

机器人学基础

国家级《智能科学基础系列课程教学团队》
“机器人学”课程配套教材 蔡自兴 主编

第6章 机器人轨迹规划

1

关节空间、笛卡尔空间/操作空间

n 个自由度的操作臂的末端位姿由 n 个关节变量所决定，这 n 个关节变量统称为 n 维关节向量，记为 q 。

由所有关节向量 q 构成的空间称为**关节空间**。

末端手爪的位姿 x 是在直角坐标空间中描述的，即用**操作空间**来表示。其中位置用直角坐标表示，而方位可用第二章所述的任一方法表示，统称为**笛卡尔空间**。

关节空间：机器人各关节矢量构成的空间

操作空间：机器人末端位姿矢量构成的空间

3

6.1 机器人轨迹规划概念

所谓机器人的规划 (Planning) —— **机器人根据自身的任务，求得完成这一任务解决方案的过程。**

这里所说的任务，具有广义的概念，既可以指机器人要完成的某一具体任务，也可以是机器人的某个动作，比如手部或关节的某个规定的运动等。

- **轨迹**：操作臂在运动过程中的随时间变化的**位移、速度和加速度**。
- **轨迹规划**：根据操作任务的要求，计算出预期的运动轨迹。

4

举例说明机器人轨迹规划的概念：

如果采用声控方式，主人命令服务机器人**“请给我倒一杯开水”**，暂且不考虑机器人是如何识别人的自然语言，而是着重分析一下机器人在得到这个命令后，如何来完成主人交给的**任务**。

5

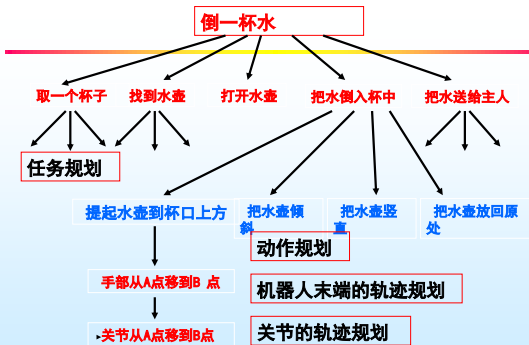


图7.1 机器人的规划层次

6

首先，机器人应该把任务进行分解，把主人交代的任务分解成为“取一个杯子”、“找到水壶”、“打开瓶塞”、“把水倒入杯中”、“把水送给主人”等一系列子任务。这一层次的规划称为**任务规划** (Task planning)，它完成总体任务的分解。

然后再针对每一个子任务进行进一步的规划。以“把水倒入杯中”这一子任务为例，可以进一步分解成为“把水壶提到杯口上方”、“把水壶倾斜倒水入杯”、“把水壶竖直”、“把水壶放回原处”等一系列动作，这一层次的规划称为**动作规划** (Motion Planning)，它把实现每一个子任务的过程分解为一系列具体的动作。

为了实现每一个动作，需要对机器人末端手部的运动轨迹进行必要的规定，这是手部**轨迹规划** (Hand trajectory planning)。

为了使手部实现预定的运动，就要知道各关节的运动规律，这是**关节轨迹规划** (Joint trajectory planning)。

最后才是关节的**运动控制** (Motion control)。

7

机器人的规划是分层次的，从高层的**任务规划**，**动作规划**到**手部轨迹规划**和**关节轨迹规划**，最后才是**底层的控制**。

智能化程度越高，规划的层次越多，操作就越简单。**机器人轨迹规划属于机器人低层规划，基本不涉及人工智能问题。**

有时还要对机器人力的大小进行控制，这时除了需要对末端手爪或关节进行轨迹规划，还要对手部和关节输出力进行规划。

对于工业机器人，高层的任务规划和动作规划一般是依赖人来完成的。一般的工业机器人也不具备力的反馈，所以，**工业机器人通常只具有轨迹规划和底层的控制功能。**

8

(1) 点到点运动 (PTP)

针对机器人的抓放作业，如机器人上、下料作业，此种任务只需要描述工具坐标系的起始点的位姿和目标点的位姿，即工具坐标系的起始值 $\{T_0\}$ 和目标值 $\{T_g\}$ 。

- **点到点运动在关节空间里进行轨迹规划。**
- 在关节空间进行规划时，是将关节变量表示成时间的函数，并规划它的一阶和二阶时间导数。

9

(2) 连续路径运动或轮廓运动 (Continuous-path motion)

针对机器人的作业，如弧焊、曲面加工等，此种任务不仅要规定机械手工具坐标系的**起始点位姿**和**目标点位姿**，而且还要指明两点之间的若干中间点（称为路径点），必须沿特定的路径运动（路径约束），这类运动称为连续路径运动。

连续路径运动在直角空间/笛卡尔空间/操作空间进行轨迹规划。
直角空间规划：是指将机械手的**位姿**、**速度**和**加速度**表示为时间的函数，而相应的关节位移由机械手的位姿和运动学逆解求出；关节速度由逆雅可比矩阵求出；关节加速度由逆雅可比矩阵及其导数求出。

10

轨迹规划可在关节空间或直角空间（或笛卡尔空间、操作空间）中进行，但所规划的轨迹函数都必须**连续和平滑**，使操作臂的运动平稳。

- **关节空间的规划**：是将关节变量表示成时间的函数，并规划它的一、二阶时间导数；关节空间进行规划时，**大量工作是对关节变量的插值运算。**
- **直角坐标空间的规划**：是将末端位置、速度和加速度表示成时间的函数，再解出关节的位移、速度和加速度信息。通过运动学反解得出关节位移，用逆雅可比求出关节速度，用逆雅可比及其导数求解关节加速度。

根据作业给出各个路径结点后，规划器的**任务**：解变换方程、进行运动学反解和插值运算等。

11

6.2 关节空间轨迹规划

12

6.2 关节空间轨迹规划

- (1) 第一步：在机械手末端固结一个**工具坐标系**，其运动讲过一系列**路径点**，首先由运动学反解，将**路径点的位姿值**由运动学逆解，获得**各关节变量的位移或角位移值**；
- (2) 第二步：对每个关节从**起始点经过中间路径点到达终点**的运动拟合成一个**光滑函数**，同时使得各个关节到达中间点和终点的**时间相同**，这样可保证机械臂末端能够到达期望的位姿。

这里只要求各个关节在路径点之间的**时间相同**，而**各个关节的光滑函数的确定则是相互独立的**。

13

- 三次多项式函数插值
- 过路径点的三次多项式插值
- 高阶多项式插值
- 用抛物线过渡的线性插值
- 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

14

1. 三次多项式函数插值

考虑机械臂末端在一定时间内从**初始位姿运动到目标位姿**的问题。

通常起始点关节角度已知，而终点的关节角度可通过运动学逆解计算。**现在的问题是**求出一组通过**起始点和终点的光滑插值函数**。满足上述条件的光滑函数可以有許多条。

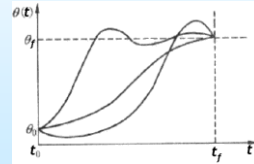


图7.3 单个关节的不同轨迹曲线

15

轨迹规划即是用平滑插值函数 $\theta(t)$ 来描述从起始关节角 θ_0 变化到终点关节角 θ_f 。

显然，有许多平滑函数可作为关节插值函数。

设三次多项式： $\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ (7.3)

运动轨迹上的关节速度和加速度为：

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 2a_2 + 6a_3t\end{aligned}\quad (7.4)$$

16

为了实现各个关节的平稳运动和**关节运动速度的连续性**：

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0 \\ \theta(t_f) &= \theta_f \\ \dot{\theta}(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= 0\end{aligned}\quad (7.5)$$

式 (7.3) 唯一地确定了一个三次多项式。

$$\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) \\ \theta(t) &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0)t^2 - \frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0)t^3\end{aligned}\quad (7.6)$$

17

例7.1 设机械手的某个关节的起始关节角 $\theta_0 = 15^\circ$ 。要求在3s由静止状态平稳运动到终点位置 $\theta_f = 75^\circ$ ，且在终点的速度为零。规划出满足上述条件的平滑运动轨迹，并画出关节角度、速度和加速度随时间的变化曲线。

解：

$$\begin{aligned}\theta(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \\ \dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 2a_2 + 6a_3t\end{aligned}$$

将约束条件代入 $\theta_0 = 15^\circ, \theta_f = 75^\circ, \dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_f = 0$

代入式 (7.6) 得：

$$\begin{aligned}a_0 &= 15 & \theta(t) &= 15 + 20t^2 - 4.44t^3 \\ a_1 &= 0 & \dot{\theta}(t) &= 40t - 13.32t^2 \\ a_2 &= 20 & \ddot{\theta}(t) &= 40 - 26.64t \\ a_3 &= -4.44\end{aligned}$$

18

$$\begin{aligned}\theta(t) &= 15 + 20t^2 - 4.44t^3 \\ \dot{\theta}(t) &= 40t - 13.32t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 40 - 26.64t\end{aligned}$$

图7.4是该操作臂的运动轨迹曲线。速度曲线为抛物线，加速度为直线。

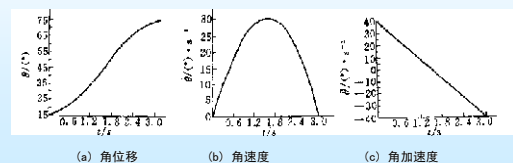


图7.4 三次多项式插值函数

19

2. 过路径点的三次多项式函数插值

过路径点的轨迹规划，有两种情况：

- (1) 操作臂在路径点停留
——则可直接用三次多项式插值方法。
 - (2) 操作臂仅仅“经过”路径点，并不停留
——可把所有路径点作为“起始点”或“终点”，逆运动学求解得到相应的关节变量。然后确定所要求的三次多项式插值函数，把路径点平滑地连接起来。
- 不同之处：这些“起始点”和“终点”的关节运动速度不为零。

20

路径点上的关节速度可根据需要设定，确定三次多项式的方法

与前面所述完全相同，只是速度约束条件变为：

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f\end{aligned}\quad (7.7)$$

设三次多项式为：

$$\begin{aligned}\theta(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ \dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2\end{aligned}$$

代入约束条件得：

$$\begin{aligned}\theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ \dot{\theta}_0 &= a_1 \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2\end{aligned}\quad (7.8)$$

21

解方程组得三次多项式系数：

$$\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_f)\end{aligned}\quad (7.9)$$

22

实际上，由上式确定的三次多项式描述了起始点和终点具有任意给定位置和速度的运动轨迹，是式(7.6)的推广。剩下的问题就是如何确定路径点上的关节速度，可由以下三种方法规定：

- (1) 根据工具坐标系在直角坐标空间中的瞬时线速度和角速度来确定每个路径点的关节速度。
- (2) 在直角坐标或关节空间中用适当的启发式方法，由控制系统自动选择路径点的速度。
- (3) 为保证每个路径点上的加速度连续，由控制系统自动选择路径点的速度。

23

3. 高阶多项式插值

如果对运动轨迹的要求更高，约束条件增多，就须用更高阶的多项式对运动轨迹的路径段来插值。如对路径段的起始点和终止点都规定关节的位置、速度和加速度，则用一个五次多项式进行插值，即

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (7.10)$$

多项式的系数 a_0, a_1, \dots, a_5 必须满足6个约束条件：

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0 \\ \theta(t_f) &= \theta_f \\ \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f \\ \ddot{\theta}(0) &= \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}(t_f) &= \ddot{\theta}_f\end{aligned}$$

24

$$\theta(0) = a_0$$

$$\theta(t_f) = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5$$

$$\dot{\theta}(0) = a_1$$

$$\dot{\theta}(t_f) = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \quad (7.11)$$

$$\ddot{\theta}(0) = 2a_2$$

$$\ddot{\theta}(t_f) = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3$$

解该线性方程组得：

$$\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \\ a_3 &= \frac{20\dot{\theta}_f - 20\dot{\theta}_0 - (8\ddot{\theta}_f + 12\ddot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_4 &= \frac{30\ddot{\theta}_0 - 30\dot{\theta}_f + (14\ddot{\theta}_f + 16\ddot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4} \\ a_5 &= \frac{12\dot{\theta}_f - 12\dot{\theta}_0 - (6\ddot{\theta}_f + 6\ddot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5}\end{aligned}\quad (7.12)$$

25

4. 用抛物线过渡的线性插值

对于给定起始点和终止点的关节角度，可以不用三次多项式插值，而用线性插值函数，即关节的运动轨迹是一条直线。

问题：单纯线性函数插值将使得关节的运动速度在起点和终点处不连续，产生无穷大加速度。

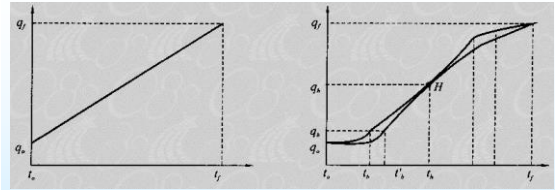
因此考虑在起始点和终止点处，用抛物线与直线连接起来，在抛物线段内，用恒定的加速度来平滑地改变速度，从而使得整个运动轨迹的位置和速度是连续的。

为获得关节位移、速度都连续的平滑运动轨迹

抛物线对于时间的二阶导数为常数。

26

4. 用抛物线过渡的线性插值



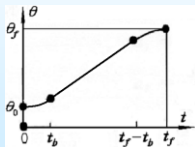
线性函数插值图

利用抛物线过渡的线性函数插值图

线性函数和两端抛物线函数平滑地衔接在一起形成的轨迹称为带有抛物线过渡域的线性轨迹。

27

抛物线对时间的二阶导数为常数，即相应区段内的加速度保持不变，使得平滑过渡，不致在结点处产生跳跃，整个轨迹的位移和速度都连续。



为构造这段运动轨迹，假设两过渡域（抛物线）有相同的持续时间，且这两个域有相同的恒加速度值，但符号相反。

图7.6 带抛物线过渡的线性插值(1)

28

由于过渡域 $[t_0, t_b]$ 终点 t_b 时刻的速度必须等于线性域的速度，

$$\dot{\theta}_{tb} = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b} \quad (7.13)$$

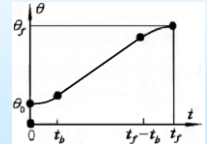
式中 θ_b 为过渡域终点 t_b 处的关节角度。若 $\ddot{\theta}$ 表示过渡域内的加速度， θ_b 可按下式解得：

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \cdot t_b^2 \quad (7.14)$$

令 $t = 2t_h$ ，由式 (7.13) 和 (7.14) 得：

$$\ddot{\theta} t_b^2 - \ddot{\theta} t t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0 \quad (7.15)$$

式中 t 为所要求的运动持续时间。



29

$$\ddot{\theta} t_b^2 - \ddot{\theta} t t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0 \quad (7.15)$$

对于任意给定的 θ_f, θ_0 和 t

先选择加速度 $\ddot{\theta}$ 的值，然后计算相应的 t_b

$$t_b = \frac{t}{2} - \sqrt{\frac{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}{2\ddot{\theta}}} \quad (7.16)$$

为保证 t_b 有解，过渡域加速度值 $\ddot{\theta}$ 必须选得足够大，即

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t^2} \quad (7.17)$$

30

如图7.7示，轨迹不是唯一的，有多个解。但每个结果都对称于时间中点 t_h 和位置中点 θ_h 。

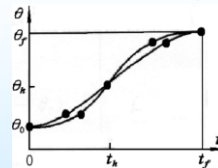


图7.7 带抛物线过渡的线性插值

过渡域的加速度取值越大，过渡域的长度越短；
如果过渡域的加速度取无限大，路径为线性插值；
等号成立时，是过渡域的加速度值最小，路径为两个过渡域。

31

5. 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

如图7.9，某个关节在运动中设有 n 个路径点，其中三个相邻的路径点表示为 j, k 和 l 。每两个相邻的路径点之间都以线性函数相连，而所有路径点附近则由抛物线过渡。

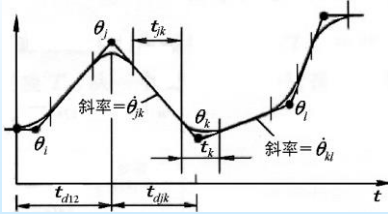


图7.9 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

32

图中， k 点过渡域的时间为 t_k ，点 $j \rightarrow k$ 线性域的时间为

t_{jk} ； $j \rightarrow k$ 点的路径段的全部时间为 t_{dj2} 。

另外， $j \rightarrow k$ 点间的线性域速度为 $\dot{\theta}_{jk}$ ， j 点过渡域的加速度为 $\ddot{\theta}_j$ 。

如何确定路径点处带有抛物线过渡域的线性轨迹？

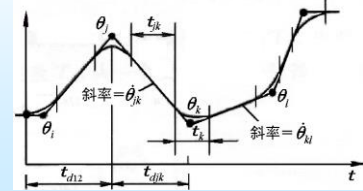


图7.9 多段带有抛物线过渡域的线性插值轨迹

33

此问题有多解，每一解对应一个选取的加速度值 θ 。给定任意路径点的位置 θ_k ，持续时间 t_{dj2} 以及加速度的绝对值 $|\ddot{\theta}_k|$ ，可计算出过渡域的持续时间 t_k 。对内部路径段($j, k \neq 1, 2$ 或 $n-1$)，可由下列方程求解：

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{jk} &= \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{dj2}} & \text{过渡段时间: } t_k &= \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\ \ddot{\theta}_k &= \text{sgn}(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}) |\ddot{\theta}_k| & \text{线性段时间: } t_{jk} &= t_{dj2} - \frac{1}{2} t_j - \frac{1}{2} t_k \end{aligned}$$

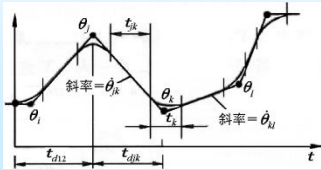


图7.9 多段带有抛物线过渡域的线性插值轨迹

34

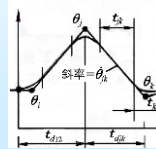
第一和最后一个路径段的处理与上式略有不同，因为轨迹端部的整个过渡域的持续时间都必须计入这一路径段内。

对于第一个路径段，令线性域速度的两个表达式相等，就有：

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2} t_1} = \ddot{\theta}_1 t_1 \quad (7.19)$$

用该式算出起始点过渡域的持续时间 t_1 后，就可求 $\ddot{\theta}_{12}$ 和 t_{12}

见式(7.20)



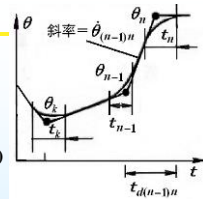
35

对最后一个路径段，路径点 $n-1$ 与终止点 n 之间的参数与第一个路径段相似，即

$$\frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2} t_n} = \ddot{\theta}_n t_n \quad (7.21)$$

则可求出：

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_n &= \text{sgn}(\dot{\theta}_{n-1} - \dot{\theta}_n) |\ddot{\theta}_n| \\ t_n &= t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \frac{2(\theta_n - \theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}} \\ \dot{\theta}_{(n-1)n} &= \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2} t_n} \\ t_{(n-1)n} &= t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2} t_n \end{aligned} \quad (7.22)$$



36

用式(7.18)~(7.22)可求出多段轨迹中各个过渡域的时间和速度。通常只需给定路径点及各段路径的持续时间，系统使用各关节的隐含加速度值。有时，系统也可按隐含速度值来计算持续时间。

对各段的过渡域，加速度值应足够大，以便使各路径段有足够长的线性域。

注意：用抛物线过渡的直线样条函数一般不经过那些路径点，除非在这些点处停止。若选取得加速度充分大，则实际路径将与理想路径点十分靠近。如果要求机器人途经某个结点，那么将轨迹分为两段，把这些结点作为前一段的终点和后一段的起点即可。

37