一、选择题（每题 5 分，共 20 分,根据正确答案的选项涂黑答题卡对应的位置）

1.下列选项中**错误**的是 （C）

(A) $\mathrm{H}(u)=E-2uu^{\mathrm{H}}$ (其中 $u\in C^n, u^{\mathrm{H}}u=1$)，则 $\|\mathrm{H}(u)x\|_2=\|x\|_2$；

(B) $U\in C^{n\times n}$ 为酉矩阵，λ 为其任意特征值，则 $|\lambda|=1$；

(C) $A\in C^{3\times 4}$，则 $A^{\mathrm{H}}A$ 与 AA^{H} 的特征值相同;

(D) $A\in C^{m\times n}$，U,V 为酉矩阵且 $B=UAV$，则 A 与 B 的奇异值相同.

2.下列选项中**正确**的是 （A）

(A) $A,B\in C^{n\times n}$，则 $\|AB\|_{m_2}\le\|A\|_2\|B\|_{m_2}$；

(B)若 $A^2=A$，则 $R(A)\perp N(A)$；

(C) $A\in C_n^{m\times n}$ 的充要条件是 $AA^-=E_n$；

(D) 若 A 和 B 分别是行满秩和列满秩矩阵，则 $(AB)^+=B^+A^+$.

3.下列选项中**错误**的是 （B）

(A) $X,Y\in A\{1\}$，则 $Z=XAY\in A\{1,2\}$；

(B)若谱半径 $r(E-A)<1$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(E-A)^{-1}$；

(C) $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，U 为酉矩阵且 $B=UAU^{\mathrm{H}}$，则 B 为正规矩阵;

(D) $A\in C^{m\times n}$，则 $\mathrm{rank}(A^{\mathrm{H}}A)=\mathrm{rank}(AA^{\mathrm{H}})$.

4.下列选项中**正确**的是 （D）

(A) $A\in C^{n\times n}$，则 $(A^2)^+=(A^+)^2$ ；

(B) $A^2=A(\neq 0)$ 则 $\|A\|_2=1$；

(C) 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $|\boldsymbol{\lambda}_1|\ge|\boldsymbol{\lambda}_2|\ge\cdots\ge|\boldsymbol{\lambda}_n|$，则 $\boldsymbol{\lambda}_1=\max\limits_{x^H x=1}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.；

(D) $A\in C^{m\times n}$，则 $R(A^+)=R(A^{\mathrm{H}})$.

5. 下列选项中**正确**的是 （C）

(A) 设 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T\in C^n$，则 $\|x\|=\sum_{i=1}^{n}k_i|x_i|^2(k_i\ge 0)$ 是 C^n 上向量 x 的范数；

(B) 对任意方阵 A,B，均有 $\cos(A+B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$；

(C) 若 $A^H=A$ 为严格对角占优矩阵且对角元均小于零，则 A 负定；

(D) 设 V_1,V_2 为空间 V 的任意子空间，则 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cup V_2)$.

二. 判断题（20 分）（正确的在答题卷涂黑【T】，错误的涂黑【F】）

6. 矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 的非零特征值的个数与其非零奇异值的个数一定相等. （ × ）

7. $A\in C^{n\times n}, x\in C^n$ 且 $\sigma_1(A)$ 为 A 的最大奇异值，则 $\|Ax\|_2\le\sigma_1(A)\|x\|_2$. （ √ ）

8. 若 $A\in C^{m\times n}$ 的列向量标准正交，则 $A^+=A^{\mathrm{H}}$. （ √ ）

9. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$，$x,y\in\mathrm{C}^2$，则 $(x,y)=x^HAy$ 为 x,y 的内积. （ × ）

10. 若矩阵级数 $\sum_{i=1}^{\infty}A_i$ 收敛，则 $\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)^T=\sum_{i=1}^{\infty}A_i^T$. （ √ ）

三. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}9&1&1\\1&3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}$，求其正特征值的个数.

答案： $S_1=\{z\,\|\,z-9|\le 2\}, S_2=\{z\,\|\,z-3|\le 2\}, S_3=\{z\,\|\,z+3|\le 2\}$.

所以三个盖尔圆都是孤立圆盘，故每个盖尔圆中只有一个特征值.
又因为实矩阵 A 如有复特征值必成共轭对出现，
所以 A 的正特征值的个数为 2 个.

四. 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$ 是否为单纯矩阵，若为单纯矩阵，求其谱分解.

答案：

(1) 由 $|\lambda E-A|=(\lambda_1-1)(\lambda_2-2)=0$，得特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，故可相似对角化.

(2) 求特征向量: $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $p_1=(-1,1)^T$；

$\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $p_2=(0,1)^T$.

(3)谱分解:令 $P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=P=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_1^T\\\omega_2^T\end{pmatrix}$.

令 $A_1=p_1\omega_1^T=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$，$A_2=p_2\omega_2^T=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$,

故谱分解式为 $A=1A_1+2A_2$.

五. $A\in C^{n\times n}$，且 U,V 为酉矩阵，证明: (1) $\|A\|_{m_2}^2=tr(A^HA)$; (2) $\|A\|_{m_2}=\|U^HAV\|_{m_2}$.

证：(1) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $A^HA=\begin{pmatrix}\overline{a_{11}}&\overline{a_{21}}&\cdots&\overline{a_{n1}}\\\overline{a_{12}}&\overline{a_{22}}&\cdots&\overline{a_{n2}}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\overline{a_{1n}}&\overline{a_{2n}}&\cdots&\overline{a_{nn}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}|a_{i1}|^2&*&\cdots&*\\ *&\sum_{i=1}^{n}|a_{i2}|^2&\cdots&*\\ \cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\ *&*&&\sum_{i=1}^{n}|a_{in}|^2\end{pmatrix}$$

所以 $\|A\|_{m_2}^2=tr(A^HA)$ （1 分）， 同理可得 $\|A\|_{m_2}^2=tr(AA^H)$.

(2)所以 $\|A\|_{m_2}^2=tr(A^HA)=tr(AA^H)=tr(AVV^HA^H)=tr[(AV)(AV)^H]$

$=tr[(AV)^H(AV)]=tr(V^HA^HAV)=tr(V^HA^HUU^HAV)=tr[(U^HAV)^H(U^HAV)]$

$=\|U^HAV\|_{m_2}^2$.

六. (1)证明级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.1&0.7\\0.3&0.6\end{pmatrix}^k$ 收敛；(2). 计算 $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.1&0.7\\0.3&0.6\end{pmatrix}^k$

解 1： 设 $A=\begin{bmatrix}0.1&0.7\\0.3&0.6\end{bmatrix}$，由于 $\|A\|_\infty=0.9<1$,

因而矩阵 A 的谱半径 $r(A)\le\|A\|_\infty=0.9<1$,

故矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛 (**2** 分)；

(2) 其和为 $(E-A)^{-1}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}4&7\\3&9\end{bmatrix}$.

解 2： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-0.1&-0.7\\-0.3&\lambda-0.6\end{vmatrix}=\lambda^2-0.7\lambda-0.15=0$,

得 $\lambda_1=\frac{0.7+\sqrt{1.09}}{2},\lambda_2=\frac{0.7-\sqrt{1.09}}{2}$,

因而矩阵 A 的谱半径 $r(A)<1$ (**2** 分),

故矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛 (**2** 分)；

(2) 其和为 $(E-A)^{-1}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}4&7\\3&9\end{bmatrix}$.

七. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&0&2\\2&4&6\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\3\end{pmatrix}$. (1) 求 A 的最大秩分解；(2) 求 A^+ ；(3) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；(4) 线性方程组 $Ax=b$ 如有解，求通解和最小范数解；如无解，求最小二乘解和最佳逼近解.

解：

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&0&2\\2&4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

矩阵 A 的最大秩分解为 $A=BD=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\2&0\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

(2) $B^+=(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}0&2&4&0\\1&-1&-2&2\end{pmatrix}$

$D^+=D^H(DD^H)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}$

$A^+=D^+B^+=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-1&5&10&-2\\2&-4&-8&4\\1&1&2&2\end{pmatrix}$

(3) $AA^+b=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7\\2\\4\\14\end{pmatrix}\neq b$，所以无解.

(4) 最佳逼近解为 $A^+b=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

最小二乘解为 $A^+b+(E-A^-A)u, \forall u\in C^4$

八. A 为正规矩阵，证明：$R(A)=R(A^{\mathrm{H}})$.

答案：

(1): A 为正规矩阵 $\Leftrightarrow A^{\mathrm{H}}A=AA^{\mathrm{H}}\Rightarrow R(A^{\mathrm{H}}A)=R(AA^{\mathrm{H}})$；

(2): $R(AA^{\mathrm{H}})\subset R(A)$, $\mathrm{rank}(AA^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}(A)\ \Rightarrow R(AA^{\mathrm{H}})=R(A)$；

(3): $R(A^{\mathrm{H}}A)\subset R(A^{\mathrm{H}})$, $\mathrm{rank}(A^{\mathrm{H}}A)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^{\mathrm{H}})\ \Rightarrow R(A^{\mathrm{H}}A)=R(A^{\mathrm{H}})$.

故 $R(A)=R(A^{\mathrm{H}})$.