

1. 写出非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式，并简要说明其物理意义。

2. 答非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式为  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ,  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ , (3

分) (表明了电磁场和它们的源之间的全部关系除了真实电流外，变化的电场（位移电流）也是磁场的源；

除电荷外，变化的磁场也是电场的源。

1. 写出时变电磁场在 1 为理想导体与 2 为理想介质分界面时的边界条件。

2. 时变场的一般边界条件  $D_{2n} = \sigma$ 、 $E_{2t} = 0$ 、 $H_{2t} = J_s$ 、 $B_{2n} = 0$ 。(或矢量式  $\vec{n} \cdot \vec{D}_2 = \sigma$ 、 $\vec{n} \times \vec{E}_2 = 0$ 、 $\vec{n} \times \vec{H}_2 = J_s$ 、 $\vec{n} \cdot \vec{B}_2 = 0$ )

1. 写出矢量位、动态矢量位与动态标量位的表达式，并简要说明库仑规范与洛伦兹规范的意义。

2. 答矢量位  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ,  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ；动态矢量位  $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  或  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$ 。库仑规范与洛伦兹规

范的作用都是限制  $\vec{A}$  的散度，从而使  $\vec{A}$  的取值具有唯一性；库仑规范用在静态场，洛伦兹规范用在时变场。

1. 简述穿过闭合曲面的通量及其物理定义

2.  $\Phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$  是矢量  $\vec{A}$  穿过闭合曲面  $S$  的通量或发散量。若  $\Phi > 0$ ，流出  $S$  面的通量大于流入的

通量，即通量由  $S$  面内向外扩散，说明  $S$  面内有正源若  $\Phi < 0$ ，则流入  $S$  面的通量大于流出的通量，即通量向  $S$  面内汇集，说明  $S$  面内有负源。若  $\Phi = 0$ ，则流入  $S$  面的通量等于流出的通量，说明  $S$  面内无源。

1. 证明位置矢量  $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$  的散度，并由此说明矢量场的散度与坐标的选择无关。

2. 证明在直角坐标系里计算  $\nabla \cdot \vec{r}(\vec{r})$ ，则有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{r}(\vec{r}) &= \left( \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \end{aligned}$$

若在球坐标系里计算，则

$$\nabla \cdot \vec{r}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = 3 \text{ 由此说明了矢量场的散度与坐标的选择无关。}$$

1. 在直角坐标系证明  $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$

2.

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A}$$

$$= (\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) [\vec{e}_x (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \vec{e}_y (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \vec{e}_z (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) = 0$$

1. 简述亥姆霍兹定理并举例说明。

2. 亥姆霍兹定理研究一个矢量场，必须研究它的散度和旋度，才能确定该矢量场的性质。

例静电场

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum q_0 \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \quad \text{有源}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{无旋}$$

1. 已知  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ ，证明  $\nabla R = -\nabla' R = \frac{R'}{R} \vec{e}_R$ 。

2. 证明

$$\nabla R = \vec{e}_x \frac{\partial R}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial R}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial R}{\partial z} = \vec{e}_x \frac{x - x'}{R} + \vec{e}_y \frac{y - y'}{R} + \vec{e}_z \frac{z - z'}{R}$$

$$\nabla' R = \dots = -\nabla R$$

1. 试写出一般电流连续性方程的积分与微分形式，恒定电流的呢？

2. 一般电流  $\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = -dq/dt$ ,  $\nabla \cdot \vec{J} = -\partial \rho / \partial t$  ;

恒定电流  $\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

1. 电偶极子在匀强电场中会受作怎样的运动？在非匀强电场中呢？

2. 电偶极子在匀强电场中受一个力矩作用，发生转动；非匀强电场中，不仅受一个力矩作用，发生转动，还要受力的作用，使电偶极子中心发生平动，移向电场强的方向。

1. 试写出静电场基本方程的积分与微分形式。

2. 答静电场基本方程的

$$\text{积分形式} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q \quad , \quad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\text{微分形式} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

1. 试写出静电场基本方程的微分形式，并说明其物理意义。

2. 静电场基本方程微分形式  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \nabla \times \vec{E} = 0$  , 说明激发静电场的源是空间电荷的分布 ( 或是激发静电场的源是电荷的分布 )。

1. 试说明导体处于静电平衡时特性。

2. 答导体处于静电平衡时特性有

导体内  $\vec{E} = 0$  ;

导体是等位体 ( 导体表面是等位面 );

导体内无电荷, 电荷分布在导体的表面 (孤立导体, 曲率);

导体表面附近电场强度垂直于表面, 且  $\vec{E} = \sigma \vec{n} / \epsilon_0$ 。

1. 试写出两种介质分界面静电场的边界条件。

2. 答在界面上 D 的法向量连续  $D_{1n} = D_{2n}$  或  $(\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_2 = \vec{n}_1 \cdot \vec{D}_1)$ ; E 的切向分量连续  $E_{1t} = E_{2t}$  或  $(\vec{n}_1 \times \vec{E}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{E}_2)$

1. 试写出 1 为理想导体, 二为理想介质分界面静电场的边界条件。

2. 在界面上 D 的法向量  $D_{2n} = \sigma$  或  $(\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_2 = \sigma)$ ; E 的切向分量  $E_{2t} = 0$  或  $(\vec{n}_1 \times \vec{E}_2 = 0)$

1. 试写出电位函数  $\phi$  表示的两种介质分界面静电场的边界条件。

2. 答电位函数  $\phi$  表示的两种介质分界面静电场的边界条件为  $\phi_1 = \phi_2$ ,  $\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$

1. 试推导静电场的泊松方程。

2. 解由  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ , 其中  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{E} = -\nabla \phi$ ,

$\therefore \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \epsilon \vec{E}$   $\epsilon$  为常数

$\therefore \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$  泊松方程

1. 简述唯一性定理, 并说明其物理意义

2. 对于某一空间区域 V, 边界面为 s, 满足

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \text{ 或 } \nabla^2 \phi = 0,$$

给定  $\rho(\vec{r})$ ,  $\phi|_s$  或  $\frac{\partial \phi}{\partial s}|_s$  (对导体给定 q)

则解是唯一的。只要满足唯一性定理中的条件, 解是唯一的, 可以用能想到的最简便的方法求解 (直接求解法、镜像法、分离变量法.....), 还可以由经验先写出试探解, 只要满足给定的边界条件, 也是唯一解。

不满足唯一性定理中的条件无解或有多解。

1. 试写出恒定电场的边界条件。

2. 答恒定电场的边界条件为  $\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0$  ,  $\vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

1. 分离变量法的基本步骤有哪些？

2. 答具体步骤是 1、先假定待求的位函数由两个或三个各自仅含有一个坐标变量的乘积所组成。2、把假定的函数代入拉氏方程，使原来的偏微分方程转换为两个或三个常微分方程。解这些方程，并利用给定的边界条件决定其中待定常数和函数后，最终即可解得待求的位函数。

1. 叙述什么是镜像法？其关键和理论依据各是什么？

2. 答镜像法是用等效的镜像电荷代替原来场问题的边界，其关键是确定镜像电荷的大小和位置，理论依据是唯一性定理。

7、 试题关键字恒定磁场的基本方程

1. 试写出真空中恒定磁场的基本方程的积分与微分形式，并说明其物理意义。

2. 答真空中恒定磁场的基本方程的积分与微分形式分别为

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

说明恒定磁场是一个无散有旋场，电流是激发恒定磁场的源。

1. 试写出恒定磁场的边界条件，并说明其物理意义。

2. 答: 恒定磁场的边界条件为:  $\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$  ,  $\vec{n} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$  , 说明磁场在不同的边界条件下磁场强度的切向分量是不连续的，但是磁感应强度的法向分量是连续。

1. 一个很薄的无限大导电带电面，电荷面密度为  $\sigma$ 。证明垂直于平面的 z 轴上  $z = z_0$  处的电场强度 E 中，有一半是有平面上半径为  $\sqrt{3}z_0$  的圆内的电荷产生的。

2. 证明半径为 r、电荷线密度为  $\rho_l = \sigma dr$  的带电细圆环在 z 轴上  $z = z_0$  处的电场强度为

$$d\vec{E} = \vec{e}_z \frac{r \sigma z_0 dr}{2 \epsilon_0 (r^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

故整个导电带电面在 z 轴上  $z = z_0$  处的电场强度为

$$\vec{E} = \vec{e}_z \int_0^\infty \frac{r \sigma z_0 dr}{2 \epsilon_0 (r^2 + z_0^2)^{3/2}} = -\vec{e}_z \frac{\sigma z_0}{2 \epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + z_0^2)^{1/2}} \bigg|_0^\infty = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

而半径为  $\sqrt{3}z_0$  的圆内的电荷产生在 z 轴上  $z = z_0$  处的电场强度为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{e}_z \int_0^{\sqrt{3}z_0} \frac{r \sigma z_0 dr}{2\epsilon_0 (r^2 + z_0^2)^{3/2}} = -\mathbf{e}_z \frac{\sigma z_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + z_0^2)^{1/2}} \bigg|_0^{\sqrt{3}z_0} = \mathbf{e}_z \frac{\sigma}{4\epsilon_0} = \frac{1}{2} \mathbf{E}$$

1. 由矢量位的表示式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\tau'$$

证明磁感应强度的积分公式

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\tau'$$

并证明  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

2. 答

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \left( -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\tau' \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] = 0$$

1. 由麦克斯韦方程组出发，导出点电荷的电场强度公式和泊松方程。

2. 解 点电荷 q 产生的电场满足麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \text{ 和 } \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

由  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  得

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{D} d\tau = \int_{\tau} \rho d\tau$$

据散度定理，上式即为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

利用球对称性，得

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi r^2}$$

故得点电荷的电场表示式

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

由于  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  , 可取  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$  , 则得

$$\nabla \times \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = -\epsilon \nabla \cdot \nabla \phi = -\epsilon \nabla^2 \phi = \rho$$

即得泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

1. 写出在空气和  $\mu = \infty$  的理想磁介质之间分界面上的边界条件。

2. 解 空气和理想导体分界面的边界条件为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$$

根据电磁对偶原理, 采用以下对偶形式

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, \mathbf{J}_s \rightarrow \mathbf{J}_{ms}$$

即可得到空气和理想磁介质分界面上的边界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_{ms}$$

式中,  $\mathbf{J}_{ms}$  为表面磁流密度。

1. 写出麦克斯韦方程组 (在静止媒质中) 的积分形式与微分形式。

2.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_s \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$



1. 试写媒质 1 为理想介质 2 为理想导体分界面时变场的边界条件。

2. 答边界条件为

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad \text{或} \quad \vec{n} \times \vec{E}_1 = 0$$

$$\vec{H}_{1t} = \vec{J}_s \quad \text{或} \quad \vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s$$

$$B_{1n} = B_{2n} = 0 \quad \text{或} \quad \vec{n} \cdot \vec{B}_1 = 0$$

$$D_{1n} = \rho_s \quad \text{或} \quad \vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \rho_s$$

1. 试写出理想介质在无源区的麦克斯韦方程组的复数形式。

2. 答

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

1. 试写出波的极化方式的分类，并说明它们各自有什么样的特点。

2. 答波的极化方式的分为圆极化，直线极化，椭圆极化三种。

圆极化的特点  $E_{xm} = E_{ym}$ ，且  $E_{xm}, E_{ym}$  的相位差为  $\pm \frac{\pi}{2}$ ，

直线极化的特点  $E_{xm}, E_{ym}$  的相位差为相位相差  $0, \pi$ ，

椭圆极化的特点  $E_{xm} \neq E_{ym}$ ，且  $E_{xm}, E_{ym}$  的相位差为  $\pm \frac{\pi}{2}$  或  $0, \pi$ ，

1. 能流密度矢量（坡印廷矢量） $\vec{S}$ 是怎样定义的？坡印廷定理是怎样描述的？

2. 答能流密度矢量（坡印廷矢量） $\vec{S}$ 定义为单位时间内穿过与能量流动方向垂直的单位截面的能量。坡印

廷定理的表达式为  $-\oint_s (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}(W_e + W_m) + P_r$  或

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) d\tau + \int_V \gamma E^2 d\tau, \text{ 反映了电磁场中能量的守恒和转换关系。}$$

1. 试简要说明导电媒质中的电磁波具有什么样的性质？（设媒质无限大）

2. 答导电媒质中的电磁波性质有电场和磁场垂直；振幅沿传播方向衰减；

电场和磁场不同相；以平面波形式传播。

2. 时变场的一般边界条件  $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$ 、 $E_{1t} = E_{2t}$ 、 $H_{1t} - H_{2t} = J_s$ 、 $B_{1n} = B_{2n}$ 。（写成矢量式

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma, \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0, \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s, \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \text{ 一样给 5 分})$$

1. 写出非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式，并简要说明其物理意义。

2. 答非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式为  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \cdot \vec{D} = \rho$

（表明了电磁场和它们的源之间的全部关系除了真实电流外，变化的电场（位移电流）也是磁场的源；除电荷外，变化的磁场也是电场的源。

1. 写出时变电磁场在 1 为理想导体与 2 为理想介质分界面时的边界条件

2. 时变场的一般边界条件  $D_{2n} = \sigma$ 、 $E_{2t} = 0$ 、 $H_{2t} = J_s$ 、 $B_{2n} = 0$ 。（写成矢量式  $\vec{n} \cdot \vec{D}_2 = \sigma$ 、

$$\vec{n} \times \vec{E}_2 = 0, \vec{n} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_s, \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = 0 \text{ 一样给 5 分})$$

1. 写出矢量位、动态矢量位与动态标量位的表达式，并简要说明库伦规范与洛伦兹规范的意义。

2. 答矢量位  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \nabla \cdot \vec{A} = 0$ ；动态矢量位  $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  或  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$ 。库伦规范与洛伦兹

规范的作用都是限制  $\vec{A}$  的散度，从而使  $\vec{A}$  的取值具有唯一性；库伦规范用在静态场，洛伦兹规范用在时变场。

1. 描述天线特性的参数有哪些？



2. 答描述天线的特性能数有辐射场强、方向性及它的辐射功率和效率。

1. 天线辐射的远区场有什么特点？

2. 答天线的远区场的电场与磁场都是与  $1/r$  成正比，并且它们同相，它们在空间相互垂直，其比值即为媒质的本征阻抗，有能量向外辐射。

1. 真空中有一导体球 A，内有两个介质为空气的球形空腔 B 和 C。其中心处分别放置点电荷  $Q_1$  和  $Q_2$ ，试求空间的电场分布。

2. 对于 A 球内除 B C 空腔以外的地区，由导体的性质可知其内场强为零。对 A 球之外，由于在 A 球表面均匀分布  $Q_1 + Q_2$  的电荷，所以 A 球以外区域

$$E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{方向均沿球的径向})$$

对于 A 内的 B C 空腔内，由于导体的屏蔽作用则

$$E_B = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \quad (r_1 \text{ 为 B 内的点到 B 球心的距离})$$

$$E_C = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \quad (r_2 \text{ 为 C 内的点到 C 球心的距离})$$