

第一节 数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量函数的数学期望
- 数学期望的性质
- 课堂练习
- 小结 布置作业

在前面的课程中，我们讨论了随机变量及其分布，如果知道了随机变量 X 的概率分布，那么 X 的全部概率特征也就知道了。

然而，在实际问题中，概率分布一般是较难确定的。而在一些实际应用中，人们并不需要知道随机变量的一切概率性质，只要知道它的某些数字特征就够了。



因此，在对随机变量的研究中，确定某些数字特征是重要的。

在这些数字特征中，最常用的是

数学期望、方差、协方差和相关系数



一、离散型随机变量的数学期望

1、概念的引入：

我们来看一个引例.

例1 某车间对工人的生产情况进行考察. 车工小张每天生产的废品数 X 是一个随机变量. 如何定义 X 的平均值呢?

我们先观察小张100天的生产情况



若统计100天,

(假定小张每天至多出现三件废品)

32天没有出废品;
30天每天出一件废品;
17天每天出两件废品;
21天每天出三件废品;

可以得到这100天中
每天的平均废品数为

$$0 \cdot \frac{32}{100} + 1 \cdot \frac{30}{100} + 2 \cdot \frac{17}{100} + 3 \cdot \frac{21}{100} = 1.27$$

这个数能否作为
X的平均值呢?



可以想象，若另外统计100天，车工小张不出废品，出一件、二件、三件废品的天数与前面的100天一般不会出现完全相同，这另外100天每天的平均废品数也不一定是1.27.

一般来说，若统计 n 天，
(假定小张每天至多出
三件废品)

n_0 天没有出废品；
 n_1 天每天出一件废品；
 n_2 天每天出两件废品；
 n_3 天每天出三件废品.

可以得到 n 天中每天的平均废品数为

$$0 \cdot \frac{n_0}{n} + 1 \cdot \frac{n_1}{n} + 2 \cdot \frac{n_2}{n} + 3 \cdot \frac{n_3}{n}$$



$$0 \cdot \frac{n_0}{n} + 1 \cdot \frac{n_1}{n} + 2 \cdot \frac{n_2}{n} + 3 \cdot \frac{n_3}{n}$$

这是
以频率为权的加权平均

当N很大时，频率接近于概率，
所以我们在求废品数X
的平均值时，用概率代替
频率，得平均值为

$$0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3$$

这是
以概率为权的加权平均

这样得到一个确定的数。我们就用这个数作为随机变量X的平均值。



定义1 设 X 是离散型随机变量, 它的分布率是:

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\dots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

的和为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$,

即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

请注意: 离散型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的级数的和. 数学期望简称期望, 又称为均值。



例1 甲、乙二人进行打靶，所得分数分别记为 X_1, X_2 ，它们的分布率分别为

X_1	0	1	2
p_k	0	0.2	0.8

X_2	0	1	2
p_k	0.6	0.3	0.1

解：我们先来算 X_1 和 X_2 的数学期望，

$$E(X_1) = 0 \times 0 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.8 = 1.8(\text{分})$$

$$E(X_2) = 0 \times 0.6 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.1 = 0.5(\text{分})$$



例2 设 $X \sim \pi(\lambda)$, 求 $E(X)$.

解 X 的分布率为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$$

X 的数学期望为

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

即 $E(X) = \lambda$



例3 按规定,某车站每天8:00~9:00,9:00~10:00都恰有一辆客车到站,但到站时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立。其规律为:

到站时刻	8:10	8:30	8:50
	9:10	9:30	9:50
概率	1/6	3/6	2/6

一旅客8:20到车站,求他候车时间的数学期望.



解：设旅客的候车时间为 X (以分计),其分布率为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{2}{6}$

上表中例如

$$P\{X = 70\} = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$$

其中 A 为事件"第一班车8:10到站", B 为事件"第二班车9:30到站".候车时间 X 的数学期望为

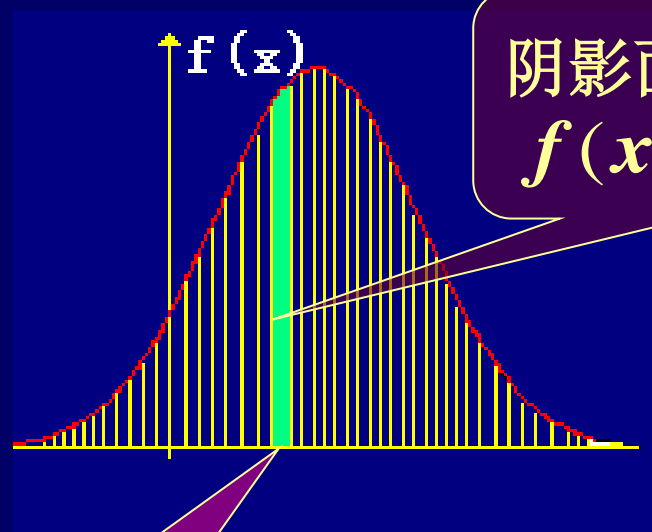
$$E(X) = 10 \times \frac{3}{6} + 30 \times \frac{2}{6} + 50 \times \frac{1}{36} + 70 \times \frac{3}{36} + 90 \times \frac{2}{36} = 27.22 \text{分}$$



二、连续型随机变量的数学期望

设 X 是连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)$ ，在数轴上取很密的分点 $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ ，则 X 落在小区间 $[x_i, x_{i+1})$ 的概率是

$$\begin{aligned} & \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \\ & \approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \\ & = f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$



阴影面积近似为
 $f(x_i)\Delta x_i$

小区间 $[x_i, x_{i+1})$



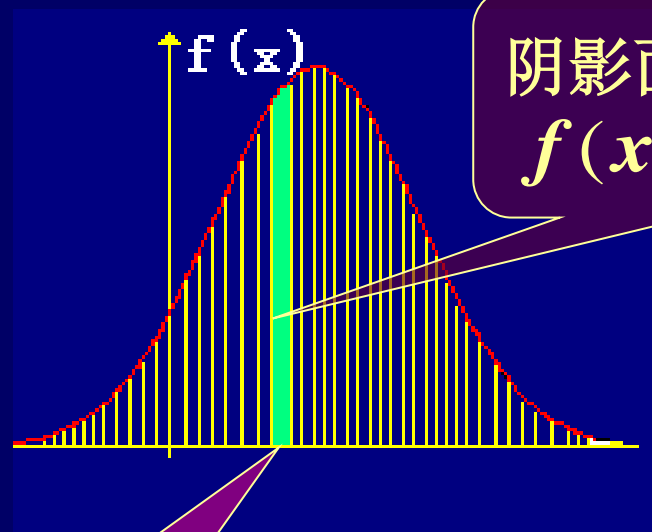
由于 x_i 与 x_{i+1} 很接近, 所以区间 $[x_i, x_{i+1})$ 中的值可以用 x_i 来近似代替.

因此 X 与以概率 $f(x_i)\Delta x_i$ 取值 x_i 的离散型 $r.v$ 近似, 该离散型 $r.v$ 的数学期望是

$$\sum_i x_i f(x_i) \Delta x_i$$

这正是 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

的渐近和式.



阴影面积近似为
 $f(x_i)\Delta x_i$

小区间 $[x_i, x_{i+1})$



由此启发我们引进如下定义.

定义2 设 X 是连续型随机变量, 其密度函数为 $f(x)$, 如果积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛, 则称此积分值为 X 的数学期望, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

请注意: 连续型随机变量的数学期望是一个绝对收敛的积分.



例4 设 $X \sim U(a, b)$, 求 $E(X)$.

解 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

X 的数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

即数学期望位于区间 (a, b) 的中点.



例5 有2个相互独立工作的电子装置,它们的寿命 X_k ($k = 1, 2$)服从同一指数分布,其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases} \quad \theta > 0$$

若将这两个电子装置串联连接组成整机,求整机寿命(以小时计) N 的数学期望.

解 X_k ($k = 1, 2$)的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



$N = \min(X_1, X_2)$ 的分布函数为

$$F_{\min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

于是 N 的概率密度为

$$f_{\min}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$E(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\min}(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}} dx = \frac{\theta}{2}$$



三、随机变量函数的数学期望

1. 问题的提出:

设已知随机变量 X 的分布, 我们需要计算的不是 X 的期望, 而是 X 的某个函数的期望, 比如说 $g(X)$ 的期望. 那么应该如何计算呢?

一种方法是, 因为 $g(X)$ 也是随机变量, 故应有概率分布, 它的分布可以由已知的 X 的分布求出来. 一旦我们知道了 $g(X)$ 的分布, 就可以按照期望的定义把 $E[g(X)]$ 计算出来.



使用这种方法必须先求出随机变量函数 $g(X)$ 的分布，一般是比较复杂的。

那么是否可以不先求 $g(X)$ 的分布而只根据 X 的分布求得 $E[g(X)]$ 呢？

下面的定理指出，答案是肯定的。



定理 设 Y 是随机变量 X 的函数: $Y=g(X)$ (g 是连续函数)

(1) 当 X 为离散型时,它的分布率为 $P(X=x_k)=p_k$;

($k=1,2,\cdots$),若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛, 则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

(2) 当 X 为连续型时,它的密度函数为 $f(x)$.若

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛, 则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$



$$E(Y) = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k, & X \text{离散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, & X \text{连续型} \end{cases}$$

该公式的重要性在于: 当我们求 $E[g(X)]$ 时, 不必知道 $g(X)$ 的分布, 而只需知道 X 的分布就可以了. 这给求随机变量函数的期望带来很大方便.



上述定理还可以推广到两个或两个以上随机变量的函数的情况。

设 Z 是随机变量 X, Y 的函数 $Z = g(X, Y)$ (g 是连续函数)
 Z 是一维随机变量, 则

(1) 若 (X, Y) 是二维连续型, 概率密度为 $f(x, y)$, 则有

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$



(2) 若 (X, Y) 是二维离散型, 概率分布为
 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} (i, j = 1, 2, \dots)$ 则有

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

这里假定上两式右边的 积分或级数都绝对收敛.



例6 设风速 V 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布,即具有概率密度

$$f(v) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 < v < a \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数: $W = kV^2$ ($k > 0$, 常数), 求 W 的数学期望.

解: 由上面的公式

$$E(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} kv^2 f(v) dv = \int_0^a kv^2 \frac{1}{a} dv = \frac{1}{3} ka^2$$



例7 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} A \sin(x + y) & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1)求系数A, (2)求 $E(X), E(XY)$.

解: (1) 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\pi/2} A \sin(x + y) dx = 1, \text{ 得 } A = \frac{1}{2}$$



例7 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} A \sin(x + y) & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1)求系数A, (2)求 $E(X), E(XY)$.

解 (2) $E(X) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \frac{1}{2} \sin(x + y) dx dy = \frac{\pi}{4}$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} xy \frac{1}{2} \sin(x + y) dx dy = \frac{\pi}{2} - 1$$



四、数学期望的性质

1. 设 C 是常数, 则 $E(C)=C$;
2. 若 k 是常数, 则 $E(kX)=kE(X)$;
3. $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$;

推广:
$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

4. 设 X 、 Y 相互独立, 则 $E(XY)=E(X)E(Y)$;

推广:
$$E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n E(X_i) \quad (\text{诸} X_i \text{相互独立时})$$

请注意:

由 $E(XY)=E(X)E(Y)$
不一定能推出 X, Y
独立



性质1,2请同学自己证明, 我们来证性质3和4。

证 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$. 其边缘概率密度为 $f_X(x), f_Y(y)$, 于是有

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

性质3得证。



又若 X, Y 相互独立,

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dx dy = E(X)E(Y) \quad \text{性质4得证.}$$



五、数学期望性质的应用

例8 求二项分布的数学期望

若 $X \sim B(n, p)$,

则 X 表示 n 重贝努里试验中的“成功”次数.

现在我们来求 X 的数学期望.



$X \sim B(n, p)$, 则 X 表示 n 重贝努里试验中的“成功”次数.

若设 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{如第 } i \text{ 次试验成功} \\ 0 & \text{如第 } i \text{ 次试验失败} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n$

则 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

因为 $P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1 - p$

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

所以 $E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$

可见, 服从参数为 n 和 p 的二项分布的随机变量 X 的数学期望是 np .



例9 把数字 $1, 2, \dots, n$ 任意地排成一列，如果数字 k 恰好出现在第 k 个位置上，则称为一个巧合，求巧合个数的数学期望。

解：设巧合个数为 X ， 引入

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{数字 } k \text{ 恰好出现在第 } k \text{ 个位置上} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, n$$

则
$$X = \sum_{k=1}^n X_k$$

由于
$$E(X_k) = P(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

故
$$E(X) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$



例10 一民航送客车载有20位旅客自机场开出,旅客有10个车站可以下车,如到达一个车站没有旅客下车就不停车.以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$. (设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立)

解 引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{在第} i \text{站没有人下车} \\ 1 & \text{在第} i \text{站有人下车} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

易知 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$



按题意

$$P\{X_i = 0\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, P\{X_i = 1\} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, i = 1, 2, \dots, 10$$

由此 $E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, i = 1, 2, \dots, 10$

进而
$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_{10}) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) \\ &= 10\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right] = 8.784 \text{次} \end{aligned}$$

本题是将X分解成数个随机变量之和,然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望的和来求数学期望的,此方法具有一定的意义.



六、课堂练习

1 某人的一串钥匙上有 n 把钥匙,其中只有一把能打开自己的家门,他随意地试用这串钥匙中的某一把去开门,若每把钥匙试开一次后除去,求打开门时试开次数的数学期望.

2 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

求 $Y = e^{-2X}$ 的数学期望。



1 解 设试开次数为 X ,

X 是离散型随机变量, 其分布率为:

$$P(X=k)=1/n, k=1, 2, \dots, n$$

于是

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n+1}{2}$$

2 解 Y 是随机变量 X 的函数,

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x} e^{-x} dx = \frac{1}{3}$$



七、小结

这一讲，我们介绍了随机变量的数学期望，它反映了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征。

接下来的一讲中，我们将向大家介绍随机变量另一个重要的数字特征：

方差



八、 布置作业

《概率论与数理统计》作业（四）

一、填空题第1小题

二、选择题第1、2小题

三、解答题第1、2、3、4小题

