《概率统计》习题课(二)



一. 填空题:

1)设离散型随机变量x分布律为

$$P\{X = k\} = 5A(1/2)^{k} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$III A = \frac{1}{5}$$

解:
$$extrm{由}\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$$
 即 $\sum_{k=1}^{\infty}\left[5A(1/2)^k\right]=1$

得
$$A=\frac{1}{5}$$

一. 填空题:

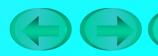
2) 已知随机变量x的密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, 0 < x < 1 \\ 0, 其它 \end{cases}, 且 P\{X > 0.5\} = 5/8, 则$$
$$a = 1 \qquad b = \frac{1}{2}$$

解:
$$\text{由} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad \text{待} \int_{0}^{1} (ax+b) dx = \frac{a}{2} + b = 1$$

$$\mathbb{Z}P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^{1}(ax+b)dx=\frac{3a}{8}+\frac{b}{2}=\frac{5}{8},$$

解得:
$$a=1$$
, $b=\frac{1}{2}$



一. 填空题:

3) 设
$$X \sim N(2,\sigma^2)$$
,且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$,则
$$P\{X < 0\} = 0.2$$

解: 由对称性得 $P\{X < 2\} = 0.5$, $P\{0 < X < 2\} = 0.3$,

所以
$$P{X<0}=P{X<2}-P{0$$

$$= 0.2$$



二、选择题:

1) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,那么当 σ 增大时, $P\{|X - \mu| < \sigma\} = \underline{C}$

A) 增大; B) 减少;

C) 不变; D) 增减不定。

解: 由 $P\{|X - \mu| < \sigma\} = P\{\frac{|X - \mu|}{\sigma} < 1\}$ = $\Phi(1) - \Phi(-1)$ = $2\Phi(1) - 1$

二、 选择题:

2)设X的密度函数为f(x),分布函数为F(x),

且f(x) = f(-x),那么对任意给定的 a 都有 B

A)
$$f(-a) = 1 - \int_0^a f(x) dx$$
;

B)
$$F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x) dx$$
;

C)
$$F(a) = F(-a)$$
; D) $F(-a) = 2F(a) - 1$

解: 由对称性得 $F(0) = P\{X \le 0\} = 0.5$,

$$F(-a) = P\{X \le -a\} = \int_{-\infty}^{-a} f(x) dx = \int_{a}^{+\infty} f(x) dx$$
$$= \frac{1}{2} - \int_{0}^{a} f(x) dx$$



3) 下列函数中,可作为某一随机变量的 分布函数是 B

A)
$$F(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$
 B) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$
C) $F(x) = \begin{cases} 0.5(1 - e^{-x}), & x > 0\\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

C)
$$F(x) = \begin{cases} 0.5(1 - e^{-x}), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

D)
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
, 其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

解: 由F(x)的性质 $0 \le F(x) \le 1$ F(x) 不减

$$F(-\infty) = 0$$
 $F(+\infty) = 1$ $F(x)$ 右连续

以及 $f(x) \ge 0$ 得 B 正确



- 1)从一批有10个合格品与3个次品的产品中一件一件地抽取产品,各种产品被抽到的可能性相同,求在二种情况下,直到取出合格品为止,所需抽取次数的分布率。
 - (1) 放回 (2) 不放回

解: (1) 放回: 设抽取次数为随机变量 X,

则X的所有可能取值为: $X = 1,2,\cdots$

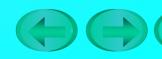
分布律为:
$$P\{X=k\} = \left(\frac{3}{13}\right)^{k-1} \frac{10}{13}$$
 $k=1,2,\cdots$



- 1) 从一批有10个合格品与3个次品的产品中一件 一件地抽取产品,各种产品被抽到的可能性相 同,求在二种情况下,直到取出合格品为止,所 需抽取次数的分布率。
 - (1) 放回 (2) 不放回
- 解: (2) 不放回: 设抽取次数为随机变量 X, 则X的所有可能取值为 X=1,2,3,4

分布律为:
$$P\{X=1\}=\frac{10}{13}$$
, $P\{X=2\}=\frac{3}{13}\frac{10}{12}$,

分布律为:
$$P\{X=1\} = \frac{10}{13}$$
, $P\{X=2\} = \frac{3}{13} \frac{10}{12}$, $P\{X=3\} = \frac{3}{13} \frac{2}{12} \frac{10}{11}$, $P\{X=4\} = \frac{3}{13} \frac{2}{12} \frac{1}{110}$



2) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = Ae^{-|x|}$ $(-\infty < x < +\infty)$, 求(1)系数A; (2) $P\{0 \le X \le 1\}$; (3) 分布函数F(x).

解:
$$(1)$$
由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx$
 $= 2\int_{0}^{+\infty} Ae^{-x}dx = 2A = 1$
得: $A = \frac{1}{2}$
 $(2) P\{0 \le X \le 1\} = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-x}dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$



2) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = Ae^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

求: (1)系数A; (2) $P{0 \le X \le 1}$; (3)分布函数F(x).

解: $(3) F(x) = P\{X \le x\}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{t} dt, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{t} dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{x} e^{-t} dt, & x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

3) 对球的直径作测量,设其值均匀地分布 在[a,b]内。求体积的密度函数。

解: (3) 直径X的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 体积 $Y = \frac{\pi}{6}X^3$ $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\frac{\pi}{6}X^3 \le y\} = P\{X \le \sqrt[3]{\frac{6y}{\pi}}\}$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{6y/\pi}}f(x)dx$$



$$F_{Y}(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{\pi}{6}a^{3} \\ \int_{a}^{\sqrt[3]{6y/\pi}} \frac{1}{b-a} dx, & \frac{\pi}{6}a^{3} \le y < \frac{\pi}{6}b^{3} \\ 1, & y \ge \frac{\pi}{6}b^{3} \end{cases}$$

$$f_{Y}(y) = F'_{Y}(y) = \begin{cases} \left(\sqrt[3]{6y}\right)' \frac{1}{b-a}, & \frac{\pi}{6}a^{3} < y < \frac{\pi}{6}b^{3} \\ 0, & \\ 4 \text{ } \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi(b-a)} \left(\frac{6y}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\pi}{6}a^{3} < y < \frac{\pi}{6}b^{3} \\ 0, & \\ 4 \text{ } \end{cases}$$
其它







4) 设在独立重复实验中,每次实验成功概率为0.5,问需要进行多少次实验,才能使至少成功一次的概率不小于0.9

解: (4) 设需要N次,由 $X \sim b(N,0.5)$

至少成功一次概率: $P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X < 1\}$

$$=1-P\{X=0\} = 1-0.5^{N} \ge 0.9$$

得 $N \ge 4$



- 5)公共汽车车门的高度是按男子与车门碰头的机会在0.01以下来设计的,设男子的身高 $X \sim N(168,7^2)$,问车门的高度应如何确定?
- 解: (5) 设门高为h, 碰头事件为 $\{X > h\}$, 由题意得 $P\{X > h\} < 0.01$, 即 $1-P\{X \le h\} < 0.01$, $\therefore 1-\Phi\left\{\frac{h-168}{7}\right\} < 0.01$, $\therefore \Phi\left\{\frac{h-168}{7}\right\} > 0.99$, $\therefore \frac{h-168}{7} > 2.326$, $\therefore h > 184.3$



四、证明题

设随即变量 X 的参数为2 的指数分布,

证明: $Y = 1 - e^{-2X}$ 在区间(0,1)上服从均匀分布。

证明: X的概率密度为
$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, &$$
 其它
$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{1 - e^{-2X} \le y\}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P\{X \ge -\frac{\ln(1-y)}{2}\}, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$



$$F_{Y}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_{-\frac{\ln(1-y)}{2}}^{+\infty} 2e^{-2x} dx, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

$$f_{Y}(y) = F'_{Y}(y) = \begin{cases} -\left(-\frac{\ln(1-y)}{2}\right)' 2e^{-2\left(-\frac{\ln(1-y)}{2}\right)}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{#$\dot{\Xi}$} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{#$\dot{\Xi}$} \end{cases}$$

