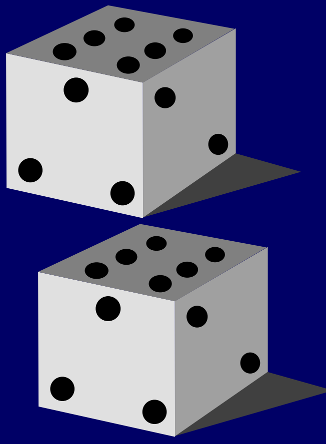
第六节　独立性

- 两个事件的独立性
- 多个事件的独立性
- 独立性的概念在计算概率中的应用
- 小结　布置作业

一、两事件的独立性

先看一个例子：

将一颗均匀骰子连掷两次，



设

A={第二次掷出6点}，
B={第一次掷出6点}，

显然 $P(A|B)=P(A)$

这就是说,已知事件B发生,并不影响事件A发生的概率,这时称事件A、B独立.

由乘法公式知，当事件A、B独立时，有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(AB)=P(A|B)P(B)$$

用$P(AB)=P(A)P(B)$刻划独立性,比用

$$P(A|B) = P(A)$$

或

$$P(B|A) = P(B)$$

更好,它不受 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$ 的制约.

两事件独立的定义

若两事件A、B满足

$$P(AB)= P(A)\,P(B) \qquad (1)$$

则称A、B相互独立，简称A、B独立.

定理1 事件 A、B 独立的充要条件为

$$P(A\mid B)=P(A),P(B)>0$$

或

$$P(B\mid A)=P(B),P(A)>0$$

证　先证必要性. 设事件 A、B 独立, 由独立定义知

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

所以, 当 $P(B)>0$ 时, $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$

或者, 当 $P(A)>0$ 时, $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$

再证充分性: 设 $P(A\mid B)=P(A)$ 成立, 则有

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B)=P(A)P(B)$$

由定义可知, 事件 A、B 相互独立.

例　从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 A={抽到K}，B={抽到的牌是黑色的}

问事件A、B是否独立？

解　由于 $P(A)=4/52=1/13$,　$P(B)=26/52=1/2$,

$P(AB)=2/52=1/26$.

可见，　$P(AB)=P(A)P(B)$

故　事件A、B独立.

前面我们是根据两事件独立的定义作出结论的，也可以通过计算条件概率去做:

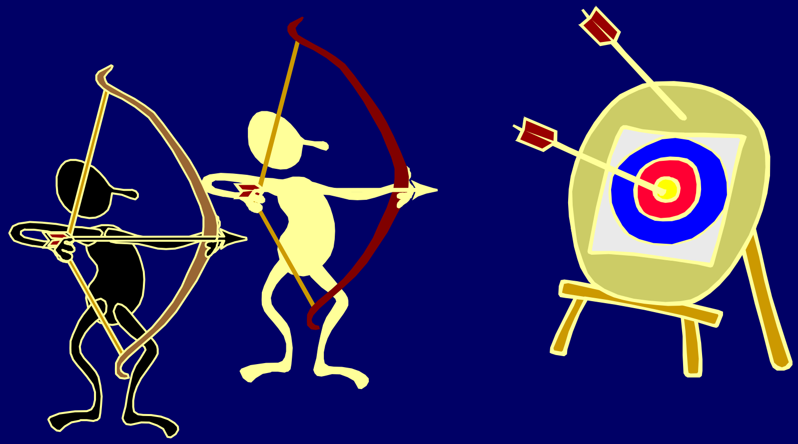
从一副不含大小王的扑克牌中任取一张,记 A={抽到K}， B={抽到的牌是黑色的},则

$$P(A)=1/13,\ P(A|B)=2/26=1/13$$

可见 $P(A)=P(A|B)$, 即事件A、B独立.

在实际应用中，往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立.

在实际应用中,往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立.



例如

甲、乙两人向同一目标射击,记 A={甲命中}, B={乙命中}, A与B是否独立?

由于“甲命中”并不影响“乙命中”的概率,故认为A、B独立 .

(即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率)

又如： 一批产品共n件，从中抽取2件，设

A_i={第i件是合格品} i=1,2

若抽取是有放回的，则A_1与A_2独立.

因为第二次抽取的结果

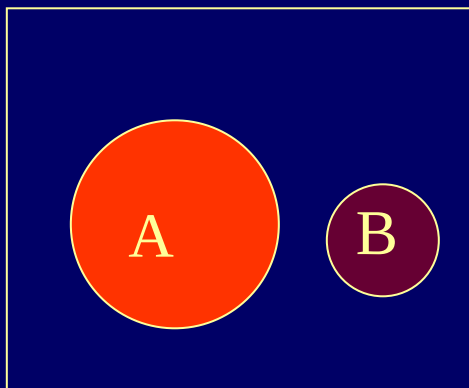
不受第一次抽取的影响.

若抽取是无放回的，则A_1与A_2不独立.

因为第二次抽取的结果受到第一次

抽取的影响.

请问：如图的两个事件是独立的吗？



我们来计算： $P(AB)=0$

而$P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$

即 $P(AB)\neq P(A)P(B)$

故 A、B不独立

即 若A、B互斥，且$P(A)>0$, $P(B)>0$,则A与B不独立.

反之，若A与B独立，且$P(A)>0$,$P(B)>0$,则A 、B不互斥.

前面我们看到独立与互斥的区别和联系，再请你做个小练习.

设A、B为互斥事件，且$P(A)>0, P(B)>0$，下面四个结论中，正确的是:

1. $P(B|A)>0$　　2. $P(A|B)=P(A)$
3. $P(A|B)=0$　　4. $P(AB)=P(A)P(B)$

设A、B为独立事件，且$P(A)>0, P(B)>0$，下面四个结论中，正确的是:

1. $P(B|A)>0$　　2. $P(A|B)=P(A)$
3. $P(A|B)=0$　　4. $P(AB)=P(A)P(B)$

定理 2 若两事件A、B独立, 则$\overline{A}$与B, A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立.

证明　仅证A与$\overline{B}$独立

A、B独立

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)$$

概率的性质

$$=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$$

故A与$\overline{B}$独立

二、多个事件的独立性

定义　设 A、B、C 为三事件，如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{cases}$$

则称三事件 A、B、C 为两两独立的事件.

当事件 A、B、C 两两独立时，等式

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

不一定成立.

例如 $S=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\},A=\{\omega_1,\omega_2\},B=\{\omega_1,\omega_3\},$

$C=\{\omega_1,\omega_4\}$,则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$,并且,

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B),$$

$$P(AC)=\frac{1}{4}=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C).$$

即事件 A、B、C 两两独立.

但是 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C).$

对于三个事件A、B、C，若

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

四个等式同时成立,则称事件A、B、C相互独立.

此定义可以推广到任意有限多个事件的情形：

定义 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个事件,如果对于任意的 $k\,(1 < k \le n)$,和任意的 $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n$ 有等式

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \ldots P\left(A_{i_k}\right)$$

则称 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为相互独立的事件.

请注意多个事件两两独立与相互独立的区别与联系

对 $n\ (n > 2)$ 个事件

相互独立 $\Longrightarrow$ 两两独立

相互独立 $\overset{?}{\Longleftarrow}$ 两两独立

三、独立性的概念在计算概率中的应用

对独立事件，许多概率计算可得到简化

例1 有甲、乙两批种子，出苗率分别为 0.8 和 0.9，现从这两批种子中各任取一粒，求

(1) 两粒种子都出苗的概率；

(2) 恰好有一粒种子出苗的概率；

(3) 至少有一粒种子出苗的概率.

解 设 $A = \{$由甲批中取出的一粒种子出苗$\}$

$B = \{$由乙批中取出的一粒种子出苗$\}$

则事件 A、B 相互独立，且事件"两粒种子都出苗"表示为: AB，"恰好有一粒出苗"表示为: $\overline{A}B+A\overline{B}$，"至少有一粒种子出苗"表示为: $A\cup B$.

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.8\cdot 0.9=0.72$;

(2) $P(\overline{A}B\cup A\overline{B})=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})$

$$=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=0.2\cdot 0.9+0.8\cdot 0.1=0.26.$$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$=0.8+0.9-0.8\cdot 0.9=0.98.$$

或者 $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})$

$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=0.98.$$

或者 $P(A\cup B)=P(AB+\overline{A}B+A\overline{B})$

$=P(AB)+P(\overline{A}B+A\overline{B})=0.72+0.26=0.98.$

例2 设有两门高射炮,每一门击中飞机的概率都是0.6,求下列事件的概率:

(1)同时发射一发炮弹而击中飞机的概率是多少?

(2)若有一架敌机入侵领空,欲以99%以上的概率击中它,问至少需要多少门高射炮?

解 设 $A_k=\{$第 k 门高射炮发射一发炮弹而击中飞机$\}$,

$k=1,2$,则 A_k 之间相互独立,且 $P(A_k)=0.6$,于是

(1) $P(A_1\cup A_2)=1-P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=1-0.4^2=0.84.$$

(2)设至少需要n门高射炮,由题知

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n})$$

$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n})$$

$$=1-0.4^n>0.99$$

即

$$(0.4)^n<0.01,$$

解之得,

$$n>\frac{\ln 0.01}{\ln 0.4}\approx 5.026.$$

例3 要验收一批(100件)乐器.验收方案如下:自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的),如果3 件中至少有一件在测试中被认为音色不纯,则这批乐器就被拒绝接收.设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95;而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01.如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的.试问这批乐器被接收的概率是多少?

解 设 $H_i = \{$随机地取出3件，恰有 i 件音色不纯$\}$，

$i = 0,1,2,3$.

$A = \{$这批乐器被接收$\}$. 则

$$P(A) = P(A \mid H_0)P(H_0) + P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_3)P(H_3)$$

其中 $P(H_0) = \dfrac{C_{96}^3}{C_{100}^3}$, $P(H_1) = \dfrac{C_{96}^2 C_4^1}{C_{100}^3}$,

$$P(H_2) = \frac{C_{96}^1 C_4^2}{C_{100}^3},\ P(H_3) = \frac{C_4^3}{C_{100}^3},$$

$P(A\mid H_0)=(0.99)^3$， $P(A\mid H_1)=(0.99)^2(0.05)$，

$P(A\mid H_2)=(0.99)(0.05)^2$，$P(A\mid H_3)=(0.05)^3$.

所以这批乐器被接收的概率为:

$$P(A)=P(A\mid H_0)P(H_0)+P(A\mid H_1)P(H_1)$$

$$+P(A\mid H_2)P(H_2)+P(A\mid H_3)P(H_3)$$

$$=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}\cdot(0.99)^3+\frac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}\cdot(0.99)^2(0.05)$$

$$+\frac{C_{96}^1C_4^2}{C_{100}^3}\cdot(0.99)(0.05)^2+\frac{C_4^3}{C_{100}^3}(0.05)^3=0.8629.$$

例4 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为1/5，1/3，1/4，问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

解 将三人编号为1，2，3，

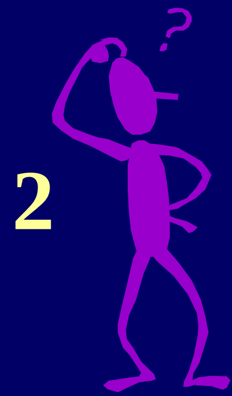
记 A_i={第i个人破译出密码} $i=1,2,3$

所求为 $P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right)$

已知，$P(A_1)=1/5$，$P(A_2)=1/3$，$P(A_3)=1/4$

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) = 1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right)$$

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) = 1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right)$$



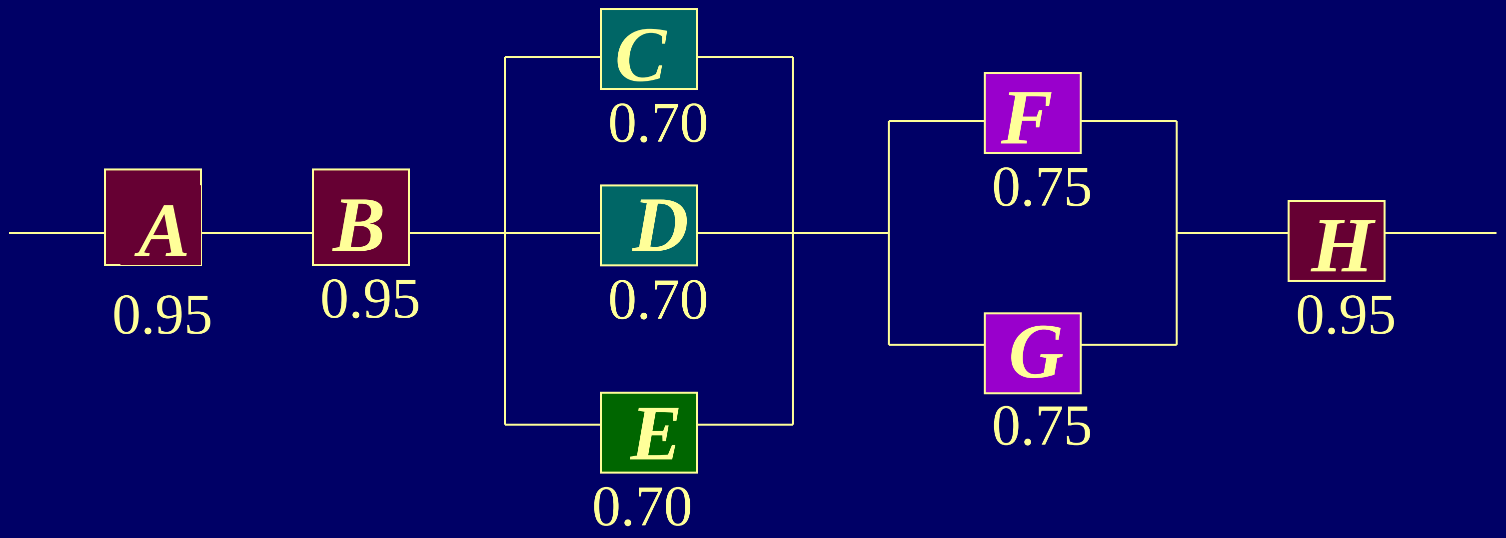
$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3)$$

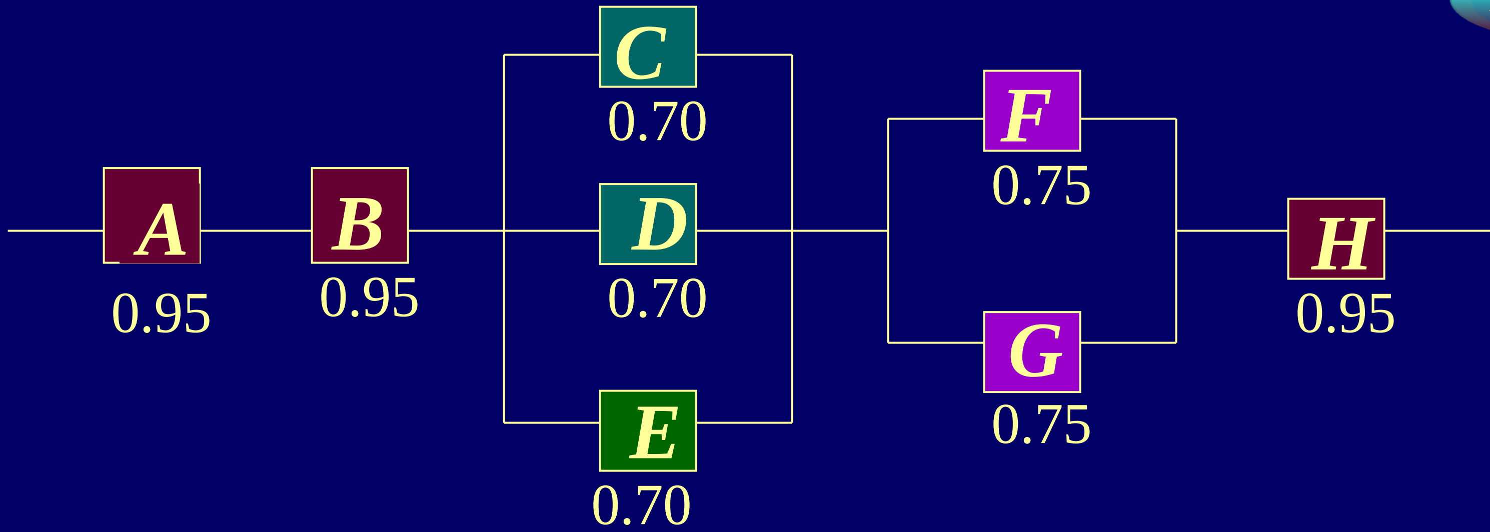
$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3)$$

$$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2)][1-P(A_3)]$$

$$= 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0.6$$

例5　下面是一个串并联电路示意图. A、B、C、D、E、F、G、H 都是电路中的元件. 它们下方的数是它们各自正常工作的概率. 求电路正常工作的概率.





解 将电路正常工作记为W，由于各元件独立工作，有

$$P(W)=P(A)P(B)P(C\cup D\cup E)P(F\cup G)P(H)$$

其中 $P(C\cup D\cup E)=1-P(\overline{C})P(\overline{D})P(\overline{E})=0.973$

$$P(F\cup G)=1-P(\overline{F})P(\overline{G})=0.9735$$

代入得 $P(W)\approx 0.782$

四、小结

这一讲，我们介绍了事件独立性的概念．不难发现，当事件相互独立时，乘法公式变得十分简单，因而也就特别重要和有用．如果事件是独立的，则许多概率的计算就可大为简化.

五、 布置作业

习题1-5（p28）：5、9、13