第三节　随机变量的分布函数

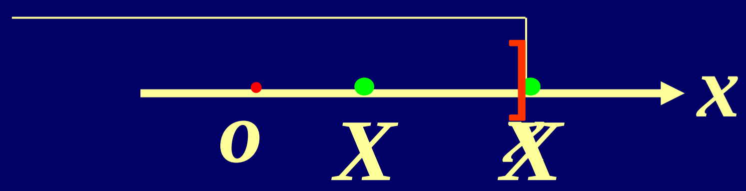
- 随机变量分布函数的定义
- 分布函数的性质
- 小结　布置作业

一、分布函数的定义

设 X 是一个 $r.v$，称

$$F(x) = P(X \le x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

为 X 的分布函数，记作 $F(x)$.



如果将 X 看作数轴上随机点的坐标，那么分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X落在区间 $(-\infty, x]$ 内的概率.

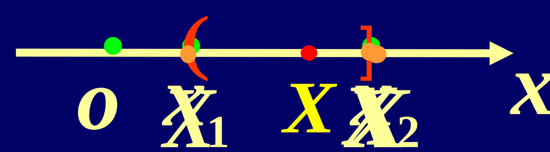
请注意：

(1) 在分布函数的定义中，X是随机变量, x是参变量.

(2) $F(x)$ 是r.v X取值不大于 x 的概率.

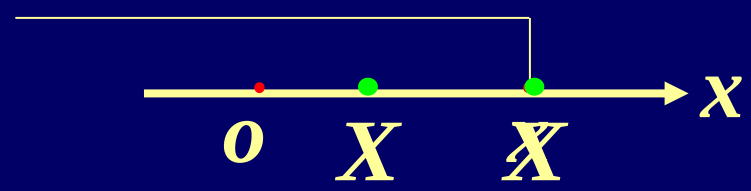
(3) 对任意实数 $x_1<x_2$，随机点落在区间(x_1，x_2]内的概率为：

$$P\{ x_1<X \le x_2\} = P\{ X \le x_2 \} - P\{ X \le x_1 \} = F(x_2)-F(x_1)$$



因此，只要知道了随机变量X的分布函数，它的统计特性就可以得到全面的描述.

$$F(x)=P(X\le x),\quad -\infty<x<\infty$$



分布函数是一个普通的函数，正是通过它，我们可以用高等数学的工具来研究随机变量.

例1 设 随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	1/3	1/6	1/2

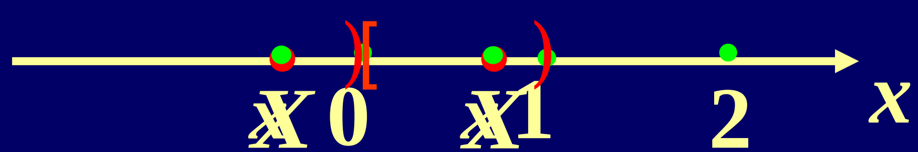
求 X 的分布函数 $F(x)$.

解 $F(x) = P(X \le x)$

当 $x<0$ 时，$\{X \le x\} = \phi$ ， 故 $F(x) = 0$

当 $0 \le x < 1$ 时，

$$F(x) = P\{X \le x\} = P(X=0) = \frac{1}{3}$$

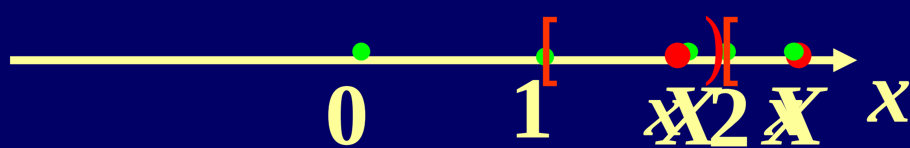


当 $1 \le x < 2$ 时，

$$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

当 $x \ge 2$ 时，

$$F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = 1$$



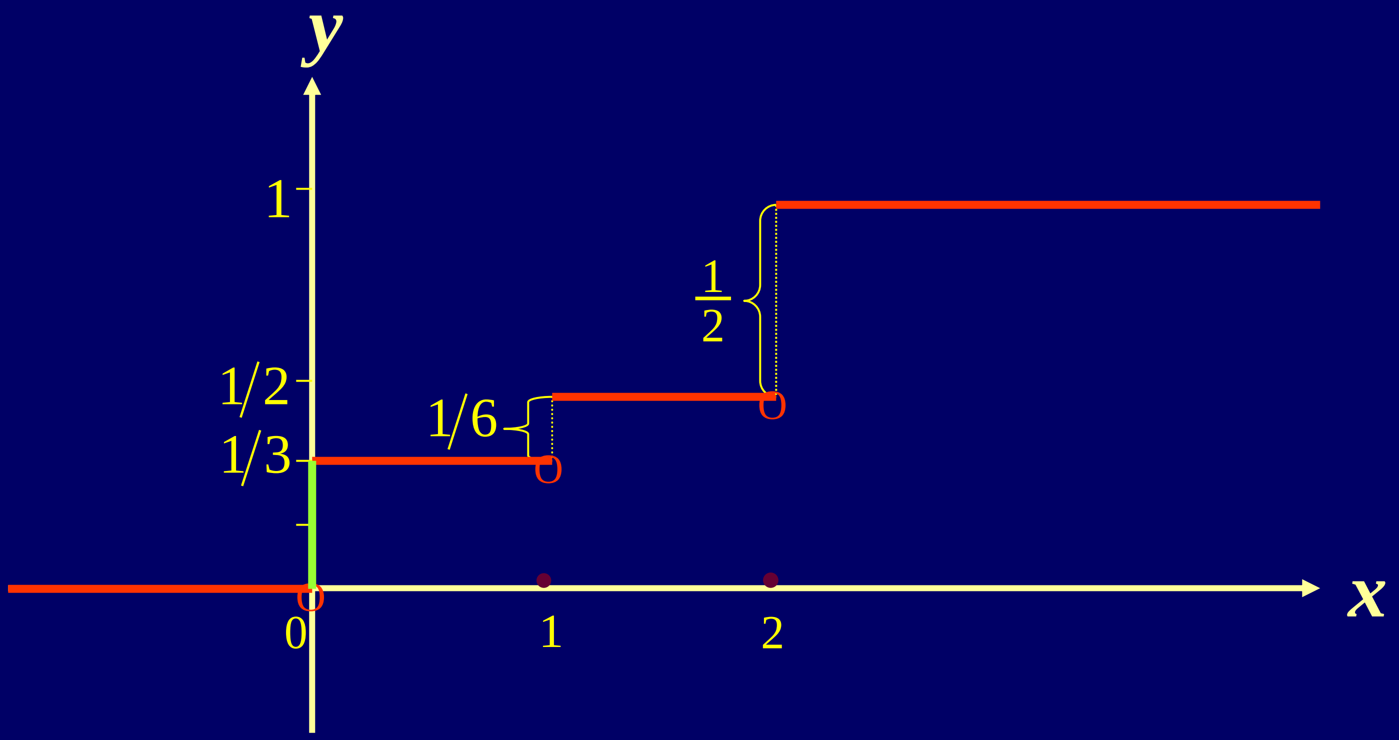
故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{3}, & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

注意右连续

下面我们从图形上来看一下.

$F(x)$的分布函数图



一般地

设离散型 $r.v\ X$ 的分布律是

$$P\{X=x_k\}=p_k\,,\qquad k=1,2,3,\ldots$$

则其分布函数

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_k\le x}p_k$$

即$F(x)$ 是 X 取 $\le x$的诸值 x_k 的概率之和.

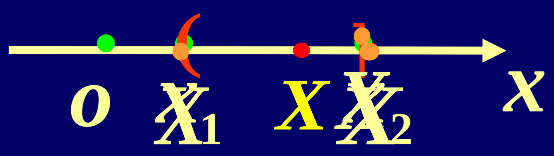
二、分布函数的性质

(1) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一个不减函数，

即对 $\forall\ x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$ 且 $x_1 < x_2$，都有

$F(x_1) \le F(x_2)$;

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \le x_2\} \ge 0$$



(2) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$

$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

(3) $F(x)$ 右连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

如果一个函数具有上述性质，则一定是某个 *r.v* *X* 的分布函数. 也就是说，性质(1)--(3)是鉴别一个函数是否是某 *r.v* 的分布函数的充分必要条件.

例2 设有函数 $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试说明$F(x)$能否是某个$r.v$ 的分布函数.

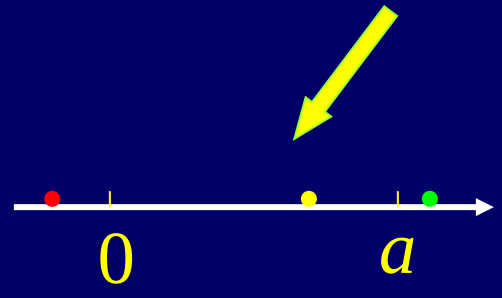
解 注意到函数 $F(x)$在$[\pi/2,\pi]$上下降，不满足性质(1)，故$F(x)$不能是分布函数.

或者 $$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$$

不满足性质(2)，可见$F(x)$也不能是$r.v$ 的分布函数.

例3 在区间 $[0, a]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标．设这个质点落在 $[0, a]$ 中意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比，试求 X 的分布函数.

解 设 $F(x)$ 为 X 的分布函数,



当 $x < 0$ 时， $F(x) = P(X \le x) = 0$

当 $x > a$ 时， $F(x) = 1$

当 $0 \le x \le a$ 时， $P(0 \le X \le x) = kx$ （k为常数）

由于 $P(0 \le X \le a) = 1 \Longrightarrow ka = 1$， $k = 1/a$

$$F(x) = P(X \le x) = P(X < 0) + P(0 \le X \le x) = x / a$$

故
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x}{a}, & 0\le x\le a \\ 1, & x>a \end{cases}$$

这就是在区间 [0，a]上服从均匀分布的连续型随机变量的分布函数.

三、小结

在这一节中，我们学习了随机变量的分布函数，以及分布函数的性质.

练习题

一. 设在 15 只同类型零件中有 3 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，（1）求 X 的分布函数，（2）画出分布函数的图形。?

二. 一袋中有 6 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、5、6，在其中同时取三只，以 X 表示取出的三只球中的最小号码，写出随机变量 X 的分布律及分布函数。?

一. 设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，（1）求 X 的分布函数，（2）画出分布函数的图形。

解： X的所有可能取值为：$X=0,1,2$

$$P\{X=0\}=\frac{C_{13}^{3}}{C_{15}^{3}}=\frac{22}{35}\qquad P\{X=1\}=\frac{C_{13}^{2}C_{2}^{1}}{C_{15}^{3}}=\frac{12}{35}$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_{13}^{1}C_{2}^{2}}{C_{15}^{3}}=\frac{1}{35}$$

$$P\{X=0\}=\frac{22}{35} \qquad P\{X=1\}=\frac{12}{35} \qquad P\{X=2\}=\frac{1}{35}$$

$$\boxed{F(x)=P(X\le x)}$$

当 $x<0$ 时， $F(x)=P\{X\le x\}=0$

当 $0\le x<1$ 时， $F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}=\dfrac{22}{35}$

当 $1\le x<2$ 时， $F(x)=P\{X\le x\}$

$$=P\{X=0\}+P\{X=1\}$$

$$=\frac{34}{35}$$

当 $x\ge 2$ 时， $F(x)=1$

故

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{22}{35}, & 0\le x<1 \\ \dfrac{34}{35}, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

二. 一袋中有 6 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、5、6，在其中同时取三只，以 X 表示取出的三只球中的最小号码，写出随机变量 X 的分布律及分布函数。

解：X的所有可能取值为：$X=1,2,3,4$

$$P\{X=1\}=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2} \qquad P\{X=2\}=\frac{C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=3\}=\frac{C_3^2}{C_6^3}=\frac{3}{20} \qquad P\{X=4\}=\frac{C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{20}$$

$$P\{X=1\}=\frac{1}{2} \qquad P\{X=2\}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=3\}=\frac{3}{20} \qquad P\{X=4\}=\frac{1}{20}$$

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

当 $x<1$时， $F(x)=P\{X\le x\}=0$

当$1\le x<2$时， $F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$

当$2\le x<3$时， $F(x)=P\{X\le x\}$

$$=P\{X=1\}+P\{X=2\}$$

$$=\frac{4}{5}$$

四、布置作业

习题2-3（p44）：2、3、5