《概率统计》习题课 (二)

一．填空题：

1）设离散型随机变量X分布律为

$$P\{X=k\}=5A(1/2)^k \quad (k=1,2,\cdots)$$

则$A=$ $\frac{1}{5}$

解：由$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ 即 $\sum_{k=1}^{\infty}\left[5A(1/2)^k\right]=1$

得 $A=\frac{1}{5}$

一．填空题：

2）已知随机变量X的密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, 0<x<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$，且 $P\{X>0.5\}=5/8$，则

$a=$ ___1___ $b=$ ___$\frac{1}{2}$___

解： 由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$， 得$\int_0^1 (ax+b)dx=\frac{a}{2}+b=1$

又$P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^1 (ax+b)dx=\frac{3a}{8}+\frac{b}{2}=\frac{5}{8}$，

解得： $a=1$， $b=\frac{1}{2}$

一．填空题：

3）设 $X \sim N(2,\sigma^2)$, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ ___0.2___

解：由对称性得 $P\{X < 2\} = 0.5$, $P\{0 < X < 2\} = 0.3$,

所以 $P\{X < 0\} = P\{X < 2\} - P\{0 < X < 2\}$

$= 0.2$

二、 选择题：

1）设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,那么当 σ 增大时，

$P\{|X-\mu|<\sigma\}=$ ___C___

A）增大； B）减少；

C）不变； D）增减不定。

解：由 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ $= P\{\dfrac{|X-\mu|}{\sigma}<1\}$

$$= \Phi(1)-\Phi(-1)$$

$$= 2\Phi(1)-1$$

二、 选择题：

2）设 X 的密度函数为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，且 $f(x)=f(-x)$，那么对任意给定的 a 都有 $\underline{B}$

A) $f(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$；

B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$；

C) $F(a)=F(-a)$；　　D) $F(-a)=2F(a)-1$

解：由对称性得 $F(0)=P\{X\le 0\}=0.5$，

$$\therefore\ F(-a)=P\{X\le -a\}=\int_{-\infty}^{-a} f(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$$

3）下列函数中，可作为某一随机变量的分布函数是 $\underline{\quad\quad B \quad\quad}$

A）$F(x)=1+\frac{1}{x^2}$　　B）$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$

C）$F(x)=\begin{cases}0.5(1-e^{-x}), & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

D）$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$

解：由 $F(x)$ 的性质　$0\le F(x)\le 1$　$F(x)$ 不减

$F(-\infty)=0$　$F(+\infty)=1$　$F(x)$ 右连续

以及 $f(x)\ge 0$ 得 B 正确

三、 解答题

1）从一批有10个合格品与 3 个次品的产品中一件一件地抽取产品，各种产品被抽到的可能性相同，求在二种情况下，直到取出合格品为止，所需抽取次数的分布率。

（1）放回　　（2）不放回

解：(1) 放回： 设抽取次数为随机变量 X,

则 X 的所有可能取值为： $X=1,2,\cdots$

分布律为：$P\{X=k\}=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\frac{10}{13}\quad k=1,2,\cdots$

三、 解答题

1）从一批有10个合格品与 3 个次品的产品中一件一件地抽取产品，各种产品被抽到的可能性相同，求在二种情况下，直到取出合格品为止，所需抽取次数的分布率。

（1）放回　　（2）不放回

解：(2) 不放回：　设抽取次数为随机变量 X,

则 X 的所有可能取值为 $X = 1,2,3,4$

分布律为: $P\{X=1\} = \frac{10}{13}$,　$P\{X=2\} = \frac{3}{13}\frac{10}{12}$,

$P\{X=3\} = \frac{3}{13}\frac{2}{12}\frac{10}{11}$,　$P\{X=4\} = \frac{3}{13}\frac{2}{12}\frac{1}{11}\frac{10}{10}$

三、 解答题

2）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=Ae^{-|x|}$ $(-\infty<x<+\infty)$,求（1）系数A;(2) $P\{0\le X\le 1\}$;(3)分布函数$F(x)$.

解：(1)由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx$

$$=2\int_{0}^{+\infty} Ae^{-x}dx=2A=1$$

得：$A=\frac{1}{2}$

(2) $P\{0\le X\le 1\}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-x}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

三、 解答题

2）设随机变量X的密度函数为

$$f(x) = Ae^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

求：(1)系数A；(2)$P\{0 \le X \le 1\}$；(3)分布函数$F(x)$.

解：(3) $F(x) = P\{X \le x\}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t}dt, & x < 0 \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-t}dt, & x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

三、 解答题

3）对球的直径作测量，设其值均匀地分布在$[a,b]$内。求体积的密度函数。

解：(3) 直径X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

体积$Y=\dfrac{\pi}{6}X^3$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{\frac{\pi}{6}X^3\le y\right\}=P\left\{X\le\sqrt[3]{\frac{6y}{\pi}}\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{6y/\pi}} f(x)dx$$

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<\dfrac{\pi}{6}a^3 \\ \displaystyle\int_a^{\sqrt[3]{6y/\pi}}\frac{1}{b-a}dx, & \dfrac{\pi}{6}a^3\le y<\dfrac{\pi}{6}b^3 \\ 1, & y\ge\dfrac{\pi}{6}b^3 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} \left(\sqrt[3]{6y/\pi}\right)'\dfrac{1}{b-a}, & \dfrac{\pi}{6}a^3<y<\dfrac{\pi}{6}b^3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi(b-a)}\left(\dfrac{6y}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}, & \dfrac{\pi}{6}a^3<y<\dfrac{\pi}{6}b^3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

三、 解答题

4）设在独立重复实验中，每次实验成功概率为0.5，问需要进行多少次实验，才能使至少成功一次的概率不小于0.9

解：(4) 设需要N次， 由 $X \sim b(N, 0.5)$

至少成功一次概率：$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X < 1\}$

$= 1 - P\{X = 0\} = 1 - 0.5^N \geq 0.9$

得 $N \geq 4$

三、 解答题

5）公共汽车车门的高度是按男子与车门碰头的机会在0.01以下来设计的，设男子的身高 $X \sim N(168, 7^2)$, 问车门的高度应如何确定？

解：(5) 设门高为h，碰头事件为$\{X > h\}$,

由题意得 $P\{X > h\} < 0.01$, 即 $1 - P\{X \le h\} < 0.01$,

$$\therefore 1 - \Phi\left\{\frac{h-168}{7}\right\} < 0.01, \quad \therefore \Phi\left\{\frac{h-168}{7}\right\} > 0.99,$$

$$\therefore \frac{h-168}{7} > 2.326, \quad \therefore h > 184.3$$

四、证明题

设随即变量X的参数为2的指数分布，
证明：$Y=1-e^{-2X}$在区间(0,1)上服从均匀分布。

证明：X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2X}\le y\}$$

$$=\begin{cases}0, & y<0\\ P\left\{X\ge -\dfrac{\ln(1-y)}{2}\right\}, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \int_{-\frac{\ln(1-y)}{2}}^{+\infty}2e^{-2x}dx, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}-\left(-\dfrac{\ln(1-y)}{2}\right)'2e^{-2\left(-\frac{\ln(1-y)}{2}\right)}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$