(第 14 讲)

§4 根轨迹法

§4.1 根轨迹法的基本概念

§4.2 绘制根轨迹的基本法则

§4.3 广义根轨迹

§4.4 利用根轨迹分析系统性能

课程回顾（1）

- **根轨迹：** 系统中某一参数由 0 → ∞ 变化时，闭环极点在 s 平面相应变化所描绘出来的轨迹
- **闭环极点** 与开环零点、开环极点及 K^* 均有关
- **闭环零点** = 前向通道零点 + 反馈通道极点
- **根轨迹方程**
  - 模值条件：$$\left|G(s)H(s)\right| = \frac{K^*\left|s-z_1\right|\cdots\left|s-z_m\right|}{\left|s-p_1\right|\cdots\left|s-p_n\right|} = 1$$
  - 相角条件：$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i - \sum_{j=1}^{n}\angle s-p_j = (2k+1)\pi$$
- **K与K^*的关系** $$K = \frac{K^*\prod_{i=1}^{m}\left|-z_i\right|}{\prod_{j=1}^{n}\left|-p_j\right|}$$

课程回顾（2）

法则1 **根轨迹的起点和终点：**

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点；当开环极点个数n大于开环零点个数m时，有 n-m 条根轨迹分支趋向于无穷远处。

法则2 **根轨迹的分支数，对称性和连续性：**

根轨迹的分支数 = 系统阶数；根轨迹连续且对称于实轴。

法则3 **实轴上的根轨迹：**

从实轴上最右端的开环零点或极点向左算起，奇数开环零、极点到偶数开环零、极点之间的区域必是根轨迹。

法则4 **根之和：**

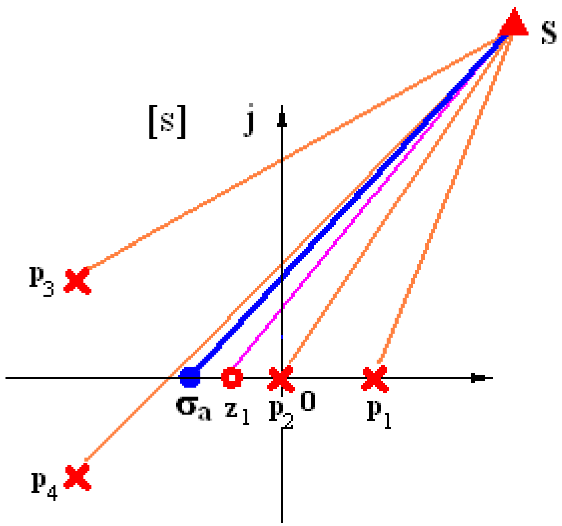
$n-m \geq 2$时，闭环根之和为常数。

定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。

§4.2 绘制根轨迹的基本法则 (7)

法则5 **渐近线：**

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{j=1}^{m} z_i}{n-m} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} \end{cases}$$



n > m时，n-m条根轨迹趋于无穷远处的规律。

证明: (1)

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod\limits_{i}^{m}(s-z_i)} = -K^* = (s-\sigma_a)^{n-m} \quad \text{根轨迹方程}$$

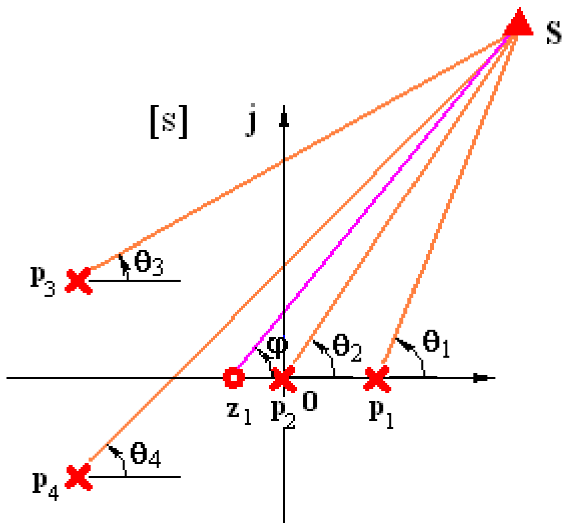
$$= s^{n-m} - \sigma_a(n-m)s^{n-m-1} + \cdots$$

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod\limits_{i}^{m}(s-z_i)} = \frac{s^n - (\sum\limits_{j=1}^{n} p_j)s^{n-1} + \cdots}{s^m - (\sum\limits_{i=1}^{m} z_i)s^{m-1} + \cdots} = s^{n-m} - (\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i)s^{n-m-1} + \cdots$$

§4.2 绘制根轨迹的基本法则（8）

法则5 **渐近线：**

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{j=1}^{m} z_i}{n-m} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} \end{cases}$$



n > m时，n-m条根轨迹趋于无穷远处的规律。

证明: (2) 由相角条件

$$\sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s-p_j) = -(2k+1)\pi$$

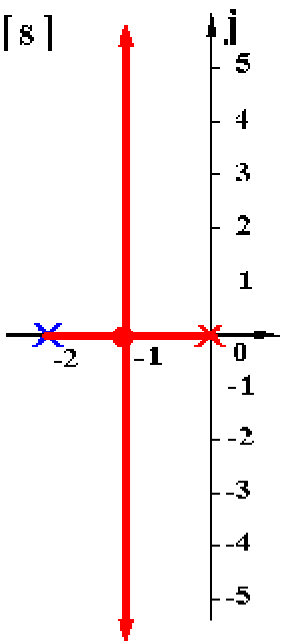
$$= m\varphi_a - n\varphi_a = (m-n)\varphi_a$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

§4.2 绘制根轨迹的基本法则（9）

法则5 渐近线：
$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{j=1}^{m} z_i}{n-m} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} \end{cases}$$

n > m时，n-m条根轨迹趋于无穷远处的规律。



例1 系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+2)}$，试绘制根轨迹。

解. ① 实轴上的根轨迹：[−2，0]

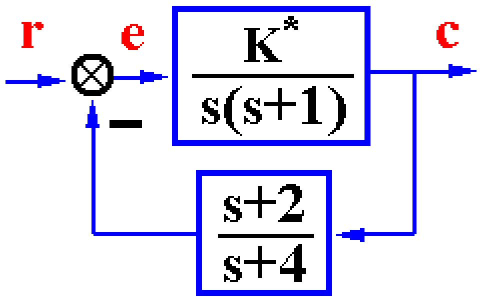
② 渐近线：
$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{j=1}^{m} z_i}{n-m} = \dfrac{-2+0}{2-0} = -1 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

§4.2 绘制根轨迹的基本法则（10）

例2 系统结构图如图所示。

（1）绘制当$K^*=0\to\infty$时系统的根轨迹；

（2）当$\mathrm{Re}[\lambda_1]=-1$ 时，$\lambda_3=?$

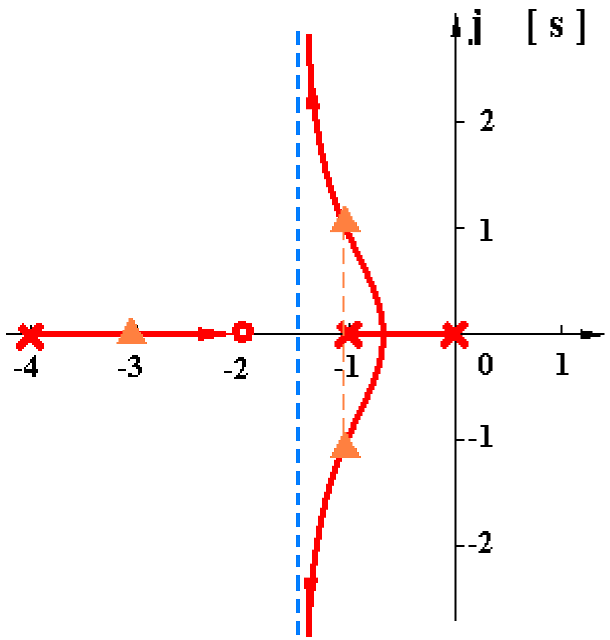


解. (1) $$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \qquad \begin{cases} K=K^*/2 \\ v=1 \end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹：$[-4,-2]$，$[-1,0]$

② 渐近线：$$\begin{cases} \sigma_a=\dfrac{0-1-4+2}{3-1}=-\dfrac{3}{2} \\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3-1}=\pm 90^\circ \end{cases}$$

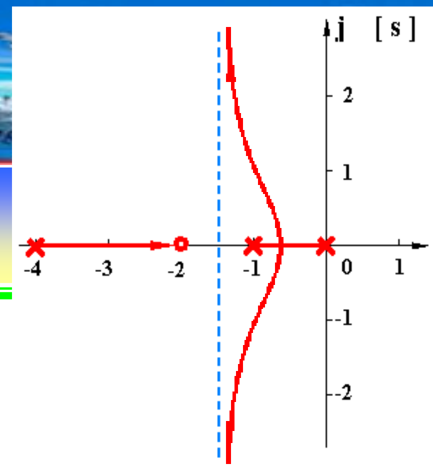
用根之和法则分析绘制根轨迹：



(2) $$a_{n-1}=0-1-4=-5=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2(-1)+\lambda_3$$

$$\lambda_3=-5+2=-3$$

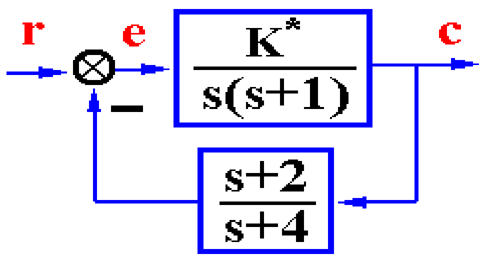
§ 4.2 绘制根轨迹的基本法则 (11)



法则6 分离点 d： $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$ （对应重根）

说明：$D(s)=\underline{s(s+1)(s+4)}+\underline{K^*(s+2)}\overset{s=d}{=}(s-\lambda_3)(s-d)^2=0$

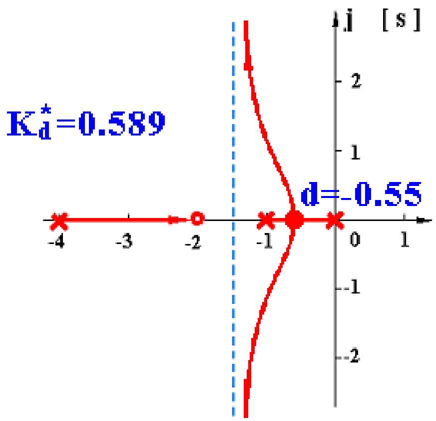
$$\frac{dD(s)}{ds}=\underline{\frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+4)\right]}+\underline{K^*\frac{d}{ds}(s+2)}\overset{s=d}{=}(s-d)^2+2(s-d)(s-\lambda_3)=0$$



$$\frac{\frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+4)\right]}{s(s+1)(s+4)}\overset{s=d}{=}\frac{-K^*\frac{d}{ds}(s+2)}{-K^*(s+2)}=\frac{\frac{d}{ds}(s+2)}{s+2}$$

$$\frac{d}{ds}\ln\left[s(s+1)(s+4)\right]\overset{s=d}{=}\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$

$$\frac{d}{ds}\left[\ln s+\ln(s+1)+\ln(s+4)\right]\overset{s=d}{=}\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$



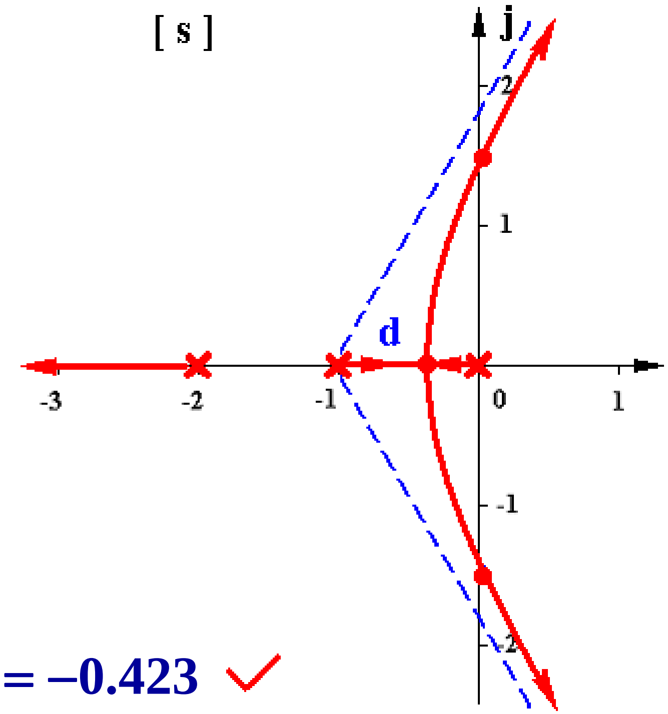
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+4}=\frac{1}{d+2}$$

（无零点时右端为0）

§ 4.2 绘制根轨迹的基本法则（12）

例3 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$，绘制根轨迹。

解. $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ $\qquad \begin{cases} K=K^*/2 \\ v=1 \end{cases}$



① 实轴上的根轨迹：$(-\infty,-2]$，$[-1,0]$

② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a=\dfrac{0-1-2}{3}=-1 \\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60°, 180° \end{cases}$

③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+2}=0$

整理得：$3d^2+6d+2=0$ 解根：$\begin{cases} d_1=-0.423 \ ✓ \\ d_2=-1.577 \ ✗ \end{cases}$

$K_d^*=|d||d+1||d+2| \overset{d=-0.423}{=} 0.385$

④ 与虚轴交点：?

§4.2 绘制根轨迹的基本法则（13）

法则7　与虚轴交点：
- 1）系统临界稳定点
- 2）s = jω 是根的点

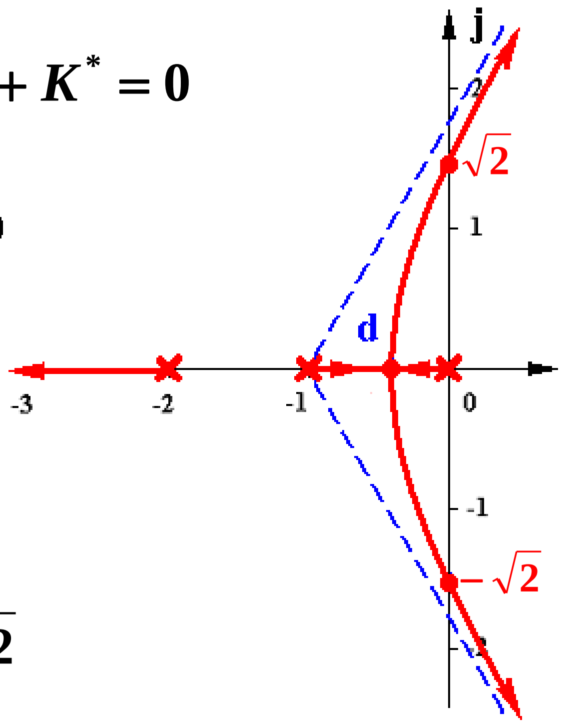
稳定范围：0<K<3

[接例3]　$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

$$D(s)=s(s+1)(s+2)+K^*=s^3+3s^2+2s+K^*=0$$

解法I：Routh：

s^3	1	2		
s^2	3	K^*	⇒ 令 $K^*=6$	$\begin{cases}3s^2+6=0\\ s=\pm j\sqrt{2}\end{cases}$
s^1	$\frac{6-K^*}{3}$		⇒ $K^*<6$	
s^0	K^*		⇒ $K^*>0$	



解法II：$D(j\omega)=-j\omega^3-3\omega^2+j2\omega+K^*=0$

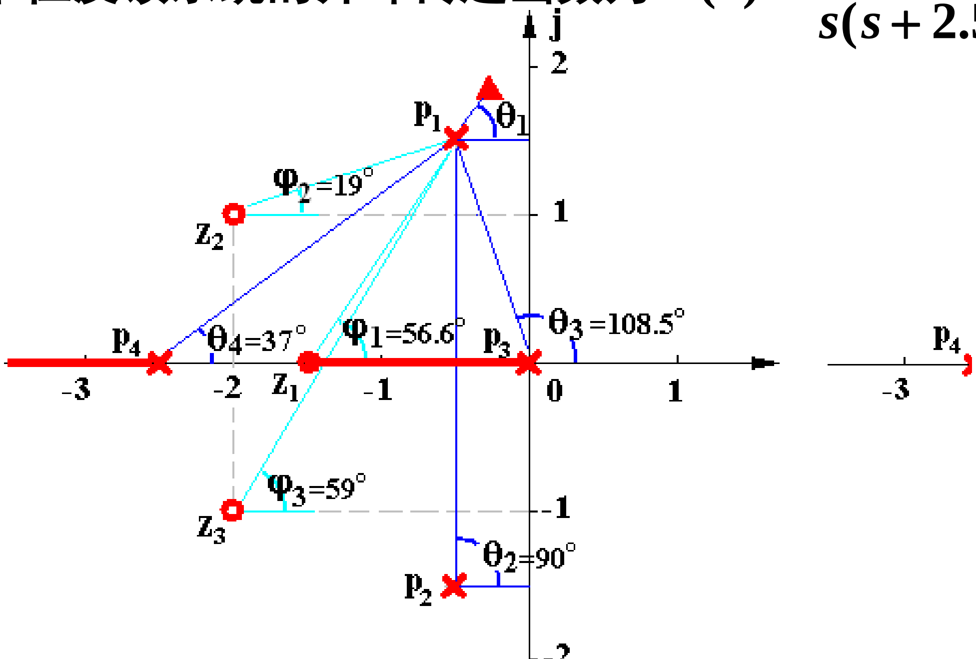
$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-3\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+2\omega=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\ K^*=6\end{cases}$$

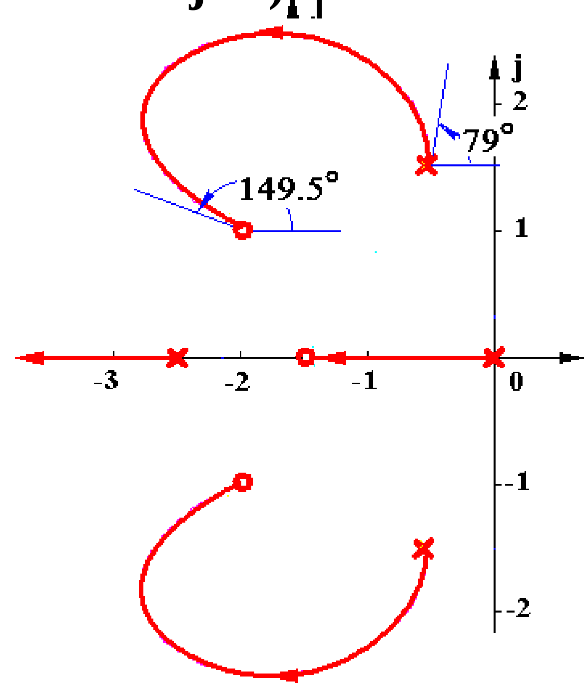
§4.2 绘制根轨迹的基本法则（14）

法则8 出射角/入射角（起始角/终止角）

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi$$

例4 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1.5)(s+2\pm j)}{s(s+2.5)(s+0.5\pm j1.5)}$，绘制根轨迹。





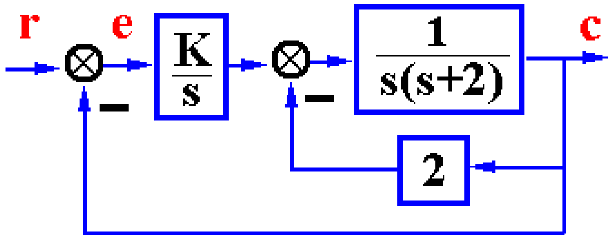
$$56.5^\circ+19^\circ+59^\circ-[\theta_1+90^\circ+108.5^\circ+37^\circ]=-1$$

$$[117^\circ+\varphi_2+90^\circ]-[199^\circ+121^\circ+153^\circ+63.5]=-180^\circ$$

$$\varphi_2=149.5^\circ$$

§ 4.2 绘制根轨迹的基本法则 (15)

例5 已知系统结构图，绘制根轨迹。



解. $G(s)=\dfrac{K}{s}\,\dfrac{\dfrac{1}{s(s+2)}}{1+\dfrac{2}{s(s+2)}}=\dfrac{K}{s[s^2+2s+2]}$ $\quad\begin{cases}K_k=K/2\\ v=1\end{cases}$

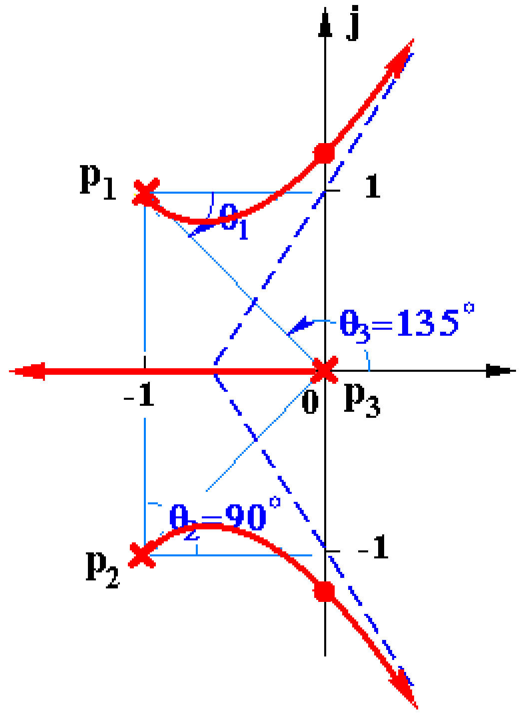
① 实轴上的根轨迹 $(-\infty, 0]$

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0-1-1}{3}=-\dfrac{2}{3}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60°, 180°\end{cases}$

③ 出射角： $0-[\theta_1+90°+135°]=-180° \Rightarrow \theta_1=-45°$

④ 与虚轴交点： $D(s)=s^3+2s^2+2s+K=0$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\left[D(j\omega)\right]=-2\omega^2+K=0\\ \mathrm{Im}\left[D(j\omega)\right]=-\omega^3+2\omega=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\ K=4\end{cases}$$



§4.2 绘制根轨迹的基本法则 (16)

例6 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$，绘制根轨迹。

解. $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm j4)}$ $\begin{cases} K=K^*/400 \\ v=1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：[-20, 0]

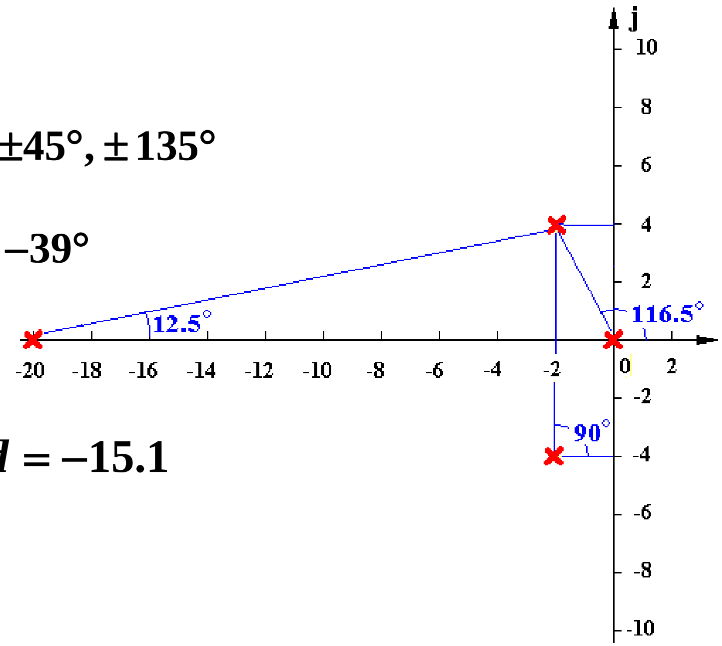
② 渐近线： $\sigma_a=\dfrac{0-20-2-2}{4}=-6$ $\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{4}=\pm45°,\pm135°$

③ 出射角： $-[\theta_1+90°+116.5°+12.5°]=-180° \quad \Rightarrow \theta_1=-39°$

③ 分离点： $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+20}+\dfrac{1}{d+2+j4}+\dfrac{1}{d+2-j4}=0$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+20}+\frac{2(d+2)}{(d+2)^2+4^2}=0$$ 试根得： $d=-15.1$

$$K_d^*=|d||d+20||(d+2)^2+4^2|\overset{d=-15.1}{=}13881$$



④ 虚轴交点：$D(s)=s^4+24s^3+100s^2+400s+K^*=0$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-100\omega^2+K^*=0 \\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-24\omega^3+400\omega=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega=\sqrt{400/24}=4.1 \\ K^*=1389 \end{cases}$$

§ 4.2 绘制根轨迹的基本法则 (17)

例6 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm j4)}$

$$\begin{cases} K = K^*/400 \\ v=1 \end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹：[-20, 0]

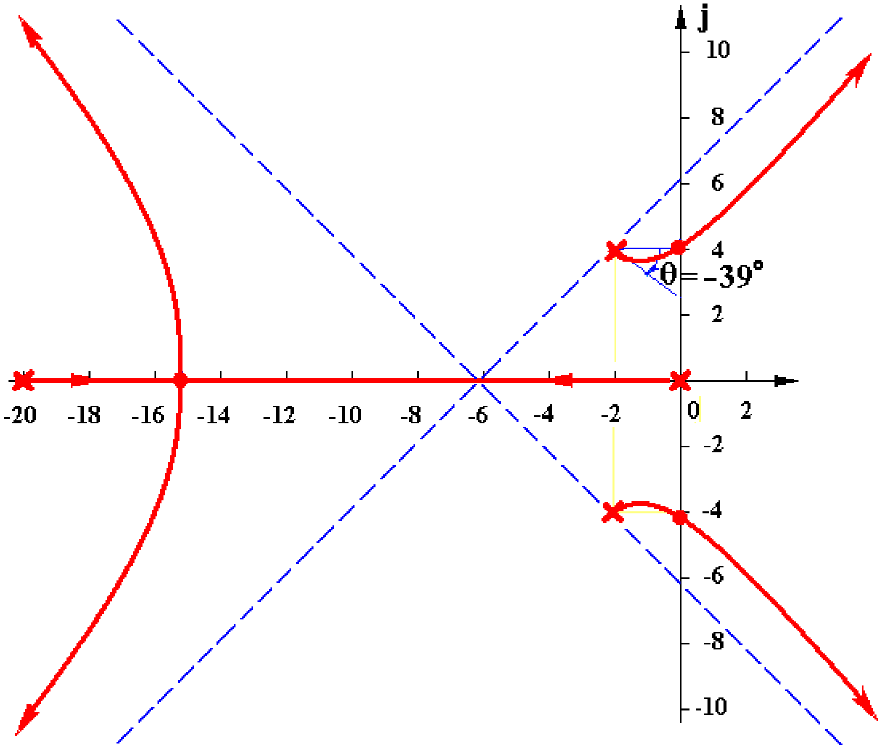
② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = -6 \\ \varphi_a = \pm 45°, \pm 135° \end{cases}$

③ 出射角： $\theta = -39°$

③ 分离点： $d = -15.1$

$K_d^* = 13881$

④ 虚轴交点：$\begin{cases} \omega = 4.1 \\ K^* = 1389 \end{cases}$

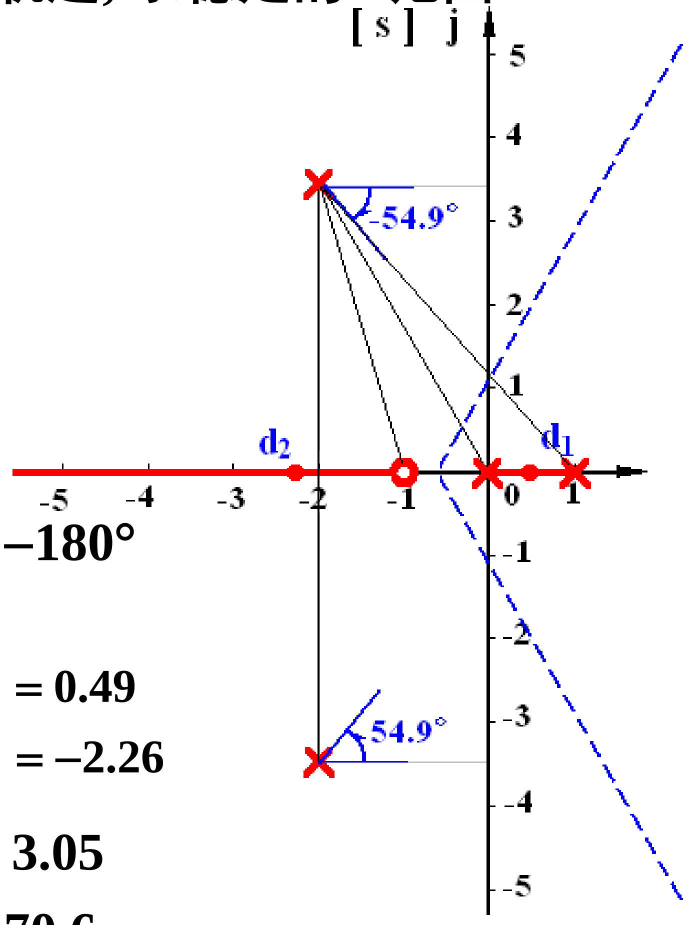


稳定的开环增益范围：$0 < K < 3.4725$

基于根轨迹的系统设计工具—RLTool

§ 4.2 绘制根轨迹的基本法则 (18)

例6 已知 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$，绘根轨迹; 求稳定的K范围。



解. $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s+2\pm j2\sqrt{3})}$ $\quad\begin{cases}K=K^*/16\\ v=1\end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：(-∞,-1], [0, 1]

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=(1-4+1)/3=-2/3\\ \varphi_a=(2k+1)\pi/3=\pm 60°,\ 180°\end{cases}$

③ 出射角：$106.1°-[\theta_1+90°+120°+130.9°]=-180°$

$\Rightarrow\ \theta_1=-54.9°$

④ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d-1}+\dfrac{2(d+2)}{d^2+4d+16}=\dfrac{1}{d+1}$ $\quad\begin{cases}d_1=0.49\\ d_2=-2.26\end{cases}$

$$K^*_{d_{1,2}}=\frac{|d||d-1||d^2+4d+16|}{|d+1|}\ \overset{d=0.49}{\underset{d=-2.26}{=}}\ \begin{cases}3.05\\ 70.6\end{cases}$$

§ 4.2 绘制根轨迹的基本法则 (19)

例6 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$ $\begin{cases} K=K^*/16 \\ v=1 \end{cases}$

⑤ 虚轴交点：

$$D(s)=s^4+3s^3+12s^2+(K^*-16)s+K^*=0$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-12\omega^2+K^*=0 \\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-3\omega^3+(K^*-16)\omega=0 \end{cases}$$

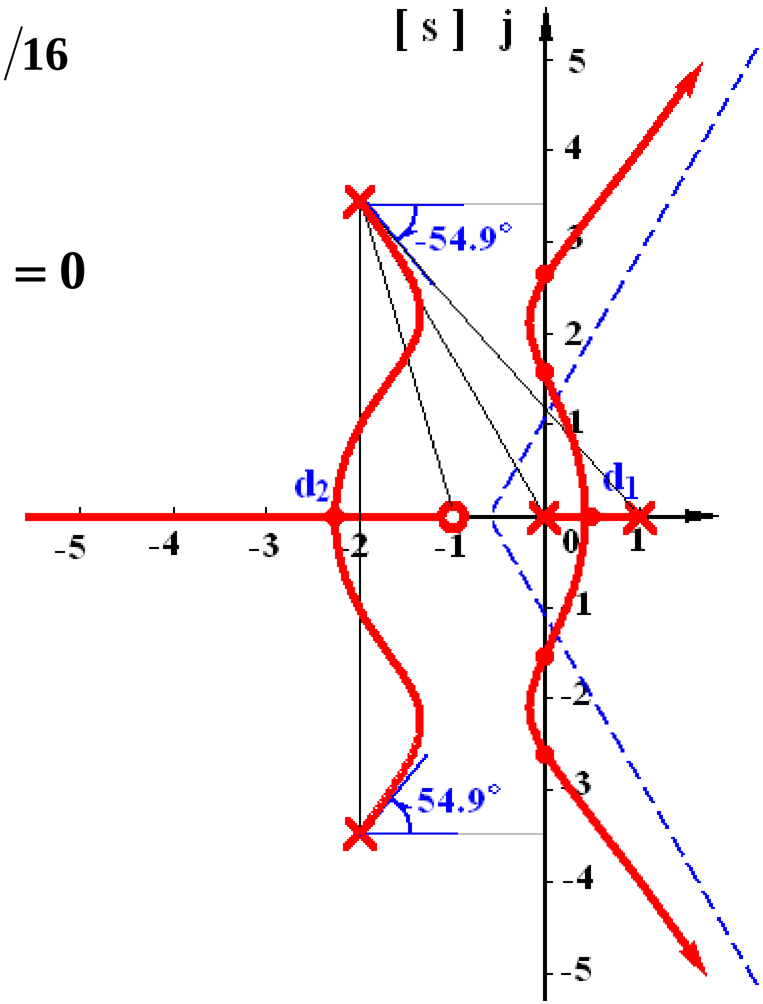
$$K^*=3\omega^2+16$$

$$\omega^4-9\omega^2+16=0$$

$$\begin{cases} \omega_1=1.56 \\ \omega_2=2.56 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1^*=19.7 \\ K_2^*=35.7 \end{cases}$$

稳定的 K^*范围： $19.7<K^*<35.7$

稳定的 K范围： $1.234<K=\dfrac{K^*}{16}<2.23$



零点靠近极点时的情况(例3)

绘制根轨迹法则小结

法则 1　根轨迹的起点和终点

法则 2　根轨迹的分支数，对称性和连续性

法则 3　实轴上的根轨迹

法则 4　根之和　$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = C \qquad (n-m\geq 2)$

法则 5　渐近线　$\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i - \sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m} \qquad \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$

法则 6　分离点　$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_j}$

法则 7　与虚轴交点　$\mathrm{Re}[D(j\omega)] = \mathrm{Im}[D(j\omega)] = 0$

法则 8　出射角/入射角　$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) = (2k+1)\pi$