第一章　习题课

- 主要内容
- 例题选讲

一、概率的定义

概率的公理化定义 设 E 是随机试验, S 是它的样本空间, 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$, 称之为事件 A 的概率, 如果它满足下列三个条件:

(1) $P(A) \geq 0$; (非负性)

(2) $P(S) = 1$; (规范性)

(3) 对于两两互斥事件 $A_1, A_2, \ldots$, 有

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

(可列可加性)

二、概率的性质

性质1 $P(\varnothing)=0$.

性质2 设有限个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) .$$

性质 3 对于任何事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 4 设 A、B 为两事件,且 $A\supset B$,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \text{ 并且 } P(A)\geq P(B).$$

性质 5 对于任一事件 A,都有 $P(A) \leq 1$.

性质 6 设 A,B 为任意两个事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB)$$

$$- P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

三、古典概型

若随机试验满足下述两个条件：
(1) 它的样本空间只有有限多个样本点；
(2) 每个样本点出现的可能性相同.

称这种试验为等可能随机试验或古典概型.

古典概型中事件A的概率的计算公式：

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中的基本事件总数}}$$

四、条件概率

1. 条件概率的定义

设A、B是两个事件，且$P(B) > 0$，则称

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下,事件A的条件概率.

2. 条件概率的计算

1) 用定义计算:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B)>0$$

2)从加入条件后改变了的情况去算

五、 乘法公式

若 $P(B) > 0$, 则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$

若 $P(A) > 0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$

六、 全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0\ (i = 1,2,\ldots,n)$，则对样本空间中的任一事件 A，恒有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)$$

七、 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S， $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为样本空间的一个划分，B 为 S 中的任一事件，且 $P(B) > 0$，则有

$$P(A_i \mid B) = P(A_i)P(B \mid A_i) \Big/ \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)$$

$$i = 1,2,\cdots,n$$

例1 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以A、B、C分别表示甲、乙、丙命中目标，试用A、B、C的运算关系表示下列事件：

A_1:“至少有一人命中目标”: $A\cup B\cup C$

A_2:“恰有一人命中目标”: $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

A_3:“恰有两人命中目标”: $AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C$

A_4:“最多有一人命中目标”: $\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}$

A_5:“三人均命中目标”: ABC

A_6:“三人均未命中目标”: $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

例2: 有三个子女的家庭, 设每个孩子是男是女的概率相等, 则至少有一个男孩的概率是多少?

解: 设A表示“至少有一个男孩”, 以H 表示某个孩子是男孩 , T 表示某个孩子是女孩

$$N(S)=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,TTH,THT,TTT\}$$

$$N(A)=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,TTH,THT\}$$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{7}{8}$$

例3 （摸球问题） 设合中有3个白球，2个红球，现从合中任抽2个球，求取到一红一白的概率。

解:设A表示“取到一红一白”

$$N(S)=C_5^2 \qquad N(A)=C_3^1C_2^1$$

$$\therefore \qquad P(A)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

一般地，设合中有N个球，其中有M个白球，现从中任抽n个球，则这n个球中恰有k个白球的概率是

$$p=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

例4（分球问题）将3个球随机的放入3个盒子中去，问：（1）每盒恰有一球的概率是多少？（2）空一盒的概率是多少？

解 设 A:每盒恰有一球,B:空一盒

$$N(S)=3^3 \qquad N(A)=3! \quad P(A)=\frac{2}{9}$$

$$P(B)=1-P\{\text{空两合}\}-P\{\text{全有球}\}$$

$$=1-\frac{3}{3^3}-\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$$

一般地，把 n 个球随机地分配到 m 个盒子中去（$n \le m$），则每盒至多有一球的概率是：

$$p = \frac{P_m^n}{m^n}$$

例5 （分组问题） 30名学生中有3名运动员，将这30名学生平均分成3组，求：（1）每组有一名运动员的概率；（2）3名运动员集中在一个组的概率。

解 设A:每组有一名运动员;B: 3名运动员集中在一组

$$N(S)=C_{30}^{10}C_{20}^{10}C_{10}^{10}=\frac{30!}{10!\ 10!\ 10!}$$

$$P(A)=\frac{3!\dfrac{27!}{9!\ 9!\ 9!}}{N(S)}=\frac{50}{203} \qquad P(B)=\frac{3\times C_{27}^{7}C_{20}^{10}C_{10}^{10}}{N(S)}$$

一般地，把n个球随机地分成 m 组（$n > m$），要求第 i 组恰有n_i个球（$i = 1, \cdots m$），共有分法：

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}$$

例6（随机取数问题）从1到200这200个自然数中任取一个；(1)求取到的数能被6整除的概率；(2)求取到的数能被8整除的概率；(3)求取到的数既能被6整除也能被8整除的概率.

解:$N(S)=200$, $N(1)=[200/6]=33$,

$N(2)=[200/8]=25$ $N(3)=[200/24]=8$

(1),(2),(3)的概率分别为:33/200,1/8,1/25

例7 某市有甲, 乙, 丙三种报纸, 订每种报纸的人数分别占全体市民人数的30%, 其中有10%的人同时定甲, 乙两种报纸. 没有人同时订甲乙或乙丙报纸. 求从该市任选一人, 他至少订有一种报纸的概率.

解 设A , B , C分别表示选到的人订了甲 , 乙 , 丙报

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$
$$= 30\% \times 3 - 10\% - 0 - 0 + 0 = 80\%$$

例8 在1~10这10个自然数中任取一数，求

（1）取到的数能被2或3整除的概率，

（2）取到的数即不能被2也不能被3整除的概率，

（3）取到的数能被2整除而不能被3整除的概率。

解 设 A—取到的数能被2整除;

B—取到的数能被3整除.

故 $P(A)=\dfrac{1}{2}$ $P(B)=\dfrac{3}{10}$ $P(AB)=\dfrac{1}{10}$

$$(1)P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{7}{10}$$

$$(2)P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=\frac{3}{10}$$

$$(3)P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{2}{5}$$

例9 盒中有3个红球，2个白球，每次从袋中任取一只，观察其颜色后放回，并再放入一只与所取之球颜色相同的球，若从合中连续取球4次, 试求第1、2次取得白球、第3、4次取得红球的概率。

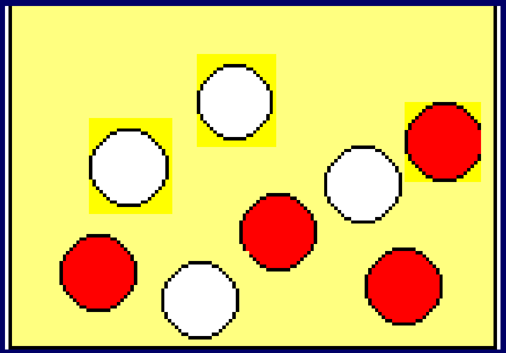
解　设A_i为第 i 次取球时取到白球，则

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)P(\overline{A}_4\mid A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$P(A_1)=\frac{2}{5}$$

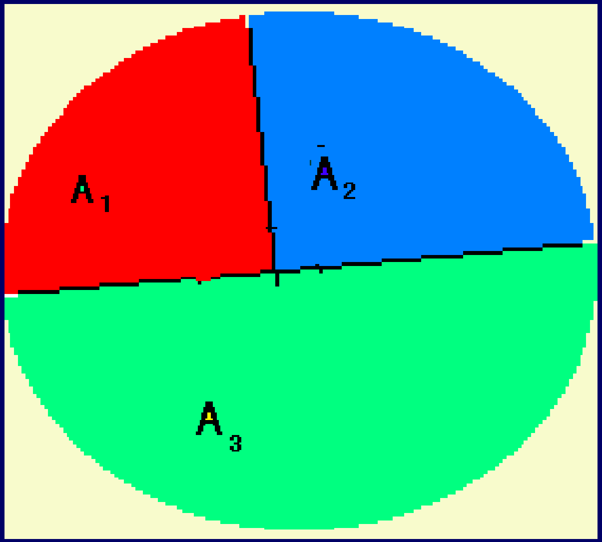
$$P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)=\frac{3}{7}$$

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{3}{6}$$



$$P(\overline{A}_4\mid A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{4}{8}$$

例10 市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品，已知三家工厂的市场占有率分别为1/4、1/4、1/2，且三家工厂的次品率分别为 2%、1%、3%，试求市场上该品牌产品的次品率。



设： B： 买到一件次品

A_1 : 买到一件甲厂的产品

A_2 : 买到一件乙厂的产品

A_3 : 买到一件丙厂的产品

$$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)$$

$$=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$

$$=0.02\times\frac{1}{4}+0.01\times\frac{1}{4}+0.03\times\frac{1}{2}\approx 0.0225$$

例11 商店论箱出售玻璃杯,每箱20只,其中每箱含0,1,2只次品的概率分别为0.8,0.1,0.1,某顾客选中一箱,从中任选4只检查,结果都是好的,便买下了这一箱.问这一箱含有一个次品的概率是多少?

解 设A:从一箱中任取4只检查,结果都是好的.

B_0,B_1,B_2分别表示事件每箱含0,1,2只次品

已知: $P(B_0)=0.8$, $P(B_1)=0.1$, $P(B_2)=0.1$

$$P(A|B_0)=1 \quad P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5} \quad P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

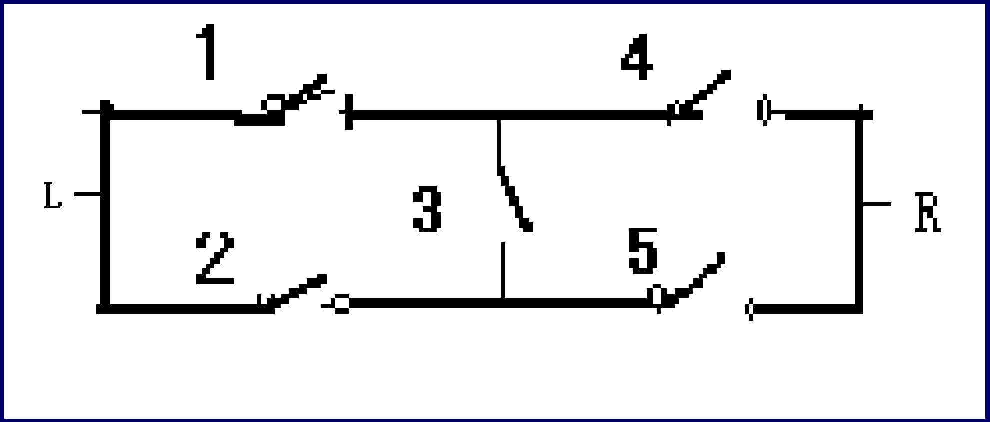
由***Bayes*** 公式:

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)}$$

$$=\frac{0.1\times 4/5}{0.8\times 1+0.1\times 4/5+0.1\times 12/19}\approx 0.0848$$

例12 在可靠性理论上的应用

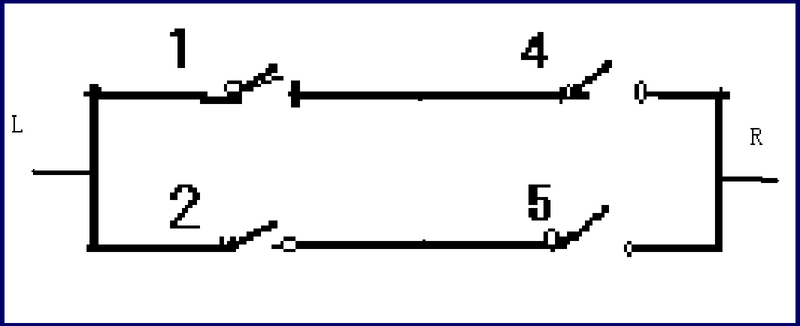
如图，1、2、3、4、5表示继电器触点, 假设每个触点闭合的概率为 p, 且各继电器接点闭合与否相互独立，求 L 至 R 是通路的概率。



设 A 表示“L 至 R 为通路”，

A_i 表示“第 i 个继电器通”，i =1, 2, …5.

$$P(A|\overline{A}_3)=P(A_1A_4\cup A_2A_5)=2p^2-p^4$$



$$P(A|A_3)=P\{(A_1\cup A_2)(A_4\cup A_5)\}$$

$$P(A|A_3)=P(A_1\cup A_2)P(A_4\cup A_5)=(2p-p^2)^2$$

由全概率公式

$$P(A)=P(A|\overline{A}_3)P(\overline{A}_3)+P(A|A_3)P(A_3)$$

$$=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$$