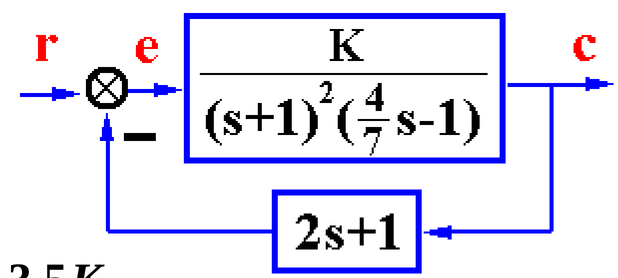
§4.2 绘制根轨迹的基本法则（20）

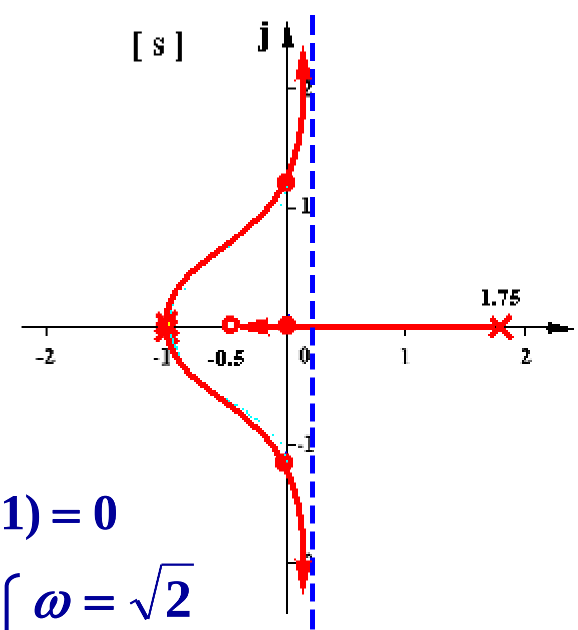
例1 系统结构图如图所示

（1）绘制当$K^*=0\to\infty$ 时系统的根轨迹；

（2）分析系统稳定性随 K 变化的规律。



解. (1) $G(s)=\dfrac{K(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)}=\dfrac{3.5K(s+1/2)}{(s+1)^2(s-\frac{7}{4})}$ $\quad\begin{cases}K^*=3.5K\\ v=0\end{cases}$



① 实轴上的根轨迹：[-0.5, 1.75]

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{-2+7/4+1/2}{3-1}=\dfrac{1}{8}\\[2ex] \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3-1}=\pm 90^\circ\end{cases}$

③ 出射角：$180^\circ-[2\theta+180^\circ]=-180^\circ \quad\Rightarrow \theta=90^\circ$

④ 与虚轴交点：$D(s)=4s^3+s^2+(14K-10)s+7(K-1)=0$

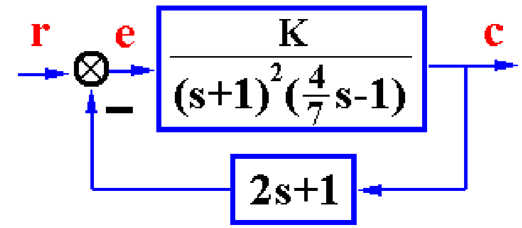
$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+7(K-1)=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-4\omega^3+(14\omega-10)\omega=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\omega=0\\ K=1\end{cases}\qquad \begin{cases}\omega=\sqrt{2}\\ K=9/7\end{cases}$$

§ 4.2 绘制根轨迹的基本法则 (21)

例1 系统结构图如图所示

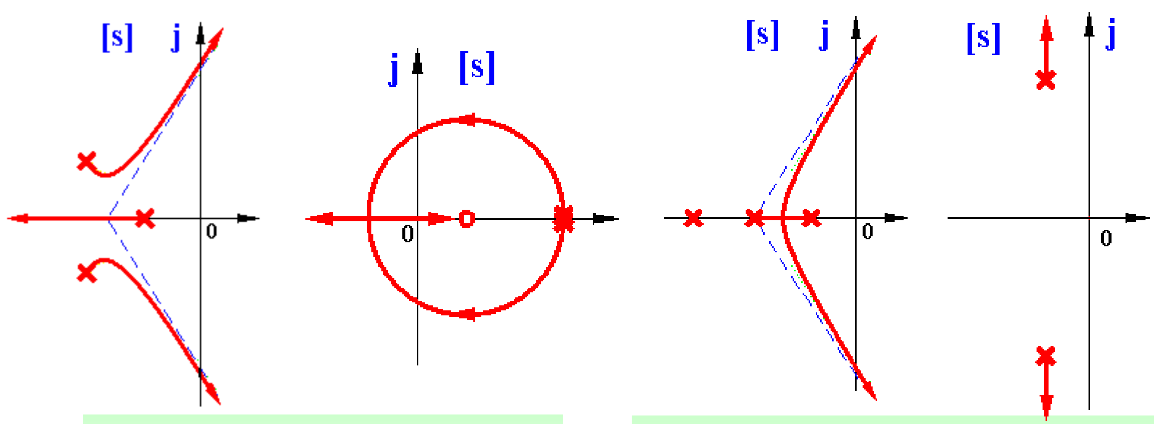
（1）绘制当$K^*= 0\rightarrow\infty$ 时系统的根轨迹；

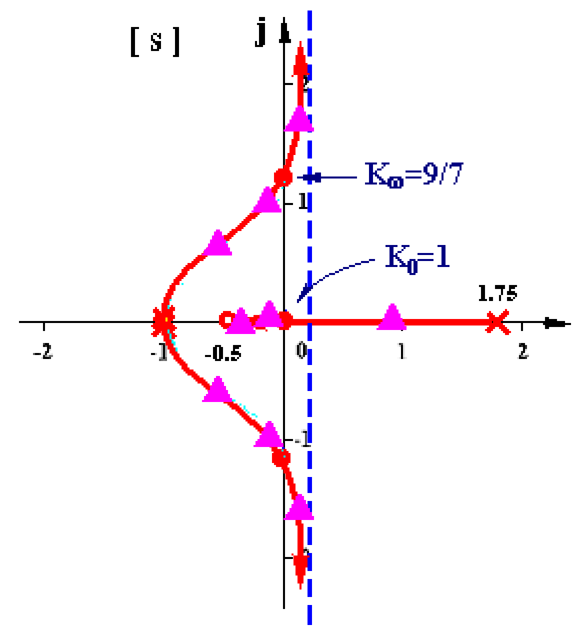
（2）分析系统稳定性随 K 变化的规律。



解. (2) 分析：

$$\underbrace{K=0 \xrightarrow[\text{单调发散}]{h(t)} K_0=1}_{\text{不稳定}}\ \underbrace{\xrightarrow[\text{收敛}]{h(t)} K_\omega=\frac{9}{7}}_{\text{稳定}}\ \underbrace{\xrightarrow[\text{振荡发散}]{h(t)} \infty}_{\text{不稳定}}$$





开环稳定 ≠ 闭环稳定

负反馈未必一定能改善系统性能

(第 15 讲)

§4 根轨迹法

§4.1 根轨迹法的基本概念

§4.2 绘制根轨迹的基本法则

§4.3 广义根轨迹

§4.4 利用根轨迹分析系统性能

§4.3 广义根轨迹 (0)

§4.3.1 参数根轨迹 — 除 K^* 之外其他参数变化时系统的根轨迹

例2 单位反馈系统: $G(s)=\dfrac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$， a=0→∞ 变化，绘制根轨迹；ξ=1时， Φ(s)=?

解. (1) $D(s)=s^3+s^2+\dfrac{1}{4}s+\dfrac{1}{4}a=0$

构造 "等效开环传递函数" $G^*(s)=\dfrac{a/4}{s^3+s^2+s/4}=\dfrac{a/4}{s(s+0.5)^2}$

① 实轴根轨迹：$(-\infty, 0]$

② 渐近线： $\sigma_a=-1/3 \qquad \varphi_a=\pm 60°, 180°$

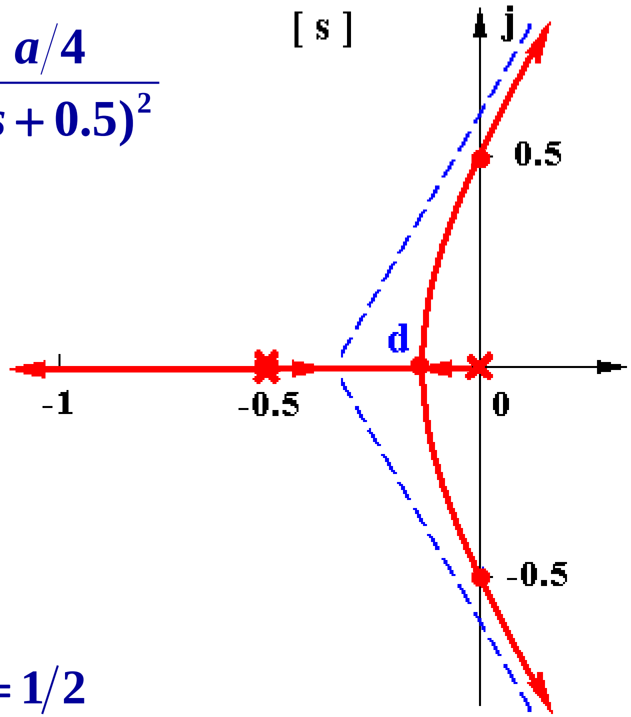
③ 分离点： $\dfrac{1}{d}+\dfrac{2}{d+0.5}=0$

整理得： $3d+0.5=0 \qquad \Rightarrow d=-1/6$

$$a_d=4|d||d+0.5|^2=2/27$$

④ 与虚轴交点： $D(s)=s^3+s^2+s/4+a/4=0$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+a/4=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+\omega/4=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\omega=1/2\\ a=1\end{cases}$$

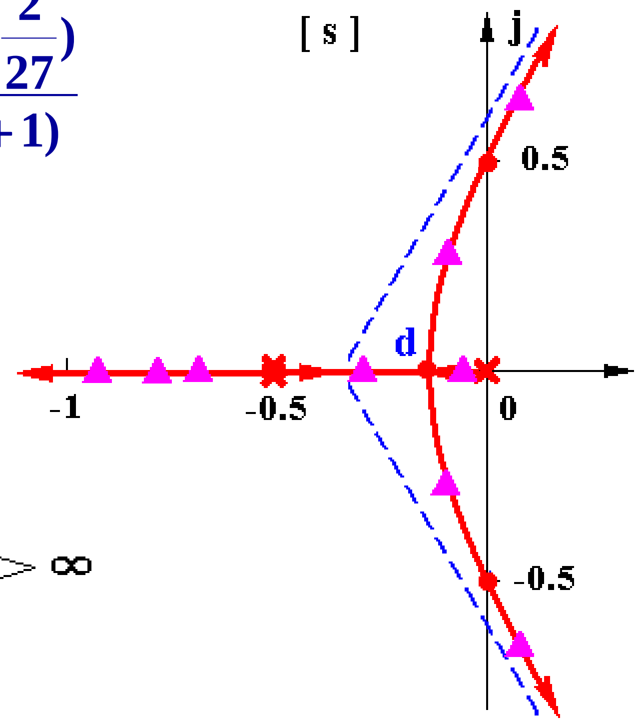


§ 4.3.1 参数根轨迹 (1)

解. (2) $\xi=1$ 时，对应于分离点 d，$a_d=2/27$

$$G^*(s)=\frac{a/4}{s(s+0.5)^2} \qquad G(s)=\frac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)} \overset{a=2/27}{=} \frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1)}$$

$$\Phi(s)=\frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1)+\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}=\frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{(s+\frac{1}{6})^2(s+\frac{2}{3})}$$



$$a=0 \xrightarrow[\sigma\%=0,\ t_s\downarrow]{h(t)\ \text{单调收敛}} a_d=\frac{2}{27} \xrightarrow[\sigma\%\uparrow,\ t_s\uparrow]{h(t)\ \text{振荡收敛}} a_\omega=1 \xrightarrow{h(t)\ \text{振荡发散}} \infty$$

动态性能：$\sigma\%=0$，$t_s\downarrow$；$\sigma\%\uparrow$，$t_s\uparrow$

稳定性：稳定（$0 \le a < 1$）；不稳定（$a > 1$）

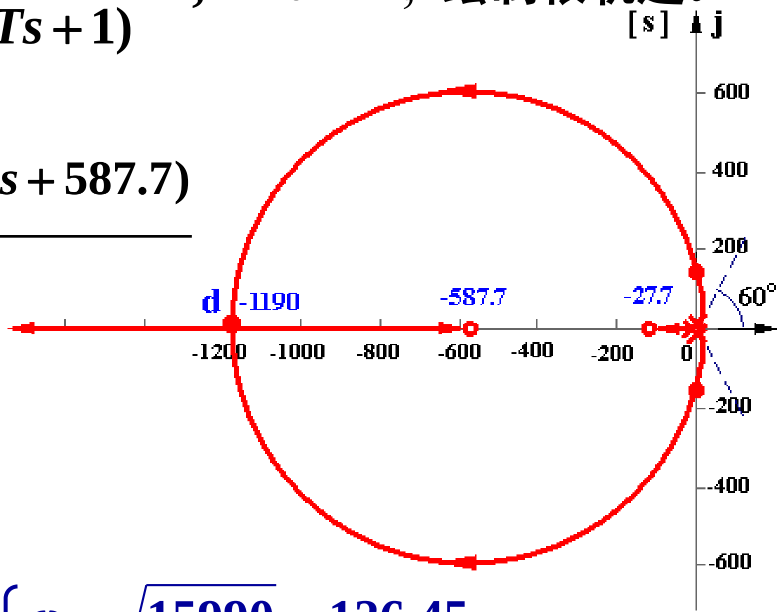
稳态误差：$r(t)=\frac{At^2}{2}$　$K=\frac{a}{4}\uparrow$，$e_{ss}=\frac{4A}{a}\downarrow$　$e_{ss_{min}}=4A$

§4.3.1 参数根轨迹 (2)

例3 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$，T=0→∞，绘制根轨迹。

解 I． $D(s)=Ts^3+s^2+615s+15990=0$

$$G^*(s)=\frac{\frac{1}{T}(s^2+615s+15990)}{s^3}=\frac{\frac{1}{T}(s+27.7)(s+587.7)}{s^3}$$



① 实轴上的根轨迹：(-∞,-587.7]，[-27.7,0]

② 出射角： $2\times 0-3\theta=(2k+1)\pi$

$\theta=\pm 60°, 180°$

③ 虚轴交点： $\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+15990=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-T\omega^3+615\omega=0\end{cases}$ $\begin{cases}\omega=\sqrt{15990}=126.45\\ T=615/15990=0.0385\end{cases}$

④ 分离点： $\dfrac{3}{d}=\dfrac{1}{d+27.7}+\dfrac{1}{d+587.7}$

整理得： $d^2+1231d+47970=0$

解根： $\begin{cases}d_1=-40.5, \quad d_2=-1190 \ ✓\\ T_d=\dfrac{|d+27.7||d+587.7|}{|d|^3}=0.00055\end{cases}$

§ 4.3.1 参数根轨迹 (3)

例3 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$ ，T=0→∞，绘制根轨迹。

解II． $D(s)=Ts^3+s^2+615s+15990=0$

$$G_2^*(s)=\frac{Ts^3}{(s+27.7)(s+587.7)(\frac{s}{\infty}+1)}$$

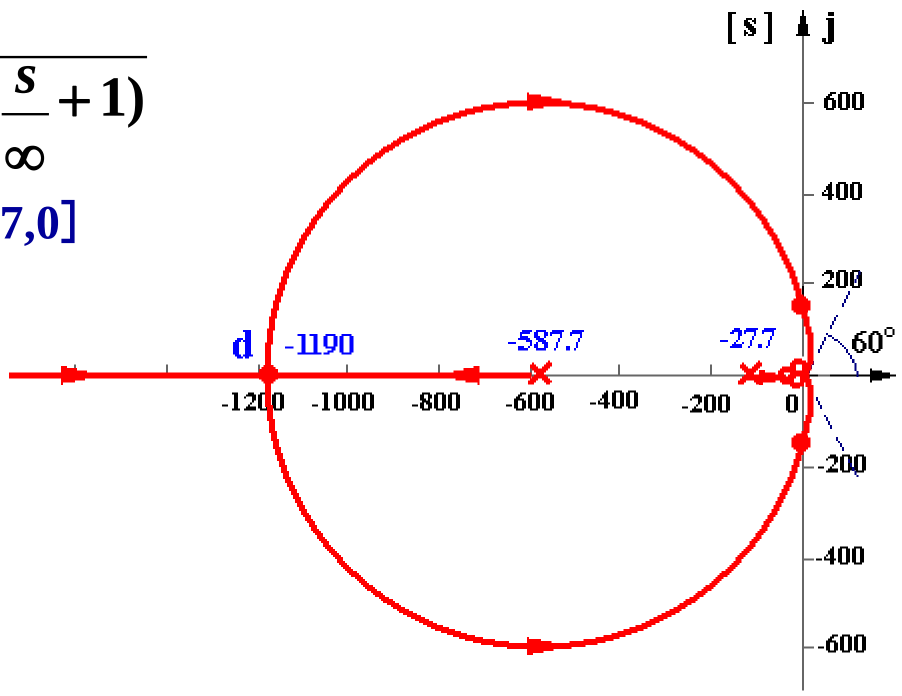
① 实轴根轨迹：(-∞,-587.7]，[-27.7,0]

② 分离点： $d=-1190$

$T_d=0.00055$

③ 虚轴交点： $\begin{cases}\omega=126.45\\ T=0.0358\end{cases}$

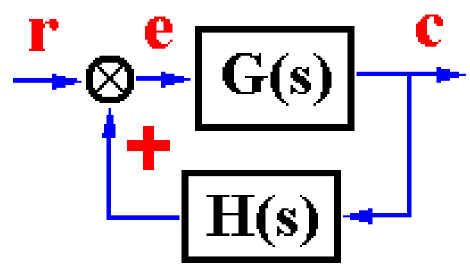
④ 入射角： $\theta=\pm60°,180°$



§4.3 零度根轨迹 (0)

§4.3.2 零度根轨迹 —系统实质上处于正反馈时的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$



$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=+1$$

$$|G(s)H(s)|=\frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}=1$$ — 模值条件

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=2k\pi$$ — 相角条件

绘制零度根轨迹的基本法则

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数，对称性和连续性

★ 法则 3 实轴上的根轨迹

法则 4 根之和 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = C \qquad (n-m\geq 2)$

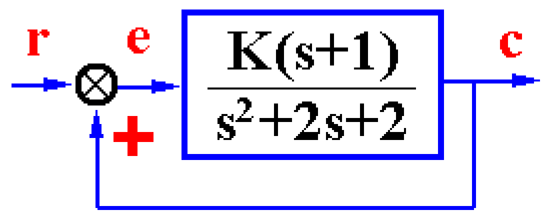
★ 法则 5 渐近线 $\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i - \sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m} \qquad \varphi_a = \dfrac{2k\pi}{n-m}$

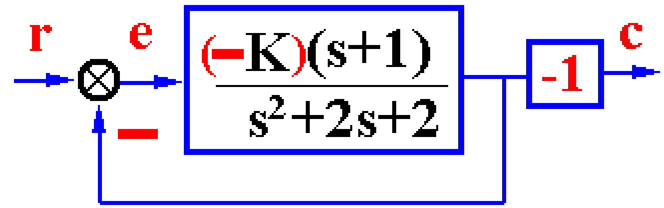
法则 6 分离点 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_j}$

法则 7 与虚轴交点 $\mathrm{Re}[D(j\omega)] = \mathrm{Im}[D(j\omega)] = 0$

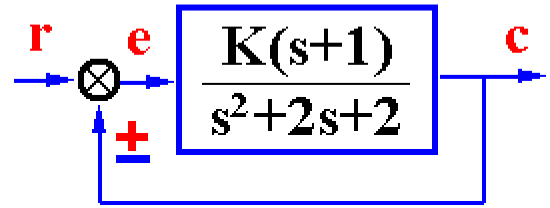
★ 法则 8 出射角/入射角 $\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) = 2k\pi$

§ 4.3.2





例5 系统结构图如图所示，$K^*=0\to\infty$, 变化，试分别绘制 0° 、180° 根轨迹。



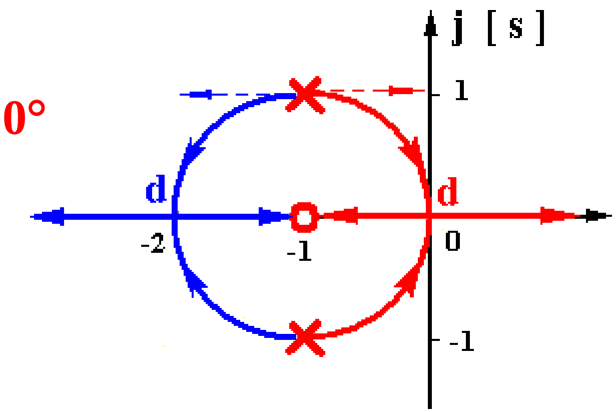
解. $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2+2s+2}=\dfrac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)}$ $\quad\begin{cases}K_k=K/2\\ v=0\end{cases}$

（1） 180° 根轨迹 （2） 0° 根轨迹

① 实轴轨迹：$(-\infty,-1]$ $\quad[-1,\ \infty)$

② 出射角： $90^\circ-[\theta+90^\circ]=-180^\circ$ $\quad 90^\circ-[\theta+90^\circ]=0^\circ$

$\Rightarrow\theta=180^\circ$ $\quad\Rightarrow\theta=0^\circ$



③ 分离点： $\dfrac{1}{d+1+j}+\dfrac{1}{d+1-j}=\dfrac{2(d+1)}{d^2+2d+2}=\dfrac{1}{d+1}$

整理得： $d^2+2d=d(d+2)=0$

解根： $\begin{cases}d_1=-2\\ K_{d_1}=\dfrac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|}\overset{d=-2}{=}2\end{cases}$ $\quad\begin{cases}d_2=0\\ K_{d_2}=\dfrac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|}\overset{d=0}{=}2\end{cases}$

§4.3.2 零度根轨迹 (2)

例6 系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$，分别绘制 0°、180°根轨迹。

解. $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$ $\quad \begin{cases} K=K^*/27 \\ v=0 \end{cases}$

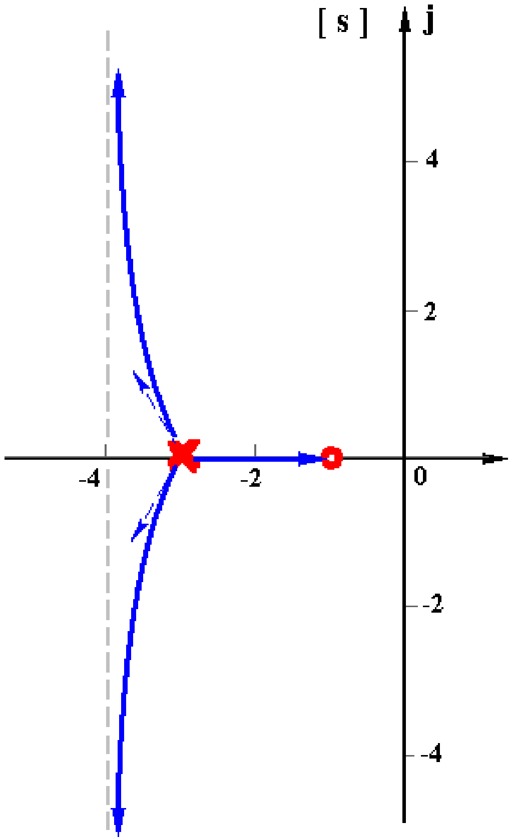
(1) 绘制 180° 根轨迹

① 实轴上的根轨迹：[-3, -1]

② 出射角：$180°-3\theta=(2k+1)\pi$

$$\Rightarrow \theta_1=\frac{2k\pi}{3}=0°,\ \pm 120°$$

③ 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a=\dfrac{-3\times 3+1}{2}=-4 \\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\pm 90° \end{cases}$



§ 4.3.2 零度根轨迹 (3)

解. $G(s) = \dfrac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$ $\quad \begin{cases} K = K^*/27 \\ v = 0 \end{cases}$

(2) 绘制 0° 根轨迹

① 实轴轨迹：(-∞,-3], [-1, ∞)

② 出射角：$180° - 3\theta = 2k\pi$

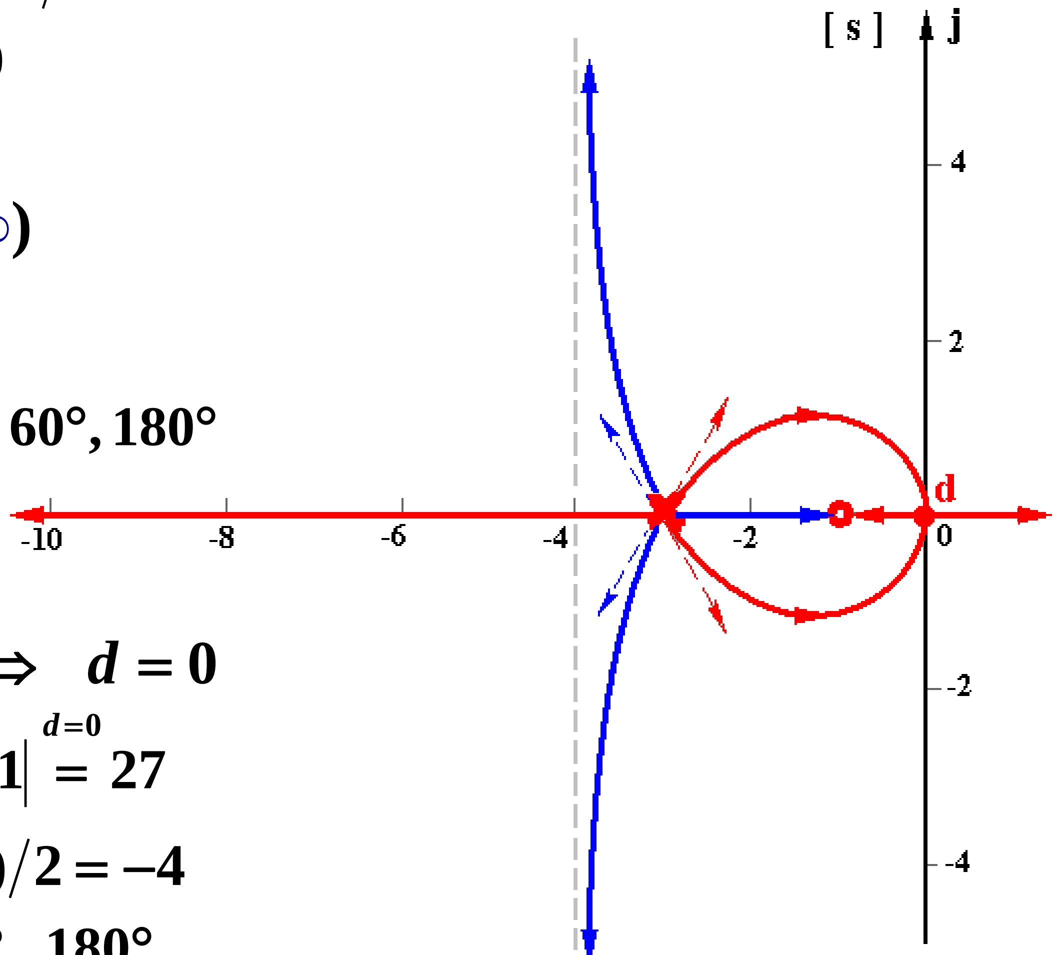
$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60°, 180°$$

③ 分离点：$\dfrac{3}{d+3} = \dfrac{1}{d+1}$

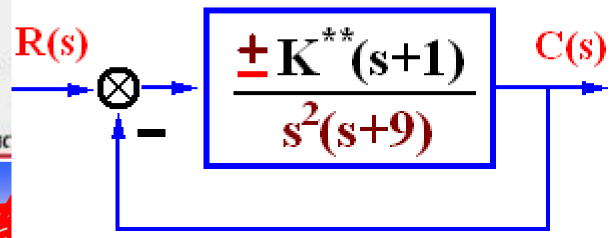
整理得：$3d + 3 = d + 3 \ \Rightarrow \ d = 0$

$$K_d^* = |d+3|^3 / |d+1| \overset{d=0}{=} 27$$

④ 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = (-3\times 3+1)/2 = -4 \\ \varphi_a = 2k\pi/2 = 0°,\ 180° \end{cases}$



§ 4.3.2 零度根轨迹



$$G(s)=\frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}\qquad \begin{cases} K=K^*/27 \\ v=0 \end{cases}$$

0°根轨迹 $\begin{cases} \text{出射角：} & \theta=\pm 60°,180° \\ \text{分离点：} & d=0 \quad K_d^*=27 \\ \text{渐近线：} & \begin{cases}\sigma_a=-4 \\ \varphi_a=0°,\ 180°\end{cases} \end{cases}$

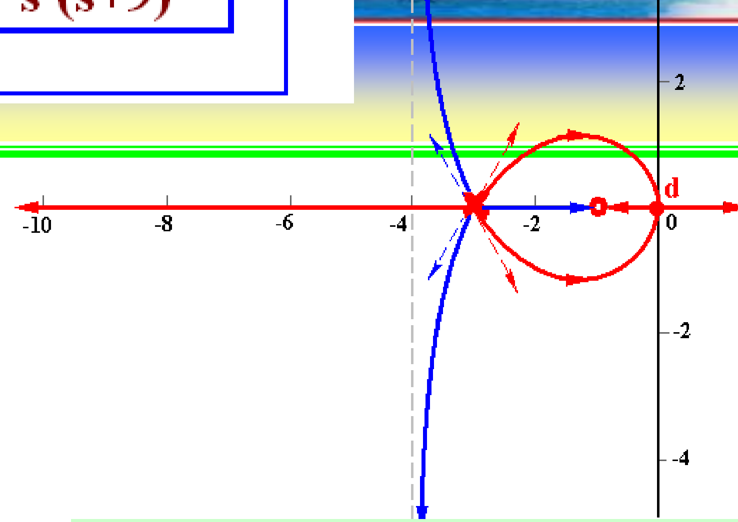
$$D(s)=(s+3)^3+K^*(s+1)=0$$

$$K^{**}=K^*+27$$
$$K^*=K^{**}-27$$

$$=(s+3)^3+(K^{**}-27)(s+1)$$

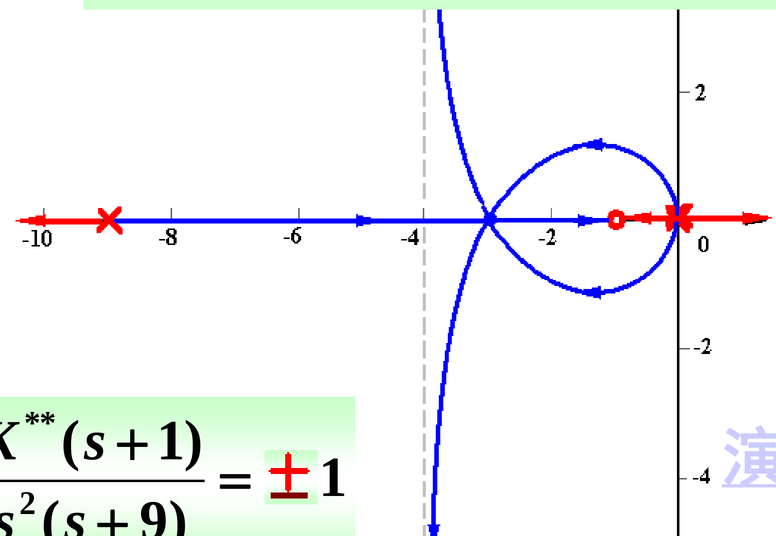
$$D(s)=s^3+9s^2+K^{**}(s+1)=0$$

$$G^*(s)=\frac{K^{**}(s+1)}{s^2(s+9)}$$



K^* : $-\infty \leftrightarrow -27 \leftrightarrow 0 \leftrightarrow \infty$

K^{**} : $-\infty \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 27 \leftrightarrow \infty$



$$G^*(s)=\frac{K^{**}(s+1)}{s^2(s+9)}=\pm 1$$

演示

绘制零度根轨迹的基本法则

法则 1　根轨迹的起点和终点

法则 2　根轨迹的分支数，对称性和连续性

★ 法则 3　实轴上的根轨迹

法则 4　根之和　$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = C \qquad (n-m\geq 2)$

★ 法则 5　渐近线　$\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i - \sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m} \qquad \varphi_a = \dfrac{2k\pi}{n-m}$

法则 6　分离点　$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_j}$

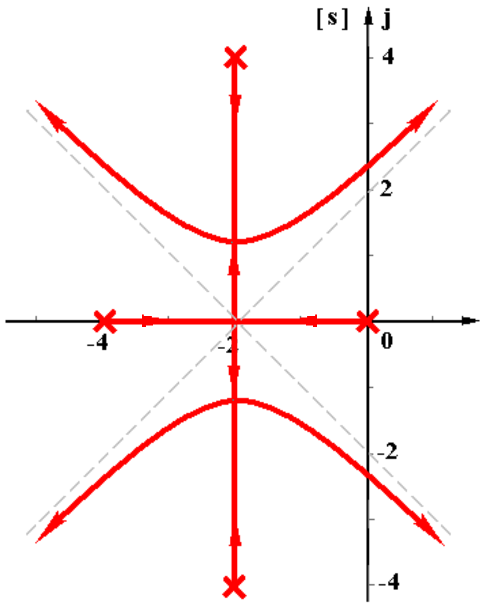
法则 7　与虚轴交点　$\mathrm{Re}[D(j\omega)] = \mathrm{Im}[D(j\omega)] = 0$

★ 法则 8　出射角/入射角　$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) = 2k\pi$

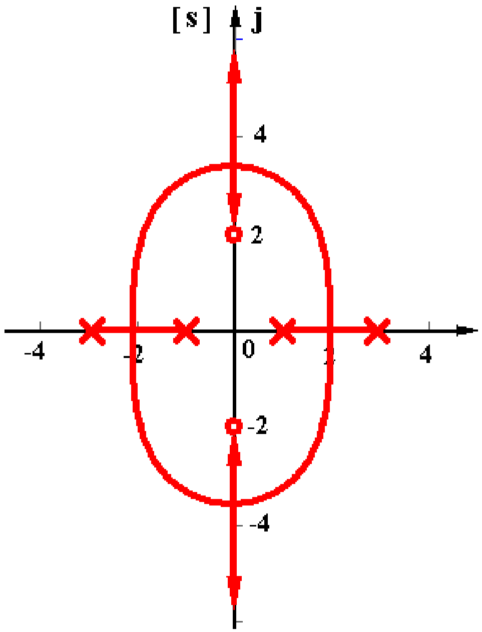
§4.2 绘制根轨迹的基本法则（22）

关于根轨迹对称性的一个定理：

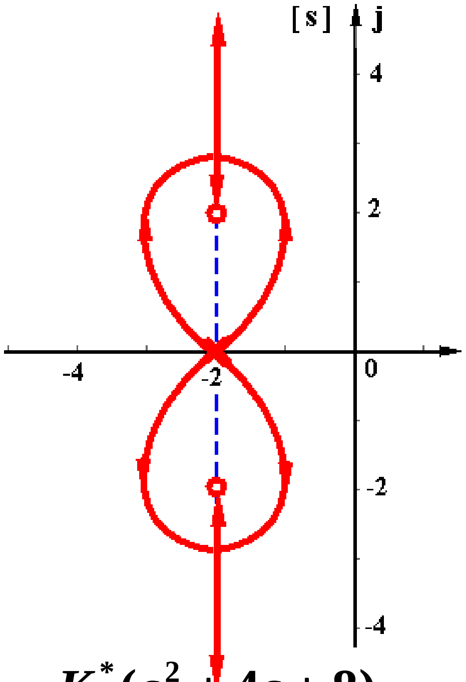
若开环零极点均为偶数个，且关于一条平行于虚轴的直线左右对称分布，则根轨迹一定关于该直线左右对称。



$$\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$



$$\frac{K^*(s^2+4)}{(s^2-1)(s^2-9)}$$



$$\frac{K^*(s^2+4s+8)}{(s+2)^4}$$

课程小结

§4.2 绘制根轨迹的基本法则

§4.3 广义根轨迹

§4.3.1 参数根轨迹

— 构造等效开环传递函数

§4.3.2 零度根轨迹

— 注意与绘制180°根轨迹不同的3条法则