



## 课程回顾

### 三频段理论

	频段	对应性能	希望形状
$L(\omega)$	低频段	$\left\{ \begin{array}{l} \text{开环增益 } K \\ \text{系统型别 } \nu \end{array} \right.$ 稳态误差 $e_{ss}$	陡, 高
	中频段	$\left\{ \begin{array}{l} \text{截止频率 } \omega_c \\ \text{相角裕度 } \gamma \end{array} \right.$ 动态性能 $\left\{ \begin{array}{l} \sigma \% \\ t_s \end{array} \right.$	缓, 宽
	高频段	系统抗高频干扰的能力	低, 陡

三频段理论并没有提供设计系统的具体步骤,  
但它给出了调整系统结构改善系统性能的原则和方向



# 自动控制原理

## (第 24 讲)

### § 5. 线性系统的频域分析与校正

- § 5. 1 频率特性的基本概念
- § 5. 2 幅相频率特性 (Nyquist图)
- § 5. 3 对数频率特性 (Bode图)
- § 5. 4 频域稳定判据
- § 5. 5 稳定裕度
- § 5. 6 利用开环频率特性分析系统的性能
- § 5. 7 闭环频率特性曲线的绘制
- § 5. 8 利用闭环频率特性分析系统的性能
- § 5. 9 频率法串联校正



西北工业大学  
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY



# 自动控制原理

## (第 24 讲)

- § 5. 7 闭环频率特性曲线的绘制
- § 5. 8 利用闭环频率特性分析系统的性能



## § 5.7 闭环频率特性曲线的绘制 (1)

### 研究闭环频率特性的必要性

- (1) 闭环频率特性的一些特征量在实际工程中应用十分广泛；
- (2) 通过实验方法容易得到系统的闭环频率特性；
- (3) 通过闭环频率特性可以估算系统的性能指标。



## § 5.7 闭环频率特性曲线的绘制 (2)

### § 5.7.1 用向量法求闭环频率特性

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

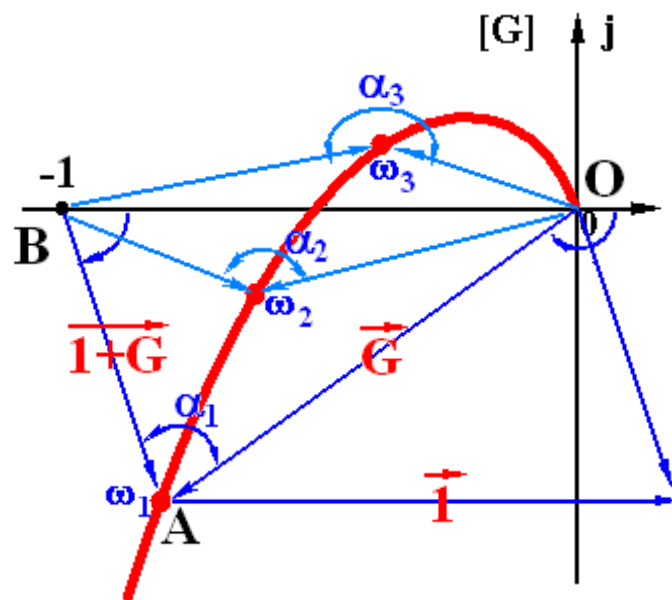
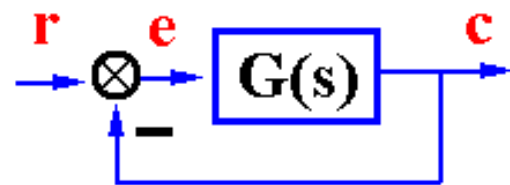
$$\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad \begin{cases} M(\omega) = |\Phi(j\omega)| \\ \phi(\omega) = \angle \Phi(j\omega) \end{cases}$$

$$G(j\omega) = \overrightarrow{OA}$$

$$1 + G(j\omega) = \overrightarrow{BA}$$

$$\Phi(j\omega) = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{BA}} \left\{ \angle \overrightarrow{OA} - \angle \overrightarrow{BA} \right\}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \left| \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{BA}} \right| \\ \phi(\omega) = \angle \overrightarrow{OA} - \angle \overrightarrow{BA} = \alpha \end{cases}$$





## § 5.7 闭环频率特性曲线的绘制 (3)

### 等M圆 等N圆图

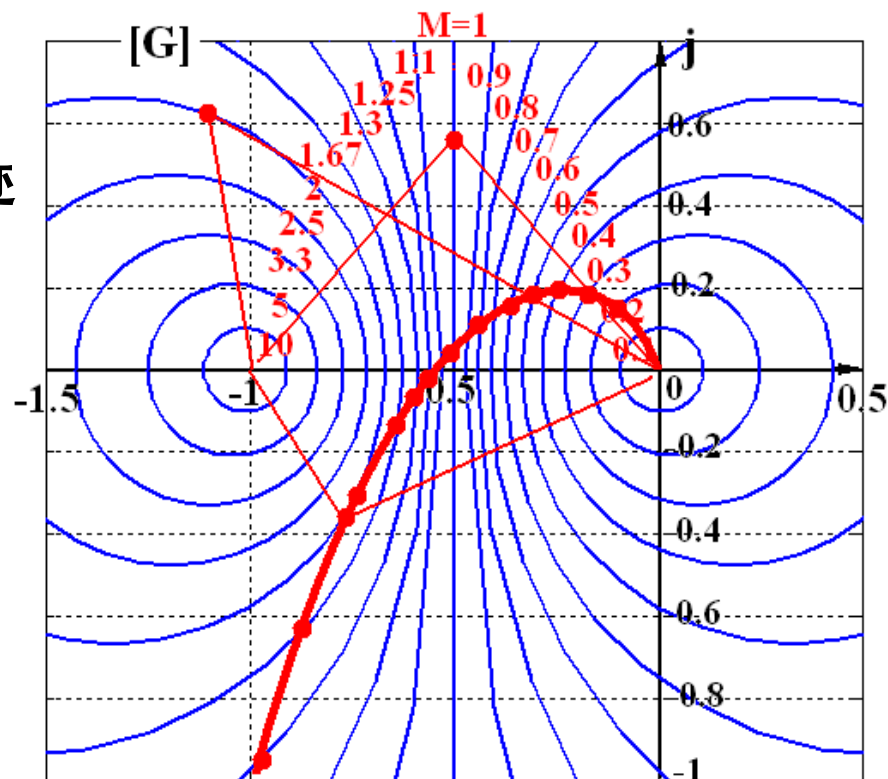
**等M圆** —  $|\Phi(\omega)| = \frac{OA}{BA}$  为常数的轨迹

设  $G(j\omega) = X + jY$

$$\Phi(j\omega) = M(\omega) \angle \alpha(\omega)$$

$$\begin{aligned} |\Phi| = M(\omega) &= \left| \frac{G}{1+G} \right| = \left| \frac{X + jY}{1 + X + jY} \right| \\ &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{(X+1)^2 + Y^2}} = M(\omega) \end{aligned}$$

整理得  $\left( X - \frac{M^2}{1-M^2} \right)^2 + Y^2 = \left( \frac{M}{1-M^2} \right)^2$  — 等M圆方程







## § 5.7 闭环频率特性曲线的绘制 (4)

**等N圆** —  $\angle OAB = \alpha$  为常数的轨迹

设  $G(j\omega) = X + jY$

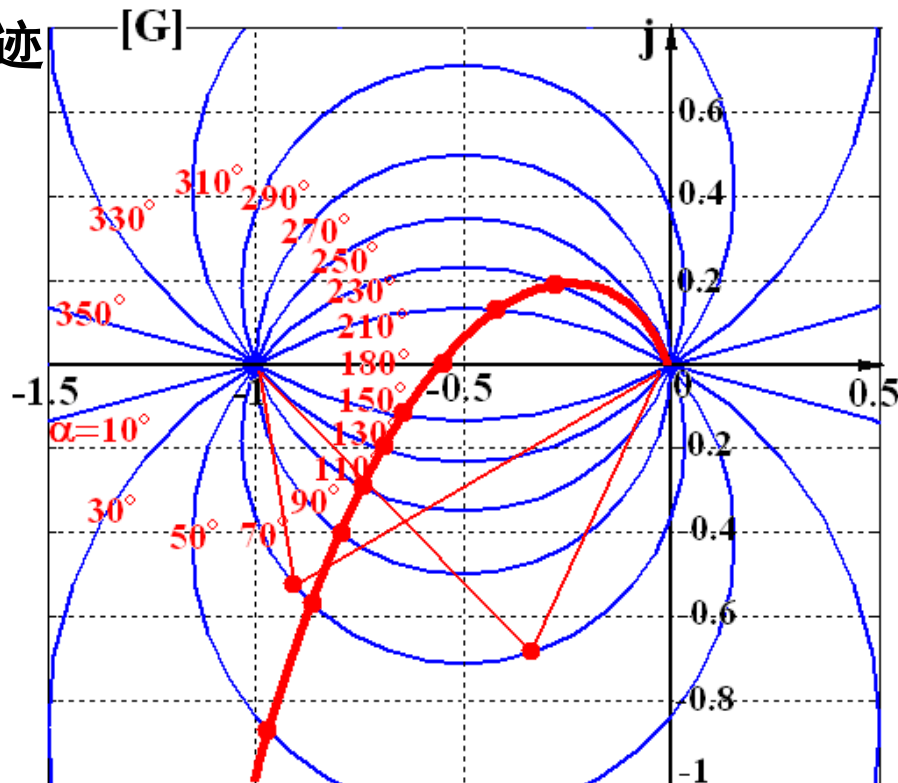
$$\Phi(j\omega) = \frac{G}{1+G} = \frac{X + jY}{1 + X + jY}$$

$$= \frac{X^2 + X + Y^2 + jY}{(X+1)^2 + Y^2}$$

$$\angle \Phi(\omega) = \arctan \frac{Y}{X^2 + X + Y^2} = \alpha$$

$$\tan \alpha = N(\omega) = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

整理得  $\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2}$  — 等N圆方程



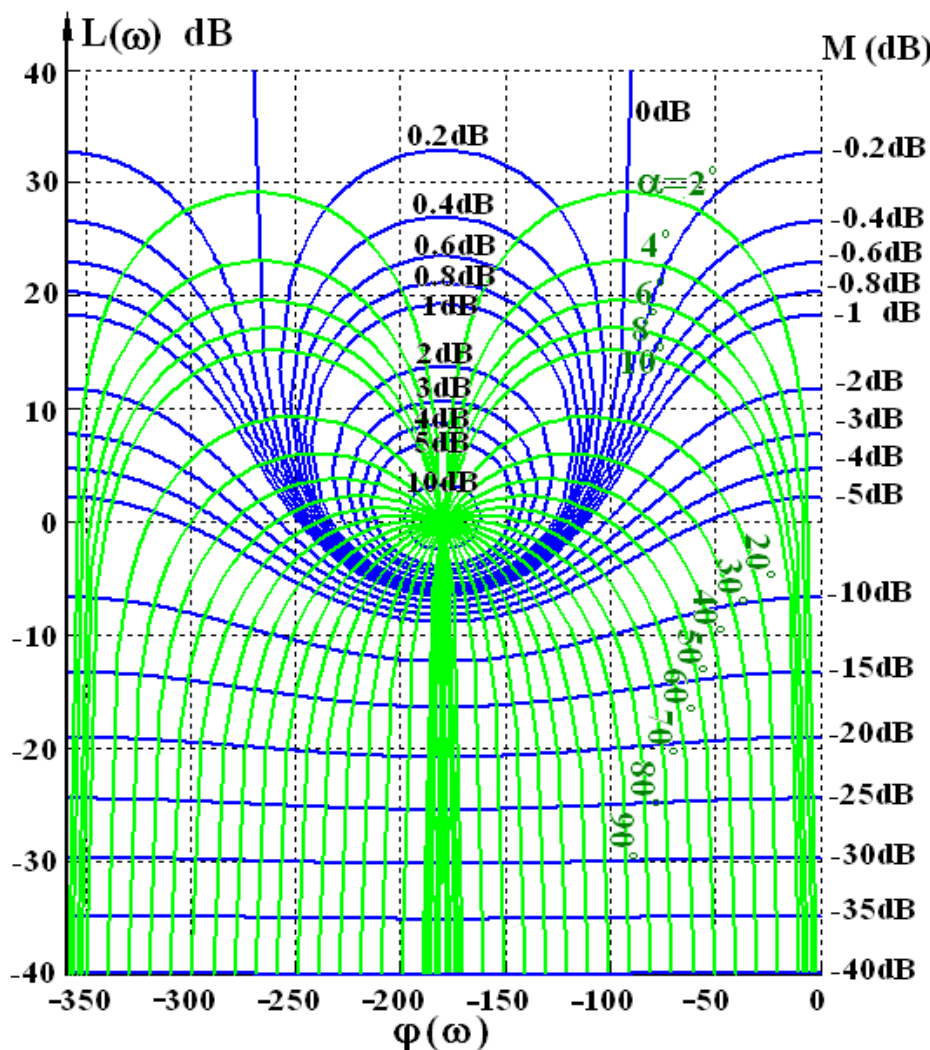
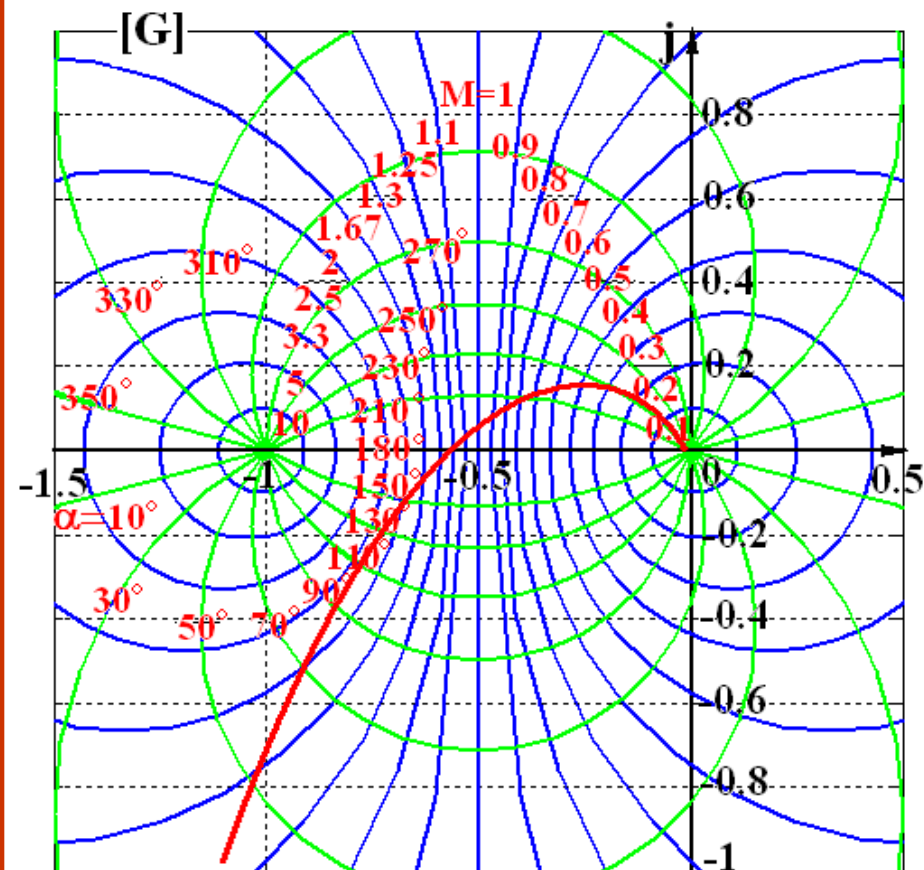
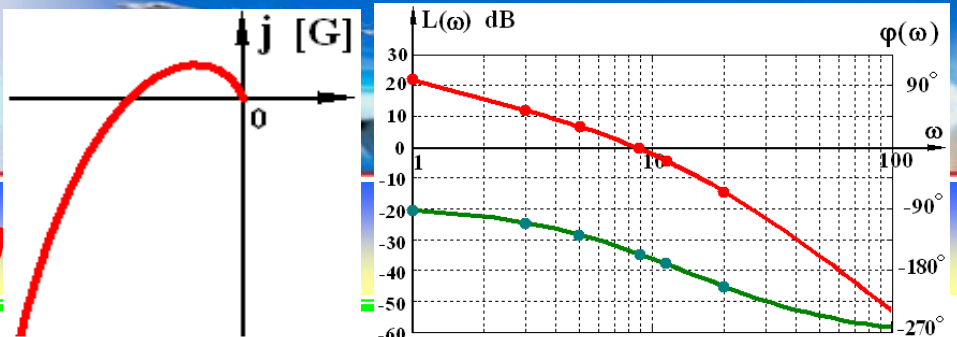


西北工业大学  
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## § 5.7 闭环频率特性曲线

### § 5.7.2 尼柯尔斯图线

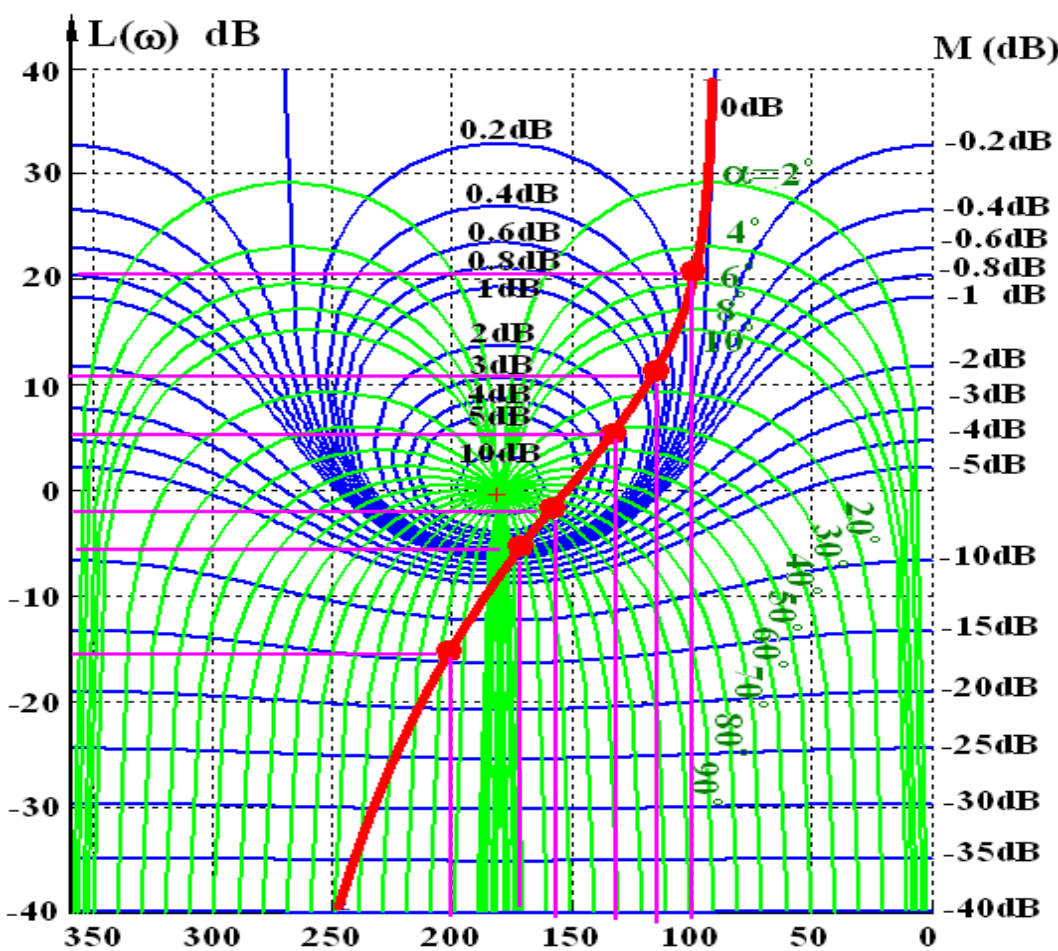
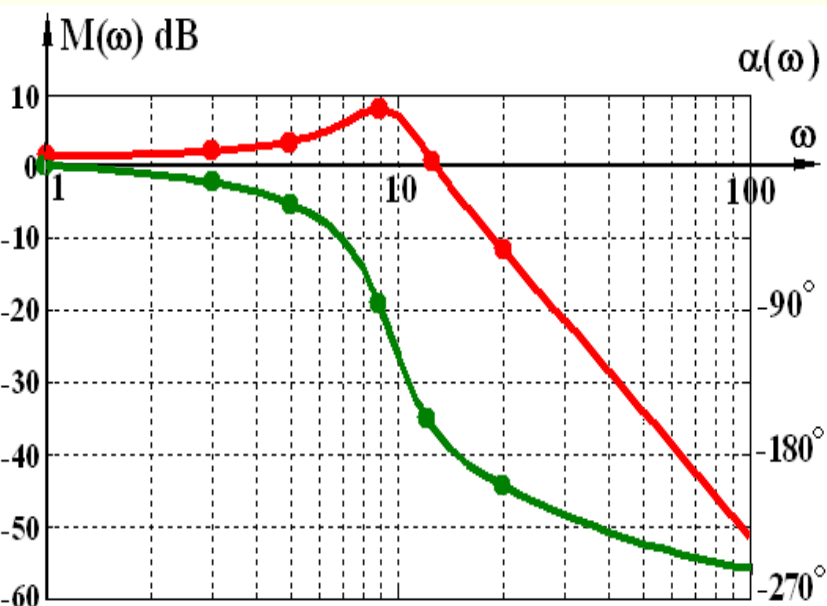
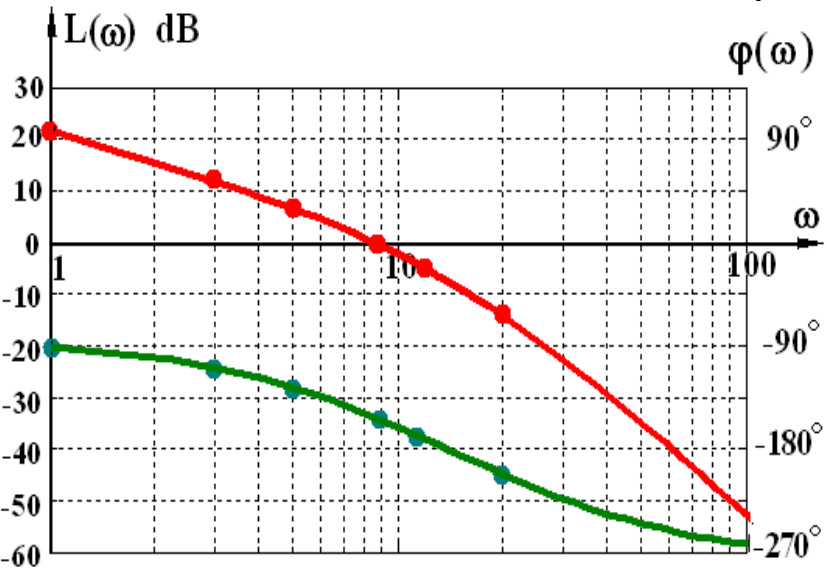
等M圆 等N圆图 → Nichols 图线





例1 已知  $G(s) = \frac{11.7}{s(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{20} + 1)}$   
 求  $\Phi(j\omega)$

$\omega$ rad/s	1	3	5	9	11.7	20
$L(\omega)$ dB	21.3	11.5	6.3	-1	-5.2	-14.5
$\varphi(\omega)$ (°)	-99°	-115°	-130°	-157°	-170°	-198°
$\varphi(\omega)$ (°)	0.1	0.67	2.2	6.9	1.5	-12.8
$M(\omega)$	1.01	1.08	1.29	2.21	1.19	0.23





## § 5.8 利用闭环频率特性分析系统的性能 (1)

### § 5.8.1 闭环频率特性的几个特征量

(1) 零频值  $M_0 = M(0)$

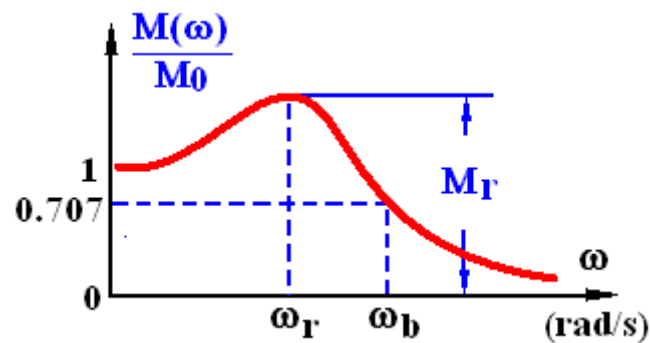
(2)  $\begin{cases} \text{谐振频率 } \omega_r \\ \text{谐振峰值 } M_r \end{cases}$

$$\text{对二阶欠阻尼系统} \begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ M_r = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \end{cases}$$

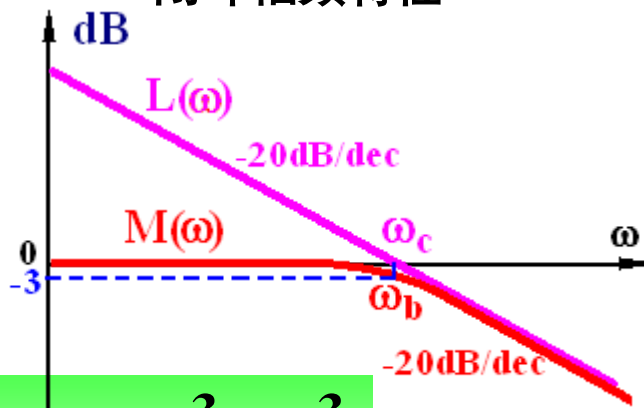
(3) 带宽频率  $\omega_b$

$M(\omega)$  下降到  $0.707 M_0$  对应的频率值  $\omega_b$

例2 一阶系统  $\begin{cases} G(s) = \frac{1}{Ts} & \omega_c = K = 1/T \\ \Phi(s) = \frac{1}{Ts + 1} & \omega_b = 1/T \end{cases}$



闭环幅频特性



$$t_s = 3T = \frac{3}{\omega_c} = \frac{3}{\omega_b}$$



## § 5.8 利用闭环频率特性分析系统的性能 (2)

例3 一台笔录仪的传递函数为  $\Phi(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ ，要求在5Hz以内时，记录仪的振幅误差不大于被测信号的10%，试确定记录仪应有的带宽  $\omega_b = ?$

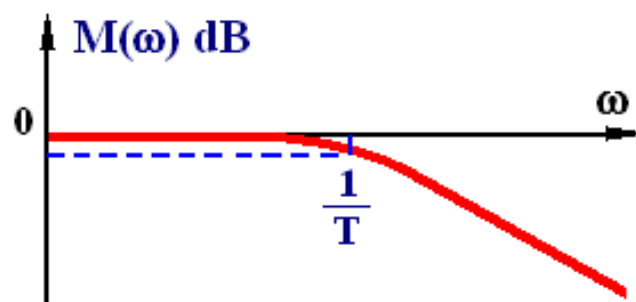
解. 依题意，当  $\omega = 5 \times 2\pi = 10\pi$  (rad/s) 时

$$\text{要求 } \left| \frac{1}{1 + jT\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \geq 0.9$$

$$\text{即 } T^2\omega^2 + 1 \leq \frac{1}{0.9^2}$$

$$T \leq \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{0.9^2} - 1} \Big|_{\omega=10\pi} = 0.0154$$

$$\omega_b = \frac{1}{T} \geq \frac{1}{0.0154} = 64.833 \text{ (rad/s)}$$





## § 5.8 利用闭环频率特性分析系统的性能 (3)

### § 5.8.2 闭环频域指标与时域指标的关系

(1) 二阶系统  $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

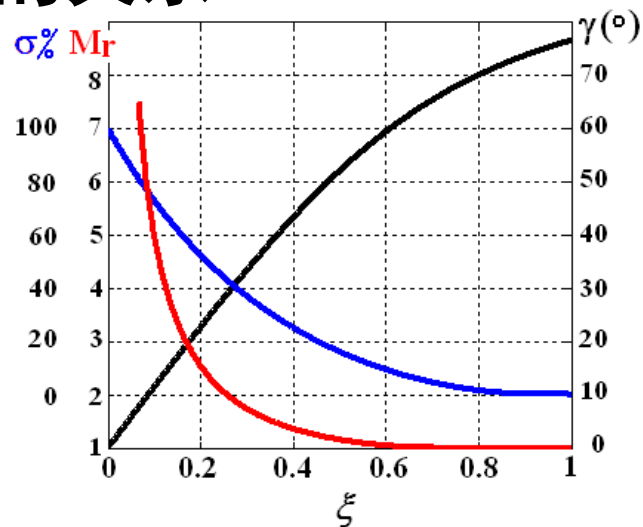
$$\begin{cases} \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \end{cases} \quad (0 \leq \xi \leq 0.707)$$

$$M(\omega_b) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_b)^2}} = 0.707$$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}$$

$$t_s = 3.5 / \xi \omega_n$$

$$\omega_b t_s = \frac{3.5}{\xi} \sqrt{1 - 2\xi^2} + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}$$





西北工  
NORTHWESTERN POLY

## § 5.8 利用闭环步

例4 实验测得某闭环系统的动态性能 (c

解. 依图, 可以确定是欠阻尼二阶系统

$$20\lg M_r = 3 \text{ dB}$$

$$\begin{cases} M_r = 10^{\frac{3}{20}} = 1.4125 \\ \omega_b = 5 \end{cases}$$

P171 图5-52

$$\xi = 0.4$$

$$\sigma \% = 25\%$$

P178 图5-60

$$t_s \cdot \omega_b = 13$$

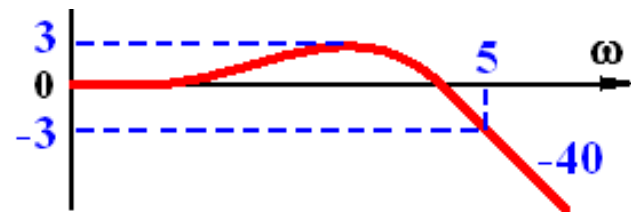
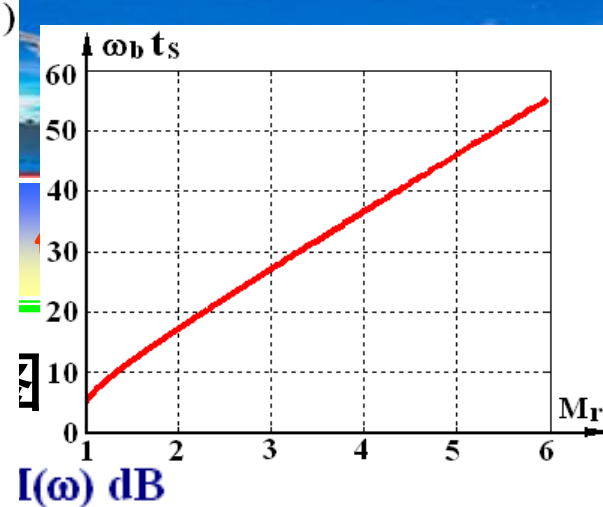
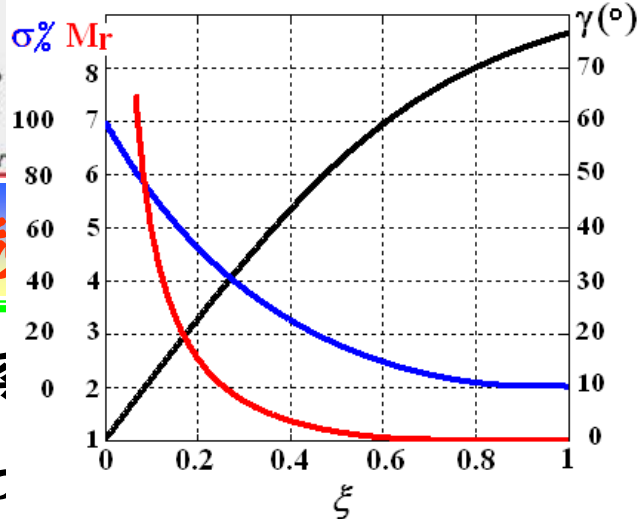
$$t_s = 13/5 = 2.6$$

$$\begin{cases} M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \\ \omega_b = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2 + \sqrt{2-4\xi^2 + 4\xi^4}} \end{cases}$$

解出  $\xi, \omega_n$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

可确定  $\sigma\%, t_s$





## § 5.8 利用闭环频率特性分析系统的性能 (5)

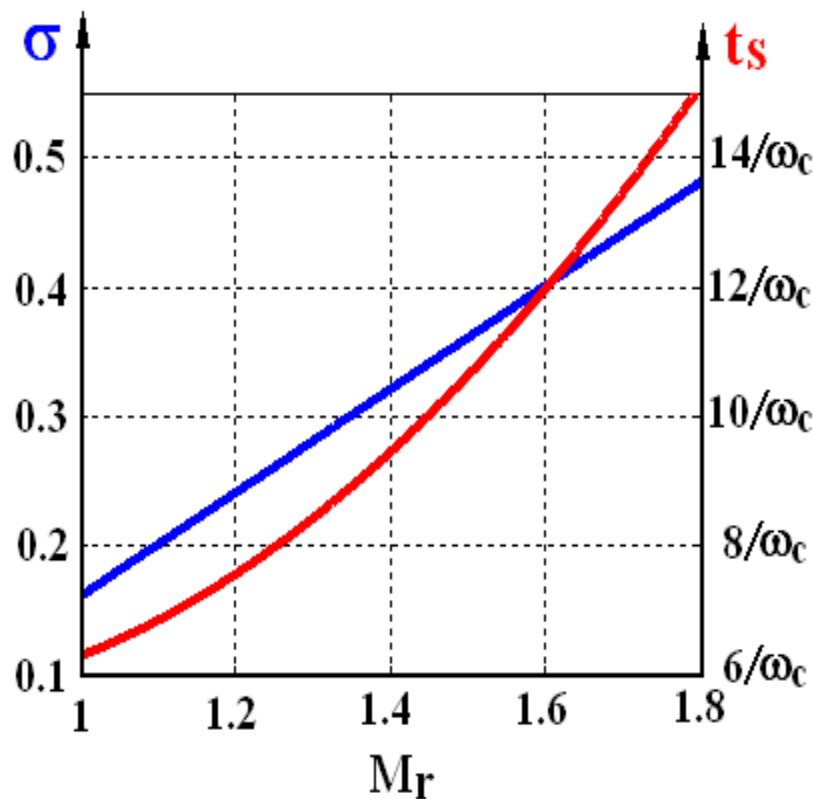
### (2) 高阶系统

$$\sigma\% = [0.16 + 0.4(M_r - 1)] \times 100\%$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2]$$

$$(1 \leq M_r \leq 1.8)$$

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma} \quad (35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ)$$





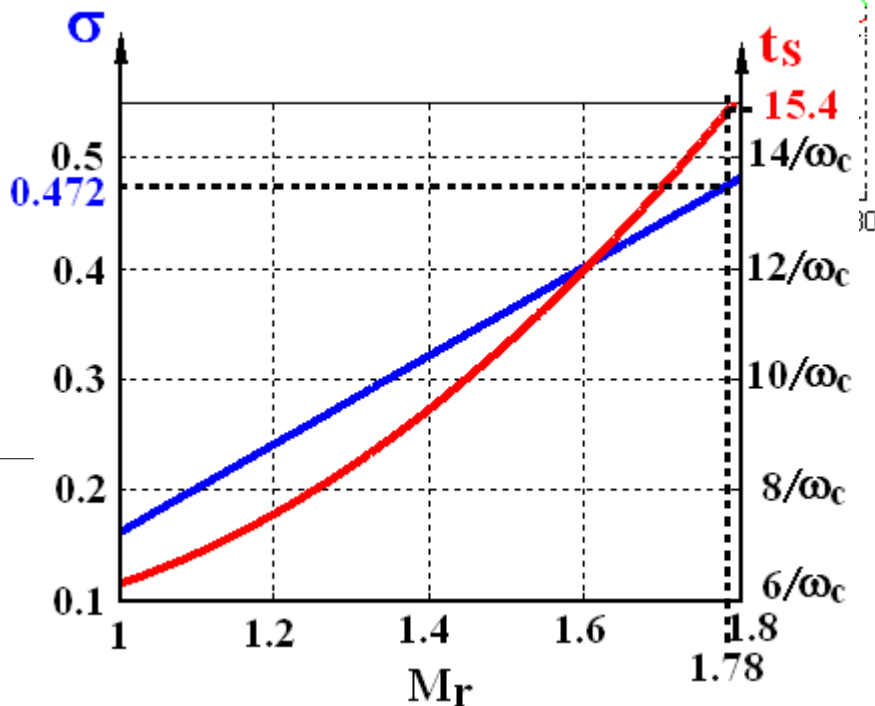
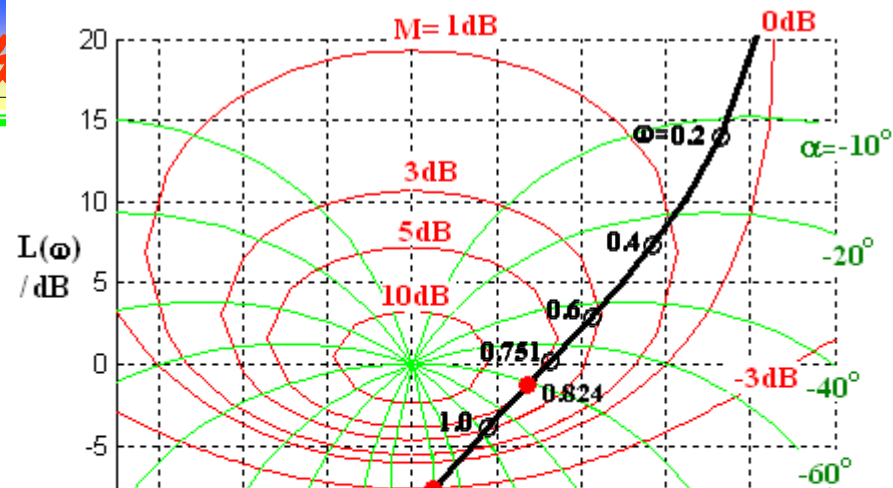
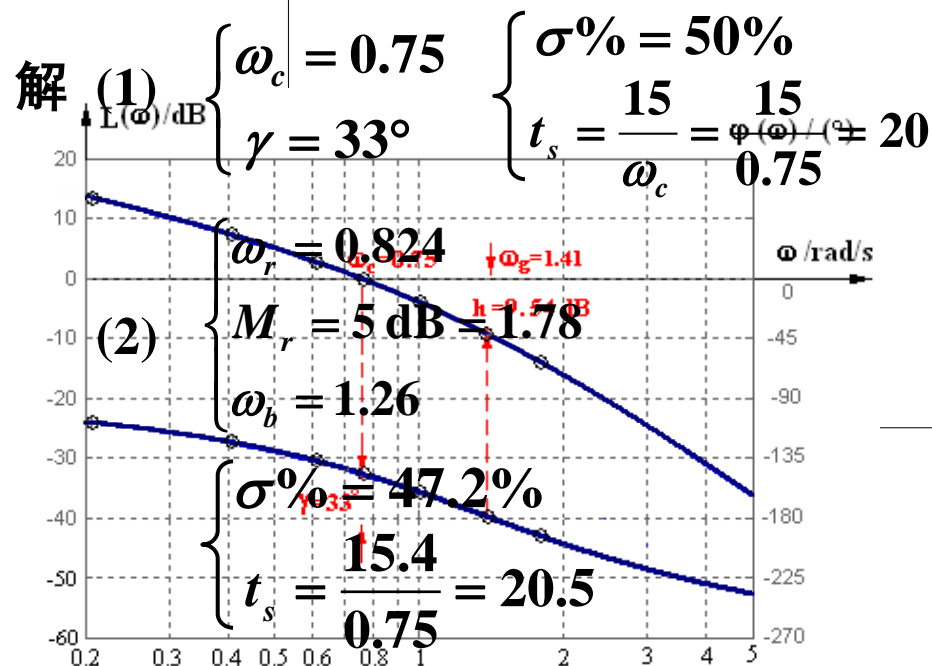
# 利用闭环频率特性估算性能 例5.16

## § 5.8 利用闭环频率特性

例5 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$

- (1) 绘制幅相特性曲线, 求 $\omega_c$ ,  $\gamma$ , 估算 $\sigma\%$ ,  $t_s$ ;
- (2) 绘制Nichols图, 求 $M_r$ ,  $\omega_r$ ,  $\omega_b$ 并估算 $\sigma\%$ ,  $t_s$ 。





## 课程小结(1)

# 用频域分析方法估算系统的动态性能

