电子科技大学研究生试卷

（考试时间：10:00-12:00 共：2 小时）

课程名称：矩阵理论　　教师：_______　　学时：60　　学分：3

教学方式：堂上教学　　考试日期：2011 年 12 月 31 日　　成绩：___

考核方式：________（学生选填）

一、 选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．设 A 为 n 阶矩阵，$r(\mathrm{A})$ 是其谱半径，$\|\bullet\|$ 是一种相容的矩阵范数，则必有………（　　）

A. $\|\mathrm{A}^{-1}\|\le 1/\|\mathrm{A}\|$　　B. $\|\mathrm{A}^{n}\|\le\|\mathrm{A}\|^{n}$　　C. $\|\mathrm{A}^{n}\|\ge\|\mathrm{A}\|^{n}$　　D. $\|\mathrm{A}\|\ge \mathrm{r}(\mathrm{A}^{H}\mathrm{A})$

2．设 $A\in C^{m\times n}$，U 为 n 阶酉矩阵，下列说法**错误**的是………………………………………（　　）

A．$\|\mathrm{A}\|_F=\|\mathrm{AU}\|_F$　　B. A 和 AU 的特征值相同

C． A 和 AU 的正奇异值相同　　D. $rank(\mathrm{A})=\mathrm{rank}(\mathrm{AU})$

3. 下列命题**错误**的是…………………………………………………………………………（　　）

A. 任何矩阵范数都存在与之相容的向量范数。

B. 正规矩阵一定是单纯矩阵。

C. 设 $A\in C_r^{m\times n}$ 的一个广义逆矩阵为 G，$A=BD$ 为 A 的最大秩分解，则 $rank(\mathrm{DGB})=\mathrm{r}$。

D. 若存在某种算子范数 $\|\bullet\|$ 使得 $\|\mathrm{A}\|<1$，则 A 为收敛矩阵，其中 A 为 n 阶方阵。

4. 设 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}kA^{k-1}$ 为……………………………………………………（　　）

A. $\begin{bmatrix}\frac{1}{12} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}\frac{16}{9} & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}\frac{8}{9} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

5. 设 A 为 n 阶单纯矩阵，则下列结论**正确**的是……………………………………………（　　）

A. A 有 n 个正交的特征向量　　B. $\|\mathrm{A}\|_{m2}^{2}=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$

C. $A^H=A$　　D. A 的特征值的几何重数之和为 n

二、　　判断题，对的打√，错的打×

1、设 $A\in C^{n\times n}$，且方程组 $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\mathrm{x}=0$ 有非零解，则对 $C^{n\times n}$ 中任意算子范数都有

$\|\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\|\le 1$。……………………………………………………………………………（　　）

2、设 $A\in C_n^{m\times n}$，$\|\bullet\|$ 是 $C_n^{m\times n}$ 上某种相容的矩阵范数，若 $\|\mathrm{A}\|<1$，则 $\|\mathrm{A}^{+}\|>1$。•·（　　）

3、设 $A=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 $\cos A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 。…………………………………………………（　　）

4、设 $A\in C^{m\times n}$ 是左可逆矩阵，A_L^{-1} 是 A A 的一个左逆矩阵，则 $R(A)=\mathrm{N}(\mathrm{E}_m-\mathrm{A}\mathrm{A}_L^{-1})$（　　）

5、设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $\|\mathrm{A}^{+}\mathrm{A}\|_2=1$ 。………………………………………………………………（　　）

三、计算和证明（共 60 分）

1、设 $A=(\mathrm{a}_{ij})\in \mathrm{P}^{m\times n}$，证明：$\|\mathrm{A}\|=(\mathrm{m}+\mathrm{n})\max\left\{|\mathrm{a}_{ij}|\right\}$，$(1\le \mathrm{i}\le \mathrm{m}, 1\le \mathrm{j}\le \mathrm{n})$ 是矩阵范数，并且证明当 $m=n$ 时是相容的矩阵范数。（10 分）

2、证明：矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4}\\ -\frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4}\\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5^2} & -\frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4}\\ -\frac{5}{6} & -\frac{5}{6^2} & -\frac{5}{6^3} & -\frac{5}{6^4} & 10\end{bmatrix}$ 的特征值为两两不相等的正实数。（10 分）

3、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&2\\0&1&0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 。

（1）求矩阵 A 的最大秩分解；

（2）求 A^+；

（3）判断方程组 $Ax=b$ 是否有解；

（4）求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解及通解或最小二乘解通解及其最佳逼近解？（指出所求的是哪种解）（15 分）

4、设 $A\in C_r^{m\times n}(\mathrm{r}>0)$ 的正奇异值为 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r$， $B=[\mathrm{A}^+,\mathrm{A}^+]$ 的正奇异值为 $\eta_1\ge\eta_2\ge\cdots\ge\eta_r$，证明：$\sum_{i=1}^{r}\eta_i^2=2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i^2}$。（10 分）

5、设$A\in C^{n\times n}$，A有k个相异的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，证明：$A$是正规矩阵的充要条件是存在$k$个矩阵$A_i$使其满足（1）$A_iA_j=O(\mathrm{i}\neq \mathrm{j})$，$A_iA_i=A_i$（2）$\sum_{i=1}^{k}A_i=E_n$（3）$\sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i=A$（4）$A_i^H=A_i(\mathrm{i}=1,\cdots,k)$。（10 分）

6、设$A\in C^{m\times n}$，$Y\in C^{n\times r}$，$Z\in C^{r\times m}$，且$ZAY=E_r$，证明：$G=YZ$是A的自反广义逆矩阵。（5 分）