第三节　　频率与概率

- 频率的定义
- 概率的定义
- 小结　布置作业

一、频率的定义

频率：设在 n 次重复试验中，事件 A 出现了 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 在 n 次试验中出现的频数，比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中出现的频率，记为 $f_n(A)$，

即
$$f_n(A)=\frac{\mu}{n}.$$

频率所具有的三个性质：

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f_n(S) = 1$;

(3)设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 是两两互斥事件，则

$$f_n(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \ldots + f_n(A_k)$$

抛掷钱币试验记录

试验者	抛币次数n	“正面向上”次数	频率 $f_n(A)$
De Morgan	*2084*	*1061*	*0.518*
Bufen	*4040*	*2048*	*0.5069*
Pearson	*12000*	*6019*	*0.5016*
Pearson	*24000*	*12012*	*0.5005*

从上表中可以看出,出现{正面向上}的频率 $f_{\mathrm{n}}(A)$ 虽然随 n 的不同而变动,但总的趋势是随着试验次数的增加而逐渐稳定在 0.5 这个数值上.

在大量重复的试验中,随机事件出现的频率具有稳定性.即通常所说的统计规律性.

定义 在不变的一组条件下进行大量的重复试验,随机事件 A 出现的频率 $\frac{\mu}{n}$ 会稳定地在某个固定的的数值 p 的附近摆动,我们称这个稳定值 p 为随机事件 A 的概率,即 $P(A)=p$.

这个定义也称为 概率的统计定义.

二、概率的定义

概率的公理化定义 设 E 是随机试验，S是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$，称之为事件A的概率，如果它满足下列三个条件：

(1) $P(A) \geq 0$; (非负性)

(2) $P(S) = 1$; (规范性)

(3) 对于两两互斥事件 $A_1, A_2, \ldots$, 有

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

(可列可加性)

由概率的公理化定义可推得概率的下列性质.

性质1 $P(\varnothing)=0$.

证　因为 $\varnothing=\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots$

由于上式右端可列个事件两两互斥,故由概率公理化定义的可列可加性,有

$$P(\varnothing)=P(\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots)$$
$$=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$$

再由概率的非负性可得,

$$P(\varnothing)=0 .$$

性质2 设有限个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥,则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证 因为

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots$$

所以由可列可加性及性质1,有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + 0 + 0 + \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

性质 3 对于任何事件 A,有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

证　因为

$$A \cup \overline{A} = \Omega \text{ ,且 } A\overline{A} = \varnothing .$$

所以　$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1.$

并且　$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

由以上两式可得， $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

即　$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 4 设 A、B 为两事件，且 $A \supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \text{ 并且 } P(A)\geq P(B).$$

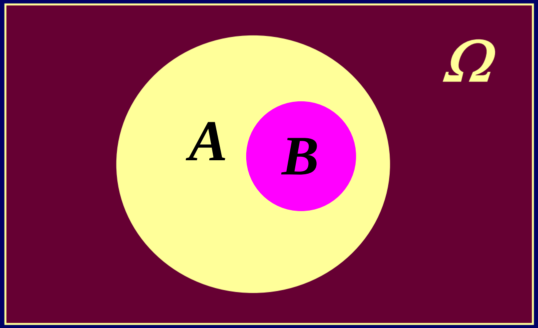
证 如图，因为 $A \supset B$，所以 $A = B + (A-B)$

并且 $B(A-B)=\varnothing$

于是由性质 2，可得

$$P(A)=P(B)+P(A-B)$$

也即 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，



$A \supset B$

又由概率的非负性，有 $P(A-B)=P(A)-P(B)\geq 0$

即

$$P(A)\geq P(B).$$

性质 5 对于任一事件 A,都有 $P(A) \le 1$.

证 因为对于任一事件 A,都有

$$A \subset \Omega$$

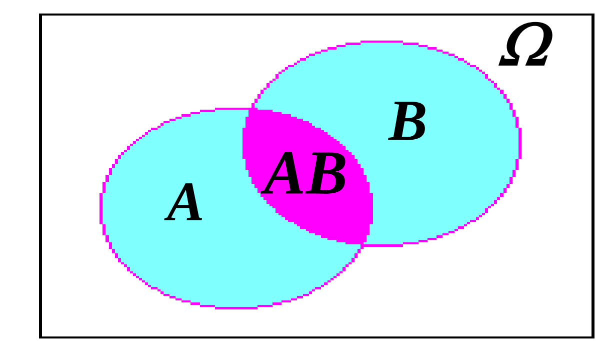
故由性质 4,可得

$$P(A) \le P(\Omega) = 1.$$

性质 6 设 A, B 为任意两个事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证 如图所示，



$$A \cup B = A + (B - AB)$$

而且 $A(B - AB) = \varnothing$

所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB)$

$$= P(A) + P(B) - P(AB).$$

由此性质还可推得

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B).$$

而且此结果还可以推广:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$
$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$P(A\cup B\cup C\cup D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)$$
$$+P(ABC)+P(ABD)+P(BCD)+P(ACD)-P(ABCD)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i,j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i,j,k\le n}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

例1 设 A、B 为两个随机事件,且已知 $P(A)=\frac{1}{4}$,
$P(B)=\frac{1}{2}$,就下列三种情况求概率 $P(B\overline{A})$.

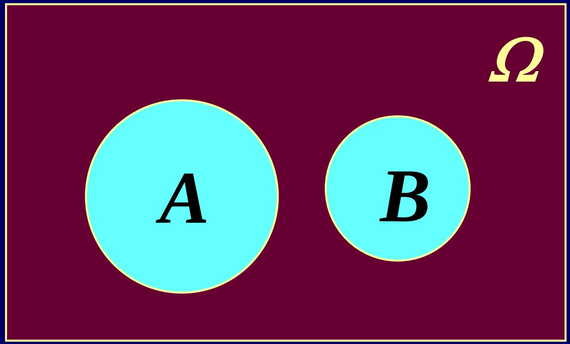
(1) A 与 B 互斥; (2) $A \subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{9}$.

解 (1)由于 A、B 互斥,所以

$$B \subset \overline{A}$$

于是 $$B\overline{A}=B$$

所以 $$P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}.$$

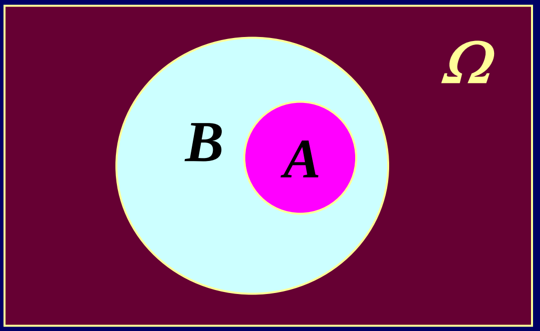


A、B 互斥

(2) 因为 $A \subset B$,所以

$$P(B\overline{A}) = P(B - A) = P(B) - P(A)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

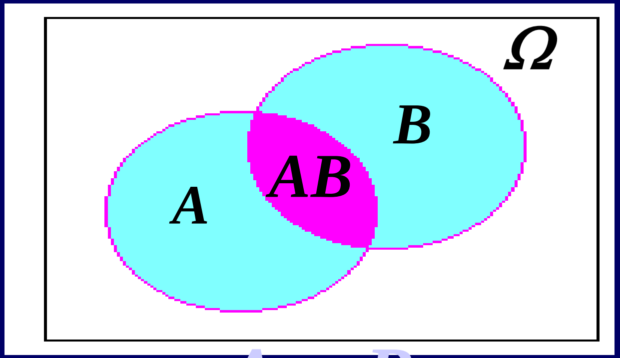


$A \subset B$

(3) $P(B\overline{A}) = P(B - AB)$

$$= P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}.$$



$A \cap B$

例2 设 A、B、C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$. 求 A、B、C 至少有一个发生的概率 .

解 $P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)$$

$$-P(BC)+P(ABC)$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.$$

三、小结

频率的定义

概率的公理化定义及概率的性质

事件在一次试验中是否发生具有随机性，它发生的可能性大小是其本身所固有的性质，概率是度量某事件发生可能性大小的一种数量指标. 它介于0与1之间.

四、 布置作业

习题1-2（p11）：2、4、5