机器人学基础

国家级《智能科学基础系列课程教学团队》
“机器人学”课程配套教材　　　蔡自兴 主编

第2章　数学基础（2）

第2章 数学基础

2. 2　坐标变换

2. 2 坐标变换

空间中任意点位置和向量姿态在不同坐标系中的描述是不同的。坐标变换即是分析在不同坐标系中进行描述的变换关系。

2. 2. 1 坐标平移变换
2. 2. 2 坐标旋转变换
2. 2. 3 一般变换

2. 2. 1 坐标平移变换

如图 2. 7 所示，设坐标系 $\{B\}$ 是坐标系 $\{A\}$ 经过平移得到的，特点：

① 具有相同的方位，

② 两坐标系的原点不重合。

平移矢量 $^{A}p_{Bo}$

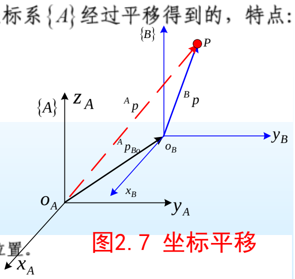


图2. 7 坐标平移

用位置矢量 $^{A}\mathbf{p}_{Bo}$ 来描述 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的位置。

（1） 称 $^{A}\mathbf{p}_{Bo}$ 为 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的平移矢量

（2） 如果点 P 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置为 $^{B}\mathbf{p}$，则点 P 在坐标系 $\{A\}$ 中的位置为：

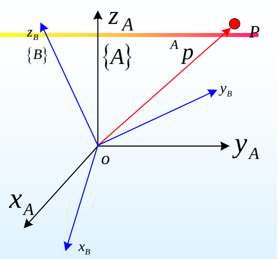
$^{A}\mathbf{p} = {}^{B}\mathbf{p} + {}^{A}\mathbf{p}_{Bo}$ ——坐标平移方程

2.2.2 坐标旋转变换

坐标系 $\{A\}$ 与 坐标系 $\{B\}$

（1） 坐标原点相同

（2） 坐标轴的方位不同



用旋转矩阵 ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ 来描述坐标系 $\{B\}$ 相对于坐标系 $\{A\}$ 的方位，

则点 P 在两个坐标系中的描述有如下关系：

$^{A}\mathbf{p} = {}^{A}_{B}\mathbf{R} \cdot {}^{B}\mathbf{p}$ ——坐标旋转方程

2.2.3 一般变换

如图2.9所示，设坐标系$\{B\}$是坐标系$\{A\}$经旋转和平移得到的，特点：

（1）$\{B\}$与$\{A\}$有不同的坐标原点

（2）不同的方位

如果点P在坐标系$\{B\}$中的位置为$^{B}\mathbf{p}$，则点P在坐标系$\{A\}$中的位置描述为：

$^{A}\mathbf{p}={}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{p}+{}^{A}\mathbf{p}_{Bo}$——坐标一般变换方程

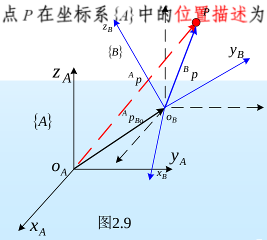


图2.9

例2.1 已知{B}的初始位姿与{A}重合， {B}先相对{A}的z_A轴转30°，再沿x_A轴移动10单位，再沿y_A轴移动5单位。

（1）求旋转矩阵${}^{A}_{B}R$和位置矢量$^{A}p_{B_o}$。

（2）设点P在{B}的描述为$^{B}p=[3\ \ 7\ \ 0]^T$，求它在{A}中的描述^{A}p。

解：${}^{A}_{B}R=?$　$^{A}p_{B_o}=?$

$$^{A}\mathbf{p}={}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{p}+{}^{A}\mathbf{p}_{Bo}$$

例2.1 已知{B}的初始位姿与{A}重合， {B}先相对{A}的z_A轴转30°，再沿x_A轴移动10单位，再沿y_A轴移动5单位。求旋转矩阵${}^{A}_{B}R$和位置矢量$^{A}p_{B_o}$。

设点P在{B}的描述为$^{B}p=[3\ \ 7\ \ 0]^T$，求它在{A}中的描述^{A}p。

解：${}^{A}_{B}R$ 和 $^{A}p_{B_o}$ 分别为：

$${}^{A}_{B}R=R(z,30°)=\begin{bmatrix} c30° & -s30° & 0 \\ s30° & c30° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad {}^{A}p_{Bo}=\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}p={}^{A}_{B}R\,{}^{B}p+{}^{A}p_{Bo}=\begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \end{bmatrix}$$

小结：

刚体位姿描述

位置描述：位置向量

姿态描述：旋转矩阵

位姿描述：旋转矩阵+位置向量

坐标变换

平移变换　$^{A}\mathbf{p}={}^{B}\mathbf{p}+{}^{A}\mathbf{p}_{Bo}$

旋转变换　$^{A}\mathbf{p}={}^{A}_{B}\mathbf{R}\cdot{}^{B}\mathbf{p}$

一般变换　$^{A}\mathbf{p}={}^{A}_{B}\mathbf{R}\cdot{}^{B}\mathbf{p}+{}^{A}\mathbf{p}_{Bo}$

绕坐标轴的旋转矩阵：

$$\mathbf{R}(x,\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(y,\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(z,\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三个基本旋转矩阵

第2章　数学基础

2.3 齐次坐标变换

2.3.1 齐次坐标

2.3.2 齐次坐标变换（用齐次变换矩阵表示）

- 平移齐次坐标变换
- 旋转齐次坐标变换
- 一般齐次坐标变换

2.3.1 齐次坐标

1. 点的直角坐标（位置向量）——齐次坐标
2. 相对于某个坐标系而言的

n维空间的齐次坐标表示一个（n+1）维空间要素。

有一个特定的投影附加于n维空间，也可把它看作附加于每个向量的特定坐标或比例系数。

$$\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$$

直角坐标 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=[a\quad b\quad c]^T$

齐次坐标 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=[x\ y\ z\ w]^T$，$w$为坐标比例系数

$$x=wa, y=wb, z=wc$$

2.3.1 齐次坐标

- 齐次坐标表达并不是唯一的，随w值的不同而不同。
- w 是非零常数，比例系数，可取任意正值或负值。
- 在机器人运动分析中，总是取w=1 。

$$\mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

可表示为：

v=[3 4 5 1]^T

或 v=[6 8 10 2]^T

或 v=[-12 -16 -20 -4]^T

2.3 齐次坐标变换

2.3.1 齐次坐标

定义：用四维向量表示三维空间点 p 的位置，即

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}p_x & p_y & p_z & 1\end{bmatrix}^T$$

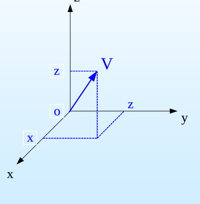
称为点的齐次坐标。

当n维位置向量用n+1维向量表示时，统称为齐次坐标表示。

2.3.1 齐次坐标

齐次坐标与三维直角坐标的区别:

- 空间的V点在直角坐标系中表示是唯一的（x,y,z）
- 而用齐次坐标的表示可以是多值的，但不同的表示反映V点在空间位置上不变。



2.3.1 齐次坐标

几个特殊意义的齐次坐标：

- [0 0 0 n]^T—坐标原点向量的齐次坐标，n为任意非零比例系数
- [1 0 0 0]^T— 指无穷远的x轴方向
- [0 1 0 0]^T— 指无穷远的y轴方向
- [0 0 1 0]^T— 指无穷远的z轴方向

齐次坐标可表示点的位置，还可表示向量的方向。
当第4个元素为0时，表示向量的方向；
当第4个元素非0时，表示点的位置。

① 零矢量 $[0, 0, 0, 1]^T$表示坐标原点；

② 向量 $[0, 0, 0, 0]^T$ 是没有意义的；

③ $[a\ b\ c\ 0]^T$（其中$a^2+b^2+c^2 \neq 0$），表示向量方向。

$[1\ 0\ 0\ 0]^T$，$[0\ 1\ 0\ 0]^T$，$[0\ 0\ 1\ 0]^T$分别表示x，y和z 轴方向。

齐次坐标既可表示点的位置，也可表示向量方向。

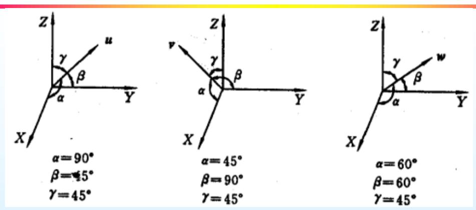
根据第4个元素是否为0来判断点的位置或方向。

齐次坐标用于表示什么？

（1）点的坐标

（2）向量的方向

例2.2 用齐次坐标表示图中各向量的方向



$$\mathbf{u}: \cos\alpha = 0, \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{v}: \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$w: \cos\alpha = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2}, \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

2.3.2 齐次变换

刚体运动包括平移和旋转。如果用一个矩阵表示平移和旋转，该矩阵被称为齐次变换矩阵。

齐次变换矩阵是4x4矩阵，通常用**T**表示。

一般变换方程，用齐次坐标变换矩阵可表示为：

$$\boxed{{}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{R}\,{}^B\mathbf{p} + {}^A\mathbf{p}_{Bo}} \rightarrow \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{BO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{{}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B\mathbf{p}} \qquad \boxed{{}^A_B\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{BO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

2.3.2 齐次变换

表示坐标平移和坐标旋转的组合，可分解为2个矩阵相乘的形式。

齐次变换矩阵 $\boxed{{}^A_B\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{BO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

$${}^A_B\mathbf{T} = Trans({}^A\mathbf{p}_{Bo}) \cdot Rot(\mathbf{k}, \theta)$$

$$Trans({}^A\mathbf{p}_{Bo}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & {}^A\mathbf{p}_{Bo} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 平移齐次变换矩阵

$$Rot(\mathbf{k}, \theta) = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 旋转齐次变换矩阵

齐次变换矩阵

若将齐次坐标变换矩阵分块，则有：

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc:c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & p_x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right]$$

意义：左上角的3×3矩阵描述两坐标系间的旋转变换，描述了姿态关系。右上角的3×1矩阵描述两个坐标系之间的平移变换，描述了位置关系。

齐次变换矩阵物理意义： 描述坐标系{B}相对参考坐标系{A}的位置和姿态。其中第4列向量描述{B}的坐标原点相对{A}的位置；其它3个列向量分别代表{B}的三个坐标轴相对{A}的方向。

2.3.2 齐次变换

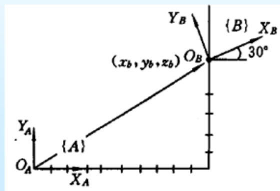
例2.3 已知{B}的初始位姿与{A}重合，{B}先相对{A}的z_A轴转30°，再沿x_A轴移动10单位，再沿y_A轴移动5单位。

（1）求旋转矩阵 ${}^A_B\mathbf{R}$和位置向量${}^A\mathbf{p}_{Bo}$

（2）计算齐次坐标变换矩阵 ${}^A_B\mathbf{T}$

$$\boxed{{}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{R}\,{}^B\mathbf{p} + {}^A\mathbf{p}_{Bo}}$$

$$\boxed{{}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B\mathbf{p}}$$



例2.3 已知{B}的初始位姿与{A}重合，{B}先相对{A}的z_A轴转30°，再沿x_A轴移动10单位，再沿y_A轴移动5单位。求旋转矩阵${}^A_B R$和位置矢量${}^A p_{B_o}$。

（3）设点 p在{B}的描述为${}^B p=[3\ 7\ 0]^T$，求它在{A}中的描述${}^A p$。解：${}^A_B R$ 和 ${}^A p_{B_o}$ 分别为：

$${}^A_B R = R(z,30°) = \begin{bmatrix} c30° & -s30° & 0 \\ s30° & c30° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad {}^A p_{Bo} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^A p = {}^A_B R\,{}^B p + {}^A p_{Bo} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^A_B\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{BO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A_B\mathbf{R} = R(z,30°) = \begin{bmatrix} \cos 30 & -\sin 30 & 0 \\ \sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A\mathbf{p}_{Bo} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

方法2：直接写出齐次坐标变换矩阵：

$${}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B\mathbf{p}$$

$$\begin{bmatrix} {}^A\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & p_x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^B\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

式中，${}^A_B\mathbf{T}$ ——齐次坐标变换矩阵，是4×4矩阵。

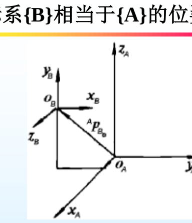
$${}^A_B\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{BO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^B\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{T} \cdot {}^B\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

直接用齐次坐标变换矩阵求得点P在坐标系{A}中的描述。

例2.4 已知齐次变换矩阵 ${}^A_B\mathbf{T}$，解释坐标系{B}相当于{A}的位姿。

$$\begin{array}{c} \\ {}^A_B\mathbf{T} = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_B & y_B & z_B & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



齐次变换矩阵描述两坐标系的相对位姿

齐次变换矩阵作为点运动的算子

例2.4　在坐标系{A}中，点P的原始位置${}^{A}\mathbf{p}_1=[3\quad 7\quad 0]^{T}$其运动轨迹如下：首先绕z轴旋转30°，再沿x 轴平移10单位，最后沿y轴移动5单位。求点运动后的位置 ${}^{A}\mathbf{p}_2$

解：${}^{A}p_1=[3\quad 7\quad 0\quad 1]^{T}$，　则运动后有

${}^{A}p_2=\mathbf{T}\,{}^{A}p_1$

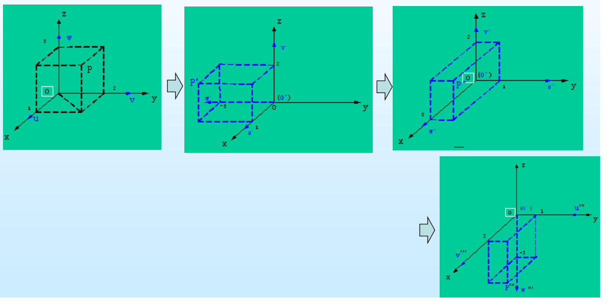
$$=\begin{bmatrix}0.866 & -0.5 & 0 & 10\\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.098\\12.562\\0\\1\end{bmatrix}$$

结果和前面相同，但对于结果的解释完全不同。

合成旋转矩阵：

例：在动坐标中有一固定点 $\mathbf{p}=[1\quad 2\quad 3\quad 1]^{T}$，相对固定参考坐标系 $\{A\}$ 做如下运动：① R（x, 90°）；② R(z, 90°)；③ R(y,90°)。求点 P 在固定参考坐标系中的位置。

解1：用画图方法



解2：用分步计算的方法

① T（x, 90°）

$${}^{A}\mathbf{p}_{P1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\1\end{bmatrix}\qquad(1)$$

② T（z, 90°）

$${}^{A}\mathbf{p}_{P2}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\1\end{bmatrix}\qquad(2)$$

③ T（y, 90°）

$${}^{A}\mathbf{p}_{P3}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\\1\end{bmatrix}\qquad(3)$$

上述计算方法非常繁琐，可以通过一系列计算得到上述结果。将式（1）（2）（3）联写为如下形式：

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}(y,\theta)\cdot\mathbf{T}(z,\varphi)\cdot\mathbf{T}(x,\alpha)$$ 左乘

定义1：

当动坐标系 $\Sigma O'uvw$ 绕固定坐标系 $\Sigma Oxyz$ 各坐标轴顺序有限次转动时，其合成旋转矩阵为各基本旋转矩阵依旋转顺序左乘。

值得注意：通常情况下，变换矩阵相乘不满足“交换律”。变换矩阵的左乘和右乘的运动解释是不同的。

算子？

算子左乘，

当坐标变换是相对固定坐标系进行的；

算子右乘，

当坐标变换是相对动坐标系进行的。

绕固定坐标系旋转　　左乘

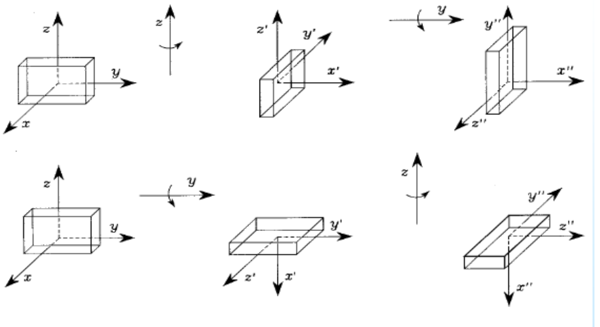


Fig. 2.7. Successive rotations of an object about axes of fixed frame

绕动坐标系旋转

右乘

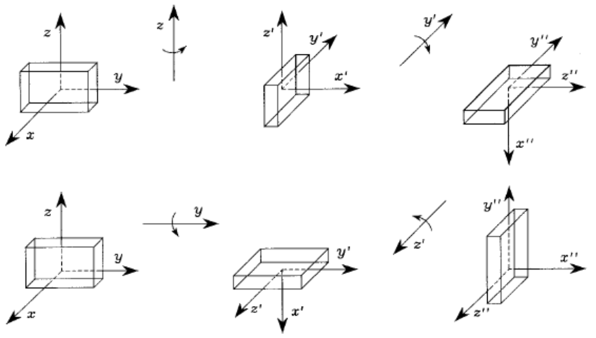


Fig. 2.6. Successive rotations of an object about axes of current frame

---

小结：齐次变换矩阵的物理意义

齐次变换矩阵物理解释：矩阵 ${}^{A}_{B}\mathbf{T}$ 描述了{B}相对{A}的位置和方位。其第4列矢量 ${}^{A}p_{B_o}$ 描述{B}的坐标原点相对{A}的位置；其它3个列矢量分别代表{B}的三个坐标轴相对{A}的方向。

38

齐次变换矩阵 ${}^{A}_{B}\mathbf{T}$

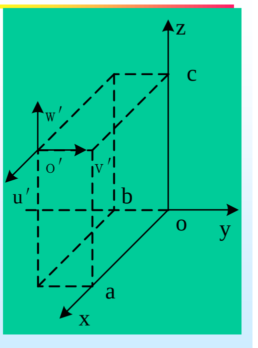
- 描述坐标系{B}相对另一坐标系{A}的位姿；
- 可作为点的运动算子；
- 可用于计算向量在不同坐标系下的表示。

39

齐次变换举例

平移齐次变换

$$\mathbf{T} = \mathrm{Trans}\,(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



注意：平移变换矩阵间可以交换，旋转矩阵间不可以交换

40

齐次变换举例

1. 平移坐标变换

例 2. 3：空间某点由矢量 $\mathbf{p} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ 描述，则用平移齐次变换表示为：

$$Trans(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Trans(a,b,c)$ 表示平移变换或齐次变换的平移算子。

其旋转矩阵是单位阵。

41

例 2. 4：对向量 $\mathbf{u} = [x \quad y \quad z \quad w]^T$ 进行平移变换所得的向量 $\mathbf{v}$ 是：

$$\mathbf{v} = Trans(a,b,c) \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a\omega \\ y + b\omega \\ z + c\omega \\ \omega \end{bmatrix}$$

42

例 2.5：如图 2.10 所示，

动坐标系 $\{A\}$ 相对于固定坐标系 X_0,Y_0,Z_0 轴作 $[-1\ \ 2\ \ 2]$ 平移后到 $\{A'\}$；

动坐标系 $\{A\}$ 相对于自身坐标系（即动系）的 X,Y,Z 轴作 $[-1\ \ 2\ \ 2]$ 平移后到 $\{A''\}$。已知：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

写出坐标系 $\{A'\}$ $\{A''\}$ 的齐次变换矩阵

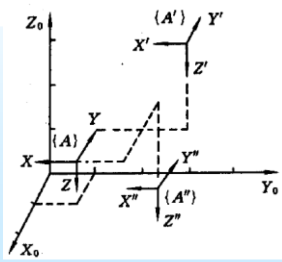


图2.10 坐标系的平移变换

解：动坐标系 $\{A\}$ 的两个平移坐标变换算子均为：

$$Trans(a,b,c)=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

坐标系 $\{A'\}$ 是动系相对于固定坐标系变换而来的，因此算子左乘，

$$\mathbf{A}'=Trans(a,b,c)\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&3\\0&0&-1&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

坐标系 $\{A''\}$ 是动系相对于动坐标系变换而来的，因此算子右乘，

$$\mathbf{A}''=\mathbf{A}\cdot Trans(a,b,c)=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0&-1\\-1&0&0&2\\0&0&-1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

2. 旋转齐次坐标变换

绕坐标轴旋转的旋转齐次坐标变换：

$$Rot(\mathbf{x},\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta&0\\0&\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Rot(\mathbf{y},\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta&0\\0&1&0&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Rot(\mathbf{z},\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0&0\\\sin\theta&\cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

式中，Rot表示旋转变换。最后一列为零。

例 2.6：已知点 $u=7i+3j+2k$，对它进行绕 z 轴旋转 90° 变换后得点 v，点 v 绕 y 轴旋转 90° 变换后得 w。

$$\mathbf{v}=Rot(z,90^\circ)\cdot\mathbf{u}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\7\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}=Rot(y,90^\circ)\cdot\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3\\7\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\7\\3\\1\end{bmatrix}$$

将上述两次变换合在一起，有：

$$\mathbf{w}=Rot(y,90^\circ)\cdot Rot(z,90^\circ)\cdot\mathbf{u}$$

例 2.7：如图 2.11 所示，已知坐标系中点 U 的齐次坐标 $\mathbf{u}=[7\ \ 3\ \ 2\ \ 1]^T$，将此点绕 z 轴旋转 90°，再绕 y 轴旋转 90°。求旋转变换后得到的 W 点。

$$\mathbf{w}=Rot(y,90^\circ)\cdot Rot(z,90^\circ)\cdot\mathbf{u}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\\7\\3\\1\end{bmatrix}$$

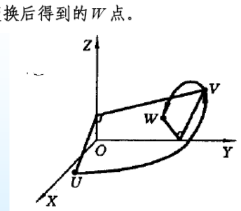
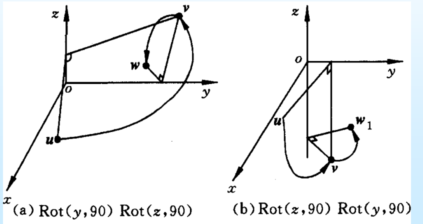


图 2.11 两次旋转变换

结果与上例分别计算相同。

若改变旋转次序，**u** 先绕 **y** 轴旋转90°，则会到达与**w**不同的位置w_1，见右下图。由计算也可得出$w_1 \neq w$。原因是矩阵乘法不具有交换性质，即$AB \neq BA$。



(a) Rot(y,90) Rot(z,90)　(b) Rot(z,90) Rot(y,90)

图 2.6 旋转次序对变换结果的影响

例 2.8：如图 2.12 所示，单臂机械手，手腕也具有一个自由度。已知手部起始位姿矩阵为：

$$\mathbf{G}_1=\begin{bmatrix}0&1&0&2\\1&0&0&6\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

若手臂绕 z_0 轴旋转90°，则手部到达 $\mathbf{G}_2$；

若手臂不动，仅手部绕手腕 z_1 轴旋转90°，则手部到达 $\mathbf{G}_3$。

写出手部坐标系 $\{\mathbf{G}_2\}$、$\{\mathbf{G}_3\}$ 的矩阵表达式。

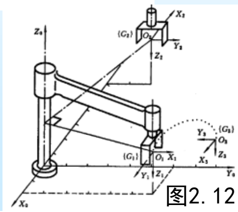


图2. 12

解：手臂绕定轴旋转是相对于固定坐标系作旋转变换，则

$$\mathbf{G}_2=Rot(z,90^\circ)\cdot\mathbf{G}_1=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&2\\1&0&0&6\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0&-6\\0&1&0&2\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

手部绕手腕动轴旋转是相对于动坐标系作旋转变换，则

$$\mathbf{G}_3=\mathbf{G}_1\cdot Rot(z,90^\circ)=\begin{bmatrix}0&1&0&2\\1&0&0&6\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&-1&0&6\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

3. 平移加旋转的齐次变换

平移变换和旋转变换组合在一个齐次变换中，齐次变换矩阵是一个4x4矩阵。

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}&\mathbf{p}\\0&1\end{bmatrix}$$

例 2.9：如图 2.13 所示，在例 2.7 的基础上，再进行平移变换 $4i-3j+7k$。求变换后得到的 E 点。

运动是相对固定坐标系的

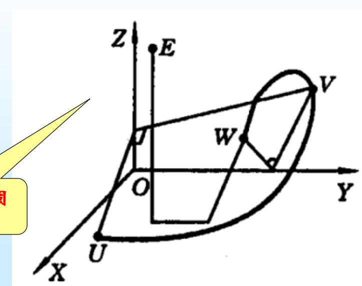


图2. 13 平移加旋转变换

$$\mathbf{e}=Trans(4,-3,7)\cdot Rot(y,90^\circ)\cdot Rot(z,90^\circ)\cdot\mathbf{u}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-3\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1&4\\1&0&0&-3\\0&1&0&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6\\4\\10\\1\end{bmatrix}$$

例 2.10：刚体先绕 z 轴旋转90°，再绕 y 轴旋转90°，再沿 x 轴方向平移 4 个单位，写出变换矩阵。

$$\mathbf{T}=Trans(4,0,0)\cdot Rot(y,90^\circ)\cdot Rot(z,90^\circ)=\begin{bmatrix}0&0&1&4\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

2.4　齐次变换矩阵的运算

2.4 齐次变换矩阵的运算

2.4.1 齐次变换矩阵相乘

对应给定的坐标系$\{A\}$、$\{B\}$和$\{C\}$，

已知$\{B\}$相对于$\{A\}$的齐次变换矩阵为${}_B^A\mathbf{T}$

$\{C\}$相对于$\{B\}$的齐次变换矩阵为${}_C^B\mathbf{T}$

如果点P在坐标系$\{A\}$中的齐次坐标向量为${}^A\mathbf{p}$，点P在坐标系$\{B\}$中的齐次坐标向量为${}^B\mathbf{p}$，在坐标系$\{C\}$中的位置向量为${}^C\mathbf{p}$，则有以下关系：

$${}^B\mathbf{p} = {}_C^B\mathbf{T} \cdot {}^C\mathbf{p}$$

$${}^A\mathbf{p} = {}_B^A\mathbf{T} \cdot {}^B\mathbf{p} = {}_B^A\mathbf{T} \cdot {}_C^B\mathbf{T} \cdot {}^C\mathbf{p}$$

定义复合变换，${}_C^A\mathbf{T} = {}_B^A\mathbf{T} \cdot {}_C^B\mathbf{T}$

${}_C^A\mathbf{T}$表示坐标系$\{C\}$相对于$\{A\}$的描述。

2.4.2 齐次变换矩阵求逆

坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的变换用${}_B^A\mathbf{T}$来表示，求$\{A\}$相对于$\{B\}$的描述。是齐次变换${}_B^A\mathbf{T}$求逆问题。

${}_B^A\mathbf{T} \rightarrow {}_A^B\mathbf{T}$

$${}_B^A\mathbf{T}^{-1} = {}_A^B\mathbf{T} = ?$$

方法一：利用线性代数理论，直接求逆

方法二：利用齐次变换矩阵的特点，求逆

由于直接求解逆矩阵的方法涉及较多代数余子式的运算，计算量较大。而齐次变换矩阵具有一定的特殊性，可以简化计算。

$${}_A^B\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}_A^B\mathbf{R} & {}^B\mathbf{p}_{AO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

已知 ${}_B^A\mathbf{R}$, ${}^A\mathbf{p}_{Bo}$ $\Longrightarrow$ ${}_A^B\mathbf{R}$, ${}^B\mathbf{p}_{Ao}$

利用旋转矩阵的正交性，可得

$${}_A^B\mathbf{R} = {}_B^A\mathbf{R}^{-1} = {}_B^A\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$$

求${}^A\mathbf{p}_{Bo}$在坐标系{B}中的描述：

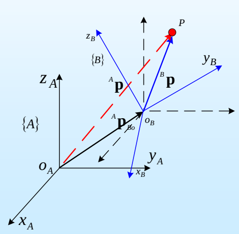
$${}^A\mathbf{p} = {}_B^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} + {}^A\mathbf{p}_{Bo} \qquad {}^B\left({}^A\mathbf{p}_{Bo}\right) = {}_A^B\mathbf{R} \cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo} + {}^B\mathbf{p}_{Ao}$$

${}^B\left({}^A\mathbf{p}_{Bo}\right)$即为{B}的原点相对于{B}的描述，为0矢量。

$${}_A^B\mathbf{R} \cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo} + {}^B\mathbf{p}_{Ao} = \mathbf{0}$$

$${}^B\mathbf{p}_{Ao} = -{}_A^B\mathbf{R} \cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo}$$

$$= -{}_B^A\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo}$$



$${}_B^A\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}_B^A\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{BO} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_B^A\mathbf{T}^{-1} = {}_A^B\mathbf{T} = ?$$

$$\boxed{{}_A^B\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}_B^A\mathbf{R}^{\mathrm{T}} & -{}_B^A\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot {}^A\mathbf{p}_{Bo} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

例2.11 已知 ${}^{A}_{B}T$ 表示{B}相对z_A轴转30°，再沿x_A轴移动4，沿y_A轴移动3，求${}^{B}_{A}T$，并说明它所表示的运动(均指相对固定坐标系而言)。

解：坐标系{B}相当于{A}的运动描述为

$$ {}^{A}_{B}T = \text{Trans}(4,3,0)\text{Rot}(z,30^\circ) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

利用求逆公式：${}^{B}\mathbf{p}_{Ao} = -{}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot {}^{A}\mathbf{p}_{Bo}$

$$ {}^{B}_{A}\mathbf{T} = {}^{A}_{B}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 & -4.964 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & -0.598 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

61

逆矩阵 ${}^{B}_{A}\mathbf{T}$ 的运动解释：

$$ {}^{B}_{A}\mathbf{T} = {}^{A}_{B}\mathbf{T}^{-1} = \text{Trans}(-4,-3,0)\,\text{Rot}(z,-30^\circ) $$
$$ = \text{Rot}(z,-30^\circ)\text{Trans}(-4,-3,0) $$

实际上，逆变换是从已变换的坐标系变回参考坐标系的一种变换，也就是参考坐标系{A}相对于坐标系{B}的描述。

62

End

63