

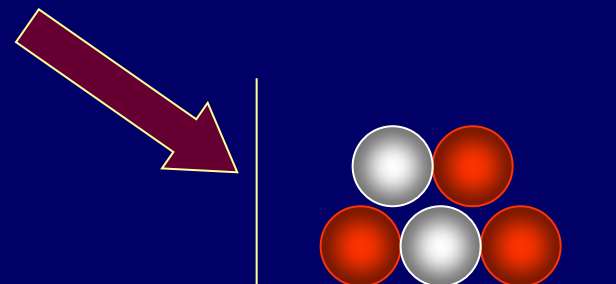
## 第二节 离散型随机变量及其分布律

- 离散型随机变量分布律的定义
- 离散型随机变量表示方法
- 三种常见分布
- 小结 布置作业

# 一、离散型随机变量分布律的定义

看一个例子

从中任取3个球



取到的白球数 $X$ 是一个随机变量.

(1)  $X$  可能取的值是0,1,2;

(2) 取每个值的概率为:

$$P\{X=0\} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}$$



$$P\{X = 1\} = \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} / \binom{5}{3} = \frac{6}{10}$$

$$P\{X = 2\} = \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} / \binom{5}{3} = \frac{3}{10}$$

定义1：某些随机变量 $X$ 的所有可能取值是有限多个或可列无限多个, 这种随机变量称为离散型随机变量.



定义2：设  $x_k (k=1,2, \dots)$  是离散型随机变量  $X$  所取的一切可能值，称

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

为离散型随机变量  $X$  的分布律.

其中  $p_k (k=1,2, \dots)$  满足：

$$(1) \quad p_k \geq 0, \quad k=1,2, \dots$$

$$(2) \quad \sum_k p_k = 1$$

用这两条性质  
判断一个函数  
是否是分布律



例2 设随机变量 $X$ 的分布律为:

$$P(X = k) = a \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$$

试确定常数 $a$ .

解: 依据分布律的性质

$$\begin{cases} P(X = k) \geq 0, \\ \sum_k P(X = k) = 1 \end{cases}$$

即  $a \geq 0$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} a \frac{\lambda^k}{k!} = a e^{\lambda} = 1$

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

从中解得  $a = e^{-\lambda}$



## 二、离散型随机变量表示方法

### (1) 公式法

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

### (2) 列表法

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$	$\dots$
$p_k$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k$	$\dots$

例3 某篮球运动员投中篮圈概率是0.9，求他两次独立投篮投中次数 $X$ 的概率分布.

解：  $X$ 可取值为0,1,2；

$$P\{X=0\}=(0.1)(0.1)=0.01$$

$$P\{X=1\}=2(0.9)(0.1)=0.18$$

$$P\{X=2\}=(0.9)(0.9)=0.81$$



常常表示为:

$$X \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \end{Bmatrix}$$

这就是 $X$ 的分布律.





例4 某射手连续向一目标射击，直到命中为止，已知他每发命中的概率是 $p$ ，求所需射击发数 $X$  的分布律.

解: 显然,  $X$  可能取的值是 $1, 2, \dots$ ,

为计算  $P\{X=k\}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , 设

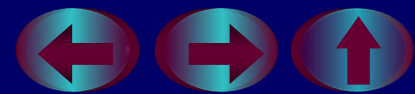
$$A_k = \{\text{第}k\text{发命中}\}, k=1, 2, \dots,$$

于是  $P\{X=1\}=P(A_1)=p,$

$$P(X=2)=P(\bar{A}_1 A_2)=(1-p) \cdot p$$

$$P(X=3)=P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)=(1-p)^2 \cdot p$$

.....



可见  $P(X=k)=(1-p)^{k-1} \cdot p \quad k=1,2,\dots$

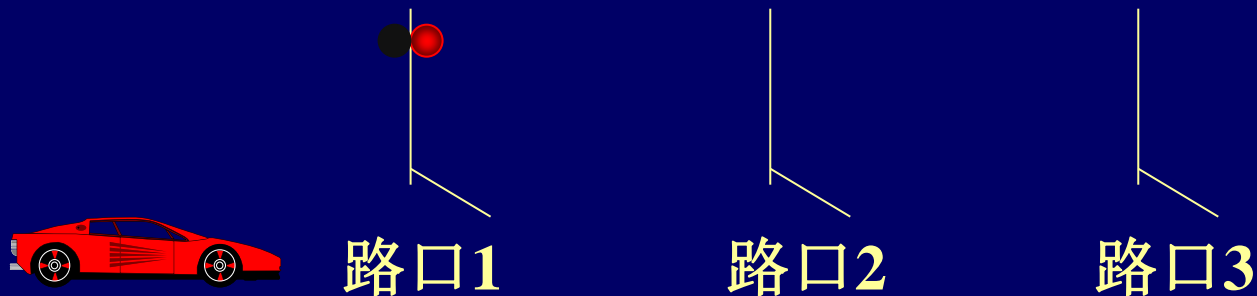
这就是求所需射击发数 $X$ 的分布律.



**例5** 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯显示的时间相等. 以 $X$ 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求 $X$ 的分布律.

解: 依题意,  $X$ 可取值0, 1, 2, 3.

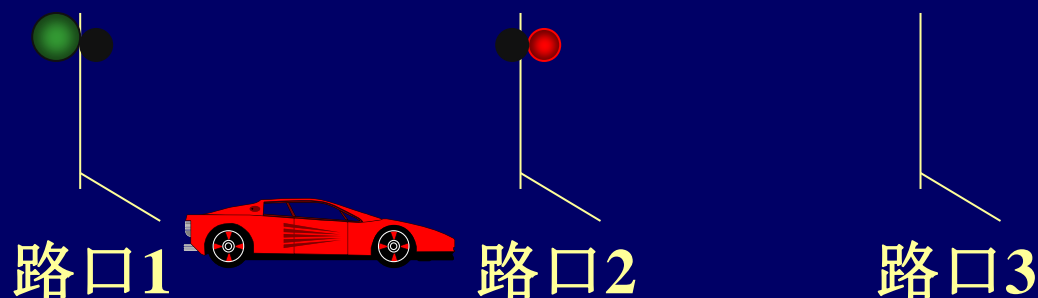
设  $A_i = \{\text{第}i\text{个路口遇红灯}\}, i=1, 2, 3$



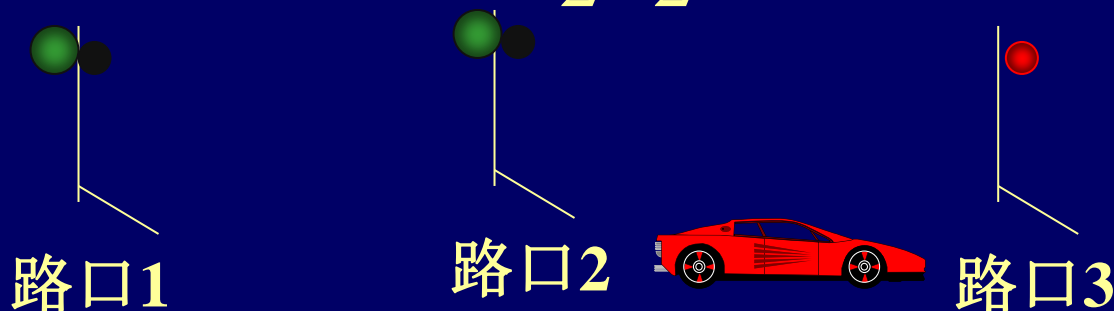
$$P\{X=0\}=P(A_1)=1/2,$$



$X$ 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数



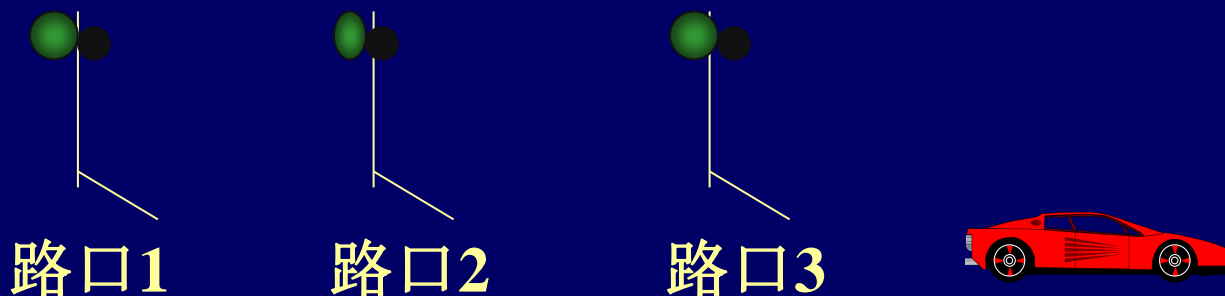
$$P\{X=1\}=P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$$



$$P\{X=2\}=P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/8$$



$X$ 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数



$$P(X=3) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/8$$

即

$$X \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$



### 三、三种常见分布

1、(0-1) 分布：（也称两点分布）

随机变量 $X$ 只可能取0与1两个值，其分布律为：

$$P\{X = k\} = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1 \quad (0 < p < 1)$$

或  $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{bmatrix}$  或 

$X$	0	1
$p_i$	$1-p$	$p$



## 2.伯努利试验和二项分布

看一个试验 将一枚均匀骰子抛掷3次.



令 $X$ 表示3次中出现“4”点的次数

$X$ 的分布律是:

$$P\{X = x_k\} = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3.$$



一般地，设在一次试验E中我们只考虑两个互逆的结果： $A$  或  $\bar{A}$  .

掷骰子：“掷出4点”，“未掷出4点”

抽验产品：“是正品”，“是次品”

.....

这样的试验E称为伯努利试验.





将伯努利试验E独立地重复地进行 $n$ 次，  
则称这一串重复的独立试验为 $n$ 重伯努利试验。

“重复”是指这  $n$  次试验中 $P(A)=p$  保持不变。

“独立”是指各 次试验的结果互不影响。



用 $X$ 表示 $n$ 重伯努利试验中事件 $A$ 发生的次数,  
则

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

易证: (1)  $P(X = k) \geq 0$

$$(2) \sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$$

称 r. v  $X$  服从参数为 $n$ 和 $p$ 的二项分布, 记作

$$X \sim b(n, p)$$



**例6** 已知100个产品中有5个次品，现从中有放回地取3次，每次任取1个，求在所取的3个中恰有2个次品的概率.

解：因为这是有放回地取3次，因此这3次试验的条件完全相同且独立，它是贝努里试验.

依题意，每次试验取到次品的概率为0.05.

设 $X$ 为所取的3个中的次品数，则  $X \sim b(3, 0.05)$ ,

于是，所求概率为：

$$P(X=2)=C_3^2 (0.05)^2 (0.95) = 0.007125$$



请注意:

若将本例中的“有放回”改为“无放回”,那么各次试验条件就不同了,此试验就不是伯努利试验. 此时,只能用古典概型求解.

$$P(X=2)=\frac{C_{95}^1 C_5^2}{C_{100}^3} \approx 0.00618$$



伯努利试验对试验结果没有等可能的要求，  
但有下列要求：

(1) 每次试验条件相同；

(2) 每次试验只考虑两个互逆结果  $A$  或  $\bar{A}$ ，

且  $P(A)=p$ ， $P(\bar{A})=1-p$ ；

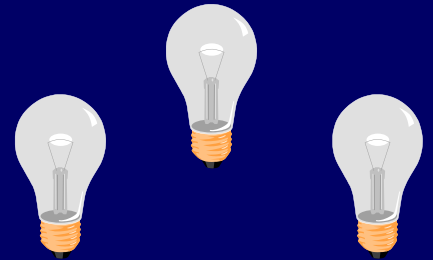
(3) 各次试验相互独立。

可以简单地说，

二项分布描述的是  $n$  重伯努利试验中事件  $A$  出现的次数  $X$  的分布律。



例7 某类灯泡使用时数在1000小时以上的概率是0.2，求三个灯泡在使用1000小时以后最多只有一个坏了的概率.

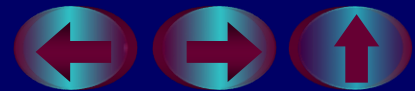


解：设 $X$ 为三个灯泡在使用1000小时已坏的灯泡数.

$$X \sim b(3, 0.8),$$

$$P(X=k) = C_3^k (0.8)^k (0.2)^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

把观察一个灯泡的使用  
 时数看作一次试验，  
 $P\{X \leq 1\} = P\{X=0\} + P\{X=1\}$   
 “使用到1000小时已坏”  
 视为事件A（每次试验，  
 A出现的概率为0.8）  
 $= 0.104$



例 某人进行射击, 设每次射击的命中率为0.02, 独立射击400次, 试求至少击中两次的概率.

解 将一次射击看成是一次试验. 设击中的次数为 $X$ , 则 $X \sim b(400, 0.02)$ .  $X$ 的分布律为

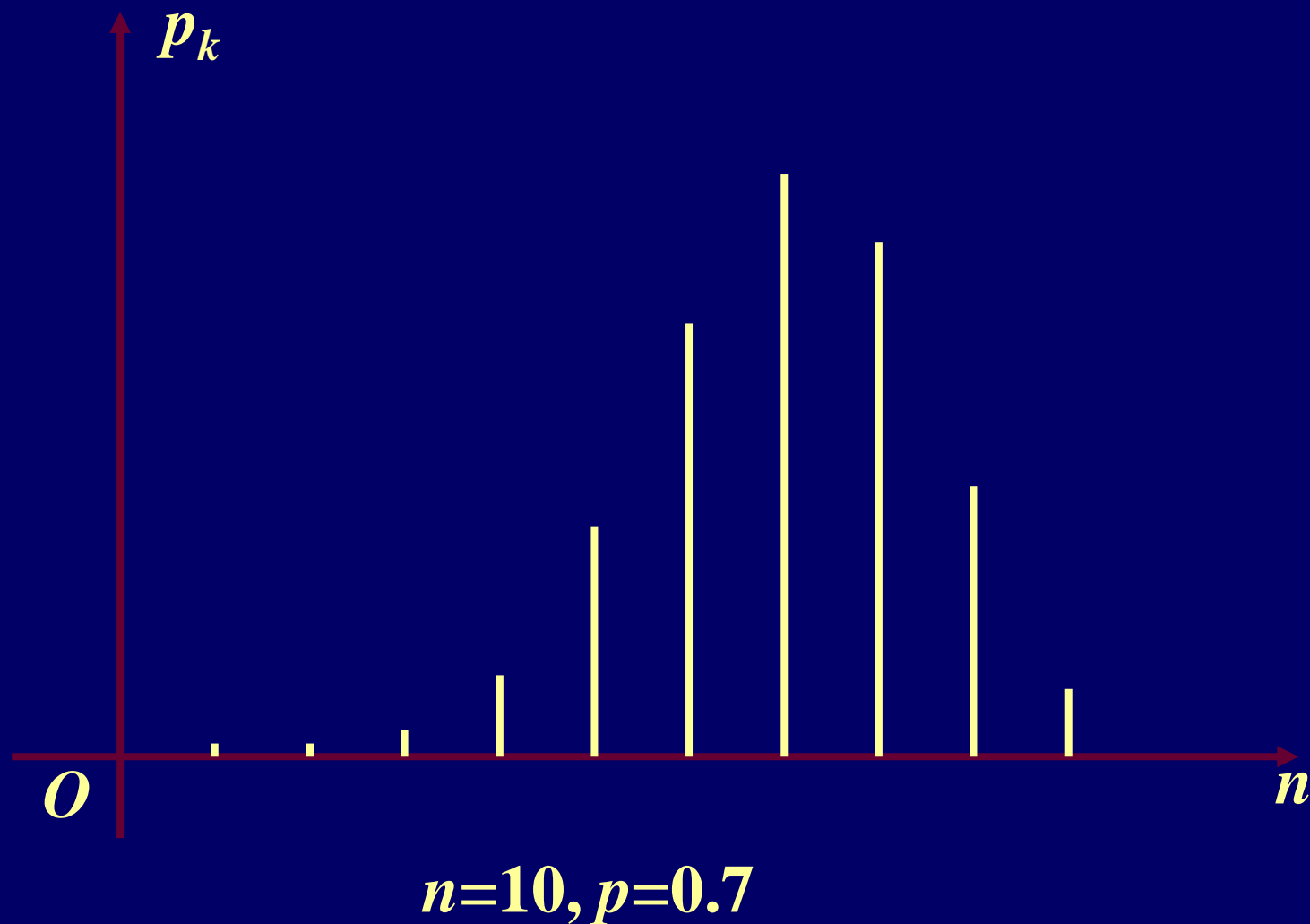
$$P\{X = k\} = C_{400}^k (0.02)^k (0.98)^{400-k}, k = 0, 1, \dots, 400.$$

于是所求概率为

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} \\ &= 1 - (0.98)^{400} - 400(0.02)(0.98)^{399} \\ &= 0.9972 \end{aligned}$$

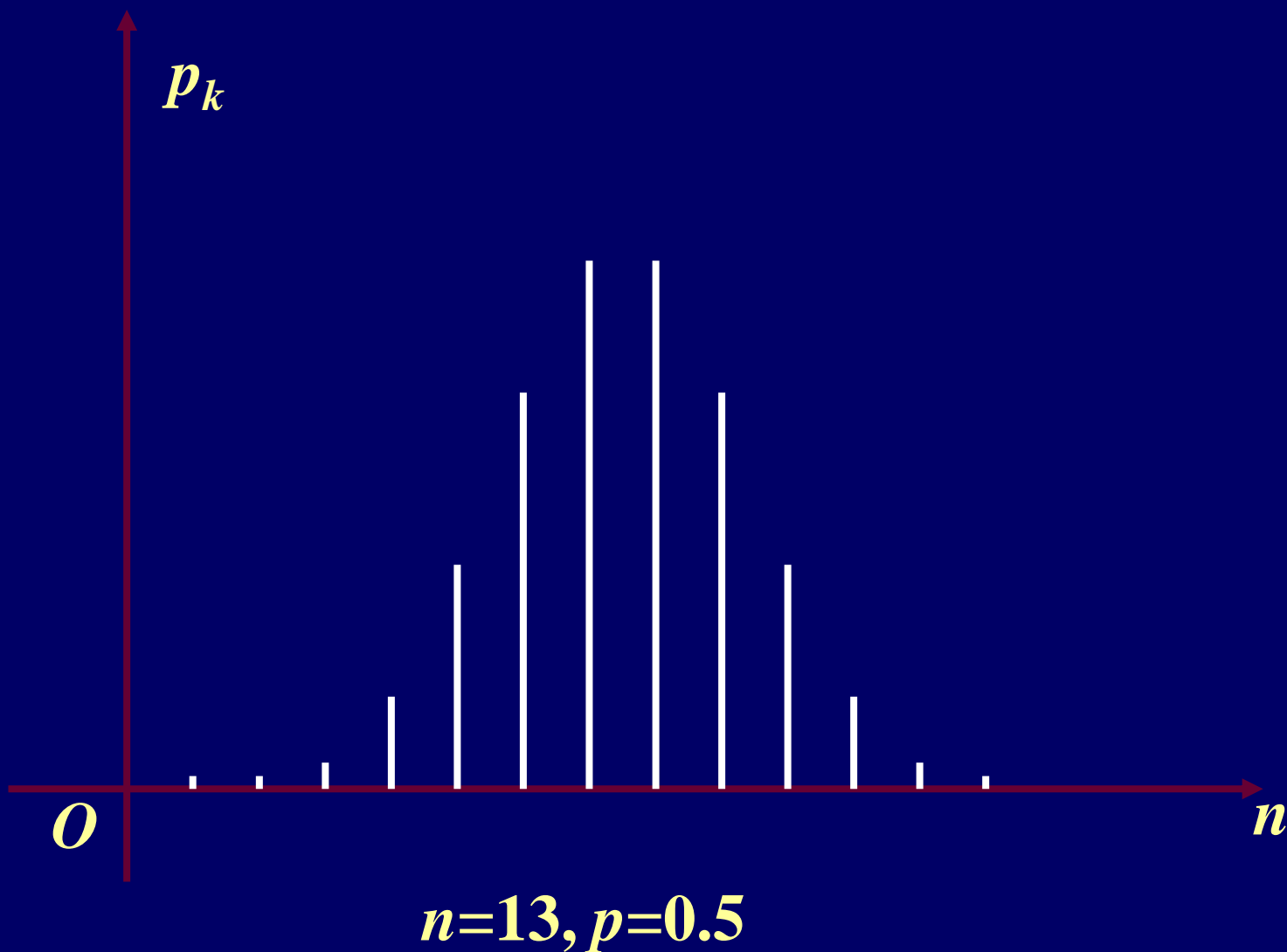


# 二项分布的图形





# 二项分布的图形之二



### 3. 泊松分布

设随机变量 $X$ 所有可能取的值为 $0, 1, 2, \dots$ ,  
且概率分布为:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\dots,$$

其中 $\lambda > 0$  是常数, 则称  $X$  服从参数为 $\lambda$ 的  
泊松分布, 记作 $X \sim \pi(\lambda)$ .



泊松分布具有**平稳性**, **无后效性**, **普通性**

**平稳性**—在任意时间区间内, 事件发生 $k$ 次( $k \geq 0$ )的概率只依赖于区间长度而与区间端点无关;

**无后效性**—在不相重叠的时间段内, 事件的发生相互独立;

**普通性**—如果时间区间充分小, 事件出现两次或两次以上的概率可以忽略不计.

对泊松流, 在任意时间间隔 $(0, t)$ 内, 事件发生的次数服从参数为 $\lambda t$ 的泊松分布.  $\lambda$ 称为泊松流的强度.



下列事件都可视为泊松流:

- 某电话交换台一定时间内收到的用户的呼叫数;
- 到某机场降落的飞机数;
- 某售票窗口接待的顾客数;
- 一纺锭在某一时段内发生断头的次数;
- 一段时间间隔内某放射物放射的粒子数;
- 一段时间间隔内某容器内的细菌数.



# 泊松分布的图形



例8 一家商店采用科学管理，由该商店过去的销售记录知道，某种商品每月的销售数可以用参数  $\lambda=5$  的泊松分布来描述，为了以95%以上的把握保证不脱销，问商店在月底至少应进某种商品多少件？

解：设该商品每月的销售数为 $X$ ，  
已知 $X$ 服从参数  $\lambda=5$  的泊松分布。

设商店在月底应进某种商品 $m$ 件，  
求满足  $P\{X \leq m\} > 0.95$  的最小的 $m$ 。

销售数

进货数



求满足  $P\{X \leq m\} > 0.95$  的最小的  $m$ .

也即  $P\{X > m\} \leq 0.05$

或 
$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{e^{-5} 5^k}{k!} \leq 0.05$$

查泊松分布表得

$$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{e^{-5} 5^k}{k!} \approx 0.032, \quad \sum_{k=9}^{\infty} \frac{e^{-5} 5^k}{k!} \approx 0.068$$

于是得  $m+1=10$ ,

**$m=9$ 件**



## 四、小结

这一节，我们介绍了离散型随机变量及其分布律，并给出两点分布、二项分布、泊松分布三种重要离散型随机变量。

对于离散型随机变量，如果知道了它的分布律，也就知道了该随机变量取值的概率规律。在这个意义上，我们说

离散型随机变量由它的分布律唯一确定。





## 五、布置作业

习题2-2 (p41) : 6、8、12



## 练习题

一. 一袋中有 4 只乒乓球, 编号为 1、2、3、4、在其中同时取三只, 以  $X$  表示取出的三只球中的最大号码, 写出随机变量  $X$  的分布律

二. 设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品, 在其中取三次, 每次任取一只, 作不放回抽样, 以  $X$  表示取出次品的只数, (1) 求  $X$  的分布律, (2) 画出分布律的图形。



三、一篮球运动员的投篮命中率为 45%，以  $X$  表示他首次投中时累计已投篮的次数，写出  $X$  的分布律，并计算  $X$  取偶数的概率。

四、一大楼装有 5 个同类型的供水设备，调查表明在任一时刻  $t$  每个设备使用的概率为 0.1，问在同一时刻

- (1) 恰有 2 个设备被使用的概率是多少？
- (2) 至少有 3 个设备被使用的概率是多少？
- (3) 至多有 3 个设备被使用的概率是多少？
- (4) 至少有一个设备被使用的概率是多少？



一. 一袋中有 4 只乒乓球, 编号为 1、2、3、4、在其中同时取三只, 以  $X$  表示取出的三只球中的最大号码, 写出随机变量  $X$  的分布律

解:  $X$  的所有可能取值为:  $X = 3, 4$

$$P\{X = 3\} = \frac{1}{C_4^3} = \frac{1}{4}$$

$$P\{X = 4\} = \frac{C_3^2}{C_4^3} = \frac{3}{4}$$

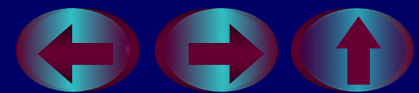


二. 设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以  $X$  表示取出次品的只数，(1) 求  $X$  的分布律，(2) 画出分布律的图形。

解：  $X$  的所有可能取值为：  $X = 0, 1, 2$

$$P\{X = 0\} = \frac{C_{13}^3}{C_{15}^3} = \frac{22}{35} \quad P\{X = 1\} = \frac{C_{13}^2 C_2^1}{C_{15}^3} = \frac{12}{35}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_{13}^1 C_2^2}{C_{15}^3} = \frac{1}{35}$$



三、一篮球运动员的投篮命中率为 45%，以  $X$  表示他首次投中时累计已投篮的次数，写出  $X$  的分布律，并计算  $X$  取偶数的概率。

解： $X$ 的所有可能取值为： $X = 1, 2, \dots$

$A_i$ 表示第 $i$ 次投篮命中， $i = 1, 2, \dots$

则  $P(A_i) = 45\%$ ， $i = 1, 2, \dots$

且  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k$ 相互独立

$$\begin{aligned}P\{X = k\} &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1} A_k) \\&= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_{k-1})P(A_k) \\&= (55\%)^{k-1} 45\%, \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P\{X \text{取偶数}\} &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\{X = 2k\} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} [(55\%)^{2k-1} 45\%] \\
 &= \frac{11}{31}
 \end{aligned}$$



四、一大楼装有 5 个同类型的供水设备，  
调查表明在任一时刻  $t$  每个设备使用的概率  
为 0.1，问在同一时刻

$$\{X = 2\}$$

(1) 恰有 2 个设备被使用的概率是多少？

(2) 至少有 3 个设备被使用的概率是多少？  $\{X \geq 3\}$

(3) 至多有 3 个设备被使用的概率是多少？  $\{X \leq 3\}$

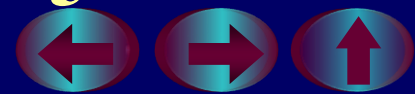
(4) 至少有一个设备被使用的概率是多少？

$$\{X \geq 1\}$$

解：  $X$  表示同一时刻供水设备被使用的个数

则  $X \sim (5, 0.1)$

$$P\{X = k\} = C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k} \quad k = 0, 1, \dots, 5$$





$$(1) \quad P\{X = 2\} = C_5^2 (0.1)^2 (0.9)^{5-2} = 0.0729$$

$$(2) \quad P\{X \geq 3\} = P\{X = 3\} + P\{X = 4\} + P\{X = 5\} \\ = 0.00856$$

$$(3) \quad P\{X \leq 3\} = 1 - P\{X > 3\} \\ = 1 - P\{X = 4\} - P\{X = 5\} \\ = 0.99954$$

$$(4) \quad P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X < 1\} \\ = 1 - P\{X = 0\} \\ = 0.40951$$

