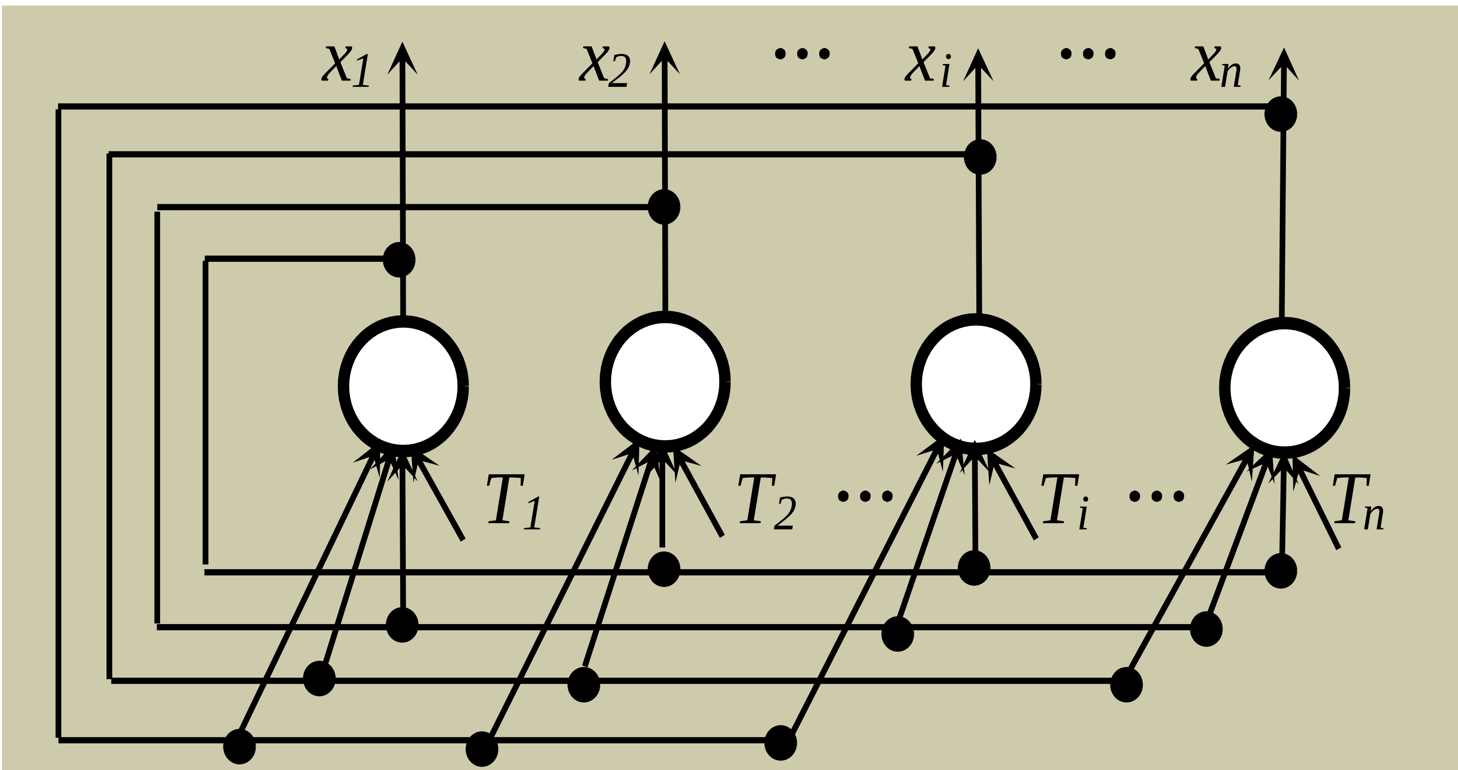
第4章 经典人工神经网络

反馈神经网络

1982年美国加州理工Hopfield教授提出的：DHNN、CHNN。



该网络不用训练，权值、阈值是设计出来的，只有x变化。

反馈神经网络

1、网络的状态

DHNN网中的每个神经元都有相同的功能，其输出称为状态，用 x_j 表示。所有神经元状态的集合就构成反馈网络的状态

$X=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T$ 输入输出合二为一，同一符号表示。

反馈网络的输入就是网络的状态初始值，表示为

$X(0)=[x_1(0),x_2(0),\ldots,x_n(0)]^T$ ⟶ 激发作用

反馈网络在外界输入激发下，从初始状态进入动态演变过程，变化规律为

$$x_j = f(net_j) \qquad j=1,2,\ldots,n$$

反馈神经网络

1、网络的状态

DHNN网的转移函数常采用符号函数

$$f=\operatorname{sgn}(net_j)=\begin{cases}1 & net_j\ge 0\\ -1 & net_j<0\end{cases}\qquad j=1,2,\ldots,n$$

$$net_j=\sum_{i=1}^{n}(w_{ij}x_i)-T_j\qquad j=1,2,\ldots,n$$

对于DHNN网，一般有$w_{ii}=0$，$w_{ij}=w_{ji}$。（n阶方阵，主对角线为0，无自反馈）

反馈网络稳定时每个神经元的状态都不再改变，此时的稳定状态就是网络的输出，表示为

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{X}(t)$$

反馈神经网络

2、网络的异步工作方式

网络运行时每次只有一个神经元 j 进行状态的调整计算，其它神经元的状态均保持不变，即

$$x_j(t+1)=\begin{cases}\operatorname{sgn}[net_j(t)] & j=i\\ x_j(t) & j\neq i\end{cases}$$

3、网络的同步工作方式

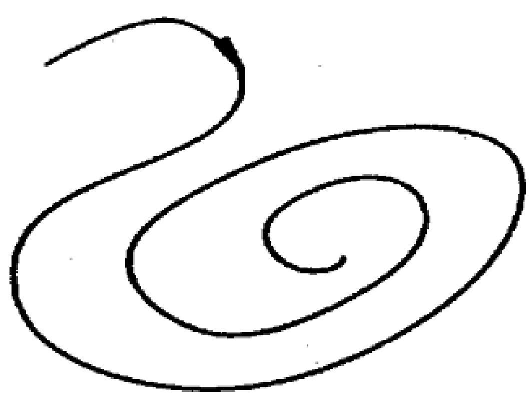
网络的同步工作方式是一种并行方式，所有神经元同时调整状态，即

$$x_j(t+1)=\operatorname{sgn}[net_j(t)] \qquad j=1,2,\ldots,n$$

4、网络的稳定性

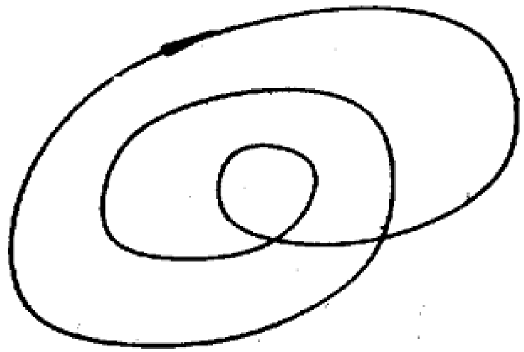
DHNN网实质上是一个离散的非线性动力学系统。网络从初态**X(0)**开始，若能经有限次递归后，其状态不再发生变化，即**X(t+1)＝X(t)**，则称该网络是稳定的。

如果网络是稳定的，它可以从任一初态收敛到一个稳态：

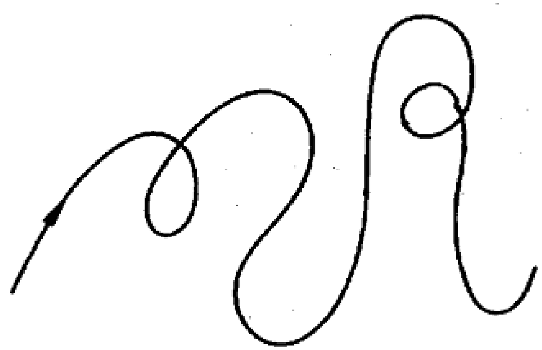


反馈神经网络

若网络是不稳定的，由于DHNN网每个节点的状态只有1和-1两种情况，网络不可能出现无限发散的情况，而只可能出现限幅的自持振荡，这种网络称为有限环网络。



如果网络状态的轨迹在某个确定的范围内变迁，但既不重复也不停止，状态变化为无穷多个，轨迹也不发散到无穷远，这种现象称为混沌。



实际上DHNN不会出现混沌

反馈神经网络

5、网络吸引子

网络达到稳定时的状态X，称为网络的吸引子。

DHNN有何用？　　优化计算与联想记忆

如何把问题的解编码为网络的吸引子，从初态向吸引子演变的过程便是求解计算的过程。

若把需记忆的样本信息存储于网络不同的吸引子，当输入含有部分记忆信息的样本时，网络的演变过程便是从部分信息寻找全部信息，即联想回忆的过程。[例：多年不见老朋友]

定义：　若网络的状态X满足

$$X=f(WX-T)$$

则称X为网络的吸引子。

反馈神经网络

定理：对于**DHNN** 网，若按异步方式调整网络状态，且连接权矩阵**W** 为对称阵，则对于任意初态，网络都最终收敛到一个吸引子。

证明：定义网络的能量函数为：

$$E(t)=-\frac{1}{2}X^T(t)WX(t)+X^T(t)T$$

令网络的能量改变量为ΔE，状态改变量为ΔX，有

$$\Delta E(t)=E(t+1)-E(t)$$

$$\Delta X(t)=X(t+1)-X(t)$$

定理：对于**DHNN**网，若按同步方式调整状态，且连接权矩阵**W**为非负定对称阵，则对于任意初态，网络都最终收敛到一个吸引子。

反馈神经网络

$$
\begin{aligned}
\Delta E(t) &= E(t+1) - E(t) \\
&= -\frac{1}{2}[X(t)+\Delta X(t)]^T W[X(t)+\Delta X(t)] + [X(t)+\Delta X(t)]^T T \\
&\quad -[-\frac{1}{2}X^T(t)WX(t) + X^T(t)T] \\
&= -\Delta X^T(t)WX(t) - \tfrac{1}{2}\Delta X^T(t)W\Delta X(t) + \Delta X^T(t)T \\
&= -\Delta X^T(t)[WX(t)-T] - \tfrac{1}{2}\Delta X^T(t)W\Delta X(t)
\end{aligned}
$$

将$\Delta \boldsymbol{X}(t) = [0,\ldots,0,\Delta x_j(t),0,\ldots,0]^T$代入上式，并考虑到W为对称矩阵，有

$$
\begin{aligned}
\Delta E(t) &= -\Delta x_j(t)[\sum_{i=1}^{n}(w_{ij}x_i) - T_j] - \tfrac{1}{2}\Delta x_j^{\,2}(t) w_{jj} \\
&= -\Delta x_j(t) net_j(t)
\end{aligned}
$$

反馈神经网络

上式中可能出现的情况：

情况①：$x_j(t)=-1$ ， $x_j(t+1)=1$ ， $\Delta x_j(t)=2$,

$net_j(t)\geq 0$ ， $\Delta E(t)\leq 0$

情况②：$x_j(t)=1$ ， $x_j(t+1)=-1$ ， $\Delta x_j(t)=-2$,

$net_j(t)<0$ ， $\Delta E(t)<0$

情况③：$x_j(t)=x_j(t+1)$ ， $\Delta x_j(t)=0$,

$\Delta E(t)=0$

由此可知在任何情况下均有$\mathbf{\Delta E(t)\leqq 0}$ ，最终$\Delta E(t)=0$，状态不再改变，最终收敛到一个吸引子。

反馈神经网络

6、吸引子性质

性质1：若X是网络的一个吸引子，且阈值T=0，在sgn(0)处，$x_j(t+1)=x_j(t)$，则 $-X$ 也一定是该网络的吸引子。

证明：∵X 是吸引子，即X= f (WX)，从而有

$$f\,[W(-X)]=f\,[-WX]=-f\,[WX]=-X$$

∴$-$X 也是该网络的吸引子。

反馈神经网络

性质2：若X^a是网络的一个吸引子，则与X^a的海明距离 **dH(X^a，X^b)=1** 的X^b一定不是吸引子。

证明：不妨设$x_1^a \neq x_1^b$，$x_j^a = x_j^b$，j=2,3,…,n。

$\because$ $w_{11}=0$，由吸引子定义，有

$$x_1^a = f\left(\sum_{i=2}^{n} w_{ii} x_i^a - T_1\right) = f\left(\sum_{i=2}^{n} w_{ii} x_i^b - T_1\right)$$

由假设条件知，$x_1^a \neq x_1^b$，故

$$x_1^b \neq f\left(\sum_{i=2}^{n} w_{ii} x_i^b - T_1\right)$$

$\therefore$ X^b不是吸引子（注：公式中w_{ii}为w_{i1}）

反馈神经网络

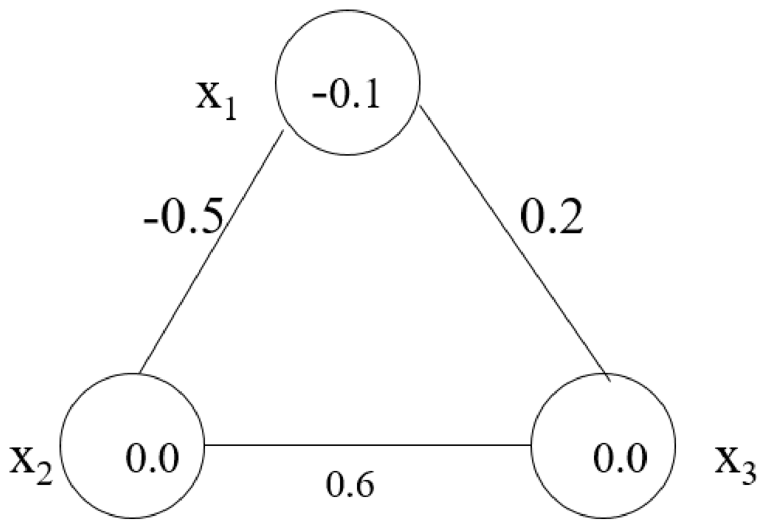
能使网络稳定在同一吸引子的所有初态的集合，称为该吸引子的吸引域。

定义：若 X^a 是吸引子，对于异步方式，若存在一个调整次序，使网络可以从状态 X 演变到 X^a，则称 X 弱吸引到 X^a；若对于任意调整次序，网络都可以从状态 X 演变到 X^a，则称 X 强吸引到 X^a。

定义：若对某些 X，有 X 弱吸引到吸引子 X^a，则称这些 X 的集合为 X^a 的弱吸引域；若对某些 X，有 X 强吸引到吸引子 X^a，则称这些 X 的集合为 X^a 的强吸引域。

反馈神经网络

例：设有3节点DHNN网，用无向图表示如下，权值与阈值均已标在图中，试计算网络演变过程的状态。



反馈神经网络

解：设各节点状态取值为1 或0 ，3 节点DHNN 网络应有2^3=8种状态。不妨将$X=(x_1,x_2,x_3)^T=(0,0,0)^T$作为网络初态，按1→2→3的次序更新状态。

第1步：更新x_1，

x_1=sgn[(-0.5)×0+0.2×0－(-0.1)]

=sgn(0.1)=1

其它节点状态不变，网络状态由$(0,0,0)^T$变成$(1,0,0)^T$。如果先更新 x_2 或 x_3，网络状态将仍为$(0,0,0)^T$，因此初态保持不变的概率为2/3，而变为$(1,0,0)^T$的概率为1/3。

反馈神经网络

第2步：此时网络状态为$(1,0,0)^T$，更新x_2后，得

$$x_2=\text{sgn}[(-0.5)\times 1+0.6\times 0-0]=\text{sgn}(-0.5)=0$$

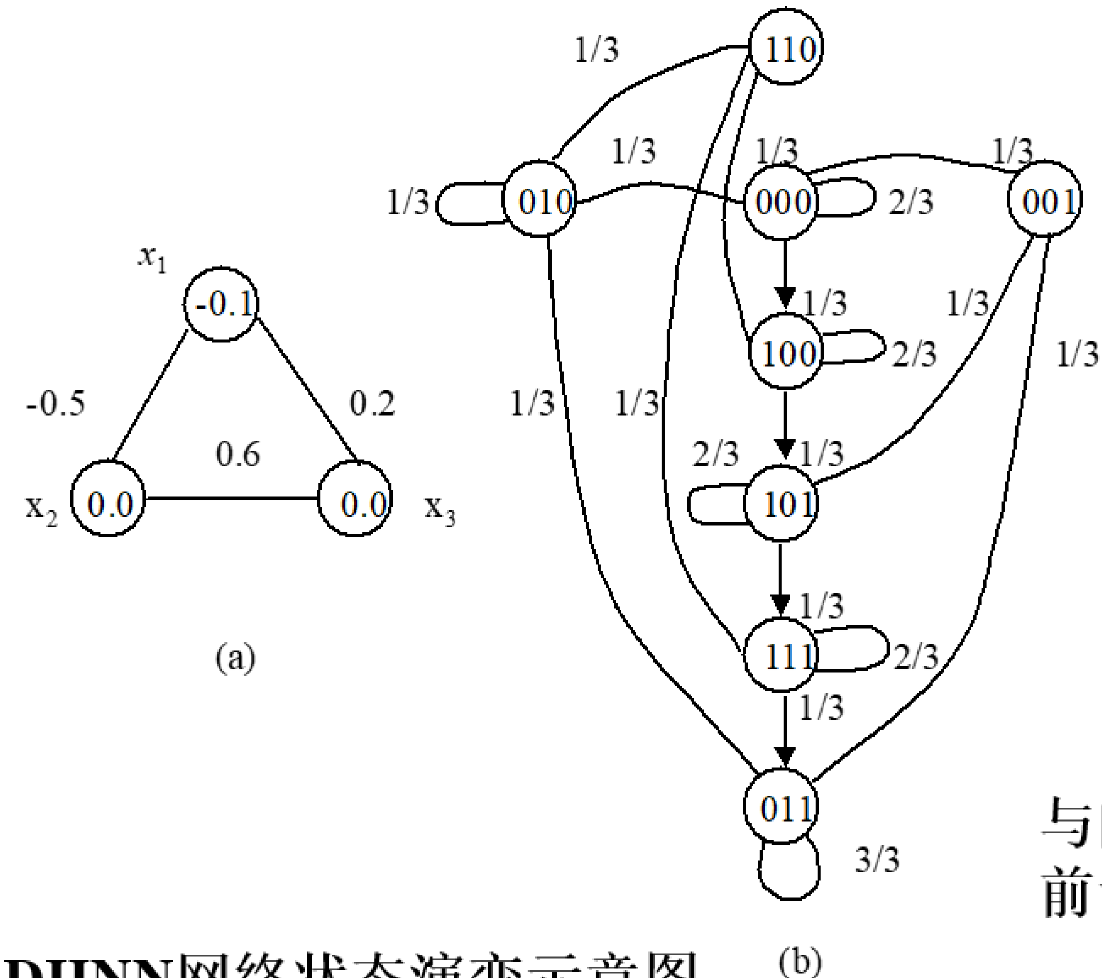
其它节点状态不变，网络状态仍为$(1,0,0)^T$。如果本步先更新x_1或x_3，网络相应状态将为$(1,0,0)^T$和$(1,0,1)^T$，因此本状态保持不变的概率为2/3，而变为$(1,0,1)^T$的概率为1/3。

第3步：此时网络状态为$(1,0,0)^T$，更新x_3得

$$x_3=\text{sgn}[0.2\times 1+0.6\times 0-0]=sgn(0.2)=1$$

同理可算出其它状态之间的演变历程和状态转移概率。

反馈神经网络



灌输式学习
死记硬背学习

此吸引子是由权值与阈值决定的，是提前设计出来的。

DHNN网络状态演变示意图

7、网络的权值设计

为了使所设计的权值满足要求，权值矩阵应符合以下要求：

(1) 为保证异步方式工作时网络收敛，**W**应为对称阵；

(2) 为保证同步方式工作时网络收敛，**W**应为非负定对称阵；

(3) 保证给定样本是网络的吸引子，并且要有一定的吸引域。

- 联立方程法

以3节点DHNN网为例，设要求设计的吸引子为 $X^a=(0\ 1\ 0)^T$ 和$X^b=(1\ 1\ 1)^T$ 权值和阈值在[-1,1]区间取值，$w_{ij}=w_{ji}$ ，试求权值和阈值。

反馈神经网络

对于状态 $X^a = (0\ 1\ 0)^T$，各节点净输入应满足：

$$\mathrm{net}_1 = w_{12} \times 1 + w_{13} \times 0 - T_1 = w_{12} - T_1 < 0$$

$$\mathrm{net}_2 = w_{12} \times 0 + w_{23} \times 0 - T_2 = -T_2 > 0$$

$$\mathrm{net}_3 = w_{13} \times 0 + w_{23} \times 1 - T_3 = w_{23} - T_3 < 0$$

对于状态 $X^b = (1\ 1\ 1)^T$，各节点净输入应满足：

$$\mathrm{net}_1 = w_{12} \times 1 + w_{13} \times 1 - T_1 > 0$$

$$\mathrm{net}_2 = w_{12} \times 1 + w_{23} \times 1 - T_2 > 0$$

$$\mathrm{net}_3 = w_{13} \times 1 + w_{23} \times 1 - T_3 > 0$$

反馈神经网络

联立以上6项不等式，可求出6个未知量的允许取值范围。

如果 $w_{12}=0.5$　$0.5<T_1\leq 1$，取 $T_1=0.7$

有 $0.2<w_{13}\leqslant 1$，取 $w_{13}=0.4$；

有 $-1\leqslant T_2<0$，取 $T_2=-0.2$；

有 $-0.7<w_{23}\leqslant 1$，取 $w_{23}=0.1$；

有 $-1\leqslant T_3<0.5$，取 $T_3=0.4$。

可以验证，利用这组参数构成的DHNN网对于任何初态最终都将演变到一个吸引子。具体收敛到两个吸引子的哪个，取决于初始条件与异步次序。

反馈神经网络

- 外积和法

设给定P个模式样本X^p，$p=1,2,\ldots,P$，$x\in\{-1,1\}^n$，并设样本两两正交，且$n>P$，则权值矩阵为记忆样本的外积和

$$W=\sum_{p=1}^{P}X^p(X^p)^T$$

若取$w_{jj}=0$，上式应写为

$$W=\sum_{p=1}^{P}[X^p(X^p)^T-I]$$

式中I为单位矩阵。上式写成分量元素形式，有

$$w_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{p=1}^{P}x_i^p x_j^p & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$$

反馈神经网络

下面检验所给样本能否称为吸引子。

因为P个样本X^p，$p=1,2,\ldots,P$，$x\in\{-1,1\}^n$是两两正交的，有

$$(X^p)^T X^k=\begin{cases}0 & p\neq k\\ n & p=k\end{cases}$$

$$\begin{aligned}WX^k &= \sum_{p=1}^{P}[X^p(X^p)^T-I]X^k\\ &= \sum_{p=1}^{P}[X^p(X^p)^T X^k - X^k]\\ &= X^k(X^k)^T X^k - PX^k\\ &= nX^k - PX^k = (n-P)X^k\end{aligned}$$

因为**n>P**，所以有

$$f(WX^p)=f[(n-P)X^p]=\mathrm{sgn}[(n-P)X^p]=X^p$$

可见给定样本X^p，$p=1,2,\ldots,P$是吸引子。

8、网络信息存储容量

定理：若DHNN网络的规模为 n，且权矩阵主对角线元素为0，则该网络的信息容量上界为 n。

定理：若P个记忆模式X^P，$p=1$，2，…，P，$x\in\{-1, 1\}^n$两两正交，$n>P$，且权值矩阵W按外积和得到，则所有P个记忆模式都是DHNN网（W，0）的吸引子。

$$\boldsymbol{W}=\sum_{p=1}^{P}\left[\boldsymbol{X}^{p}(\boldsymbol{X}^{p})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}\right]$$

反馈神经网络

定理：若P个记忆模式X^p，$p=1$，2，…，P，$x\in\{-1, 1\}^n$两两正交，$n\geq P$，且权值矩阵W按下式得到，则所有P个记忆模式都是DHNN网（W，0）的吸引子。

$$W=\sum_{p=1}^{P}X^p(X^p)^{\mathrm{T}}$$

表明自反馈增强了记忆功能。

由以上定理可知，当用外积和设计DHNN网时，如果记忆模式都满足两两正交的条件，则规模为n维的网络最多可记忆n个模式。一般情况下，模式样本不可能都满足两两正交的条件，对于非正交模式，网络的信息存储容量会大大降低（$0.15n$，经验公式）。

反馈神经网络

- 权值移动与交叉干扰

$$W=\sum_{P=1}^{P}\left[X^{p}\left(X^{\mathrm{p}}\right)^{T}-I\right] \longrightarrow \begin{cases} W^{0}=0 \\ W^{1}=X^{1}\left(X^{1}\right)^{T}-I \\ W^{2}=W^{1}+X^{2}\left(X^{2}\right)^{T}-I \\ \vdots \\ W^{P}=W^{P-1}+X^{P}\left(X^{P}\right)^{T}-I \end{cases}$$

反馈神经网络

当网络规模n一定时，要记忆的模式数越多，联想时出错的可能性越大；反之，要求的出错概率越低，网络的信息存储容量上限越小。研究表明存储模式数P超过$0.15n$时，联想时就有可能出错。错误结果对应的是能量的某个局部极小点，或称为伪吸引子。

提高网络存储容量有两个基本途径：

- 改进网络的拓扑结构（$n\uparrow$，加自反馈）
- 改进网络的权值设计方法（参看最新文献）