第四节 相互独立的随机变量

- 随机变量相互独立的定义
- 课堂练习
- 小结 布置作业

一、随机变量相互独立的定义

设 X,Y是两个$r.v$，若对任意的x,y,有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称 X 和 Y 相互独立 .

两事件 A , B 独立的定义是：若$P(AB)=P(A)P(B)$
则称事件 A , B 独立 .

用分布函数表示,即

设 X,Y是两个$r.v$，若对任意的x,y,有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称 **X 和 Y 相互独立**.

它表明，两个$r.v$相互独立时，它们的联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积.

若 (X,Y)是连续型$r.v$，则上述独立性的定义等价于：

对任意的 x, y, 有

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

几乎处处成立，则称 X 和 Y 相互独立 .

其中 $f(x,y)$是X和Y的联合密度,$f_X(x)$, $f_Y(y)$

分别是X的边缘密度和Y 的边缘密度 .

这里“几乎处处成立”的含义是：在平面上除去面积为 0 的集合外，处处成立.

若 (X,Y)是离散型 $r.v$ ，则上述独立性的定义等价于：

对(X,Y)的所有可能取值(x_i, y_j),有

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

则称 X 和Y 相互独立.

二、例题

例1 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

问X和Y是否独立？

解 $f_X(x)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dy = xe^{-x}$，$x>0$

$$f_Y(y)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+y)}dx = e^{-y}, \quad y>0$$

即 $$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

可见对一切 x, y, 均有：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

故 X, Y 独立 .

若(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

情况又怎样？

解 $$f_X(x)=\int_x^1 2dy=2(1-x),\qquad 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_0^y 2dx=2y,\qquad 0<y<1$$

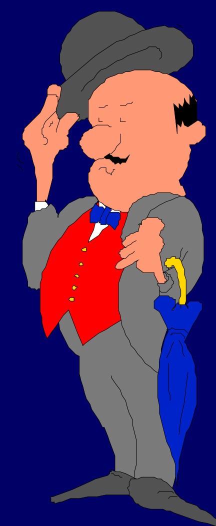
由于存在面积不为0的区域，

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故 X 和 Y 不独立.

例2　甲乙两人约定中午12时30分在某地会面.如果甲来到的时间在12:15到12:45之间是均匀分布. 乙独立地到达,而且到达时间在12:00到13:00之间是均匀分布. 试求先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率. 又甲先到的概率是多少?

解　设X为甲到达时刻,Y为乙到达时刻



以12时为起点,以分为单位,依题意,

$X \sim U(15,45)$, $Y \sim U(0,60)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 15<x<45\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0<x<60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1800}, & 15<x<45, 0<y<60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由独立性

先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率

甲先到的概率

所求为$P(|X-Y|\le 5)$, $P(X<Y)$

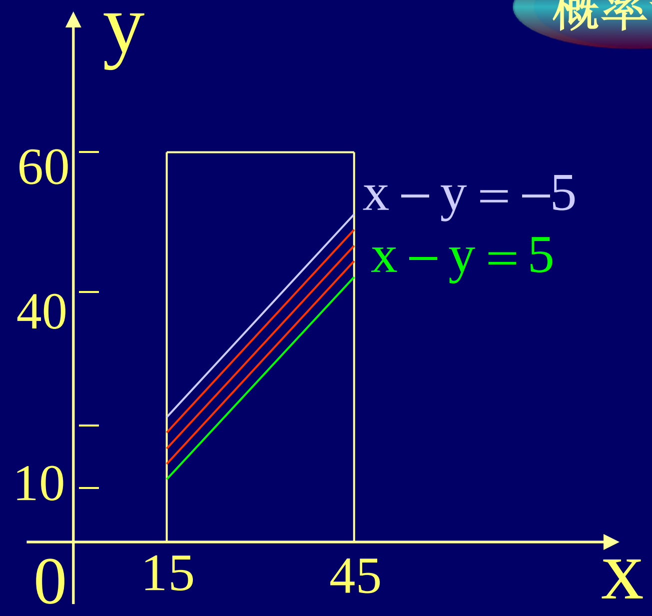
解一

$$P(\,|X-Y|\le 5\,)$$

$$= P(\,-5 < X - Y < 5)$$

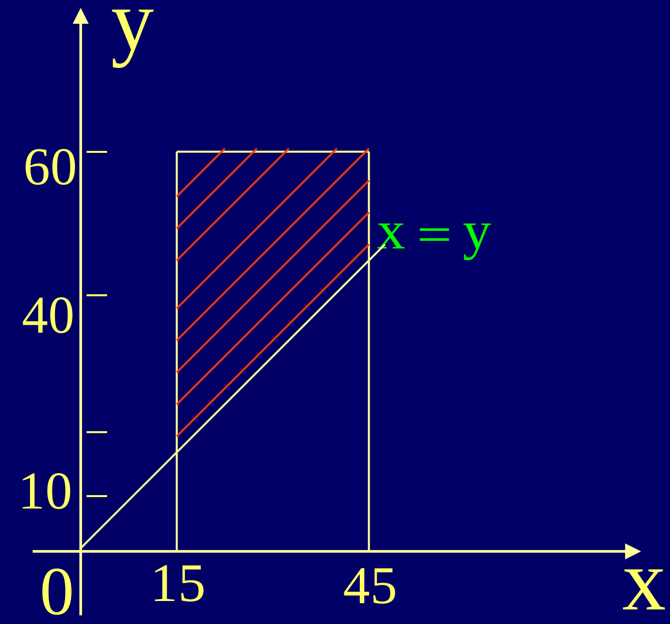
$$= \int_{15}^{45}\left[\int_{x-5}^{x+5}\frac{1}{1800}\,dy\right]dx$$

$$= 1/6.$$



$$P(X<Y) = \int_{15}^{45}\left[\int_{x}^{60}\frac{1}{1800}\,dy\right]dx$$

$$= 1/2.$$



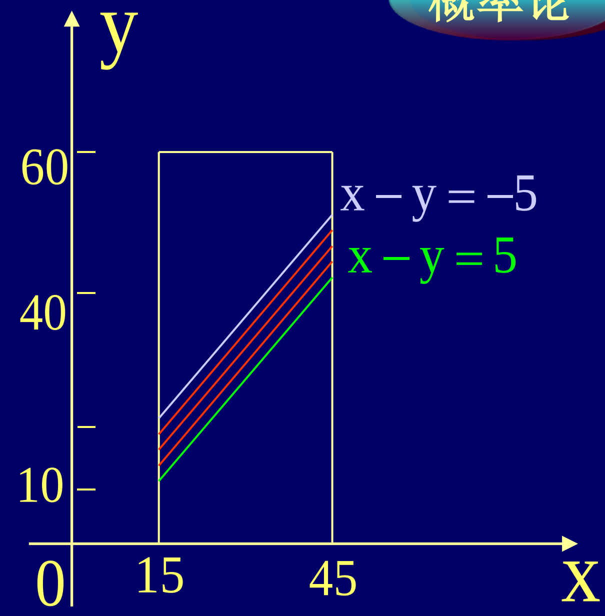
解二 $P(|X-Y|\le 5)$

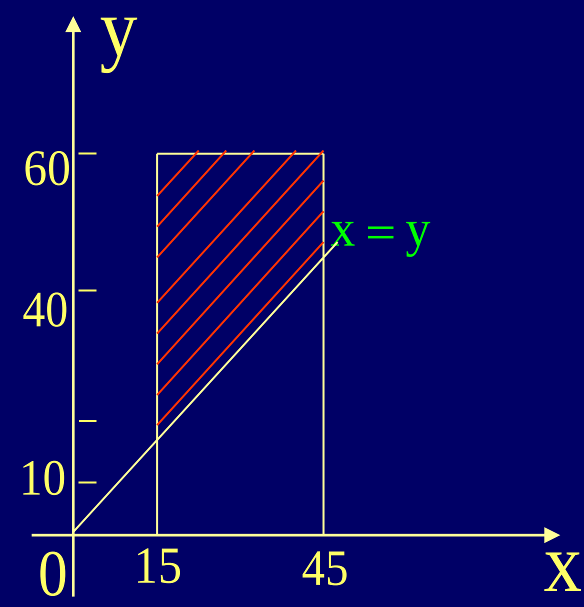
$$= \iint\limits_{|x-y|\le 5} \frac{1}{1800}\,dxdy$$

$$= \frac{1}{1800}[60\times 30 - 2(10\times 30 + 30\times 30/2)]$$

$$= 1/6.$$

被积函数为常数，
直接求面积





$$P(X<Y)=P(X>Y)$$

$$=1/2$$

类似的问题如：

甲、乙两船同日欲靠同一码头，设两船各自独立地到达，并且每艘船在一昼夜间到达是等可能的．若甲船需停泊1小时，乙船需停泊2小时，而该码头只能停泊一艘船，试求其中一艘船要等待码头空出的概率.

在某一分钟的任何时刻，信号进入收音机是等可能的． 若收到两个互相独立的这种信号的时间间隔小于0.5秒，则信号将产生互相干扰．求发生两信号互相干扰的概率.

例3 盒内有 n 个白球，m 个黑球,有放回地摸球两次. 设

$$X=\begin{cases}1, & \text{第1次摸到白球}\\ 0, & \text{第1次摸到黑球}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{第2次摸到白球}\\ 0, & \text{第2次摸到黑球}\end{cases}$$

试求 (1) (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律;

(2) 判断 X,Y 的相互独立性;

(3) 若改为无放回摸球,解上述两个问题.

解 (1) (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律

如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$m^2/(m+n)^2$	$mn/(m+n)^2$	$m/m+n$
1	$mn/(m+n)^2$	$n^2/(m+n)^2$	$n/m+n$
$p_{\cdot j}$	$m/m+n$	$n/m+n$	

(2) 由上表可知 $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}\ (i,j=0,1)$

故 X,Y 的相互独立.

(3) (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\dfrac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{m}{m+n}$
1	$\dfrac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{n}{m+n}$
$p_{\cdot j}$	$\dfrac{m}{m+n}$	$\dfrac{n}{m+n}$	

由上表知：

$$P(X=0,Y=0)=\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)},$$

$$P(X=0)=\frac{m}{m+n},\quad P(Y=0)=\frac{m}{m+n}.$$

可见

$$P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)\cdot P(Y=0).$$

故 X,Y 不是相互独立.

三、课堂练习

1. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

问 X 和 Y 是否相互独立?

2. 证明 对于二维正态随机变量 (X,Y)，

X 和 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$.

四、小结

这一讲，我们由两个事件相互独立的概念引入两个随机变量相互独立的概念. 给出了各种情况下随机变量相互独立的条件，希望同学们牢固掌握.

五、布置作业

《概率统计》标准化作业 (三)