2021 矩阵理论

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分,根据正确答案的选项涂黑答题卡对应的位置）

1.下列选项中**错误**的是　(　　C　)

(A) $W_1=\{A\,|\,A^{\mathrm{H}}=A,\forall A\in C^{n\times n}\},W_2=\{A\,|\,A^{\mathrm{H}}=-A,\forall A\in C^{n\times n}\}$，则$W_1\oplus W_2=C^{n\times n}$；

(B) $\mathrm{H}(u)=E-2uu^{\mathrm{H}}$(其中$u\in C^n,u^{\mathrm{H}}u=1$)，则$\lambda=-1$为$\mathrm{H}(u)$的单特征值;

(C) $A\in C_r^{m\times n}$为非零矩阵，则$\|A^+\|_2=\dfrac{1}{\|A\|_2}$；　(D) $A\in C_n^{m\times n}$的充分必要条件是$A^-A=E_n$.

2.下列选项中**正确**的是　(　　A　)

(A)设$A^{\mathrm{H}}=A\in C^{n\times n}$有一个主对角元素为负，则$A$至少有一个负特征值;

(B)若$A^2=A$，则$\|A\|_F\geq 1$;　(C) $A\in C^{n\times n}$，则$R(A)=R(A^{\mathrm{H}})$；

(D) $A\in C^{n\times n},\lambda_i$与$\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$分别为其特征值和奇异值，则$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$.

3.下列选项中**正确**的是　(　　B　)

(A) $A^{\mathrm{H}}=-A\in C^{n\times n}$，则$A$的特征值为纯虚数;　(B) $A\in C_r^{m\times n}$，则$\dim N(A^+)=m-r$；

(C) 设U,V为酉矩阵且$A=UBV$，若B为正规矩阵，则A为正规矩阵;

(D) $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in R^2$，$f(x)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$，则$f(x)$为$R^2$的向量范数 .

4. 下列说法**错误**的是　（　　A　　）

(A) 设$B=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$，其中$\alpha$和$\beta$皆为$n$阶单位行向量，则$B^+=B$;

(B) A为实对称正定矩阵，则存在唯一的正线上三角实矩阵R，使得$A=R^{\mathrm{T}}R$;

(C) 若$A\in C_r^{m\times n}$，则$A^{\mathrm{H}}A$ 有r个正特征值;（D）任何非零矩阵都存在奇异值分解和满秩分解.

5. 下列选项正确的是(　　　C　)

(A) $A,B\in C^{m\times n}$，则$e^A\cdot e^B=e^{A+B}$;　(B) 设$A\in C^{n\times n}$，则$(A^5)^+=(A^+)^5$;

(C) 设$A\in C^{n\times n},\lambda$为其特征值，则满足$Ax=\lambda x$的全体向量$x$构成一个线性子空间;

(D) $A\in C^{n\times n}$,则 A 的秩等于其非零特征值的个数.

二. 判断题（每小题 4 分，共 20 分. 正确的在答题卷涂黑【T】，错误的涂黑【F】）

6. $A\in C_r^{m\times n}$ 且 $A=BC$ 为其最大秩分解，则 $N(A)=N(C)$.　　(√)

7. $A\in C_r^{n\times n}, x\in C^n$ 且 $\sigma_i(i=1,\cdots,r)$ 为 A 的正奇异值，则 $\|Ax\|_2^2\le\left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\right)\|x\|_2^2$.　　(√)

8. 若 $\|A\|_{m_\infty}<1$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(E-A)^{-1}$;　　(×)

9. $A\in C_m^{m\times n}(m<n)$，则 $R(A)=C^n$.　　(×)

10.设 $\boldsymbol{A\in C^{m\times n}}$ 则 $rank(A^+)=rank(AA^H)$.　　（ √ ）

三(9 分). 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 且 $\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|<1(\forall i)$，证明：

(1) A 的每一个特征值 λ 的模 $\left|\lambda\right|<1$;

(2) $E-A$ 可逆且 $\|(E-A)^{-1}\|_\infty\le\dfrac{1}{1-\|A\|_\infty}$ (其中: E 为单位矩阵).

证明：(1)由 $\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|<1(\forall i)$ 得且 $\|A\|_\infty<1$.所以 $\left|\lambda\right|\le\|A\|_\infty<1$.**(**

(2) 由 $r\left(A\right)\le\|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$ 可知 1 不是矩阵 A 的特征值，所以 $E-A$ 没有零特征值， $E-A$ 故可逆.

$$(E-A)(E-A)^{-1}=E\Rightarrow(E-A)^{-1}-A(E-A)^{-1}=E\Rightarrow(E-A)^{-1}=E+A(E-A)^{-1}$$

$$\Rightarrow\left\|(E-A)^{-1}\right\|_\infty=\left\|E+A(E-A)^{-1}\right\|_\infty\le\left\|E\right\|_\infty+\left\|A(E-A)^{-1}\right\|_\infty\le1+\left\|A\right\|_\infty\bullet\left\|(E-A)^{-1}\right\|_\infty$$

$$\Rightarrow(1-\left\|A\right\|_\infty)\left\|(E-A)^{-1}\right\|_\infty\le1\Rightarrow\left\|(E-A)^{-1}\right\|_\infty\le\frac{1}{1-\left\|A\right\|_\infty}$$.**(2 分)**

四(7 分). 设 $A\in C^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵，$\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n$，酉矩阵 $U=(u_1,\cdots,u_n)$ 使得 $A=U\Lambda U^H$ 。

若 $W=L(u_r,\cdots,u_s)$ 为 $u_r,\cdots,u_s$ 的生成子空间，其中 $r\le s$，证明：对 $\forall x\in W,\|x\|_2=1$，$\lambda_s\le x^H Ax\le\lambda_r$ 成立。

证：由 $A=U\Lambda U^H$ 得 $U^H AU=\Lambda$. **(2 分)**

当 $x\in W,\|x\|_2=1$ 时，有 $x=a_ru_r+\cdots+a_su_s=(u_r,\cdots,u_s)\begin{pmatrix}a_r\\ \vdots\\ a_s\end{pmatrix}=Ua$，其中，

$a=(0,\cdots,a_r,\cdots,a_s,\cdots,0)^T$ 且 $|a_r|^2+\cdots+|u_s|^2=1$. **(2 分)** 则

$$x^H Ax=a^H U^H AUa=a^H\Lambda a=\lambda_r|a_r|^2+\cdots+\lambda_s|a_s|^2 \ \textbf{(2 分)}$$

所以 $\lambda_s\le x^H Ax\le\lambda_r$ **(1 分)**

五(9 分). 设 $A\in C^{n\times n}$，$\|A\|=n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$，证明:(1) $\|A\|$ 为矩阵范数; (2) $\|A\|$ 为与向量 2-范数相容.

证:(1) 正定性：$A\ne O$ 时，A 至少有一个元素不等于零，

所以 $\|A\|=n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|>0$; **(2 分)**

(2) 齐次性：$\|kA\|=n\cdot\max\limits_{i,j}|ka_{ij}|=|k|n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|=|k|\|A\|$; **(2 分)**

(3)三角不等式：$\|A+B\|=n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}|\le n\cdot\max\limits_{i,j}(|a_{ij}|+|b_{ij}|)$

$\le n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|+n\cdot\max\limits_{i,j}|b_{ij}|=\|A\|+\|B\|$ **(2)**

(4) $$\|Ax\|_2^2=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\le\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}||x_j|\right)^2\le\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n|x_j|^2\right)$$

$$=\left(\sum_{j=1}^n|x_j|^2\right)\bullet\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\le n^2\max_{i,j}|a_{ij}|^2\bullet\left(\sum_{j=1}^n|x_j|^2\right)=\|A\|^2\|x\|_2^2$$

六. **(8 分)**设矩阵 $A=\begin{pmatrix}\pi&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 计算 $\sin A$.

解：该矩阵已为 Jordan 标准型，$J_1=\pi,J_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$\sin J_1=0,\sin J_2=\begin{pmatrix}\sin 0&\cos 0\\0&\sin 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\sin A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ **(2 分)**

七(7 分).矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2\\-1&1\end{pmatrix}$ 求其谱分解.

解:

(1) 求特征值 $|\lambda E-A|=(\lambda_1-2)(\lambda_2-3)=0$，所以特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$，故可相似对角化.

(2) 求特征向量: $\lambda_1=2$ 对应的特征向量为 $p_1=(-1,1)^T$；

$\lambda_2=3$ 对应的特征向量为 $p_2=(2,-1)^T$.

(3)谱分解:令 $P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_1^T\\\omega_2^T\end{pmatrix}$.

令 $A_1=p_1\omega_1^T=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}$, $A_2=p_2\omega_2^T=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$,

故谱分解式为 $A=2A_1+3A_2$.

八(15 分).设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.(1) 求 A 的最大秩分解；(2) 求 A^+ ；(3) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；(4) 线性方程组 $Ax=b$ 如有解，求通解和最小范数解；如无解，求最小二乘解和最佳逼近解.

解:

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

矩阵 A 的最大秩分解为 $A=BD=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

(2) $B^+=(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-3&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$

$$D^+ = D^H (DD^H)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = D^+ B^+ = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $AA^+b = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq b$,所以无解.

(4) 最佳逼近解为 $A^+b = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

最小二乘解为 $A^+b + (E - A^- A)u, \forall u \in C^4$

九.(5 分) 设 $A \in C_3^{3\times 3}$, 则存在分解 $A = UR$,其中 U 是酉矩阵, R 是正线上三角复矩阵. 证明该分解的唯一性.

证: 设$A = U_1 R_1 = U_2 R_2$，则 $R_1 = U_1^{-1} U_2 R_2 = VR_2$，其中$V = U_1^{-1} U_2$ 为酉矩阵。

令 $R_1 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$，比较(*)式两端矩阵第一列得 $k_{11} = v_{11} l_{11}$， $v_{21} l_{11} = v_{31} l_{11} = 0$，故 $l_{11} = k_{11} / v_{11} > 0$ $v_{21} = v_{31} = 0$，因为$V = U_1^{-1} U_2$ 为酉矩阵，所以 $l_{11} = 1$ 以及 $v_{12} = v_{13} = 0$。

故$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} & v_{23} \\ 0 & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$，类推可得$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.