

例题精选

例1 为保证设备正常工作，需要配备适量的维修人员。设共有300台设备，每台的工作相互独立，发生故障的概率都是0.01.若在通常的情况下，一台设备的故障可由一人来处理。问至少应配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

我们先对题目进行分析：



300台设备，独立工作，出故障概率都是0.01. 一台设备故障一人来处理.

问至少配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

设 X 为300台设备同时发生故障的台数，

300台设备，独立工作，每台出故障概率 $p=0.01$. 可看作 $n=300$ 的贝努里概型.

可见， $X \sim b(n, p), n=300, p=0.01$



300台设备，独立工作，出故障概率都是0.01. 一台设备故障一人来处理.

问至少配备多少维修人员，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

设 X 为300台设备同时发生故障的台数，

$$X \sim b(n, p), \quad n=300, p=0.01$$

设需配备 N 个维修人员，所求的是满足

$$P(X > N) < 0.01 \quad \text{或} \quad P(X \leq N) \geq 0.99$$

的最小的 N .



下面给出正式求解过程：

解：设 X 为300台设备同时发生故障的台数，

$$X \sim b(n, p), \quad n=300, p=0.01$$

设需配备 N 个维修人员，所求的是满足
 $P(X > N) < 0.01$ 的最小的 N .

$$P(X > N) = \sum_{k=N+1}^{300} C_{300}^k (0.01)^k (0.99)^{300-k}$$

$$\approx \sum_{k=N+1}^{300} \frac{3^k e^{-3}}{k!}$$

$$\approx \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!}$$

n 大, p 小, $np=3$,
用 $\lambda=np=3$
的泊松近似



我们求满足 $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!} < 0.01$ 的最小的 N .

查书末的泊松分布表得

$$\sum_{k=9}^{\infty} \frac{e^{-3} 3^k}{k!} \approx 0.0038, \quad \sum_{k=8}^{\infty} \frac{e^{-3} 3^k}{k!} \approx 0.012,$$

$$N+1 \geq 9, \quad \text{即 } N \geq 8$$

即至少需配备8个维修人员.



例2 X 具有离散均匀分布，即
 $P(X=x_i)=1/n, i=1,2,\dots, n$ ，求 X 的分布函数.

解：将 X 所取的 n 个值按从小到大的顺序排列为：

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

显然， $x < x_{(1)}$ 时， $F(x)=P(X \leq x)=0$,

$x_{(1)} \leq x < x_{(2)}$ 时， $F(x)=P(X \leq x)=1/n$,

$x_{(2)} \leq x < x_{(3)}$ 时， $F(x)=P(X \leq x)=2/n$,

\vdots



例2 X 具有离散均匀分布, 即
 $P(X=x_i)=1/n, i=1,2,\dots, n$, 求 X 的分布函数.

解: 将 X 所取的 n 个值按从小到大的顺序排列为:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

$$x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)} \text{ 时, } F(x)=P(X \leq x)=k/n,$$

$$\vdots$$

$$x \geq x_{(n)} \text{ 时, } F(x)=P(X \leq x)=1$$



例2 X 具有离散均匀分布, 即

$P(X=x_i)=1/n, i=1,2,\dots, n,$ 求 X 的分布函数.

于是得

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x < \min(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{k}{n}, & \text{当 } x \geq \min(x_1, \dots, x_n), \text{ 且 } x_j (j=1, 2, \dots, n) \text{ 中} \\ & \text{恰有 } k \text{ 个不大于 } x \\ 1, & \text{当 } x \geq \max(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

这个结果在数理统计中有用.



例3 设r.v X 的密度函数为 $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{求 } F(x).$$

解: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{求 } F(x).$$

解: 对 $x < -1$, $F(x) = 0$

对 $-1 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dt + \int_{-1}^x \frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \frac{x}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

对 $x > 1$, $F(x) = 1$



即

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



例4 设有函数 $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试说明 $F(x)$ 能否是某个 $r.v$ 的分布函数.

解: 注意到函数 $F(x)$ 在 $[\pi/2, \pi]$ 上下降, 不满足性质(1), 故 $F(x)$ 不能是分布函数.

或者
$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

不满足性质(2), 可见 $F(x)$ 也不能是 $r.v$ 的分布函数.



例5 设 $X \sim f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求 $F(x)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

由于 $f(x)$ 是分段表达的, 求 $F(x)$ 时注意分段求.



$$X \sim f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x t dt & 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 t dt + \int_1^x (2 - t) dt & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



即

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 - \frac{x^2}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$



例6 设r.v X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

(1) 求 X 取值在区间 $(0.3, 0.7)$ 的概率;

(2) 求 X 的概率密度.

解: (1) $P(0.3 < X < 0.7) = F(0.7) - F(0.3) = 0.7^2 - 0.3^2 = 0.4$

$$(2) f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注意到 $F(x)$ 在 1 处导数不存在, 根据改变被积函数在个别点处的值不影响积分结果的性质, 可以在 $F'(x)$ 没意义的点处, 任意规定 $F'(x)$ 的值.



第二章 自测题

一. 随机变量 X 具有以下的分布律:

X	-2	0	2	3
P	0.2	0.2	0.3	0.3

则 $Y = X^2$ 的分布律为

Y	0	4	9
P	0.2	0.5	0.3

二. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = Ae^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$, 系数 $A = \underline{0.5}$; X 的分布函数 $F_X(x) = \underline{\hspace{2cm}}$; $Y = X^2$ 的概率密度 $\underline{\hspace{2cm}}$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0.5e^x & x < 0 \\ 1 - 0.5e^{-x} & x \geq 0 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} & y \geq 0 \end{cases}$$

三. 设随机变量 X 服从参数为 $(2, P)$ 的二项分布, 随机变量 Y 服从参数 $(3, P)$ 的二项分布, 若

$$P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}, \text{ 则 } P\{Y \geq 1\} = \frac{19}{27}.$$

四. 设 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P(2 < X < 4) = 0.3$, 则 $P(X < 0) = 0.2$.

五. 设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = k) = a \frac{(b\lambda)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, \text{ 其中 } b, \lambda > 0 \text{ 是}$$

已知常数, 则 $a = e^{-b\lambda}$.