课程回顾

§4.3 广义根轨迹

§4.3.1 参数根轨迹

— 构造等效开环传递函数

§4.3.2 零度根轨迹

— 注意与绘制180°根轨迹不同的3条法则

(第 16 讲)

§4 根轨迹法

§4.1 根轨迹法的基本概念

§4.2 绘制根轨迹的基本法则

§4.3 广义根轨迹

§4.4 利用根轨迹分析系统性能

(第 16 讲)

§4.4 利用根轨迹分析系统性能

第四章小结

§4.4 利用根轨迹分析系统性能 (1)

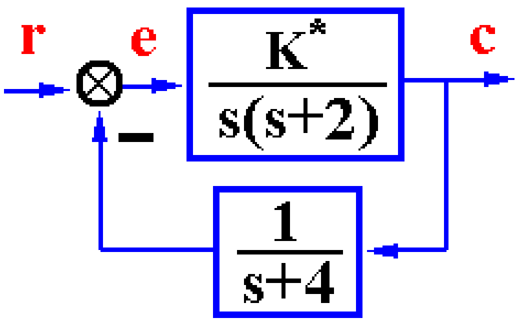
利用根轨迹法分析系统动态性能的基本步骤

(1) 绘制系统根轨迹；

(2) 依题意确定闭环极点位置；

(3) 确定闭环零点；

(4) 保留主导极点，利用零点极点法估算系统性能



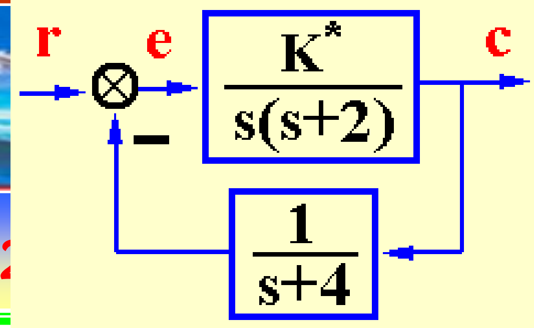
例1 已知系统结构图，$K^* = 0 \to \infty$，绘制系统根轨迹并确定：

(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围；

(2) 复极点对应 $\xi=0.5$ $(\beta=60^\circ)$ 时的 K 值及闭环极点位置；

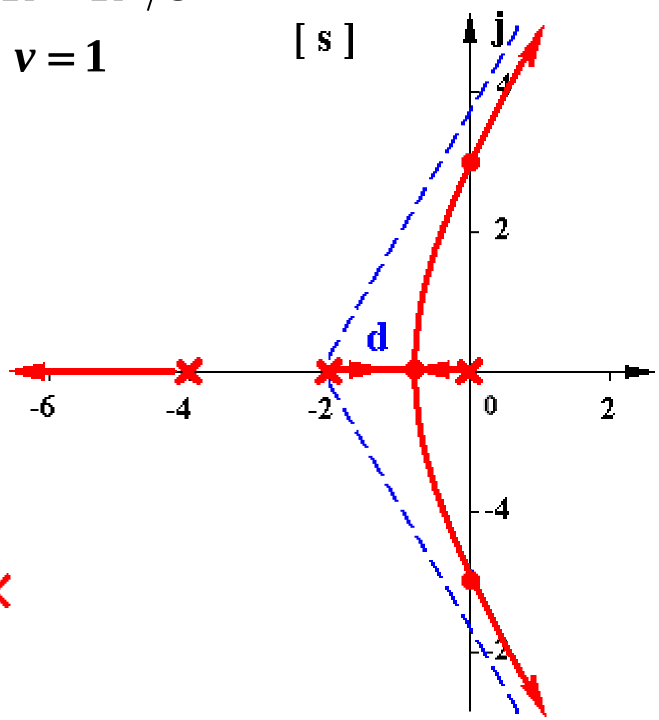
(3) 当 $\lambda_3=-5$ 时，$\lambda_{1,2}=?$ 相应 $K=?$

(4) 当 $K^*=4$ 时， 求$\lambda_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标 ($\sigma\%$, t_s)。



（1）使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围；

解. 绘制系统根轨迹 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$ $\begin{cases} K=K^*/8 \\ v=1 \end{cases}$



① 实轴上的根轨迹：(-∞,-4], [-2,0]

② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = (-2-4)/3 = -2 \\ \varphi_a = \pm 60°, 180° \end{cases}$

③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}+\dfrac{1}{d+4}=0$

整理得：$3d^2+12d+8=0$

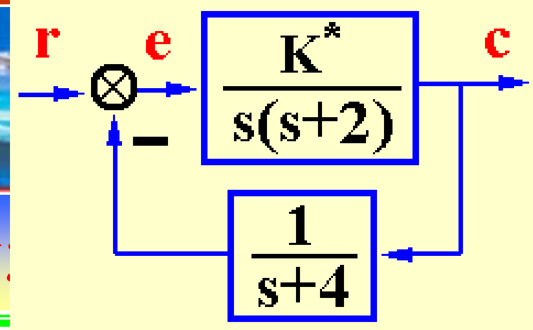
解根：$d_1=-0.845$; ✓ $d_2=-3.155$ ✗

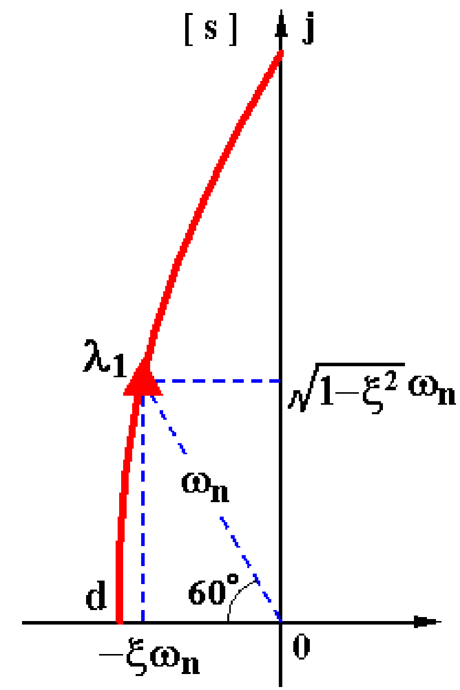
$$K_d^*=|d||d+2||d+4|\overset{d=-0.845}{=}3.08$$

④ 虚轴交点：$D(s)=s(s+2)(s+4)+K^*=s^3+6s^2+8s+K^*=0$

$$\begin{cases} \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+8\omega=0 \\ \mathrm{Re}[D(j\omega)]=-6\omega^2+K^*=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega=\sqrt{8}=2.828 \\ K_\omega^*=48 \end{cases}$$

§4.4 利用根轨迹分析系统性能 (





(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围

依题，对应 $0<\xi<1$ 有：
$$\begin{cases} K_d^* = 3.08 < K^* < 48 = K_\omega^* \\ \dfrac{3.08}{8} < K = \dfrac{K^*}{8} < \dfrac{48}{8} = 6 \end{cases}$$

(2) 复极点对应 ξ=0.5 (β=60°) 时的 K 值及闭环极点位置

设 $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$

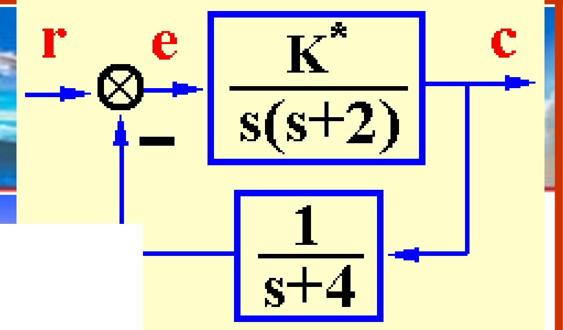
由根之和 $C = 0-2-4 = -6 = -2\xi\omega_n + \lambda_3$

$$\lambda_3 = -6 + 2\xi\omega_n \overset{\xi=0.5}{=} -6+\omega_n$$

应有：
$$D(s) = s(s+2)(s+4)+K^* = s^3+6s^2+8s+K^*$$
$$= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3) = (s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+6-\omega_n)$$
$$= s^3+6s^2+6\omega_n s+\omega_n^2(6-\omega_n)$$

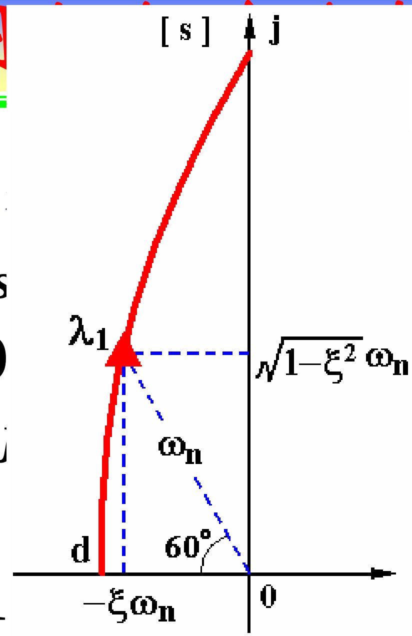
比较系数 $\begin{cases} 6\omega_n = 8 \\ \omega_n^2(6-\omega_n) = K^* \end{cases}$ 解根：$\begin{cases} \omega_n = 4/3 \\ K^* = 8.3 \end{cases}$

$$\begin{cases} K = K^*/8 = 1.0375 \\ \lambda_{1,2} = -0.667 \pm j1.1547 \\ \lambda_3 = -6+\omega_n = -4.667 \end{cases}$$



§ 4.4 利用

(3) 当 λ_3=–5 时，λ_1, ...



$) = \dfrac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$

$$D(s) = s^3 + 6s \ldots$$

$$= (s+5) \ldots$$

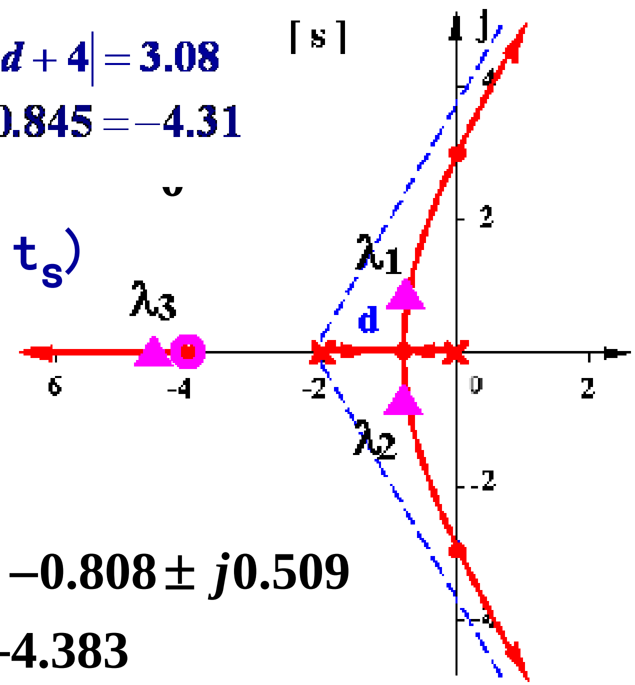
$$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j \ldots$$

$$K^* = 15$$

$$K = K^*/8 = 1 \ldots$$

$$\begin{cases} K^* = 8.3 \\ \lambda_{1,2} = -0.667 \pm j1.1547 \\ \lambda_3 = -6 + \omega_n = -4.667 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -0.845 \\ K_d^* = |d||d+2||d+4| = 3.08 \\ \lambda_3 = -6 + 2 \times 0.845 = -4.31 \end{cases}$$



(4) 当 K^*=4 时， 求$\lambda_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标（ σ%, t_s）

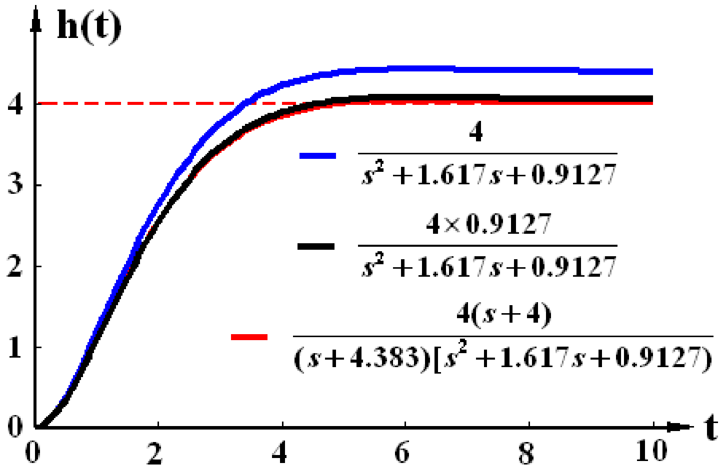
令 $K^* = |\lambda_3||\lambda_3 + 2||\lambda_3 + 4| = 4$

试根 $\lambda_3 = -4.383$

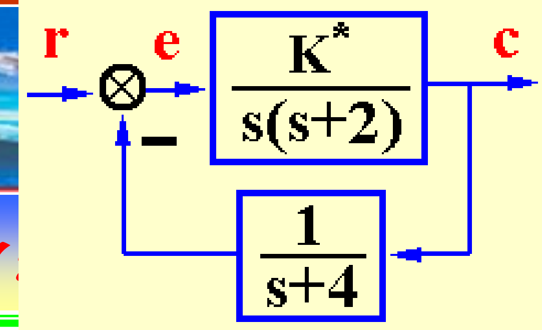
$$\frac{D(s)}{s+4.383} = \frac{s^3 + 6s^2 + 8s + K^*}{s+4.383}$$

$$= s^2 + 1.617s + 0.9127$$

解根：$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -0.808 \pm j0.509 \\ \lambda_3 = -4.383 \end{cases}$

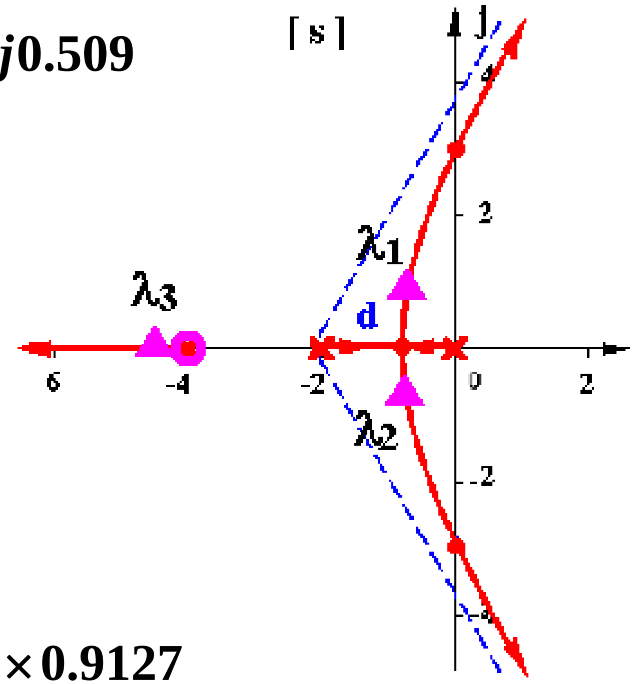


迹分析系统性能（



算系统动态指标（ $\sigma\%,\ t_s$）

$$\begin{cases}\lambda_{1,2}=-0.808\pm j0.509\\ \lambda_3=-4.383\\ z=-4\end{cases}$$



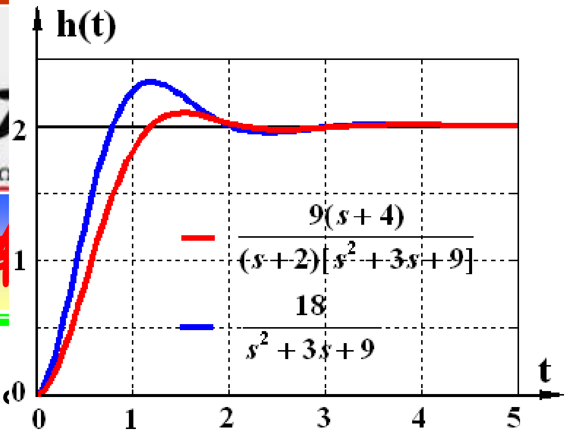
视 $\lambda_{1,2}$ 为主导极点

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K^*}{s(s+2)}}{1+\dfrac{K^*}{s(s+2)(s+4)}}=\frac{K^*(s+4)}{s(s+2)(s+4)+K^*}$$

$$\overset{K^*=4}{=}\frac{K^*(s+4)}{(s+4.383)[s+0.808\pm j0.509]}$$

$$=\frac{4(s+4)}{(s+4.383)[s^2+1.617s+0.9127]}=\frac{4\times0.9127}{s^2+1.617s+0.9127}$$

$$\begin{cases}\omega_n=\sqrt{0.9127}=0.955\\ \xi=1.617/(2\times0.955)=0.8463\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=0.689\%\\ t_s=3.5/\xi\omega_n=3.5/0.808=4.33\end{cases}$$

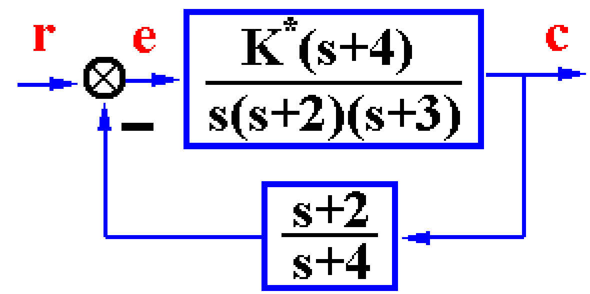


例2 系统结构图如图所示，

（1）绘制当$K^*=0\to\infty$时系统的根轨迹；

（2）使复极点对应的 $\xi=0.5$ ($\beta=60^\circ$) 时的 K 及 λ =?

（3）估算系统动态性能指标（$\sigma\%$，t_s）



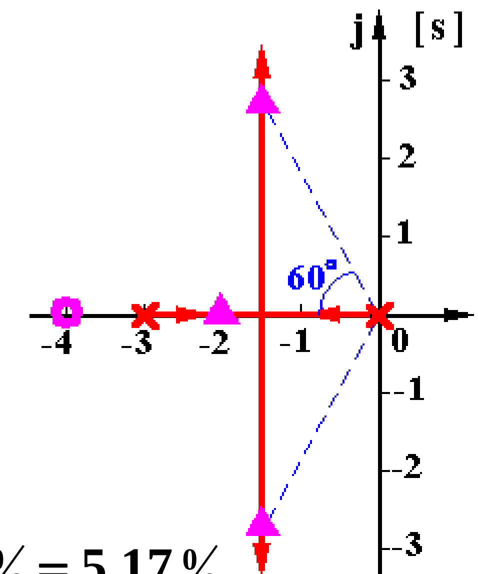
解. (1) $$G(s)=\frac{K^*(s+4)}{s(s+2)(s+3)}\cdot\frac{s+2}{s+4}=\frac{K^*}{s(s+3)}\qquad\begin{cases}K=K^*/3\\ v=1\end{cases}$$

(2) 当 $\xi=0.5$ ($\beta=60^\circ$) 时

$$\lambda_{1,2}=-1.5\pm j2.598$$

$$K^*=|\lambda_1||\lambda_1+3|=1.5^2+2.598^2=9$$

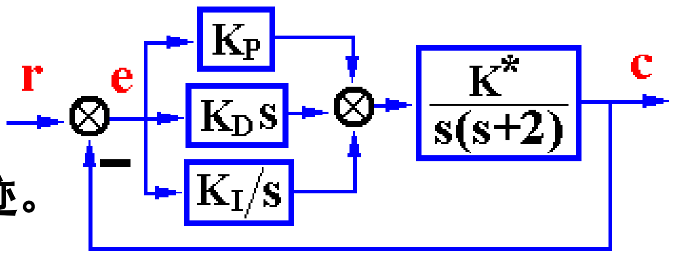
$$K=K^*/3=3$$



(3) $$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K^*(s+4)}{s(s+2)(s+3)}}{1+\dfrac{K^*}{s(s+3)}}=\frac{K^*(s+4)}{(s+2)[s(s+3)+K^*]}\qquad\begin{cases}\sigma\%=5.17\%\\ t_s=1.62\end{cases}$$

§4.4 利用根轨迹分析系统性能 (7)

例3 PID控制系统结构图如图所示。

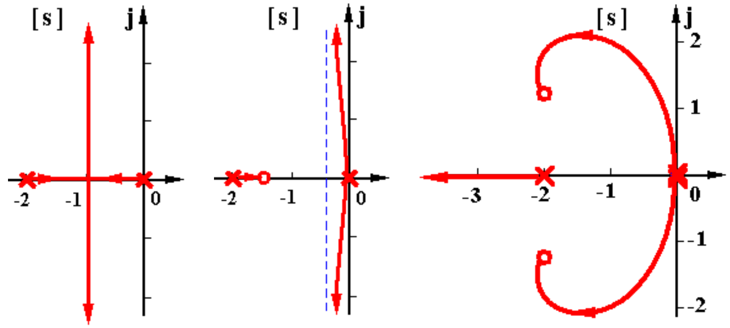


设 $\begin{cases} K_P = 1 \\ K_D = 0.25 \\ K_I = 1.5 \end{cases}$, $K^* = 0 \to \infty$, 采用 $\begin{cases} P \\ PD \\ PI \\ PID \end{cases}$ 控制, 分别绘根轨迹。

解. (1) P: $G_P(s) = \dfrac{K^*}{s(s+2)}$ $\begin{cases} K = K^*/2 \\ v = 1 \end{cases}$

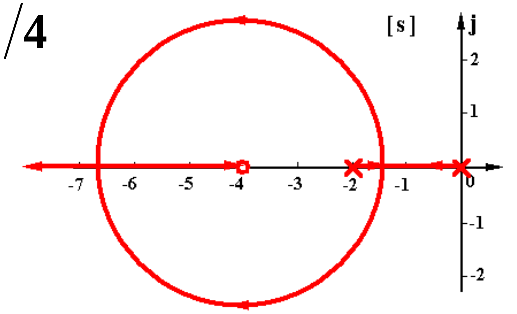
(2) PD: $G_{PD}(s) = \dfrac{K^*(0.25s+1)}{s(s+2)}$ $\begin{cases} K = K^*/2 \\ v = 1 \end{cases}$

(3) PI: $G_{PI}(s) = \dfrac{K^*(1+1.5/s)}{s(s+2)} = \dfrac{K^*(s+1.5)}{s^2(s+2)}$ $\begin{cases} K = 3K^*/4 \\ v = 2 \end{cases}$



(4) PID: $G_{PID}(s) = \dfrac{K^*(1+0.25s+1.5/s)}{s(s+2)}$

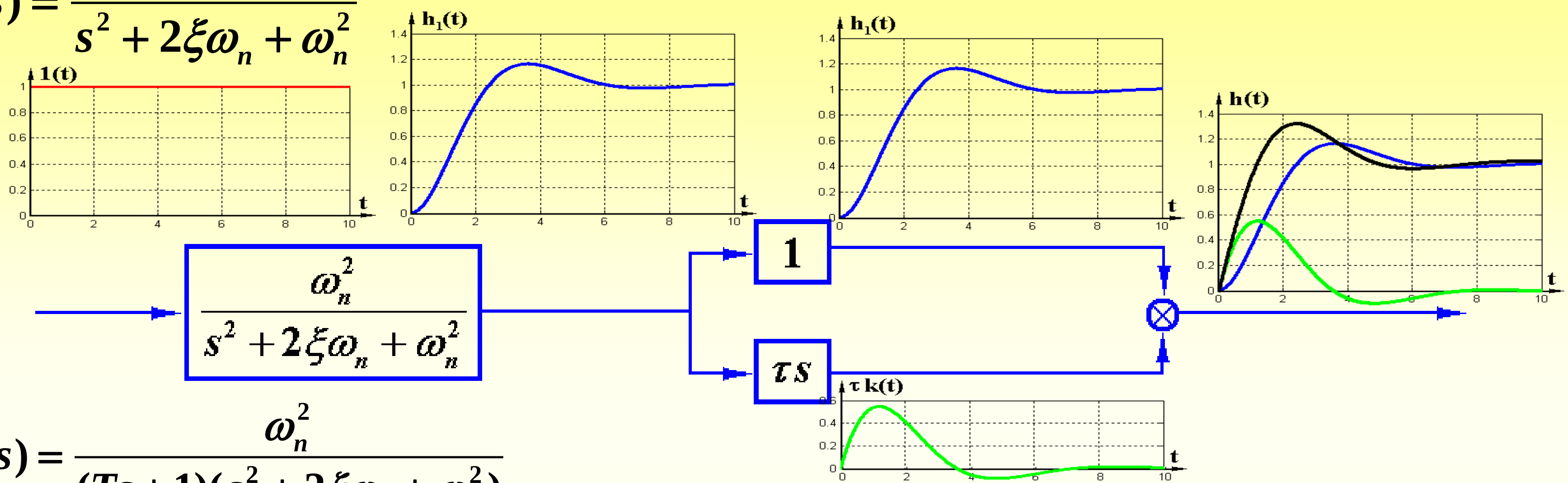
$= \dfrac{0.25K^*[s+2 \pm j\sqrt{2}]}{s^2(s+2)}$ $\begin{cases} K = 3K^*/4 \\ v = 2 \end{cases}$



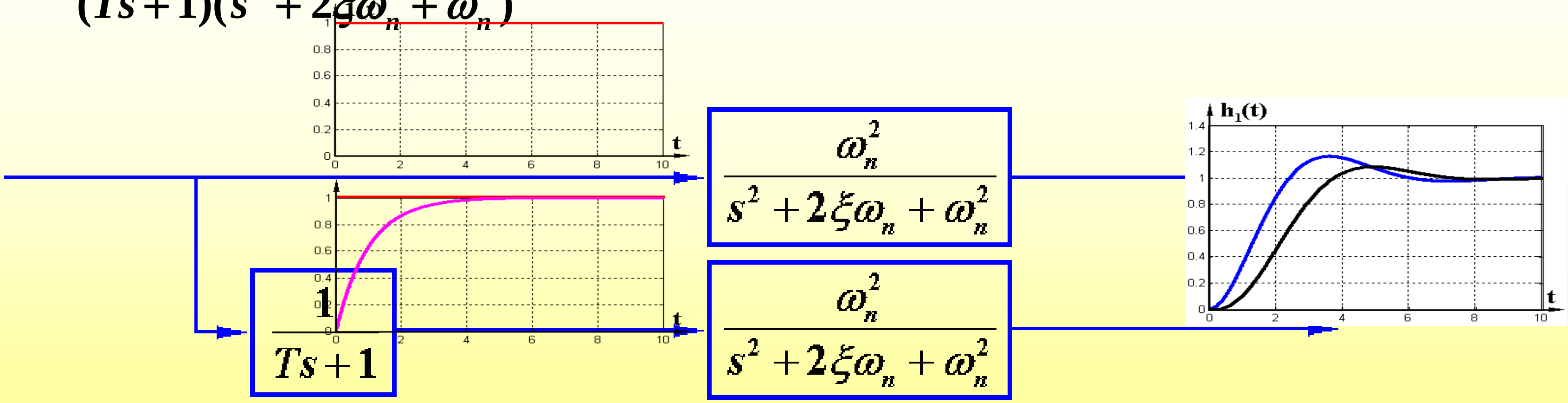
$\begin{cases} \text{出射角} & \theta = \pm 90° \\ \text{入射角} & \varphi = 109.4° \end{cases}$

附加闭环零、极点对系统动态性能的影响

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

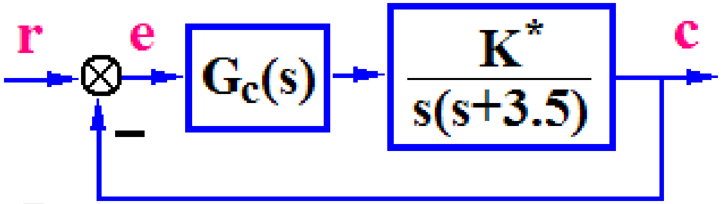


$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{(Ts+1)(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)}$$



§4.4 根轨迹校正举例 (1)

例5. 系统结构图如图所示，设计Gc(s)使系统满足动态指标 $\sigma\% \approx 16.3\%$， $t_s \approx 1''$。



解.

由 $\begin{cases} \sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 16.3\% \\ t_s = 3.5/(\xi\omega_n) = 1'' \end{cases}$ 解出 $\begin{cases} \xi = 0.5 \\ \omega_n = 7 \end{cases}$

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n = -3.5 \pm j6.06$$

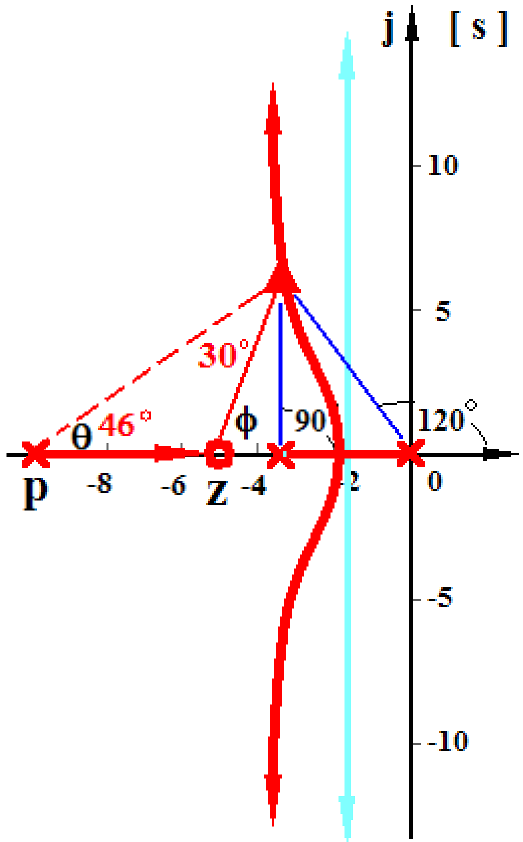
为使 $\lambda_{1,2}$ 位于根轨迹上，须使之满足相角条件

考虑物理可实现，设计 $G_c(s) = \dfrac{s-z}{s-p}$

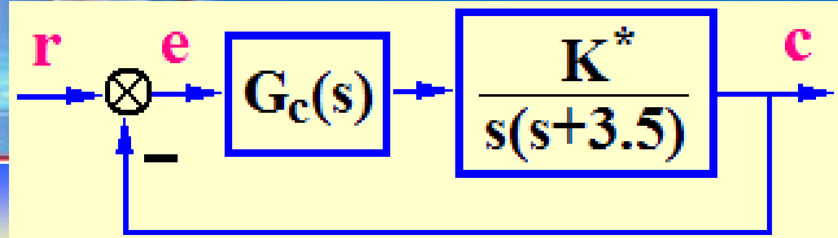
$$\varphi - (\theta + 120^\circ + 90^\circ) = -180^\circ$$

取 $z = -5$，有 $\theta = \varphi - 30^\circ = 76^\circ - 30^\circ = 46^\circ$

可确定： $p = -9.3$ $\qquad G_c(s) = \dfrac{s-z}{s-p} = \dfrac{s+5}{s+9.3}$



例5. 系统结构图如图所示，设计Gc(s)使系统满足动态指标 $\sigma\% \approx 16.3\%$， $t_s \approx 1''$。



验算指标

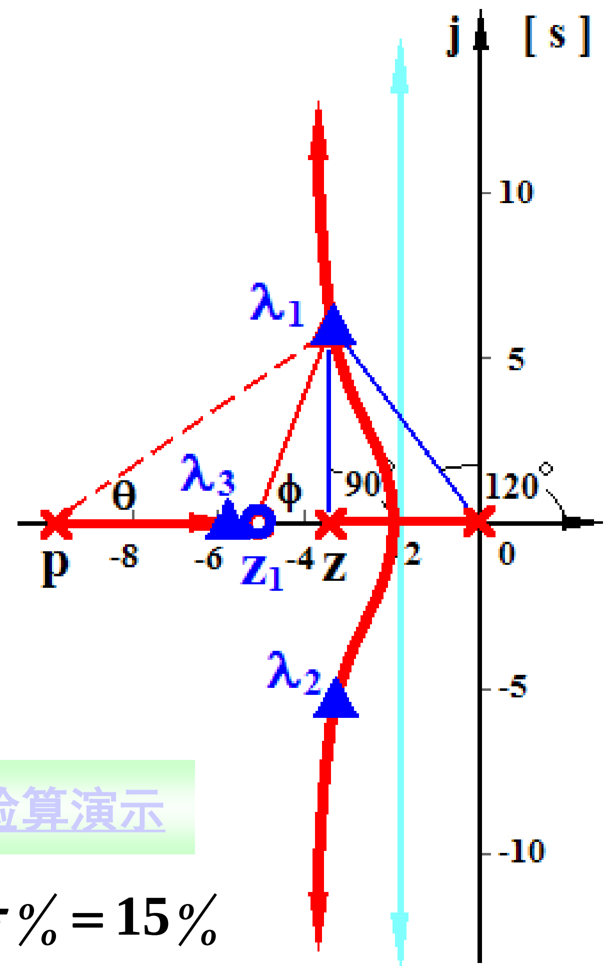
$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{K^*(s+5)}{s(s+3.5)(s+9.3)}$$

$$\lambda_{1,2} = -3.5 \pm j6.06$$

$$K^*_{\lambda_1} = \frac{|\lambda_1||\lambda_1+3.5||\lambda_1+9.3|}{|\lambda_1+5|} = 57$$

$$\Phi(s) = \frac{57(s+5)}{s(s+3.5)(s+9.3)+57(s+5)}$$

$$= \frac{57(s+5)}{(s+5.8)(s\pm 3.5+j6.06)}$$



验算演示

计算得: $\begin{cases} \sigma\% = 21\% \\ t_s = 0.76'' \end{cases}$ 调整 $K^* = 40$ 得: $\begin{cases} \sigma\% = 15\% \\ t_s = 0.94'' \end{cases}$