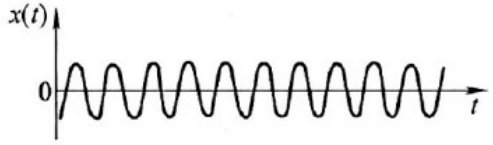
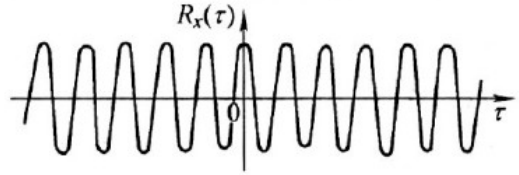

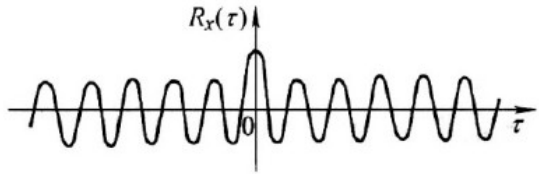
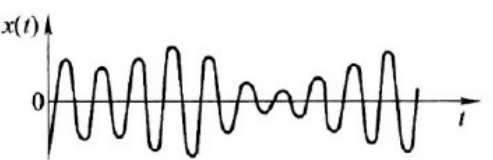
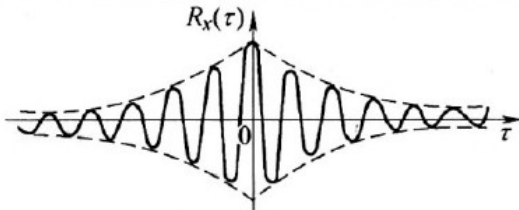

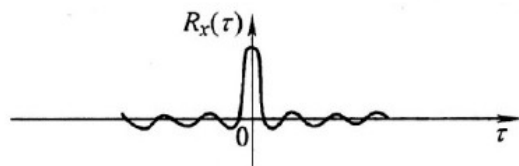
1) 识别信号的类型

- 只要信号中含有周期成分，其自相关函数在 τ 很大时都不衰减，具有明显的周期性；
- 不包含周期成分的随机信号，当 τ 稍大时自相关函数就趋近于零；
- 宽带随机噪声的自相关函数很快衰减到零；
- 窄带随机噪声的自相关函数有较慢的衰减特性。



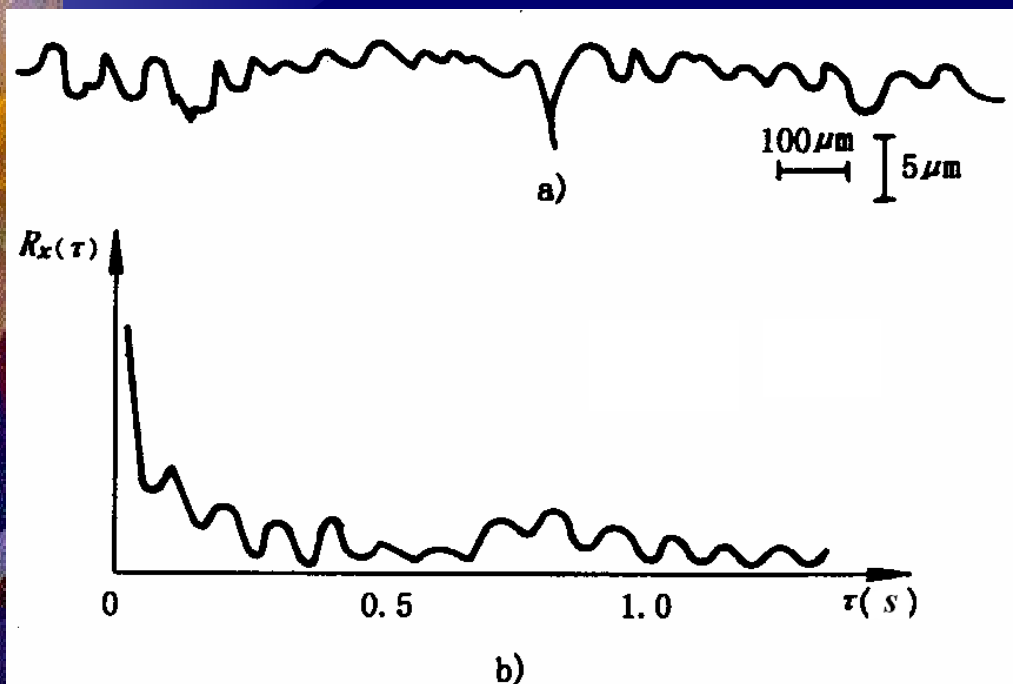
四种典型信号的自相关函数

表 1-7 四种典型信号的自相关函数

	时间历程	自相关函数图
正弦波		
正弦波加随机噪声		
窄带随机噪声		
宽带随机噪声		

识别信号的类型

某一机械加工表面粗糙度的波形，经自相关分析后所得到的自相关图。



表面粗糙度与自相关函数

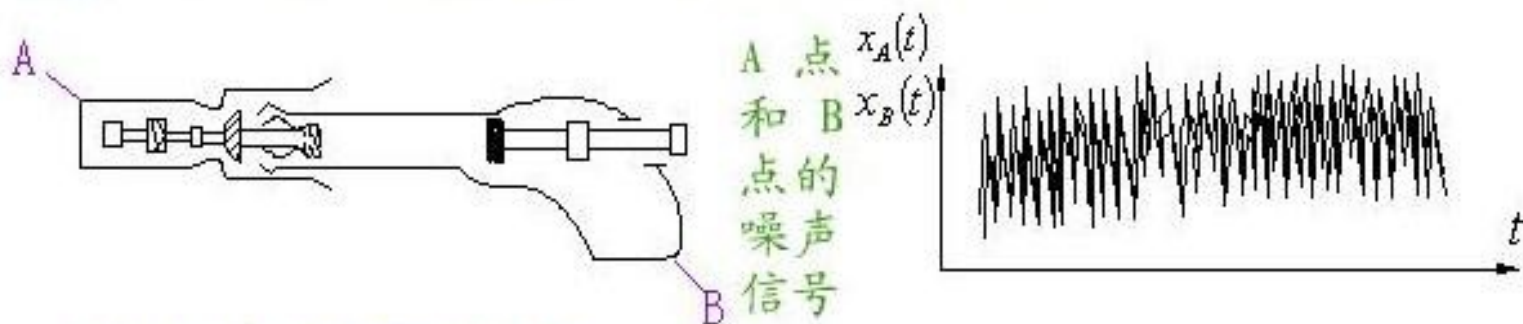
a) 表面粗糙度 b) 自相关函数

这个自相关图表明造成表面粗糙度的原因中包含有某种周期因素。从自相关图可以确定该周期因素的频率，从而可以进一步分析其起因。

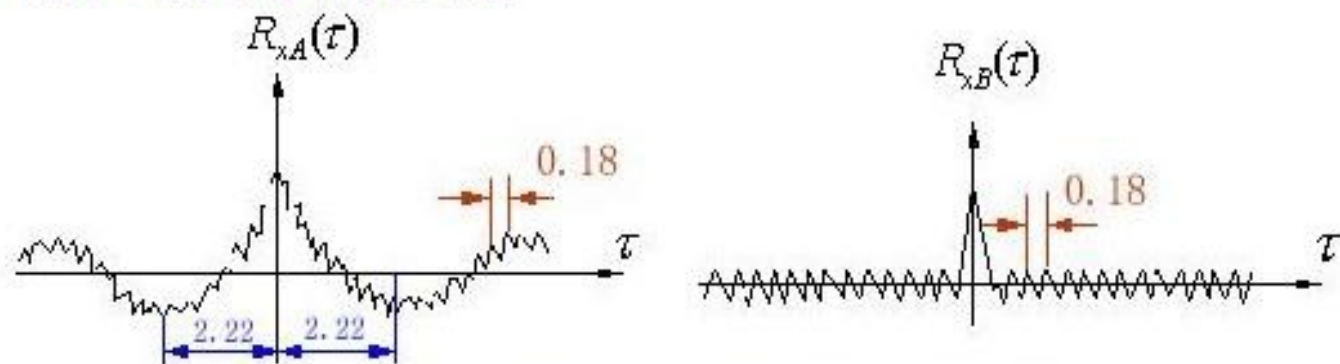
2) 在强大噪声背景中，从随机信号中取出周期信号的信息



燃气轮机噪声信号的自相关分析



A点和B点的自相关函数



自相关函数 $R_{xA}(\tau)$ 和 $R_{xB}(\tau)$ 的图形上都含有周期为 0.18ms 的周期信号，这间接说明两噪声具有同一噪声源。

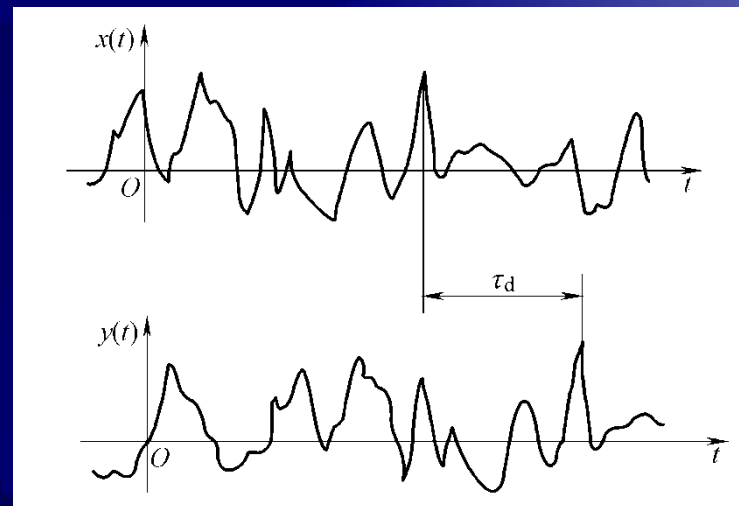
3) 作为信号在频域功率谱分析中的中间步骤

三、信号的互相关函数

1. 互相关函数 $R_{xy}(\tau)$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

互相关函数描述了两个样本在不同时刻之间的相互依从关系。



2. 互相关函数的性质:

- $R_{xy}(\tau)$ 的最大变动范围在 $\mu_x \mu_y - \sigma_x \sigma_y$ 和 $\mu_x \mu_y + \sigma_x \sigma_y$ 内

$$\mu_x \mu_y - \sigma_x \sigma_y \leq R_{xy}(\tau) \leq \mu_x \mu_y + \sigma_x \sigma_y$$

- 若 $\tau = \tau_d$, $R_{xy}(\tau_d) = R_{xy\max}$, τ_d 反映 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的滞后时间。

- $R_{xy}(\tau)$ 既不是偶函数, 也不是奇函数。

- 在 t 时刻从样本采样计算的互相关函数应和 $t - \tau$ 时刻从样本采样计算的互相关函数是一致的。

(P.43)

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

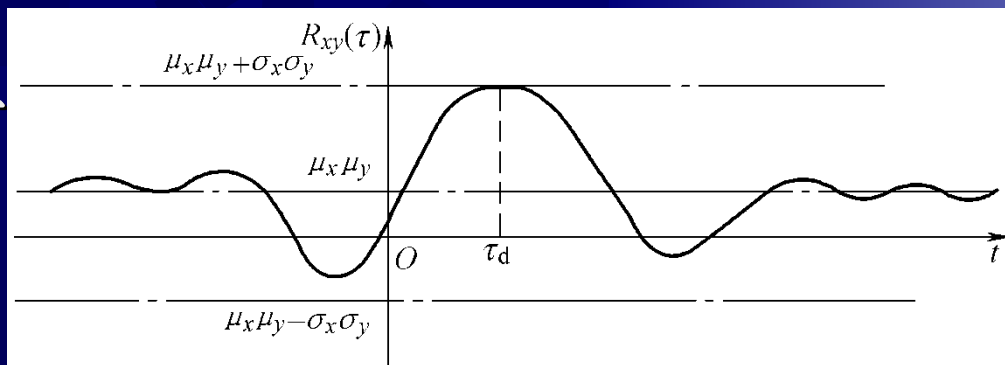


图1-39 互相关函数图

互相关函数的性质:

- 若两信号中没有同频周期成分, 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $R_{xy}(\infty) \rightarrow \mu_x \mu_y$, 若 $\mu_x \mu_y \rightarrow 0$, 则 $R_{xy}(\infty) \rightarrow 0$, 说明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 互不相关。
- 若两信号是同频率的周期信号或包含有同频率的周期成分, 则即使 $\tau \rightarrow \infty$, 互相关函数不收敛并会出现该频率成分。 (P.43 例 1-12)
- 若两信号含有频率不等的周期成分, 则两者不相关。

(P.43 例 1-13)

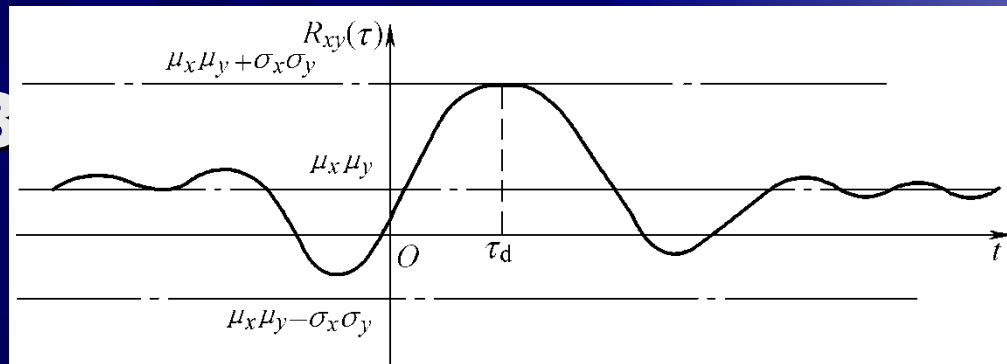


图1-39 互相关函数图

例 1-12 (P.43)

设有两个周期信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，试求其互相关函数

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

$$y(t) = B \sin(\omega t + \theta - \varphi)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} AB \cos(\omega \tau - \varphi)$$

例 1-13

若两个周期信号的圆频率不等，试求其互相关函数

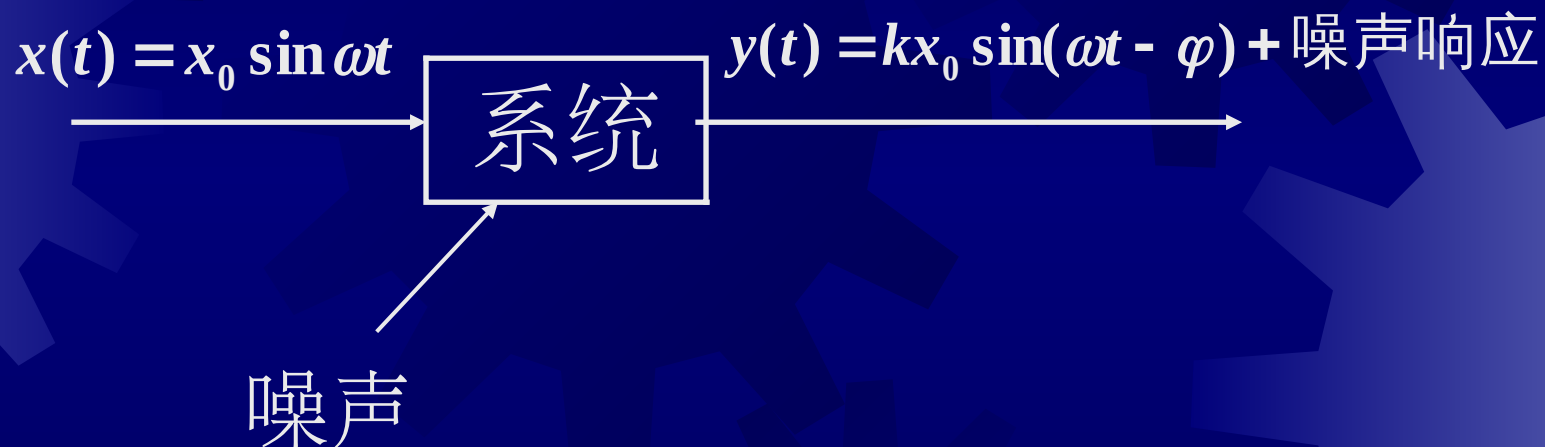
$$x(t) = A \sin(\omega_1 t + \theta)$$

$$y(t) = B \sin(\omega_2 t + \theta - \varphi)$$

$$R_{xy}(\tau) = 0$$

3. 互相关的应用

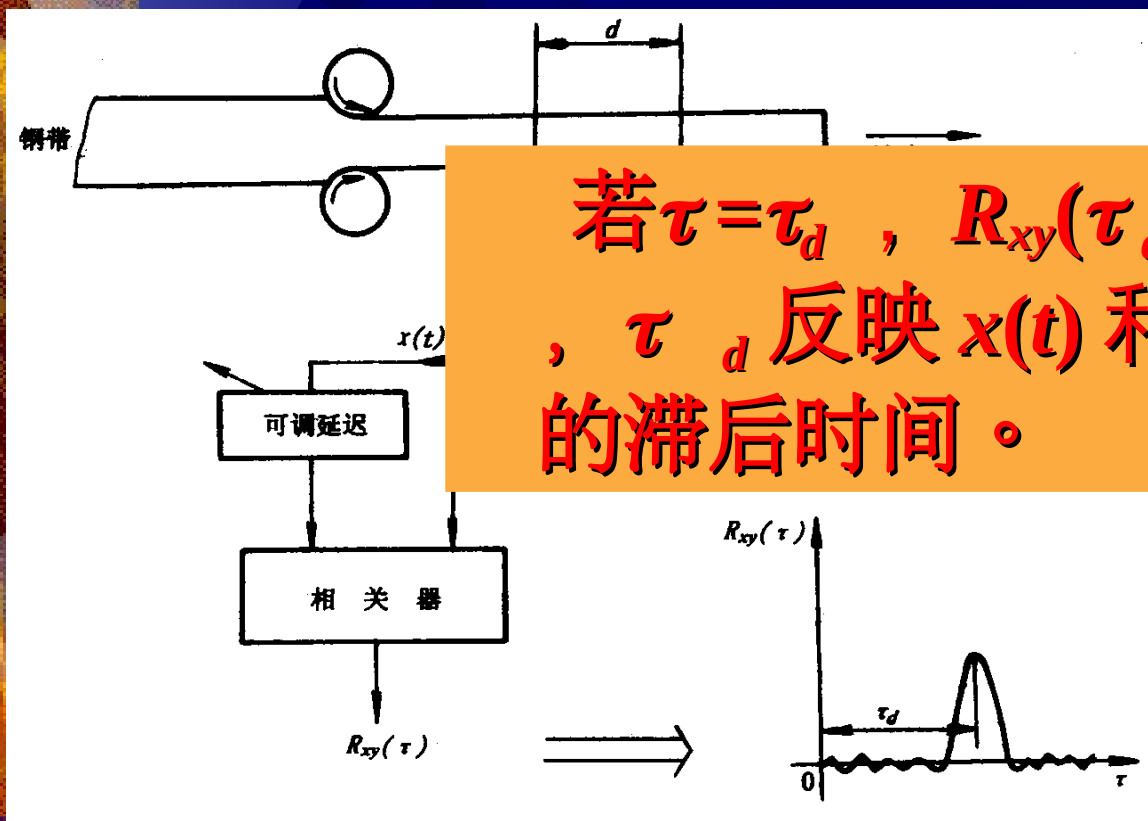
1) 在高噪声背景下提取有用信息



将输入与输出作互相关，因为噪声与 $x(t)$ 不同频，所以就留下了 $x(t)$ 的响应，这就是相关检测。

2) 延滞时间测量

- 例 1：运动物体速度测量——测热轧钢带运动速度
(P.44)



若 $\tau = \tau_d$, $R_{xy}(\tau_d) = R_{xy\max}$
 , τ_d 反映 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的
 的滞后时间。

在相距为 d 的位置分别布置两个光电池。由于钢带表面存在不规则的微小不平整，其反射光强度随位置变化，其反射光被两个光电池接收，并分别产生电信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 。对这两个信号进行互相关运算，得到

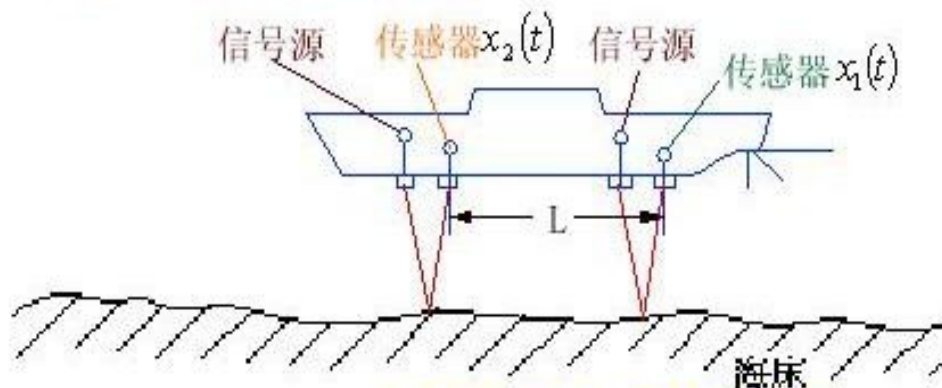
到如图所示互相关图 $R_{xy}(\tau)$ ，当 $\tau = \tau_d$ 时，正好等于钢带上各点在两个测量点之间经过所需要的时间。

$$v = \frac{d}{\tau_d}$$

延滞时间测量 (2)

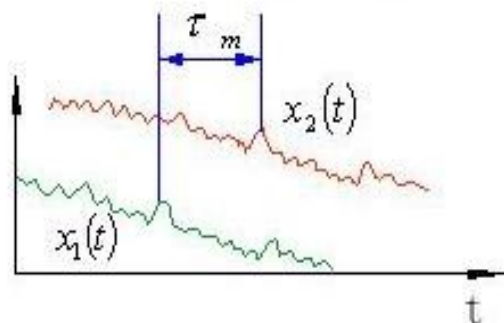
➤ 例 2：汽车、飞机、船舶等的精确测速——相关测速

★ 航速测定



当船向前移动时，船头信号源发出信号，传感器1接收后得到波形图；同时，船尾信号源也发出信号，传感器2接收后得到波形图。

波形图



从图中，我们可以确定其互相关函数最大值时的 τ_m 值；而两传感器的距离 L 已知，因此，船的运动速度为：

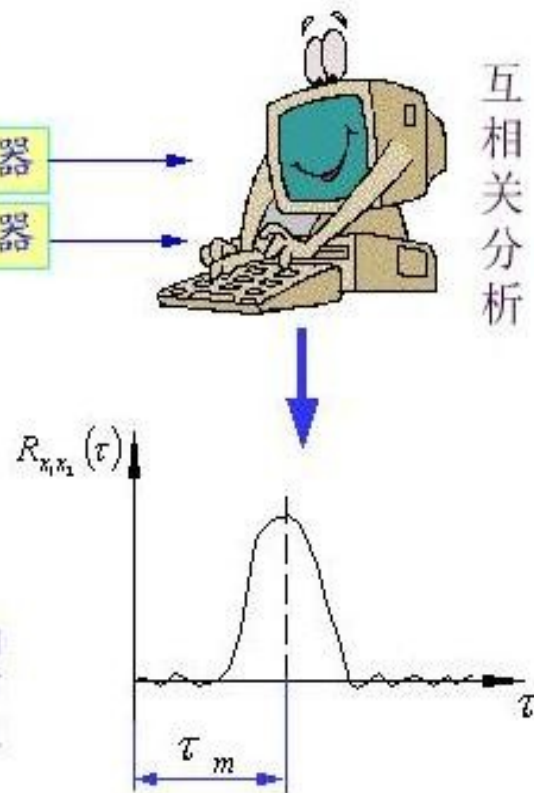
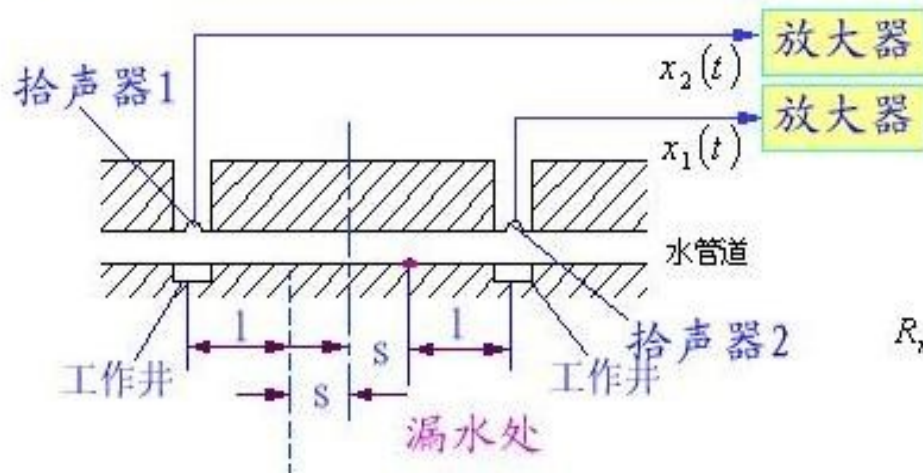
$$v = L / \tau_m$$

延滞时间测量 (3)

➤ 例 3：测裂纹——确定输油管裂损位置



相关分析确定水管漏水部位



在水管表面沿轴向放置传感器（拾声器）1和2，将水管破裂处漏水声视为向两侧传播声波的声源，因放置两传感器的位置距离漏损处不等，则水管漏水处的音波传至两传感器有时差。

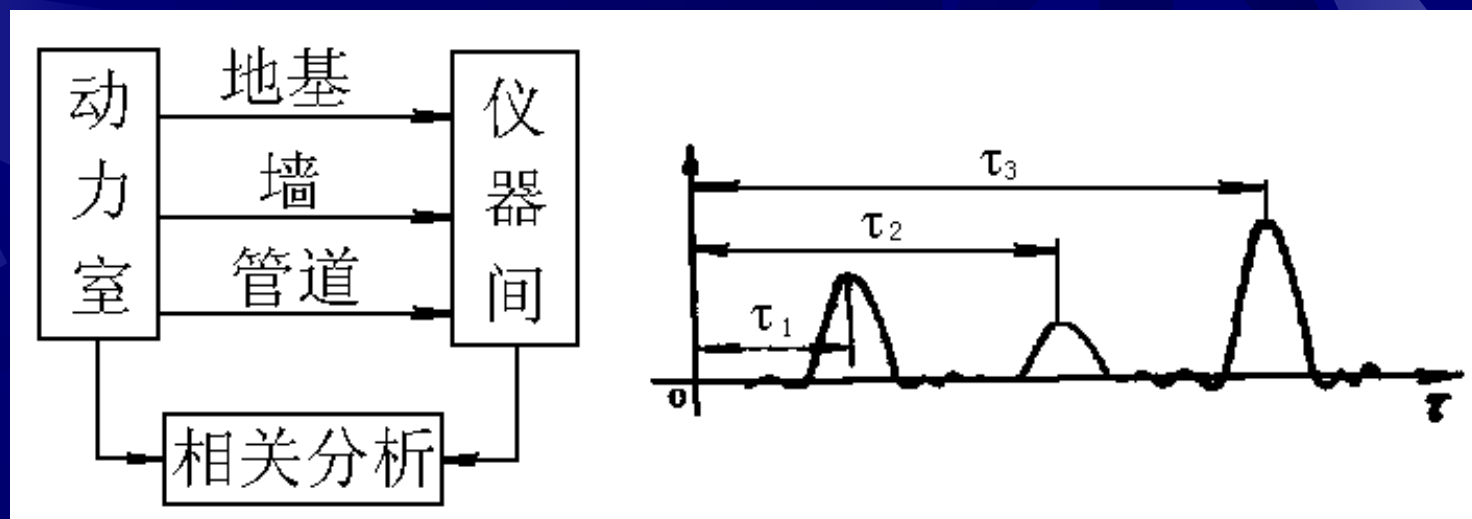
$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 互相关值最大处的时间 τ_m

由此，可以确定水管漏损位置

$$S = v\tau_m / 2$$

3) 传输通道的测定及传递能力的判断

例：动力室振动传输通道测定





1.6.4 功率谱分析及其应用

(P.45)

概述

时域		频域
时域描述——信号时间历程的直接记录	\Leftrightarrow	频域描述——反映信号的频域结构组成
相关分析——在噪声背景下提取有用信息	\Leftrightarrow	功率谱分析——从频域提供相关技术的信息

一、自功率谱密度函数

1 定义

若零均值随机信号 $x(t)$ ，且不含周期成分，当 τ 足够大， $R_x(\tau) \rightarrow 0$ ，则定义自功率谱密度函数

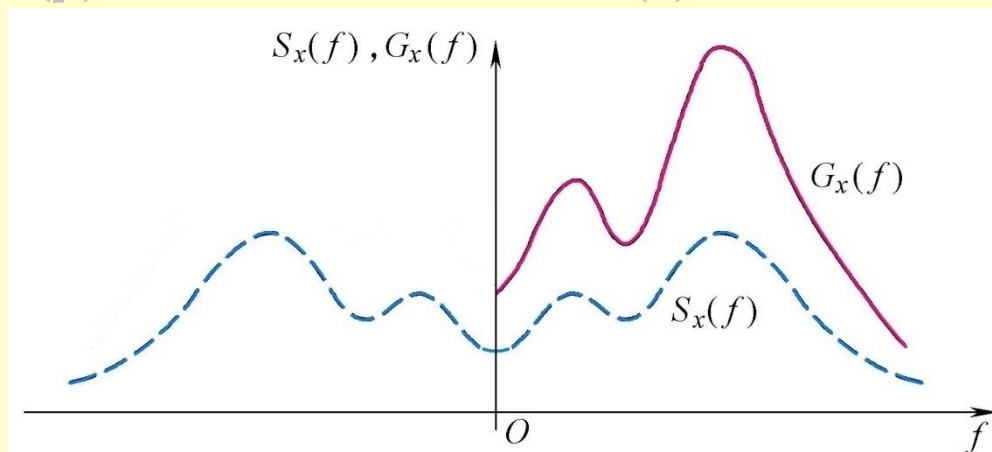
$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$S_x(f)$ 的逆变换为

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

自功率谱密度函数图

- 由于 $R_x(\tau)$ 为实偶函数，则可证明 $S_x(f)$ 也为实偶函数，它具有对称性，为双边功率谱。
- 习惯上更常用正频率 $f \geq 0$ 范围定义自功率谱， $G_x(f) = 2S_x(f)$ ，称为信号 $x(t)$ 的单边功率谱。



(P.46)

图1-43 单边功率谱和双边功率谱

2. 物理意义

当 $\tau=0$ 时

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \psi_x^2 \quad \text{信号的平均功率}$$

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

$S_x(f)$ 曲线下和频率轴所包含的面积就是信号的平均功率。

$S_x(f)$ 具有单位频率的含义，反映了频率分量上功率分布，故称自功率谱密度函数。

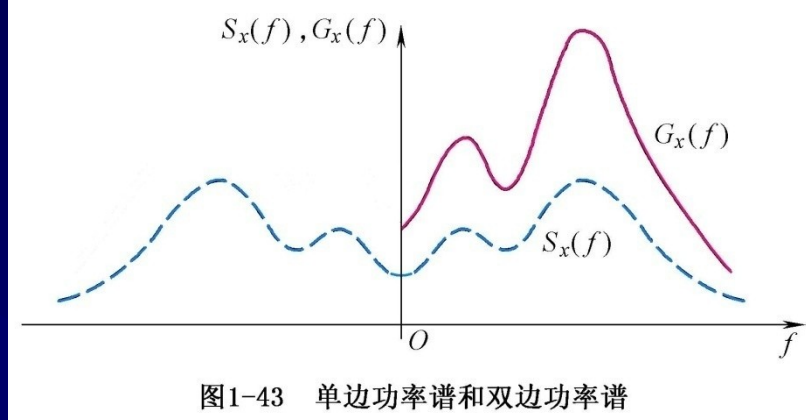


图1-43 单边功率谱和双边功率谱

3. 巴塞伐尔 (帕斯瓦尔) 定理 ——时频域能量守恒定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad \text{P.46 推导}$$

巴塞伐尔恒等式表明：在时域计算的信号总能量，等于在频域计算的信号总能量。它从能量角度反映时域和频域关系，故又称为能量恒等式。

在实际应用中，对功率信号无法直接运用，研究信号平均功率更适合。

$$P_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2 df$$

与 $R_x(0)$
比较可得

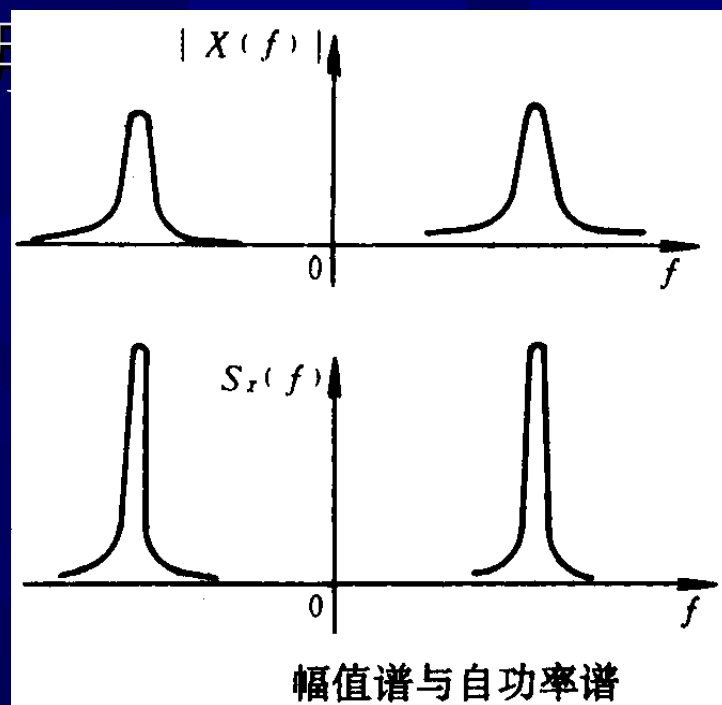
$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2$$

利用这一关系，可以通过直接对时域信号作傅里叶变换来计算功率谱。

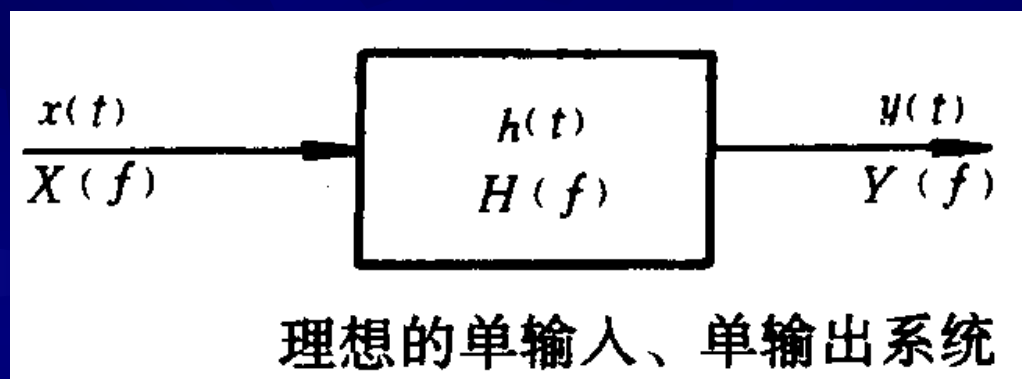
4. 应用

1) 建立信号的频率结构

$S_x(f)$ 反映信号的频域结构（这和幅值谱 $|X(f)|$ 相似），但自功率谱密度所反映的是信号幅值的平方，因此其频域结构特征更为明



2) 求频率响应中的幅频特性



$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad \text{适用于周期及部分非周期信号}$$

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f) \quad \text{适用于随机信号}$$

3) 检测信号中的周期成分

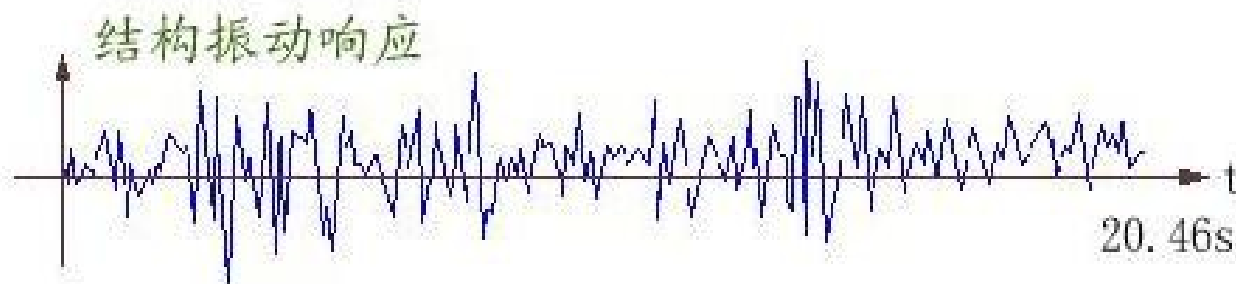
- 自相关分析可以有效地检测出信号中有无周期成分
- 自功率谱密度函数也能用来检测信号中的周期成分
- 周期成分在实测的自功率谱图形中以陡峭有限峰值的形态出现。

应用举例

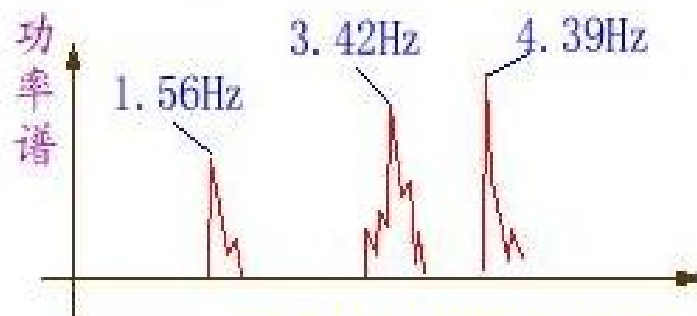


桥梁墩台的测试分析

火车单机
通过时测
得的横向
振动波形



对其作功率谱和幅值谱



结论

实测得的时域波形图很难辨别出梁和墩的自振频率，而从谱分析图中可以明显看出由几个主要高峰，即梁的横向水平振动自振频率1.56Hz，梁的扭转振动频率3.42Hz，火车轮对的强迫振动频率2.68Hz，墩台的横向水平自振频率4.39Hz。

二、互功率谱密度函数

1 定义

若互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 满足傅里叶变换的条件，则定义信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 功率谱密度函数

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

即互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 的傅里叶变换常简称**互谱密度函数**或**互谱**，而 $S_{xy}(f)$ 的逆变换为

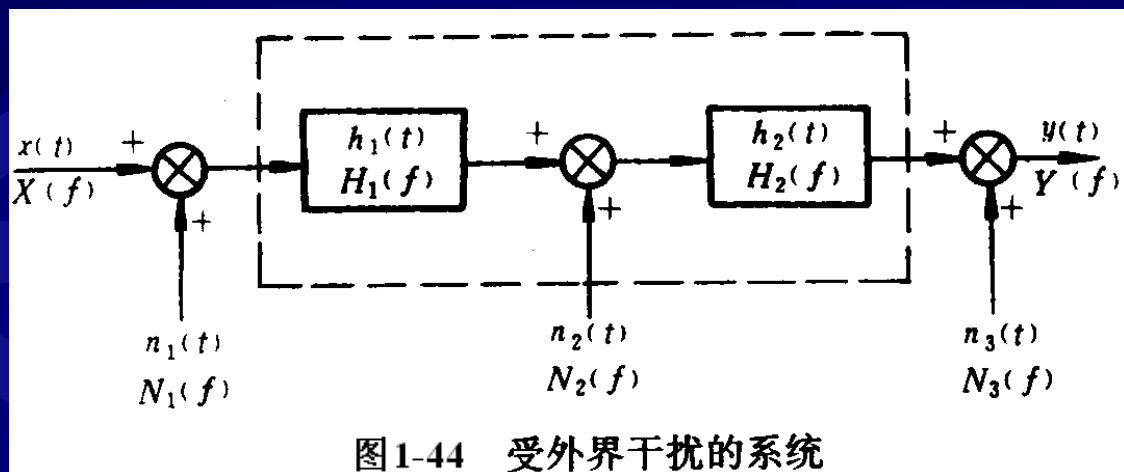
$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$S_{xy}(f)$ 包含了 $R_{xy}(\tau)$ 的全部信息，同样可推得

$$S_{xy}(f) = S_{yx}(-f)$$

2. 应用

1) 频率响应函数测量



(P.48)

图1-44 受外界干扰的系统

$$S_{xy}(f) = H(f)S_x(f)$$

利用互谱进行分析的突出优点是
可排除噪声的影响。

2) 相干分析

评价测试系统的输入和输出信号的因果性，即输出信号的功率谱中有多少是所测试输入量所引起的响应，在许多场合中是非常重要的。

时域		频域
相关系数 相关函数	→	相干函数 ($y(t)$ 的多少成分来自 $x(t)$)

频域中的相关函数

2) 相干函数

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f)S_y(f)}$$

若 $\gamma_{xy}^2(f)=0$ ，则输出信号与输入信号不相干；

若 $\gamma_{xy}^2(f)=1$ ，则输出信号与输入信号完全相干，系统不受干扰而且系统是线性的；

若 $0 < \gamma_{xy}^2(f) < 1$ ，则有三种可能：

- 1) 测试中有外界噪声干扰
- 2) 输出 $y(t)$ 是输入 $x(t)$ 和其它输入的综合输出
- 3) 联系 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的系统是非线性的

相干分析举例

(P.50)

例 1-14：分析柴油机润滑油泵的油压脉冲信号 $x(t)$ 和油管振动信号 $y(t)$ 之间的关系

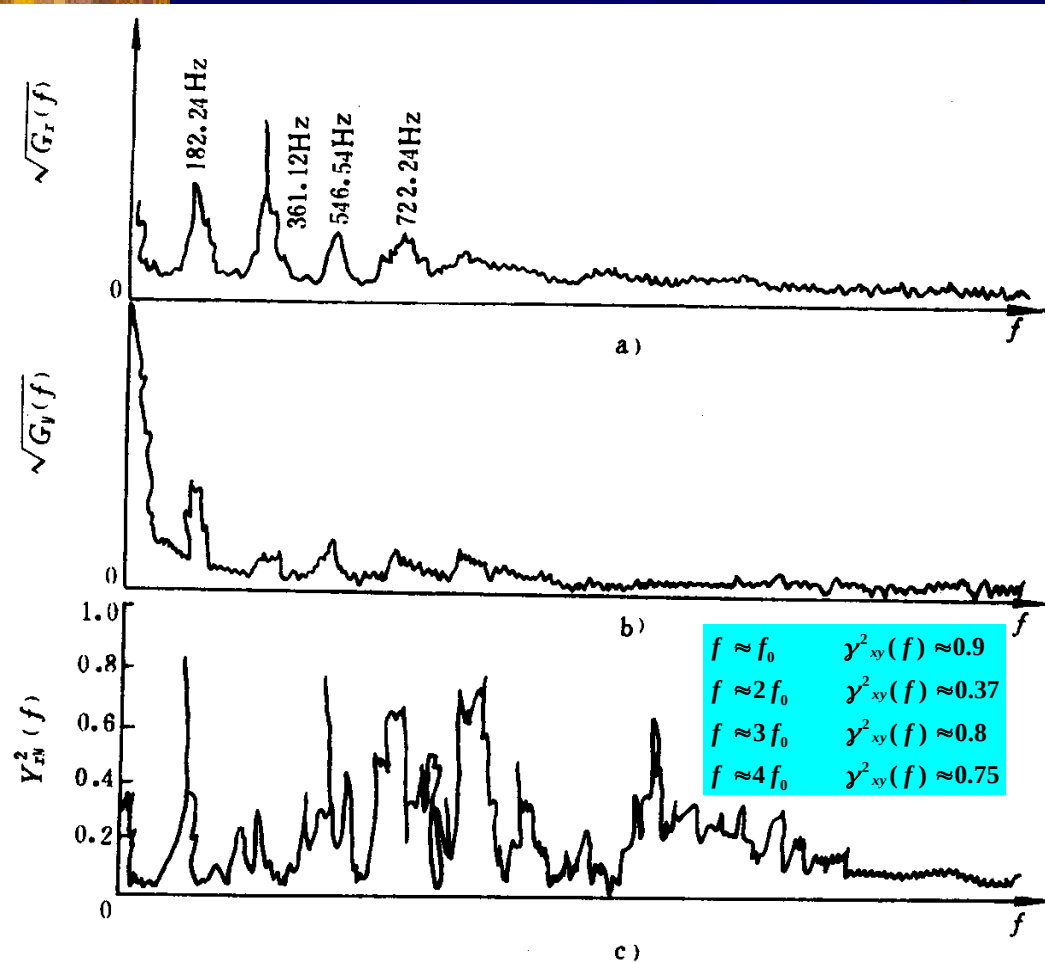


图1-45 油压脉动与油管振动的相干分析

a) 信号 $x(t)$ 的自谱 b) 信号 $y(t)$ 的自谱 c) 相干函数

已知:

油泵转速:

$$n=781r/min$$

油泵齿数: $z=14$

解得: 油压脉冲的基频

$$f_0=182.23\text{Hz}$$

结论: 油管的振动主要是由油压脉动引起的

总结

时域		频域
时域描述——信号时间历程的直接记录	\Leftrightarrow	频域描述——反映信号的频域结构组成
相关分析——在噪声背景下提取有用信息	\Leftrightarrow	功率谱分析——从频域提供相关技术的信息

总结

频谱分析 { 幅值谱
功率谱

时域信号 $\xleftarrow{\text{傅氏变换}}$ 幅值谱 { 离散——周期信号
连续——非周期信号

反映单位频率的幅值
 $X(\omega)$ ——频谱密度函数

相关函数 $\xleftarrow{\text{傅氏变换}}$ 功率谱——连续——随机信号

反映单位频率分量上功率分布
 $S(f)$ ——功率谱密度函数

周期信号及其离散频谱

➤ 三角级数展开式

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

➤ 复指数展开式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

周期信号的频谱三个重要特征:

- 周期信号的频谱是离散的。
- 每条谱线只出现在基波频率的整数倍上，基波频率是诸分量频率的公约数。
- 各频率分量的谱线高度表示该谐波分量的幅值和相位角。

非周期信号

- 分析工具：傅里叶变换

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

- 频域描述：频谱密度函数 $X(f)$
- 频谱特征：连续频谱，高次谐波幅值是衰减的，可忽略高频分量，用有限的频带来合成信号以代替原来无限频带的信号。

各态历经随机信号的主要特征参数

随机信号的幅值描述：均值、方差、均方值、概率密度函数

- 随机信号的时域描述：自相关函数和互相关函数
- 随机信号的频域描述：功率谱密度函数

自相关函数的性质

(P.40)

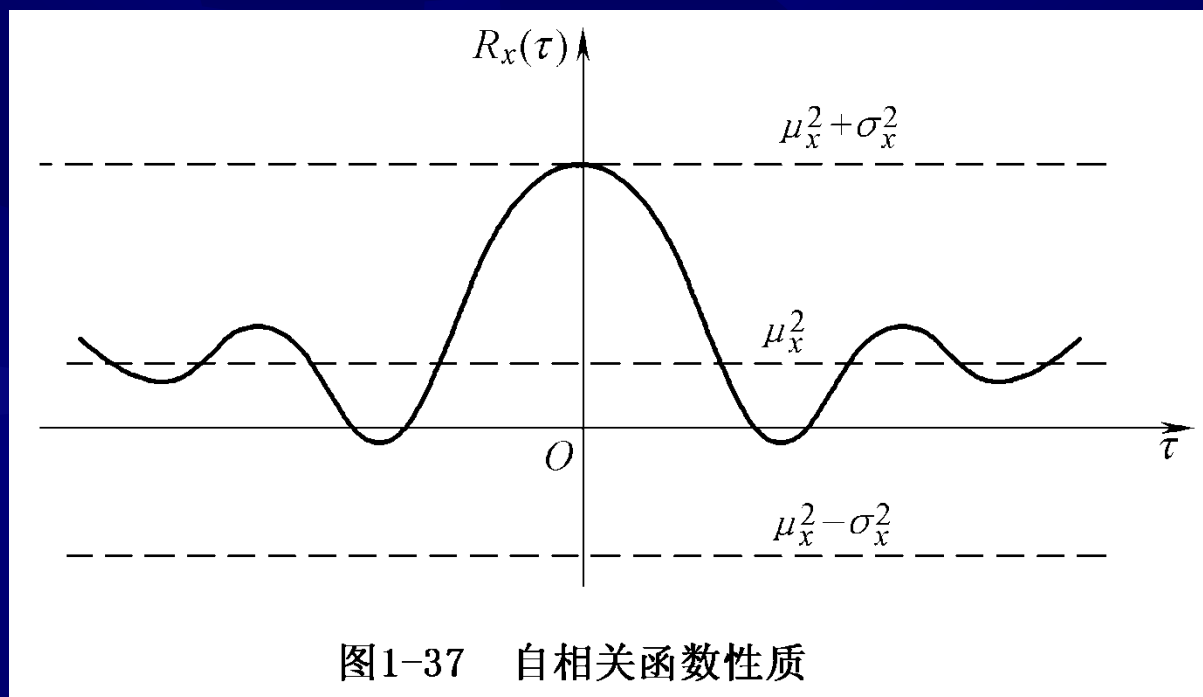


图1-37 自相关函数性质

- 周期函数的自相关函数仍然是同频率的周期函数，其幅值与原周期信号的幅值有关，但丢失了原信号的相位信息。

互相关函数的性质:

- 若两信号中没有同频周期成分, 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $R_{xy}(\infty) \rightarrow \mu_x \mu_y$, 若 $\mu_x \mu_y \rightarrow 0$, 则 $R_{xy}(\infty) \rightarrow 0$, 说明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 互不相关。
- 若两信号是同频率的周期信号或包含有同频率的周期成分, 则即使 $\tau \rightarrow \infty$, 互相关函数不收敛并会出现该频率成分。
- 若两信号含有频率不等的周期成分, 则两者不相关。

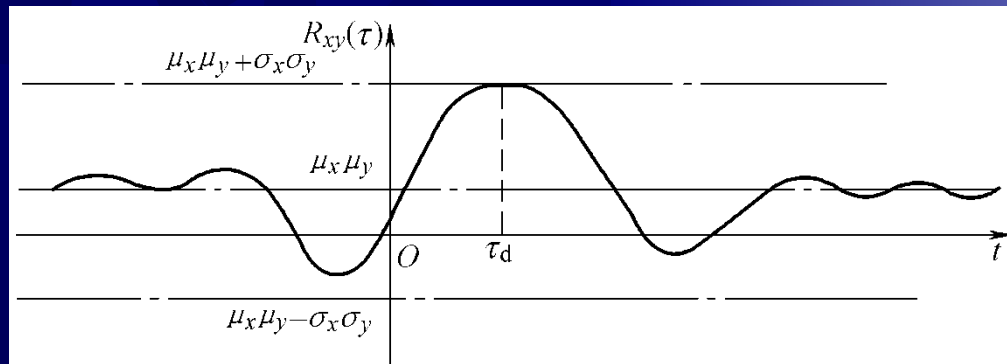


图1-39 互相关函数图

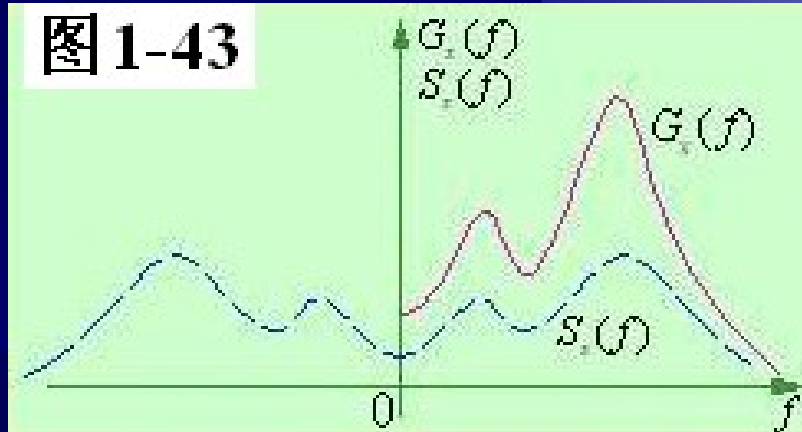
自功率谱密度函数

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

- $S_x(f)$ ——反映了频率分量上功率分布，称自功率谱密度函数。

图 1-43



互功率谱密度函数

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$