

第四节 相互独立的随机变量

- 随机变量相互独立的定义
- 课堂练习
- 小结 布置作业

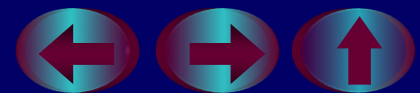
一、随机变量相互独立的定义

设 X, Y 是两个 $r.v.$, 若对任意的 x, y , 有

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

则称 X 和 Y 相互独立.

两事件 A, B 独立的定义是: 若 $P(AB) = P(A)P(B)$
则称事件 A, B 独立.



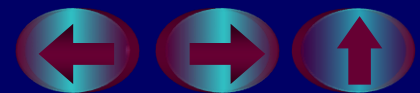
用分布函数表示,即

设 X, Y 是两个 $r.v$, 若对任意的 x, y , 有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X 和 Y 相互独立.

它表明, 两个 $r.v$ 相互独立时, 它们的联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积.



若 (X, Y) 是连续型 r.v, 则上述独立性的定义等价于:

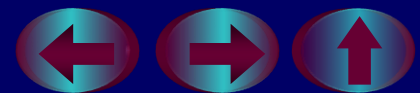
对任意的 x, y , 有

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

几乎处处成立, 则称 X 和 Y 相互独立.

其中 $f(x, y)$ 是 X 和 Y 的联合密度, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别是 X 的边缘密度和 Y 的边缘密度.

这里“几乎处处成立”的含义是: 在平面上除去面积为 0 的集合外, 处处成立.

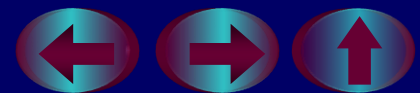


若 (X, Y) 是离散型 $r.v$, 则上述独立性的定义等价于:

对 (X, Y) 的所有可能取值 (x_i, y_j) , 有

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

则称 X 和 Y 相互独立.



二、例题

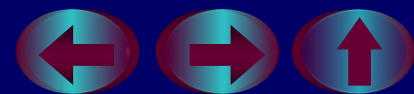
例1 设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

问 X 和 Y 是否独立？

解 $f_X(x) = \int_0^{\infty} xe^{-(x+y)} dy = xe^{-x}, \quad x > 0$

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} xe^{-(x+y)} dx = e^{-y}, \quad y > 0$$



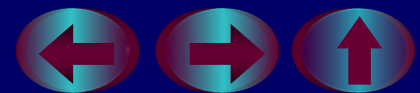
即
$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

可见对一切 x, y , 均有:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

故 X, Y 独立.



若 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

情况又怎样?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f_X(x) &= \int_x^1 2dy = 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ f_Y(y) &= \int_0^y 2dx = 2y, & 0 < y < 1 \end{aligned}$$

由于存在面积不为0的区域,

$$f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

故 X 和 Y 不独立.

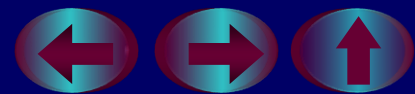
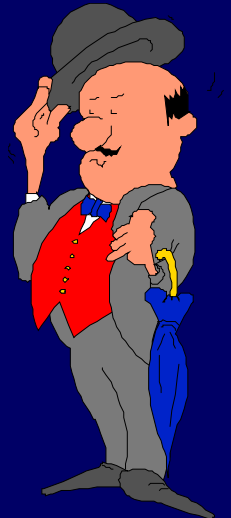


例2 甲乙两人约定中午12时30分在某地会面.如果甲来到的时间在12:15到12:45之间是均匀分布. 乙独立地到达,而且到达时间在12:00到13:00之间是均匀分布. 试求先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率. 又甲先到的概率是多少?

解 设 X 为甲到达时刻, Y 为乙到达时刻
以12时为起点,以分为单位,依题意,

$$X \sim U(15, 45), Y \sim U(0, 60)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & 15 < x < 45 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & 0 < x < 60 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1800}, & 15 < x < 45, 0 < y < 60 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由独立性

先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率

甲先到的概率

所求为 $P(|X-Y| \leq 5), P(X < Y)$



解一

$$P(|X-Y| \leq 5)$$

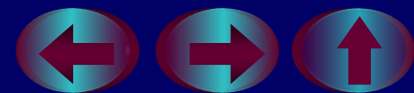
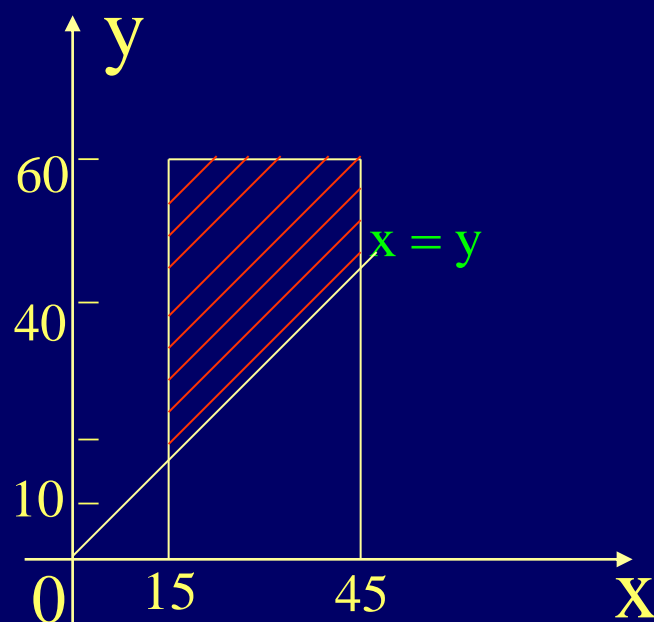
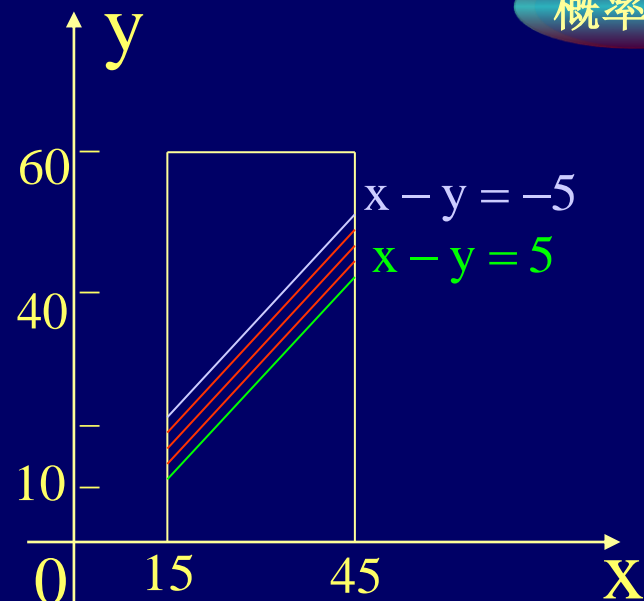
$$= P(-5 < X - Y < 5)$$

$$= \int_{15}^{45} \left[\int_{x-5}^{x+5} \frac{1}{1800} dy \right] dx$$

$$= 1/6.$$

$$P(X < Y) = \int_{15}^{45} \left[\int_x^{60} \frac{1}{1800} dy \right] dx$$

$$= 1/2.$$



解二

$$P(|X-Y| \leq 5)$$

$$= \iint_{|x-y| \leq 5} \frac{1}{1800} dx dy$$

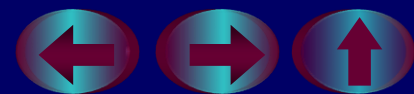
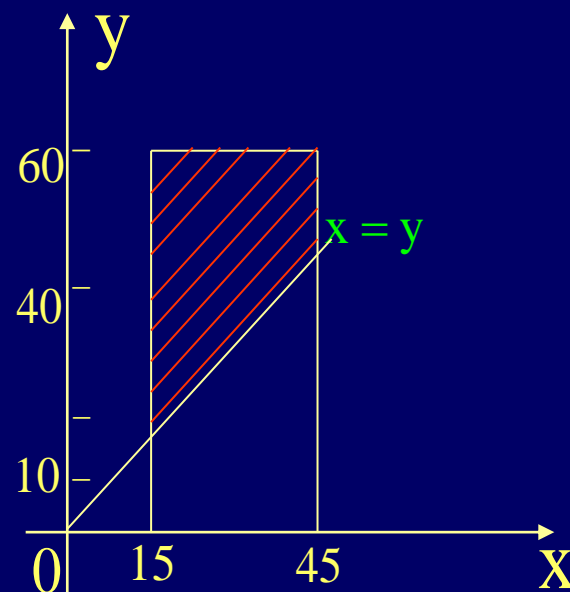
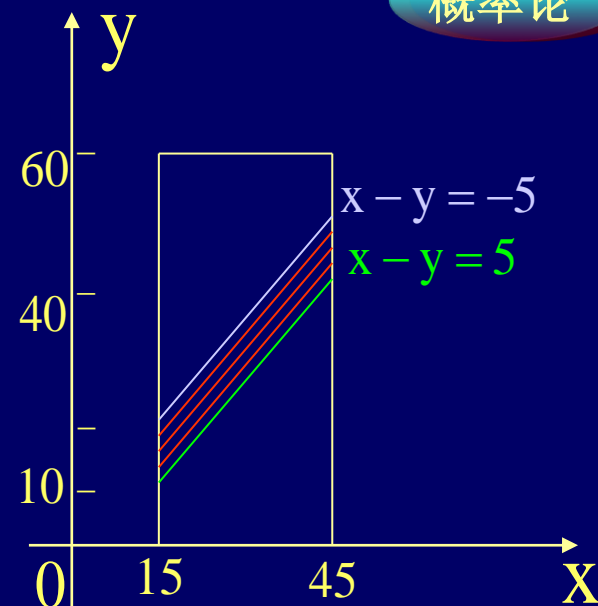
$$= \frac{1}{1800} [60 \times 30 - 2(10 \times 30 + 30 \times 30 / 2)]$$

$$= 1/6.$$

被积函数为常数，
直接求面积

$$P(X < Y) = P(X > Y)$$

$$= 1/2$$



类似的问题如：

甲、乙两船同日欲靠同一码头，设两船各自独立地到达，并且每艘船在一昼夜间到达是等可能的。若甲船需停泊1小时，乙船需停泊2小时，而该码头只能停泊一艘船，试求其中一艘船要等待码头空出的概率。



在某一分钟的任何时刻，信号进入收音机是等可能的。若收到两个互相独立的这种信号的时间间隔小于0.5秒，则信号将产生互相干扰。求发生两信号互相干扰的概率。

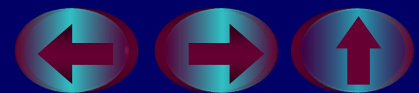


例3 盒内有 n 个白球, m 个黑球, 有放回地摸球两次. 设

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第1次摸到白球} \\ 0, & \text{第1次摸到黑球} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{第2次摸到白球} \\ 0, & \text{第2次摸到黑球} \end{cases}$$

试求 (1) (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律;
(2) 判断 X, Y 的相互独立性;
(3) 若改为无放回摸球, 解上述两个问题.

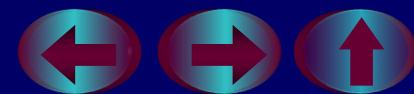


解 (1) (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$m^2 / (m+n)^2$	$mn / (m+n)^2$	$m / m+n$
1	$mn / (m+n)^2$	$n^2 / (m+n)^2$	$n / m+n$
$p_{\cdot j}$	$m / m+n$	$n / m+n$	

(2) 由上表可知 $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \ (i, j = 0, 1)$

故 X, Y 的相互独立.



(3) (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律如下表所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i \cdot}$
0	$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$	$\frac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$	$\frac{m}{m+n}$
1	$\frac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$	$\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$	$\frac{n}{m+n}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{m}{m+n}$	$\frac{n}{m+n}$	



由上表知：

$$P(X=0, Y=0) = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)},$$

$$P(X=0) = \frac{m}{m+n}, \quad P(Y=0) = \frac{m}{m+n}.$$

可见

$$P(X=0, Y=0) \neq P(X=0) \cdot P(Y=0).$$

故 X, Y 不是相互独立.



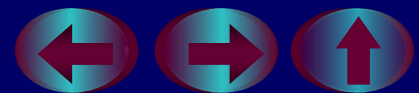
三、课堂练习

1. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度是

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

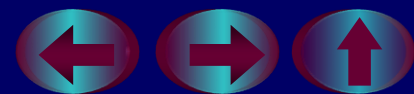
问 X 和 Y 是否相互独立?

2. 证明 对于二维正态随机变量 (X, Y) ,
 X 和 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$.



四、小结

这一讲，我们由两个事件相互独立的概念引入两个随机变量相互独立的概念，给出了各种情况下随机变量相互独立的条件，希望同学们牢固掌握。



五、布置作业

《概率统计》标准化作业(三)

