

机器人学基础

国家级《智能科学基础系列课程教学团队》

“机器人学”课程配套教材

蔡自兴 主编

第3章 机器人运动学 (2)

第3章 机器人运动学

- 3.1 机器人运动方程的表示
- 3.2 连杆参数、连杆坐标系
- 3.3 连杆坐标变换和运动学方程
- 3.4 机器人运动学建模
- 3.5 机器人逆运动学

例3.1：如图3.5所示为一平面三杆机械臂。三个关节均为转动关节，三个关节轴线平行，称该操作臂为RRR（或3R）机构。设定该机构的连杆坐标系并写出D-H参数表。

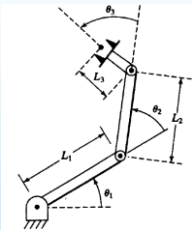


图3.5 平面三连杆机械臂

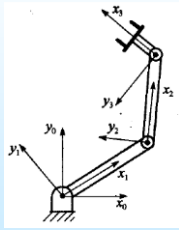
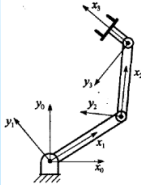


图3.6 连杆坐标系(前置坐标系)

表3.1 平面三连杆操作臂的连杆参数表

连杆编号 i	a_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1.	0	0	0	θ_1
2.	0	L_1	0	θ_2
3.	0	L_2	0	θ_3



思考：如何计算末端手爪相对于基坐标系的空间位姿？

包含移动关节的机器人的连杆坐标系及连杆参数表

例3.2：如图3.8所示为3自由度机器人，其中包括一个移动关节。该机械臂称为RPR型机构，是一种柱坐标机器人，关节轴1和关节轴2相互垂直。

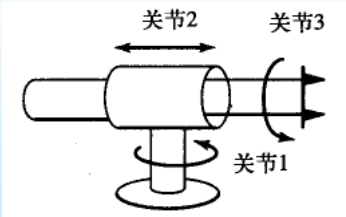
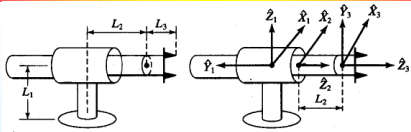
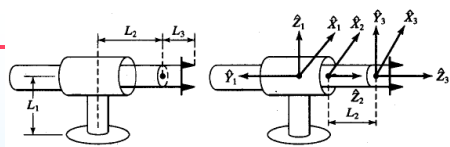


图3.8 包含一个移动关节的三自由度机械臂



注意：坐标系{0}虽然没有建在机器人法兰基座的最底部，但仍然刚性地固结于连杆0上，即机器人固定不动的部分。正如在进行机器人运动学分析时并不需要将连杆坐标系一直向上描述到机械手的外部一样，反过来也不必将连杆坐标系固结于机器人基座的最底部。只需将坐标系{0}建立在固定连杆的任意位置，把坐标系{n}建立在操作臂末端连杆的任意位置即可。



机器人所处的位置 $\theta_1 = 0$ ，所以坐标系 $\{0\}$ 和坐标系 $\{1\}$ 在图中完全重合

表3 RPR型操作臂的连杆参数表

连杆编号 i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1.	0	0	0	θ_1
2.	90°	0	d_2	0
3.	0	0	L_2	θ_3

7

小结：连杆坐标系建立

- 在每个连杆的关节轴上建立一个笛卡尔坐标系 $x_i y_i z_i$ ， $(i=1, 2, \dots, n)$ ， n 是自由度数，加上基座坐标系，共需建立 $(n+1)$ 个坐标系；
- 基座坐标系设为 $\{0\}$ ($x_0 y_0 z_0$)，在基座上的位置和方向可任选，但 z_0 轴线与关节1的轴线重合；
- 末端坐标系设为 $\{n\}$ ($x_n y_n z_n$)。

8

小结：连杆坐标系建立

原则：先建立中间坐标系 $\{i\}$ ，后两端坐标系 $\{0\}$ 和 $\{n\}$ ；

- (1) 确定 **z轴**：找出关节轴线及关节转向采用右手定则确定 z ；
- (2) 确定 **原点**：如果两相邻轴线 z_i 与 z_{i+1} 不相交，则公垂线与轴线 i 的交点为原点，注意平行时原点的选择应使偏置为零；如果相交则交点为原点，注意如果重合则原点应使偏置为零；
- (3) 确定 **x轴**：两轴线不相交时， x 轴与公垂线重合，指向从 i 到 $i+1$ ；
若两轴线相交，则 x 是两轴线所成平面的法线 $x = z_i \times z_{i+1}$ ；
注意如果两轴线重合，则 x 轴与轴线垂直且其他连杆参数为零；
- (4) 按右手定则确定 **y轴**；
- (5) 当第一个关节变量为零时，规定 $\{0\}$ 与 $\{1\}$ 重合，对于末端坐标系 $\{n\}$ ，原点与 x 轴任选，希望坐标系 $\{n\}$ 使连杆参数尽量为零。

9

3.3 连杆坐标变换和运动学方程

10

3.3 连杆坐标变换和运动学方程

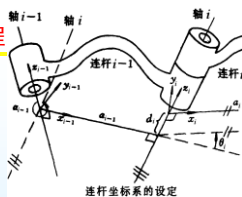
连杆参数定义

连杆坐标系规定的连杆参数

根据所设定的连杆坐标系，相应的连杆参数可定义如下：

- ❖ a_{i-1} (或 a_i) 是从 z_{i-1} 到 z_i 沿 x_{i-1} 测量的距离；
- ❖ α_{i-1} (或 α_i) 是从 z_{i-1} 到 z_i 绕 x_{i-1} 旋转的角度；
- ❖ d_i 是从 x_{i-1} 到 z_i 沿 z_i 测量的距离；
- ❖ θ_i 是从 x_{i-1} 到 x_i 绕 z_i 旋转的角度。

a_{i-1} 代表连杆 $i-1$ 的长度，因此规定 $a_{i-1} \geq 0$ ；而 α_{i-1} ， d_i ， θ_i 的值可正、可负。



11

3.3 连杆坐标变换和运动学方程

3.3.1 相邻连杆间的齐次坐标变换

规定了连杆坐标系后，则两相邻连杆的空间位姿关系可由连杆坐标系 $\{i\}$ 相对 $\{i-1\}$ 的变换 ${}^{i-1}T_i = A_i$ ，称为 **连杆坐标变换**。

按照一定顺序由两个旋转和两个平移来建立相邻连杆 $i-1$ 与 i 间的 **连杆坐标变换矩阵**。

${}^{i-1}T_i$ 与 a_{i-1} (或 a_i)， α_{i-1} (或 α_i)， d_i 和 θ_i 这四个连杆参数有关。

则可将连杆变换 ${}^{i-1}T_i$ 分解为四个基本的子变换，各子变换只依赖于一个连杆参数，可以直接写出来。

12

$${}^0_n\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中，前三列表示末端坐标系相对于固定参考坐标系的姿态，第四列表示末端坐标系的位置。

19

小结

机器人操作臂D-H坐标法运动学建模过程：

- 将机器人机械系统模型简化，用直线代替各连杆；
- 用圆圈或圆点符号表示关节，绘制机器人连杆图；机械臂的尺寸链图；
- 在连杆回转轴上建立各连杆坐标系（前置或后置坐标系）；
- 根据连杆坐标系，写出连杆参数表；
- 根据连杆坐标变换的通式计算相邻连杆的齐次坐标变换矩阵；
- 计算末端连杆相对于基座的齐次变换矩阵，得运动学方程。

20

3.4 机器人运动学建模

机器人运动学方程

$${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}(q_1) \cdot {}^1_2\mathbf{T}(q_2) \cdots {}^{n-1}_n\mathbf{T}(q_n) = \begin{bmatrix} {}^0_n\mathbf{R} & {}^0_n\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_n\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^0_n\mathbf{n} & {}^0_n\mathbf{o} & {}^0_n\mathbf{a} & {}^0_n\mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中，前三列表示末端坐标系相对于参考坐标系的姿态，第四列表示末端坐标系原点的位置。

表示末端连杆的位姿与关节变量 q_1, q_2, \dots, q_n 之间的关系。

21

例 PUMA560机器人运动学建模

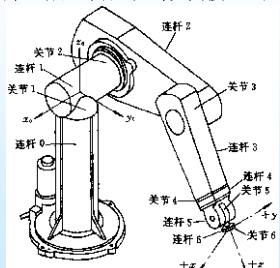
PUMA系列机器人是串联工业机器人中的典型代表。

PUMA机器人是有美国Unimation公司研制开发的一种计算机控制的多关节装配工业机器人，在瑞典和日本也有生产，分为大型、中型和小型三类。每一机型均有腰回转、肩回转和肘回转，构成实现空间位置坐标的三个基本关节轴；手腕回转、摆动和旋转实现三个姿态的自由度，共有6个自由度。

22

1.基本结构

PUMA 560机器人是关节式机器人，由6个连杆和6个关节组成。手爪与连杆6固接，基座固定。基座称为连杆0，不包含在6个连杆之内。连杆1与基座由关节1相连接；连杆2与连杆1通过关节2相连接，……。



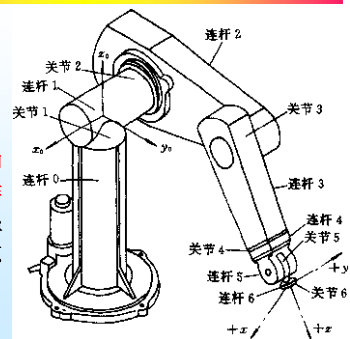
PUMA 560 机器人的连杆与关节示意图

23

1.基本结构

前3个关节确定手腕参考点的位置，后3个确定手腕的方位。

由于后3个关节轴连线交于一点。该点选作手腕的参考点，也是坐标系{4}、{5}、{6}的原点。



24

1.基本结构

PUMA560的6个关节都是转动关节(见图3-7a)。关节1的轴线为铅直方向, 关节2和3的轴线水平平行, 距离为 a_2 ; 关节1和2的轴线垂直相交, 关节3和4的轴线垂直交错, 距离为 a_3 。

其中,

$$a_2=431.8\text{mm}$$

$$a_3=20.32\text{mm}$$

$$d_2=149.09\text{mm}$$

$$d_4=433.07\text{mm}$$

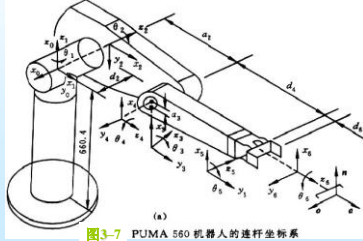


图3-7 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

2.建立连杆坐标系

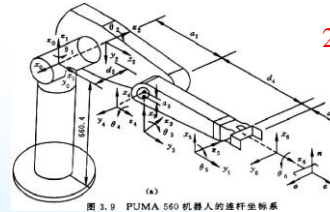


图 3-9 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

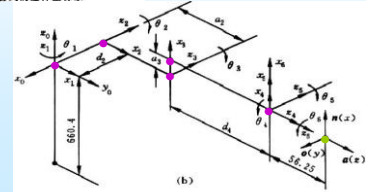


图3-7 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

表 3.3 PUMA 560 机器人连杆参数表

3.列出连杆参数表

连杆 i	变量 θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	变量范围
1	$\theta_1(90^\circ)$	0°	0	0	$-160^\circ \sim 160^\circ$
2	$\theta_2(0^\circ)$	-90°	0	d_2	$-225^\circ \sim 45^\circ$
3	$\theta_3(-90^\circ)$	0°	a_2	0	$-45^\circ \sim 225^\circ$
4	$\theta_4(0^\circ)$	-90°	a_3	d_4	$-110^\circ \sim 170^\circ$
5	$\theta_5(0^\circ)$	90°	0	0	$-100^\circ \sim 100^\circ$
6	$\theta_6(0^\circ)$	-90°	0	0	$-266^\circ \sim 266^\circ$

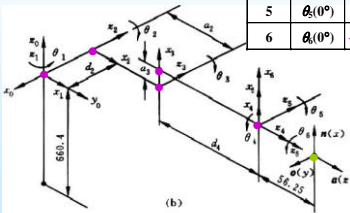


图3-7 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

注意: 表中数据是按前置坐标系定义各连杆的参数; 对后置坐标系情况, 上述参数的值是不同的。