机器人学基础

国家级《智能科学基础系列课程教学团队》
“机器人学”课程配套教材
蔡自兴 主编

第2章　数学基础（3）

第二章　位姿描述和齐次变换

2.4　齐次变换矩阵的运算

2.4 齐次变换矩阵的运算

2.4.1 齐次变换矩阵相乘

对应给定的坐标系$\{A\}$、$\{B\}$和$\{C\}$，

已知$\{B\}$相对于$\{A\}$的齐次变换矩阵为${}^{A}_{B}\mathbf{T}$

$\{C\}$相对于$\{B\}$的齐次变换矩阵为${}^{B}_{C}\mathbf{T}$

如果点P在坐标系$\{A\}$中的齐次坐标向量为${}^{A}\mathbf{p}$，点P在坐标系$\{B\}$中的齐次坐标向量为${}^{B}\mathbf{p}$，在坐标系$\{C\}$中的位置向量为${}^{C}\mathbf{p}$，则有以下关系：

$$ {}^{B}\mathbf{p} = {}^{B}_{C}\mathbf{T} \cdot {}^{C}\mathbf{p} $$
$$ {}^{A}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}\mathbf{T} \cdot {}^{B}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}\mathbf{T} \cdot {}^{B}_{C}\mathbf{T} \cdot {}^{C}\mathbf{p} $$

定义复合变换，${}^{A}_{C}\mathbf{T} = {}^{A}_{B}\mathbf{T} \cdot {}^{B}_{C}\mathbf{T}$

${}^{A}_{C}\mathbf{T}$表示坐标系$\{C\}$相对于$\{A\}$的描述。

2.4.2 齐次变换矩阵求逆

坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的变换用${}^{A}_{B}\mathbf{T}$来表示，求$\{A\}$相对于$\{B\}$的描述。是齐次变换${}^{A}_{B}\mathbf{T}$求逆问题。

${}^{A}_{B}\mathbf{T} \rightarrow {}^{B}_{A}\mathbf{T}$

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{T}^{-1} = {}^{B}_{A}\mathbf{T} = ? $$

方法一：利用线性代数理论，直接求逆

方法二：利用齐次变换矩阵的特点，求逆

由于直接求解逆矩阵的方法涉及较多代数余子式的运算，计算量较大。而齐次变换矩阵具有一定的特殊性，可以简化计算。

$$ {}^{B}_{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^{B}_{A}\mathbf{R} & {}^{B}\mathbf{p}_{AO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

已知 ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$, ${}^{A}\mathbf{p}_{Bo}$ $\longrightarrow$ ${}^{B}_{A}\mathbf{R}$, ${}^{B}\mathbf{p}_{Ao}$

利用旋转矩阵的正交性，可得

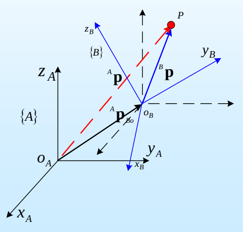
$$ {}^{B}_{A}\mathbf{R} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{-1} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} $$

求 ${}^A\mathbf{p}_{Bo}$ 在坐标系{B}中的描述：

${}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{R}\cdot {}^B\mathbf{p} + {}^A\mathbf{p}_{Bo}$　　　${}^B\left({}^A\mathbf{p}_{Bo}\right) = {}^B_A\mathbf{R}\cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo} + {}^B\mathbf{p}_{Ao}$

${}^B\left({}^A\mathbf{p}_{Bo}\right)$ 即为{B}的原点相对于{B}的描述，为0矢量。

$$
\begin{aligned}
{}^B_A\mathbf{R}\cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo} + {}^B\mathbf{p}_{Ao} &= \mathbf{0} \\
{}^B\mathbf{p}_{Ao} &= -{}^B_A\mathbf{R}\cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo} \\
&= -{}^A_B\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo}
\end{aligned}
$$



$$
{}^A_B\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{BO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^A_B\mathbf{T}^{-1} = {}^B_A\mathbf{T} = ?
$$

$$
\boxed{{}^B_A\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R}^{\mathrm{T}} & -{}^A_B\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$

例2.11 已知 ${}^A_B T$ 表示{B}相对 z_A 轴转30°，再沿 x_A 轴移动4，沿 y_A 轴移动3，求 ${}^B_A T$，并说明它所表示的运动(均指相对固定坐标系而言)。

解：坐标系{B}相当于{A}的运动描述为

$$
{}^A_B T = \mathrm{Trans}(4,3,0)\mathrm{Rot}(z,30^\circ) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

利用求逆公式：${}^B\mathbf{p}_{Ao} = -{}^A_B\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo}$

$$
{}^B_A\mathbf{T} = {}^A_B\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 & -4.964 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & -0.598 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

逆矩阵 ${}^B_A\mathbf{T}$ 的运动解释：

$$
\begin{aligned}
{}^B_A\mathbf{T} = {}^A_B\mathbf{T}^{-1} &= \mathrm{Trans}(-4,-3,0)\,\mathrm{Rot}(z,-30^\circ) \\
&= \mathrm{Rot}(z,-30^\circ)\mathrm{Trans}(-4,-3,0)
\end{aligned}
$$

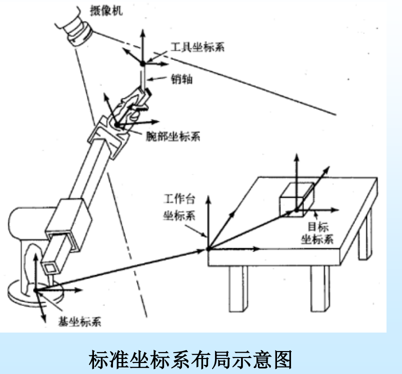
实际上，逆变换是从已变换的坐标系变回参考坐标系的一种变换，也就是参考坐标系{A}相对于坐标系{B}的描述。

2.5　机器人常用坐标系及变换方程

为了描述与分析机器人的运动，需建立机器人各连杆之间、机器人与周围环境之间的运动关系。为此需规定机器人常用坐标系，描述机器人与操作环境的相对空间位姿。

为了规范，有必要给机器人专门命名和规定标准坐标系。

2.5.1　坐标系的标准命名



标准坐标系布局示意图

2.5.1 坐标系的标准命名

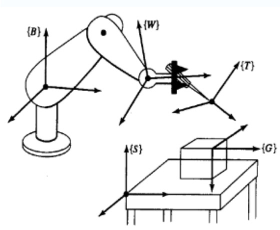


图2.11 标准坐标系

$\{B\}$ 基坐标系或 $\{0\}$ 坐标系 base

$\{W\}$ 腕坐标系 wrist

$\{T\}$ 工具坐标系 tool

$\{S\}$ 工作台坐标系 station

$\{G\}$ 目标坐标系 goal

它们之间的位姿关系可用相应的齐次坐标变换矩阵描述。

坐标系间的位姿关系

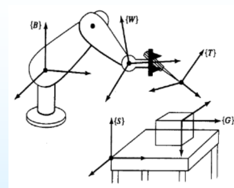


图2.11 标准坐标系

${}^B_S\mathbf{T}$ 表示工作台坐标系相对于基坐标系的空间位姿。

${}^B_W\mathbf{T}$ 表示腕坐标系相对于基坐标系的空间位姿。

${}^S_G\mathbf{T}$ 表示目标坐标系相对于工作台坐标系的空间位姿。

对物体进行操作时，工具坐标系 $\{T\}$ 相对于目标坐标系 $\{G\}$ 的位姿 ${}^G_T\mathbf{T}$ 直接影响操作效果，是机器人控制和规划的目标。
坐标系之间的变换关系可用**有向变化图**来表示。

2.5.2 变换方程

工具坐标系 $\{T\}$ 相对于基坐标系 $\{B\}$ 的位姿：

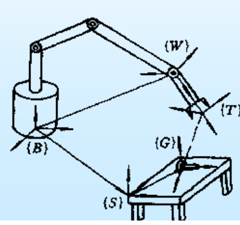
$$ {}^B_T\mathbf{T} = {}^B_W\mathbf{T}\cdot{}^W_T\mathbf{T} $$

$$ {}^B_T\mathbf{T} = {}^B_S\mathbf{T}\cdot{}^S_G\mathbf{T}\cdot{}^G_T\mathbf{T} $$

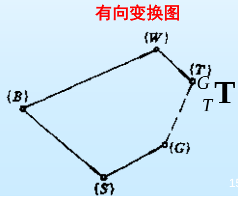
$$ {}^B_W\mathbf{T}\,{}^W_T\mathbf{T} = {}^B_S\mathbf{T}\,{}^S_G\mathbf{T}\,{}^G_T\mathbf{T} $$

——变换方程

变换方程中任一变换矩阵均可用其余变换矩阵来表示。



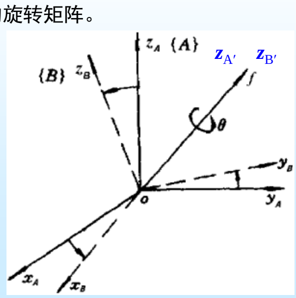
有向变换图



2.6 通用旋转变换

2.6 通用旋转变换

前面讲解了绕轴 x，y 和 z 旋转变换矩阵。针对最一般的情况，即绕着从原点出发的任一向量 k（k轴）旋转 θ 角的旋转矩阵。



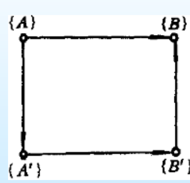


图2-11 绕任意轴 f 旋转 θ 角

2.6 通用旋转变换

1. 通用旋转变换

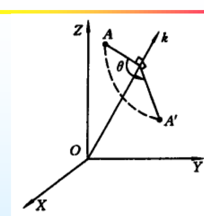


图2.14 一般旋转变换

如图2.14所示，为点 A 绕任意过原点的单位向量 **k** 旋转 θ 角的情况，k_x, k_y, k_z 分别是 **k** 向量在固定参考坐标系坐标轴上的三个分量，$\mathbf{k} = k_x\mathbf{i} + k_y\mathbf{j} + k_z\mathbf{k}$ 且 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1$。可以证明，绕任意过原点的单位向量 **k** 转 θ 角的齐次旋转变换矩阵为：

$$Rot(\mathbf{k},\theta)=\begin{bmatrix} k_xk_x\mathrm{vers}\theta+c\theta & k_yk_x\mathrm{vers}\theta-k_zs\theta & k_zk_x\mathrm{vers}\theta+k_ys\theta \\ k_xk_y\mathrm{vers}\theta+k_zs\theta & k_yk_y\mathrm{vers}\theta+c\theta & k_zk_y\mathrm{vers}\theta-k_xs\theta \\ k_xk_z\mathrm{vers}\theta-k_ys\theta & k_yk_z\mathrm{vers}\theta+k_xs\theta & k_zk_z\mathrm{vers}\theta+c\theta \end{bmatrix}$$

式中， $s\theta=\sin\theta, c\theta=\cos\theta, vers\theta=1-\cos\theta$

$k_x=a_x, k_y=a_y, k_z=a_z$

式（2.58）称为旋转变换通式。

当 $k_x=1, k_y=k_z=0$， $Rot(\mathbf{k},\theta)$ 即为 $Rot(x,\theta)$

当 $k_y=1, k_x=k_z=0$， $Rot(\mathbf{k},\theta)$ 即为 $Rot(y,\theta)$

当 $k_z=1, k_y=k_x=0$， $Rot(\mathbf{k},\theta)$ 即为 $Rot(z,\theta)$

19

具体推导过程如下：

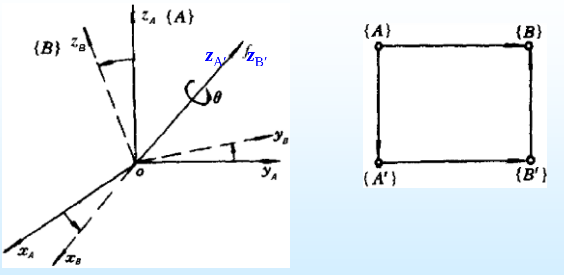


图2–11 绕任意轴 k 旋转 θ 角

20

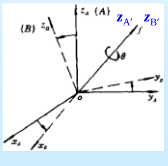
设任意过原点的单位矢量为

$$\mathbf{k}=k_x\mathbf{i}+k_y\mathbf{j}+k_z\mathbf{k} \qquad (2.50)$$

求绕k旋转θ角的旋转矩阵为 $\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta)$.

令 $${}^A_B\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta) \qquad (2.51)$$

定义两坐标系{A′}和{B′}分别与{A}和{B}固接，{A′}和{B′}的z 轴与k轴重合。且旋转之前{A′}与{B′}重合、{A}与{B} 重合。



$${}^A_{A'}\mathbf{R}={}^B_{B'}\mathbf{R}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & k_x \\ n_y & o_y & k_y \\ n_z & o_z & k_z \end{bmatrix}$$

21

坐标系{B}绕矢量 k 相对于{A}旋转θ角相当于：坐标系{B′}相对{A′}的z 轴旋转θ角，而其它关系不变。

根据右图， $${}^A_B\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta)={}^A_{A'}\mathbf{R}\cdot{}^{A'}_{B'}\mathbf{R}\cdot{}^{B'}_{B}\mathbf{R}$$

于是得到相似变换

$$\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta)={}^A_{A'}\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}(z,\theta)\cdot{}^B_{B'}\mathbf{R}^{-1}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta)={}^A_{A'}\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}(z,\theta)\cdot{}^B_{B'}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$$

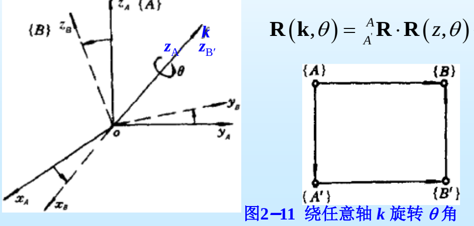


图2–11 绕任意轴 k 旋转 θ 角

22

将上式展开，并注意到仅与单位矢量 k 有关，与其它轴无关。即

$$\mathbf{R}(\mathbf{k},\theta)=\begin{bmatrix} n_x & o_x & k_x \\ n_y & o_y & k_y \\ n_z & o_z & k_z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ o_x & o_y & o_z \\ k_x & k_y & k_z \end{bmatrix}$$

上面各矩阵相乘，并利用旋转矩阵的正交性质进行化简

$$R(\mathbf{k},\theta)=\begin{bmatrix} k_xk_x\mathrm{vers}\theta+c\theta & k_yk_x\mathrm{vers}\theta-k_zs\theta & k_zk_x\mathrm{vers}\theta+k_ys\theta \\ k_xk_y\mathrm{vers}\theta+k_zs\theta & k_yk_y\mathrm{vers}\theta+c\theta & k_zk_y\mathrm{vers}\theta-k_xs\theta \\ k_xk_z\mathrm{vers}\theta-k_ys\theta & k_yk_z\mathrm{vers}\theta+k_xs\theta & k_zk_z\mathrm{vers}\theta+c\theta \end{bmatrix} \qquad (2.58)$$

——旋转变换通式

23

例2.6 坐标系{B}与{A}重合，将{B}绕过原点O的矢量

$$\mathbf{k}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

转120°。求旋转矩阵R(k, 120°)。

解： $k_x=k_y=k_z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \theta=120^\circ$

$\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}, \sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, Vers\theta=1-\cos120^\circ=\dfrac{3}{2}$

代入旋转变换通式（2.58）

$$\mathbf{R}(\mathbf{k},120^\circ)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

24

2. 等效转轴和等效转角

前面解决了根据转轴和转角建立相应旋转变换矩阵的问题，下面根据旋转矩阵求其等效转轴和等效转角。

可以证明，任何一组绕过原点的轴线的复合转动总是等效于绕过原点的某轴线的转动 $Rot(\mathbf{k},\theta)$

若给出某个旋转矩阵

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \qquad 令\mathbf{R}=Rot(\mathbf{k},\theta)$$

25

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_xk_x\text{vers}\theta+c\theta & k_yk_x\text{vers}\theta-k_zs\theta & k_zk_x\text{vers}\theta+k_ys\theta \\ k_xk_y\text{vers}\theta+k_zs\theta & k_yk_y\text{vers}\theta+c\theta & k_zk_y\text{vers}\theta-k_xs\theta \\ k_xk_z\text{vers}\theta-k_ys\theta & k_yk_z\text{vers}\theta+k_xs\theta & k_zk_z\text{vers}\theta+c\theta \end{bmatrix}$$

将等式两边主对角元素分别相加，并化简得：

$$n_x+o_y+a_z=\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)vers\theta+3c\theta=1+2c\theta$$

$$则 \quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(n_x+o_y+a_z-1\right)$$

26

再将式（2.20）两边矩阵的非对角元素成对相减，得

$$\begin{aligned} o_z-a_y&=2k_x\sin\theta \\ a_x-n_z&=2k_y\sin\theta \\ n_y-o_x&=2k_z\sin\theta \end{aligned} \qquad (2.21)$$

$$\left(o_z-a_y\right)^2+\left(a_x-n_z\right)^2+\left(n_y-o_x\right)^2=4\sin^2\theta$$

27

$$\begin{aligned} \cos\theta&=\frac{1}{2}\left(n_x+o_y+a_z-1\right) \\ \sin\theta&=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(o_z-a_y\right)^2+\left(a_x-n_z\right)^2+\left(n_y-o_x\right)^2} \\ \tan\theta&=\pm\frac{\sqrt{\left(o_z-a_y\right)^2+\left(a_x-n_z\right)^2+\left(n_y-o_x\right)^2}}{n_x+o_y+a_z-1} \\ k_x&=\frac{o_z-a_y}{2\sin\theta} \\ k_y&=\frac{a_x-n_z}{2\sin\theta} \\ k_z&=\frac{n_y-o_x}{2\sin\theta} \end{aligned} \qquad \mathbf{(2.22)}$$

28

可以证明，任何一组绕过原点的轴线的复合转动总是等效于绕某一过原点的轴线的转动 $Rot(\mathbf{k},\theta)$

注意：在计算等效转轴和转角时，有两点值得注意：

（1） 多值性：$\mathbf{k}$ 和 θ 的值不是唯一的。对任一组解 $\mathbf{k}$ 和 θ ，还有另一组解 $-\mathbf{k}$ 和 $-\theta$。一般选取 θ 在 0°到 180°之间的值。

（2） 病态情况：当转角 θ 很小时，由于式(2.22)的分子、分母都很小，转轴难以确定。当 θ 接近 0°或 180°时，转轴完全不能确定。因此，需要寻求另外的方法求解。

29

例 2.11：求复合旋转矩阵 ${}^A_B\mathbf{R}=Rot\left(y,90^\circ\right)\cdot Rot\left(z,90^\circ\right)$ 的等效转轴 $\mathbf{k}$ 和转角 θ。

解：首先计算旋转矩阵

$${}^A_B\mathbf{R}=Rot\left(y,90^\circ\right)\cdot Rot\left(z,90^\circ\right)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

30

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

代入公式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(n_x + o_y + a_z - 1\right)$$

$$\sin\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(o_z - a_y\right)^2 + \left(a_x - n_z\right)^2 + \left(n_y - o_x\right)^2}$$

$$\tan\theta = \pm\frac{\sqrt{\left(o_z - a_y\right)^2 + \left(a_x - n_z\right)^2 + \left(n_y - o_x\right)^2}}{n_x + o_y + a_z - 1}$$

$$k_x = \frac{o_z - a_y}{2\sin\theta}$$

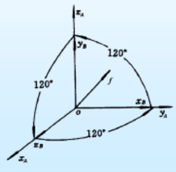
$$k_y = \frac{a_x - n_z}{2\sin\theta}$$

$$k_z = \frac{n_y - o_x}{2\sin\theta}$$

$$\theta = 120^\circ$$

$$k_x = k_y = k_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} k$$



$$Rot\left(\mathbf{k}, 120^\circ\right)$$

本章小结

本章介绍机器人的数学基础，主要包括：

- 刚体位姿描述、坐标变换（平移、旋转、一般变换）
- 齐次坐标和齐次变换——齐次变换矩阵
- 齐次坐标变换的运算（相乘、求逆）
- 欧拉变换和RPY变换
- 旋转变换通式

点的位置描述：定义参考坐标系，用3×1位置矢量来描述空间内任一点在参考坐标系中的位置。

姿态描述：$_B^A\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$

刚体位姿描述：即描述固接于该刚体的坐标系相对于参考坐标系的位姿。

刚体的空间位姿由位置矢量和旋转矩阵构成的**齐次变换矩阵**来描述。

齐次变换矩阵 算子？

算子左乘，

表示坐标变换是相对固定坐标系进行的；

算子右乘，

表示坐标变换是相对动坐标系进行的。

$${}_B^A\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}_B^A\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{BO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_B^A\mathbf{T}^{-1} = {}_A^B\mathbf{T} = ?$$

$$\boxed{{}_A^B\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}_B^A\mathbf{R}^{\mathrm{T}} & -{}_B^A\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

END