

机器人学基础

国家级《智能科学基础系列课程教学团队》

“机器人学”课程配套教材

蔡自兴 主编

第3章 机器人运动学 (1)

1

第3章 机器人运动学

3.1 机器人运动方程的表示

3.2 连杆参数、连杆坐标系

3.3 连杆坐标变换

3.4 机器人运动学建模

3.5 机器人逆运动学

2

第3章 机器人运动学

- 机器人可以看作是由一系列**连杆**通过**运动副**(**转动关节**或**移动关节**)连接起来的。
- 在研究机器人的运动时, 不仅需要描述机器人各连杆之间的相互关系, 而且需要描述连杆与操作对象(或末端执行器)之间的相互关系, 即研究机器人各连杆与操作对象的相对空间**位姿**、**速度**和**加速度**。
- 最感兴趣的是描述操作末端相对于固定参考坐标系的**位姿**、**速度**和**加速度**等。

3

第3章 机器人运动学

研究对象:

研究内容 (运动学正问题和逆问题)

研究方法 (D-H坐标法)

研究结果 —— 运动学方程



Puma 560 robot



Stanford arm

4

3.1 机器人运动方程的表示

Forward Kinematics

5

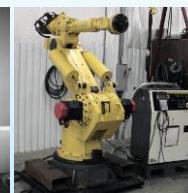
3.1 机器人运动方程的表示

3.1.1 研究对象

- 机器人从机构构型分为两种, 一种是**关节式串联机器人**, 另一种是**并联机器人**。



PUMA560



Fanuc manipulator



Hexapod

6



7

3.1.2 运动学研究的问题

- 机器人运动学通过研究机器人的关节变量和末端执行器的位姿关系，建立机器人本体运动的数学模型，为机器人的运动控制和机构设计提供依据。
- **运动学正问题**（用于机构设计）
已知各关节变量，求取机械手末端位姿；
- **运动学逆问题**（用于运动控制）
已知机械手末端位姿，求取各关节变量；

8

3.1.3 机器人运动学建模方法

机器人运动学建模方法：

D-H坐标法：在每个连杆上固接一坐标系，用**齐次变换矩阵**描述相邻两坐标系间的空间关系。

旋量法：任何刚体运动与螺旋运动是等价的，即螺旋运动是刚体运动。螺旋运动的无穷小量称为运动旋量。

单位运动旋量 $\xi = (\omega; \nu) \in R^6$

9

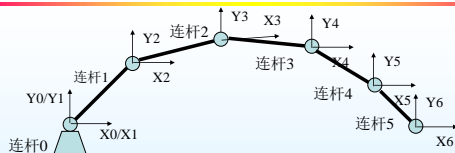
Denavit – Hartenberg (D-H) 运动学建模方法

- 1955年D和H提出，A kinematic notation for low-pair mechanism -s based on matrices. Journal of applied mechanics, 215-221,1955
- 用齐次变换矩阵描述相邻连杆间的空间位姿。

机器人运动学描述的是**机器人末端执行器**相对于**固定参考坐标系**的空间位姿。

10

Denavit – Hartenberg (D-H) 运动学建模方法



$${}^0T = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6$$

$$= {}^0T(\theta_1) \cdot {}^1T(\theta_2) \cdot {}^2T(\theta_3) \cdot {}^3T(\theta_4) \cdot {}^4T(\theta_5) \cdot {}^5T(\theta_6)$$

$$= \begin{bmatrix} {}^0R & {}^0P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于自由度为n的串联机器人而言，共需建立n+1个连杆坐标系。

11

机械手是由一系列**关节**连接**连杆**构成的，一般用各连杆坐标系的**齐次变换矩阵**来描述它们的相对位姿。如用A矩阵表示**相邻两个连杆间的相对位姿**，即A是连杆坐标系间平移和旋转的齐次变换。如果 ${}^0T_1 = A_1$ 表示第一个连杆相对于基系的位姿， A_2 表示第二个连杆相对于第一个连杆的位姿，那么第二个连杆相对基系的位姿为：

$${}^0T_2 = A_1 \cdot A_2$$

同理，有：

$${}^0T_3 = A_1 A_2 A_3$$

12

运动学方程的表示:

- 用相邻两连杆间的齐次变换矩阵来描述相邻连杆间的空间位姿;
- A_1 表示第一连杆相对基坐标的位姿,
- A_2 表示第二连杆相对第一连杆位姿.....
- 则第二连杆对基坐标的位姿为 ${}^0_2T = A_1 A_2$
- 手爪相对于基座的位姿:

$${}^0_6T = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

注意前后顺序

称为操作臂的运动学方程。

13

运动学方程

由于机器人机构可以看成是由一系列杆件通过关节连接而成的, 因此可以将各连杆变换矩阵 ${}^{i-1}_i T (i=1,2,\dots,n-1)$, 顺序相乘, 便可得到末端连杆坐标系 $\{n\}$ 相对于固定坐标系 $\{0\}$ 的变换矩阵:

$${}^0_n T = {}^0_1 T \cdot {}^1_2 T \cdots {}^{n-1}_n T$$

14

$${}^0_n T = {}^0_1 T \cdot {}^1_2 T \cdots {}^{n-1}_n T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

该式称为机器人的运动学方程, 表示机器人末端相对于固定参考坐标系的空间位姿, 是各关节变量的函数。

15

3.1.2 RPY角和RPY变换

3.1.3 欧拉角和欧拉变换

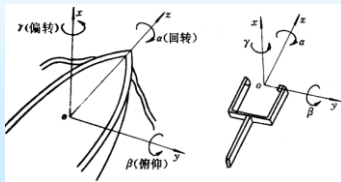
16

(1) RPY角与RPY变换

- 绕固定轴x-y-z旋转的RPY角

RPY角是描述船舶姿态的一种方法。将船的行駛方向取为z轴, 则绕z轴的旋转(α 角)称为回轉(Roll); 绕y轴的旋转(β 角)称为俯仰(Pitch); 将绕x轴的旋转(γ 角)称为偏转(Yaw)

与操作臂手爪坐标系的规定类似, 习惯上称为RPY角法。



RPY角表示

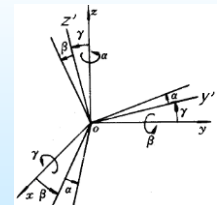
17

(1) RPY角与RPY变换

这种描述坐标系{B}的方位的法则如下: {B}的初始方位与参考系{A}重合。首先将{B}绕 x_A 转 γ 角, 再绕 y_A 转 β 角, 最后绕 z_A 转 α 角。

因为三次旋转都是相对于固定坐标系{A}而言的, 按照“从右向左”的原则(即左乘), 得相应的旋转矩阵 ${}^A_B R_{\text{xyz}}(\gamma, \beta, \alpha)$

$${}^A_B R_{\text{xyz}}(\gamma, \beta, \alpha) = \text{Rot}(z_A, \alpha) \text{Rot}(y_A, \beta) \text{Rot}(x_A, \gamma) \\ = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$



RPY角

18

(1) RPY角与RPY变换

$${}^A\mathbf{R}_{\text{xyz}}(\gamma, \beta, \alpha) = \text{Rot}(z_A, \alpha) \text{Rot}(y_A, \beta) \text{Rot}(x_A, \gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

式中, $c\alpha = \cos\alpha$; $s\alpha = \sin\alpha$, $c\beta$, $s\beta$ 和 $c\gamma$, $s\gamma$, 依此类推。矩阵相乘后得:

$${}^A\mathbf{R}_{\text{xyz}}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

表示绕固定坐标系的三个轴依次旋转得到的旋转矩阵, 因此称为“绕固定轴 $x-y-z$ 旋转的” RPY变换。

(2) 欧拉角与欧拉变换

欧拉角 (相对于动坐标系的旋转)

- 采用 3×3 的旋转矩阵描述刚体的姿态, 但需要9个元素描述刚体姿态。这9个元素只有3个是独立的, 可以采用3个参数来描述刚体的姿态。
- 刚体转动时, 用一组**广义坐标**来描述刚体相对于参考坐标系的姿态, 被称为**欧拉角**, ϕ 、 θ 、 ψ 就是这种**广义坐标**。
- 有几种不同的欧拉角表示方法, 均可描述刚体相对于参考系的姿态。
- **欧拉角和RPY角**, 广泛地应用在航海和天文学中, 描述刚体姿态。

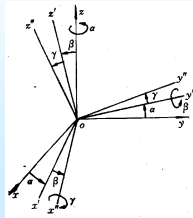
20

(2) 欧拉角与欧拉变换

①. $z-y-x$ 欧拉角 (相对于动坐标系)

这种描述坐标系{B}的方位的法则如下: {B}的初始方位与参考系{A}相同, 首先使{B}绕 z_B 轴转 α 角, 然后绕 y_B 轴转 β 角, 最后绕 x_B 轴转 γ 角, 如图2-10所示。

这种描述法中的各次转动都是相对于**运动坐标系**的某坐标轴进行的, 而不是相对于固定的参考系{A}。这样的三次转动称为欧拉角, 又因转动的顺序是绕 $z \rightarrow y \rightarrow x$, 故称这种描述法为 $z-y-x$ 欧拉角。



$z-y-x$ 欧拉角

21

(2) 欧拉角与欧拉变换

如图2.10所示, {B}沿欧拉角转动的情况。**先绕 z_B 转 α 角**, $x \rightarrow x'$, $y \rightarrow y'$; **再绕 y' 轴转 β 角**, $z' \rightarrow z''$, $x' \rightarrow x''$; **最后再绕 x'' 轴转 γ 角**, $y' \rightarrow y''$, $z' \rightarrow z''$ 。用 ${}^A\mathbf{R}_{\text{zyx}}(\alpha, \beta, \gamma)$ 表示与 $z-y-x$ 欧拉角等价的旋转矩阵。

所有的转动都是相对运动坐标系的, 根据“从左向右” (即右乘) 的原则来计算旋转矩阵。

$${}^A\mathbf{R}_{\text{zyx}}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Rot}(z_B, \alpha) \cdot \text{Rot}(y_B, \beta) \cdot \text{Rot}(x_B, \gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

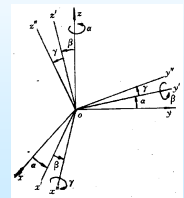


图2-10 欧拉角

22

矩阵相乘后得:

$${}^A\mathbf{R}_{\text{zyx}}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

—— $z-y-x$ 欧拉变换

注意: 上式结果与**绕固定轴 $x-y-z$ 旋转 (RPY角)**的结果完全相同。这是因为绕固定轴旋转的顺序, 若与**绕运动轴**旋转的顺序相反, 且旋转的角度对应相等时, 所得到的变换矩阵是相同的。因此, $z-y-x$ 欧拉角与固定轴 $x-y-z$ 转角描述坐标系{B}完全等价的。

23

② $z-y-z$ 欧拉角

这种描述坐标系{B}的方位法则如下: 最初{B}与参考系{A}重合, 首先使{B}绕 z_B 转 α 角, 然后绕 y_B 转 β 角, 最后绕 z_B 转 γ 角。

因为这三次转动的顺序是 $z_B \rightarrow y_B \rightarrow z_B$, 所以称为 $z-y-z$ 欧拉角描述法。

所有的转动都是相对**动坐标系**的, 根据“从左向右”的原则 (即右乘) 计算旋转矩阵。

$${}^A\mathbf{R}_{\text{zyz}}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Rot}(z_B, \alpha) \cdot \text{Rot}(y_B, \beta) \cdot \text{Rot}(z_B, \gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

24

矩阵相乘后得：

$${}^A_B \mathbf{R}_{\text{zyz}}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Rot}(z_B, \alpha) \cdot \text{Rot}(y_B, \beta) \cdot \text{Rot}(z_B, \gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A_B \mathbf{R}_{\text{zyz}}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

——z-y-z欧拉变换

25

RPY角的设定是相对固定坐标系旋转的，欧拉角是相对运动坐标系旋转的。都是以一定的顺序绕坐标轴旋转三次得到姿态的描述。

一共有24种不同的组合，其中12种为绕固定轴RPY设定法，12种为欧拉角设定法。因为RPY角与欧拉角对偶，实际上只有12种不同的旋转矩阵。

欧拉角与RPY角各有12种不同的组合形式，且互为对偶。

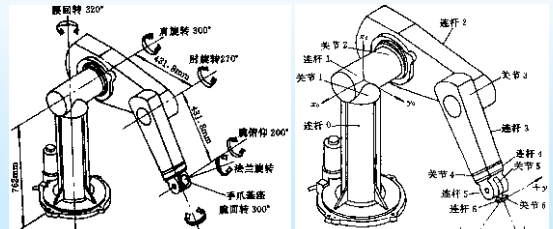
26

3.2 连杆参数和连杆坐标系

27

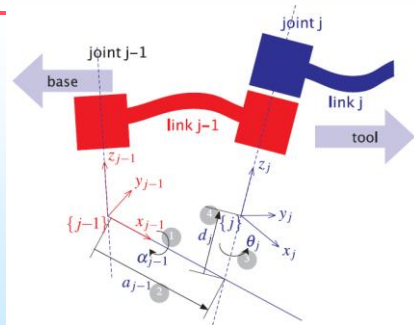
3.2 连杆参数和连杆坐标系

PUMA 560机器人由6个连杆和6个关节组成。手爪与连杆6固接，基座称为连杆0，不包含在6个连杆之内。连杆1与基座由关节1相连接；连杆2与连杆1通过关节2相连接，依此类推。



PUMA 560 机器人的连杆与关节示意图

28



29

3.2 连杆参数和连杆坐标系

3.2.1 连杆参数

为了用齐次变换矩阵表示相邻连杆间的空间位姿关系，需要用两个参数对每个连杆进行描述。

如图所示，对于任意一个两端带有关节 i 和 $i+1$ 的连杆，都可以用两个参数来描述：一个是两个关节轴线沿公垂线的距离 a_i ，另一个是垂直于 a_i 所在平面内两轴线的夹角 α_i 。通常称 a_i 为连杆 i 的长度， α_i 为连杆 i 的扭角。

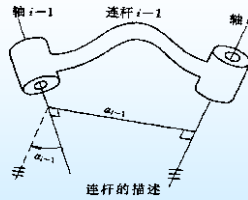
30

3.2 连杆参数和连杆坐标系

3.2.1 连杆参数: 连杆*i-1*的尺寸参数

(1) 连杆*i-1*的长度 a_{i-1}
关节轴线*i-1*和关节轴线*i*的公垂线长度;

(2) 连杆*i-1*的扭角 α_{i-1}
关节轴线*i-1*和关节轴线*i*的夹角;
指向为从轴线*i-1*转到轴线*i*。



两关节*i*和*i-1*的轴线平行时:

$\alpha_{i-1}=0$

两关节*i*和*i-1*的轴线相交时:

$a_{i-1}=0$, 扭角指向不定。

由连杆参数长度 a_{i-1} 和扭角 α_{i-1} 完全地描述了连杆*i-1*的特征。实际上, 公垂线长度和扭角可以用来规定任意两条空间直线间的位置关系。

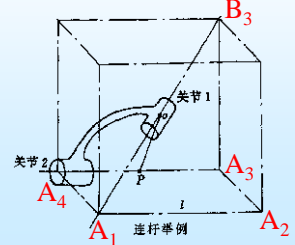
例3.1: XHK 5140换刀机械手的连杆如图, 关节1的轴线与正方体的对角线重合, 关节2的轴线与正方体的一棱边重合, 正方体的棱长为*l*, 求连杆长度 a_1 和扭角 α_1 。

由正方体的几何特征:

$$a_1 = op = \frac{\sqrt{2}}{2} l$$

$$\alpha_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

连杆的两关节轴线是空间交错的关系。



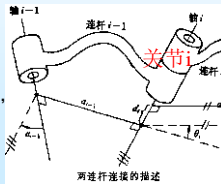
32

3.2 连杆参数和连杆坐标系

3.2.1 连杆参数: 相邻两连杆间的关系参数: 偏置和关节角

相邻两连杆*i*和*i-1*由关节*i*相连, 关节轴线*i-1*与关节轴线*i*间有一条公垂线, 关节轴线*i*与关节轴线*i+1*间有一条公垂线。

- 偏置 d_i : 沿关节*i*轴线方向测量的两条公垂线间的距离。沿 z_i 轴正向为正, 反之则为负;
- 关节角 θ_i : 在垂直于关节*i*轴线的平面内, 两公垂线间的夹角。绕轴线*i*由 a_{i-1} 到 a_i 测量, 由右手法则确定正负。
- d_i 和 θ_i 都可正、可负。



33

3.2 连杆参数和连杆坐标系

首、末连杆

对运动链两端, 习惯约定: $a_0 = a_6 = 0$; $\alpha_0 = \alpha_6 = 0^\circ$ 。

● d_i 和 d_6 、 θ_i 和 θ_6 的确定方法:

- 若关节1是转动关节, 则 θ_1 可变, 称关节变量, 规定 $\theta_1 = 0$ 为连杆1的零位。习惯约定 $d_1 = 0$
- 若关节1是移动关节, 则 d_1 可变, 称关节变量, 规定 $d_1 = 0$ 为连杆1的零位。习惯约定 $\theta_1 = 0$ 。

上面的约定对关节6同样适用。这些约定只是为了简化计算, 也可采用其它规定。

34

3.2 连杆参数和连杆坐标系

3.2.2 连杆参数和关节变量

连杆由参数 a_{i-1} , α_{i-1} , d_i , θ_i 来描述, a_{i-1} 和 α_{i-1} 描述连杆*i-1*本身的特征; d_i 和 θ_i 描述连杆*i-1*与*i*间的联系。

- 旋转关节*i*, 仅 θ_i 是关节变量, 其它参数固定不变;
- 移动关节*i*, 仅 d_i 是关节变量, 其它参数固定不变。

上述描述机构运动的方法是Denavit和Hartenberg提出的, 称为D-H方法。一个6关节的机器人, 用18个参数可以完全表示它的运动学中固定部分, 而用6个关节变量描述运动学中变动部分。

35

3.2 连杆参数和连杆坐标系

3.2.3 连杆坐标系 前置坐标系和后置坐标系

为确定机器人各连杆间相对运动关系, 在各连杆上分别固接一个坐标系。与基座固接的坐标系为 $\{0\}$, 与连杆*i* 固接的坐标系为 $\{i\}$ 。下面讨论确定连杆坐标系的方法。

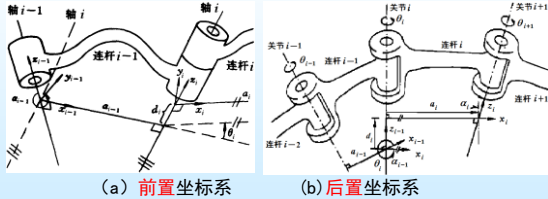
机器人连杆械手上坐标系的配置取决于连杆连接的类型。有转动关节和移动关节两种连接。

36

3.2.3 连杆坐标系的规定及连杆参数表

连杆坐标系的规定不是唯一的，有不同方式。

- 1 前置坐标系
- 2 后置坐标系



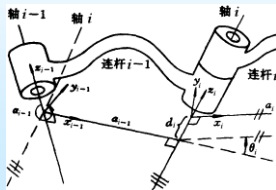
前置坐标系：与连杆*i*固结的坐标系{*i*}的坐标原点设在关节轴*i-1*上。
后置坐标系：与连杆*i*固结的坐标系{*i*}的坐标原点设在关节轴*i+1*上。

3.2.3 连杆坐标系

转动关节连杆前置坐标系的建立

(1) 中间连杆*i-1*坐标系{*i-1*}的规定：

- ③ y_{i-1} 轴按右手法则确定，即 $y_{i-1} = z_{i-1} \times x_{i-1}$
- ④ 坐标原点 o_{i-1} 为 z_{i-1} 轴和 x_{i-1} 轴的交点。
若两相邻连杆的轴线相交，则原点取在交点上；
若两相邻连杆的轴线平行，则原点取在使 d_i 为零。



中间连杆*i-1*坐标系{*i-1*}的设定

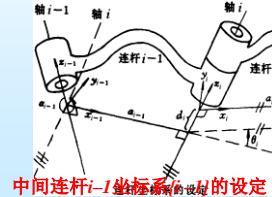
3.2.3 连杆坐标系

转动关节连杆前置坐标系的建立

为了确定各连杆之间的相对运动和空间位姿关系，在每个连杆上固接一个坐标系。基坐标系{0}、坐标系{n}、坐标系{i-1}。

(1) 中间连杆*i-1*坐标系{*i-1*}的规定：

- ① 坐标系{i-1}的 z_{i-1} 轴与关节轴*i-1*共线，指向任意
- ② x_{i-1} 轴与连杆*i-1*的两关节轴的公垂线重合，由关节*i-1* → *i*，
当两轴相交即 $a_{i-1}=0$ 时，取 $x_{i-1} = \pm z_i \times z_{i-1}$



中间连杆*i-1*坐标系的设定

3.2.3 连杆坐标系

(2) 首、末连杆坐标系{0}和{n}的规定：

机器人基座称为首连杆，以连杆0表示。基坐标系 o_0, y_0, z_0 固定不动。
基座坐标系{0}与基座固接，常作为参考坐标系，描述操作臂连杆的运动。

基系{0}原则上可任意规定，通常规定：

- 当第一个关节变量为零时，{0}与{1}重合。这隐含： $a_0 = 0, \alpha_0 = 0$
- 当第一个关节是旋转关节时， $d_1 = 0$ ；
- 当第一个关节是移动关节时， $\theta_0 = 0^\circ$ 。

末端连杆坐标系{n}的规定与基系{0}相似：

- ② 对旋转关节*n*，取 x_n 使得当 $\theta_n = 0$ 时， x_n 与 x_{n-1} 重合，{n}的原点 O_n 选在使 $d_n = 0$ 的地方；
- ③ 对移动关节*n*，{n}的设定使 $\theta_n = 0$ ，且当 $d_n = 0$ 时， x_n 与 x_{n-1} 重合。

注意1：

- ① 连杆坐标系不是唯一的。如，虽然 z_{i-1} 与关节轴*i-1*一致，但 z_{i-1} 的指向有两种选择；
- ② 当 z_i 与 z_{i-1} 相交时， x_{i-1} 的指向也有两种选择；
- ③ 当 z_i 与 z_{i-1} 平行时，{*i-1*}的原点选择也有一定的任意性；
- ④ 而对移动关节，坐标系的规定也会出现某种任意性。
选择不同的连杆坐标系，相应的连杆参数将会改变。

注意2：

- 通常在机械手处于零位置时确定转动关节的**正旋转方向**或棱柱联轴节的**正位移方向**，并确定 z 轴的正方向。
- 连杆0的原点与连杆1的原点重合。
- 若需要规定不同的参考坐标系，则该参考系与基系间的关系可以用齐次变换来描述。
- 机械手末端的 d_6 或 θ_6 是相对 z_6 的。**选择{6}的原点，使与{5}的原点重合。**
- 若末端执行器的原点和轴线与{6}不一致，那么此装置与连杆6的相对关系也可由齐次变换来表示。

3.2.4 连杆参数定义

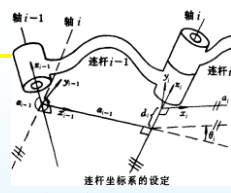
连杆坐标系规定的连杆参数

根据所设定的连杆坐标系，

相应的连杆参数可定义如下：

- ❖ a_{i-1} (或 a_i) 是从 z_{i-1} 到 z_i 沿 x_{i-1} 测量的距离；
- ❖ α_{i-1} (或 α_i) 是从 z_{i-1} 到 z_i 绕 x_{i-1} 旋转的角度；
- ❖ d_i 是从 x_{i-1} 到 x_i 沿 z_i 测量的距离；
- ❖ θ_i 是从 x_{i-1} 到 x_i 绕 z_i 旋转的角度。

a_{i-1} 代表连杆 $i-1$ 的长度，因此规定 $a_{i-1} \geq 0$ ；而 α_{i-1} ， d_i ， θ_i 的值可正、可负。



例3.1：如图3.5所示为一平面三杆机械臂。三个关节均为转动关节，三个关节轴线平行，称该操作臂为RRR（或3R）机构。设定该机构的连杆坐标系并写出D-H参数。

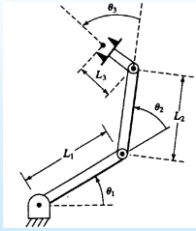


图3.5 平面三连杆机械臂

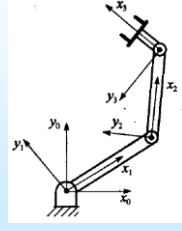
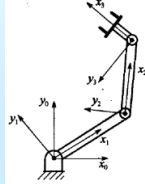


图3.6 连杆坐标系 (前置)

表3.1 平面三连杆操作臂的连杆参数表

连杆编号 i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1.	0	0	0	θ_1
2.	0	L_1	0	θ_2
3.	0	L_2	0	θ_3



思考：末端手爪相对于基坐标系的位姿？

包含移动关节的机器人的连杆坐标系及连杆参数表

例3.2：如图3.8所示为3自由度机器人，其中包括一个移动关节。该机械臂称为RPR型机构，是一种柱坐标机器人，关节轴1和关节轴2相互垂直。

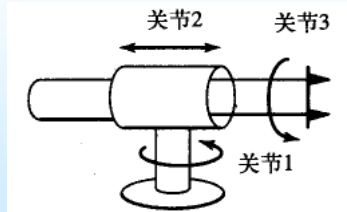
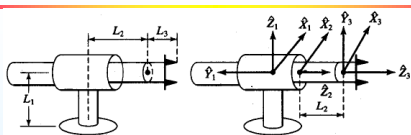
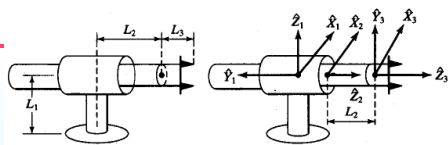


图3.8 包含一个移动关节的三自由度机械臂



注意：坐标系 $\{0\}$ 虽然没有建在机器人法兰基座的最底部，但仍然刚性地固结于连杆0上，即机器人固定不动的部分。正如在进行机器人运动学分析时并不需要连杆坐标系一直向上描述到机械手的外部一样，反过来也不必将连杆坐标系固结于机器人基座的最底部。只需将坐标系 $\{0\}$ 建立在固定连杆的任意位置，把坐标系 $\{n\}$ 建立在操作臂末端连杆的任意位置即可。



机器人所处的位置 $\theta_1 = 0$ ，所以坐标系 $\{0\}$ 和坐标系 $\{1\}$ 在图中完全重合

表3 RPR型操作臂的连杆参数表

连杆编号 i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1.	0	0	0	θ_1
2.	90°	0	d_2	0
3.	0	0	L_2	θ_3