

第三章 系统及系统特性分析基础

概述

- 所谓的系统是指测控系统，其特征就在于输入、输出界面的内容是信息（信号），包括信息（信号）的反馈。
- 系统特性分析方法指的是从具体系统出发，建立一般系统的概念，研究和认识一般系统的传递、反馈特性和规律，从而指导具体系统的设计和应用。

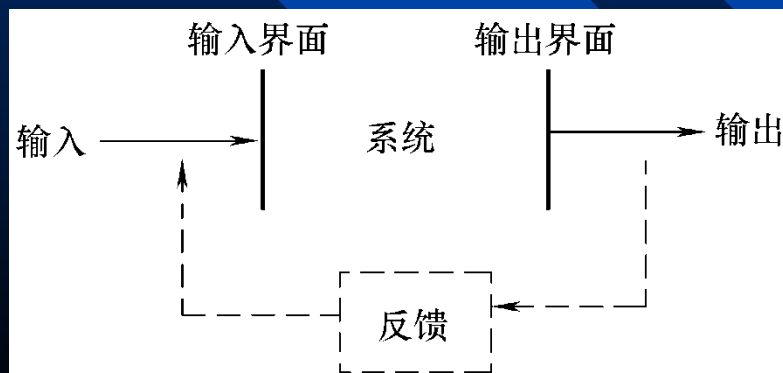


图4-1 测控系统的组成

§3-1 线性系统与常微分方程

一、系统分类和特点

1. 按反馈情况分

(1) 开环系统

系统中没有反馈回路，也就是没有测控环节。工作台位置是否达到输入指令所要求的位置，不确定。系统中任何一个环节都没有校正补偿功能。

(P.155)

(2) 闭环系统

系统中存在反馈回路，需要检测和控制环节。能根据输出偏差校正和补偿输入环节。

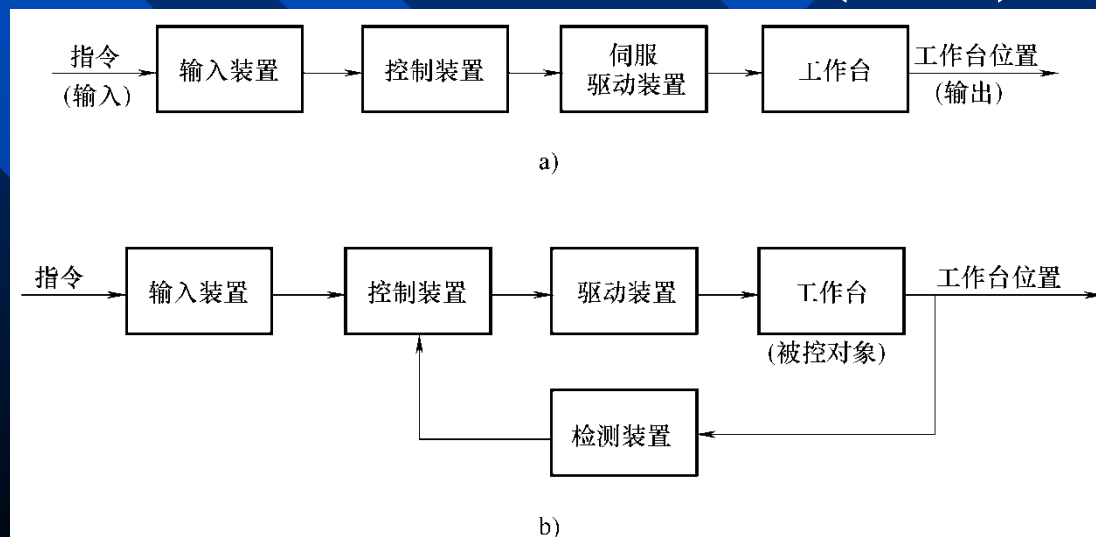


图4-2 数控机床开环、闭环两种控制模式

a) 开环系统 b) 闭环系统

2. 按输出变化规律分

(1) 自动调节系统:

不受外界干扰影响, 系统的输出仍能基本保持为常量的系统。这类系统也是闭环系统。

(2) 随动系统:

系统输出能主动跟随外界的变化而变化。

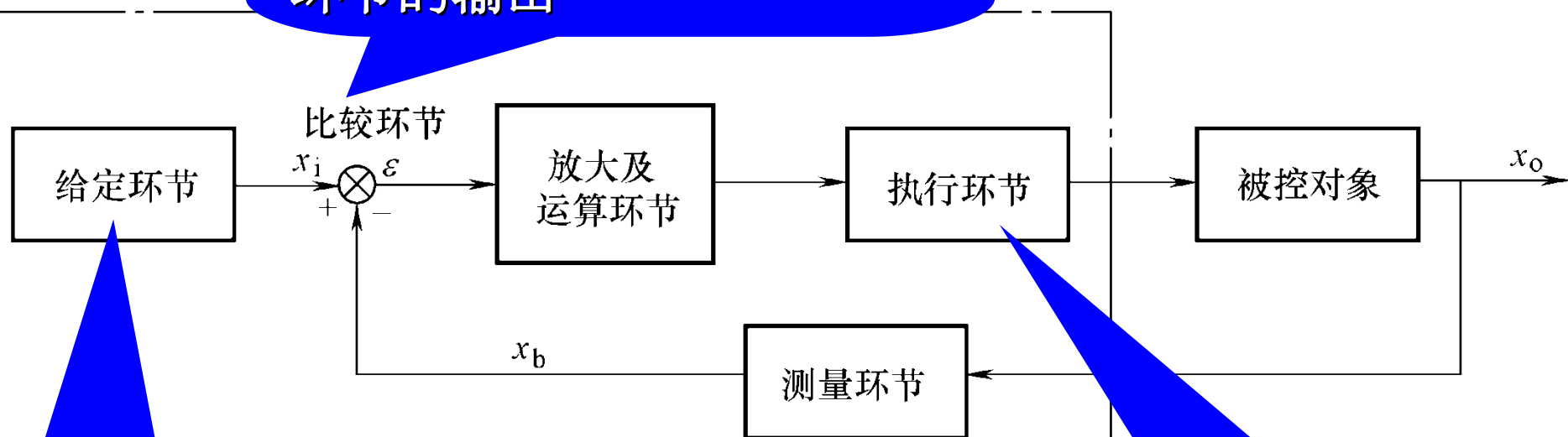
(3) 程序控制系统:

系统的输出按照预定程序变化。程序控制系统可以是开环系统, 也可以是闭环系统。

典型闭环测控系统的组成框图

(P.155)

输入信号与被控变量的反馈量相比较，偏差信号是比较环节的输出



用于确定被控对象的“目标值”。

图4-3 一个典型闭环测控系统框图

驱动被控对象按照预期的要求运行

二、定常线性系统

- 理想的系统应该具有单值的、确定的输入 / 输出关系。
- 对应于每一输入量，都应具有单一的输出量与之对应。

工程上——线性时不变系统

数学上——常系数线性微分方程式

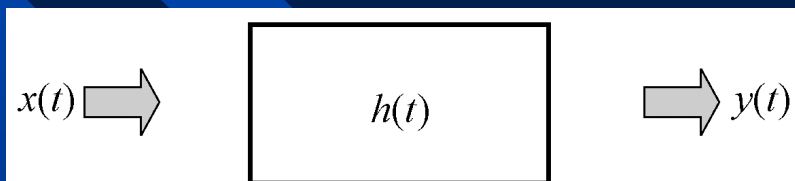


图4-4 输入/输出与系统特性之间的对应关系

常系数线性微分方程式

(P.156 式 (4-1))

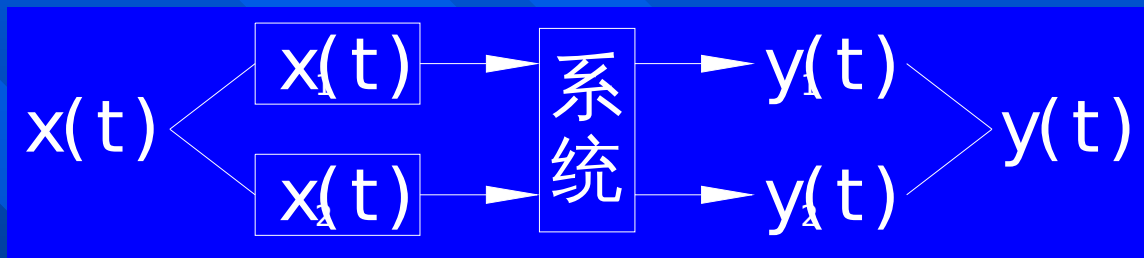
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

- a_n 、 b_m — 与系统结构参数有关的常数
- m 、 $n=0, 1, 2, \dots, m(n)$
- y —— 输出 $y(t)$ x —— 输入 $x(t)$

线性时不变系统的主要性质:

1 叠加性

若 $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$
 $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$



则 $x_1(t) \pm x_2(t) \rightarrow y_1(t) \pm y_2(t)$

当一个系统有几个激励同时作用时，那么它的响应就等于这几个激励单独作用的响应之和，也即各个输入所引起的输出是互不影响的。

2 比例性

若 $x(t) \rightarrow y(t)$

则 $kx(t) \rightarrow ky(t)$

主要性质（二）：

3. 微分性质

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \frac{dy(t)}{dt}$$

4. 积分性质

$$\int_0^{t_0} x(t)dt \rightarrow \int_0^{t_0} y(t)dt$$

主要性质（三）：

5. 频率保持性（或频率不变性）

$$x(t, f_1, f_2) \rightarrow \text{系统} \rightarrow y(t, f_1, f_2)$$

若系统的输入为某一频率的谐波信号，则系统的稳态输出将为同一频率的谐波信号。

$$\text{若 } x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_x) \quad \text{或} \quad x(t) = x_0 e^{j\omega t}$$

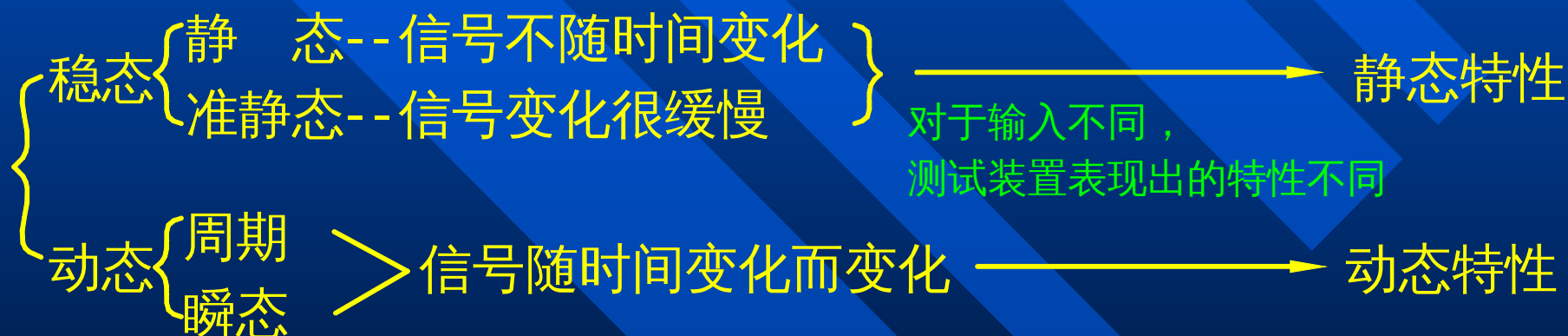
$$\text{则 } y(t) = B \cos(\omega t + \varphi_y) \quad y(t) = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

十分重要的性质

- 上述这些主要特性中，**叠加性和频率保持性**是对于测试系统来说，两个十分重要的性质。

补充——系统基本特性

基本特性——输出 - 输入关系特性



一个高精度的测试系统必须有良好的静态特性和动态特性才能完成信号无失真的转换。

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

静态特性和指标

静态特性——测试系统在静态测量时，即输入、输出不随时间而变化时，其输出 - 输入特性。

静态方程 $y = \frac{b_0}{a_0} x = Sx$ S —— 斜率

测试装置静态特性表征的重要指标:

■ 线性度

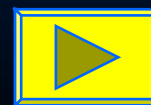
■ 回程误差

■ 灵敏度

■ 重复性

动态参数测试的特殊问题

- 1 要求系统能迅速准确的测出信号幅值大小和无失真地再现被测信号随时间变化的波形;
- 2 测试系统的动态特性 —— 系统对激励 (输入) 的响应 (输出) 特性。
- 3 最后输出的动态特性是综合系统的动态特性 。



动态误差

动态误差 —— 输出信号不与输入信号具有完全相同的时间函数，它们之间的差异。

动态误差 { 稳态动态误差
暂态动态误差

动态测试中的两个重要特征 { 时间响应
频率响应

它们也是动态特性的主要内容

Back

动态特性的三种描述方法:

传递函数 —— 动特性的复数域描述

频率响应函数 —— 动特性的频域描述

采用频率响应法（正弦输入）研究

脉冲响应函数 —— 动特性的时域描述

采用瞬态响应法（脉冲、阶跃等输入）

研究

§3-2 系统传递函数

(P.156)

一、传递函数的定义

单边拉普拉斯变换对

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \text{ 记作 } F(s)=L[f(t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st} dt \quad f(t)=L^{-1}[F(s)]$$

其中 $S=\sigma+j\omega$ 复频

率

微分性质： $L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

当初始条件为零时 $L[f$

$^{(n)}(t)]=S^n F(s)$



从傅里叶变换到拉普拉斯变换

- 傅里叶变换需满足狄里赫利条件，但对于阶跃信号、周期信号等无法满足该条件，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \neq \text{有限值}$$

则 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt \rightarrow \text{有限值}$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$



傅里叶在提出傅里叶级数时坚持认为，任何一个周期信号都可以展开成傅里叶级数。

狄里赫利认为，只有在满足一定条件时，周期信号才能展开成傅里叶级数。这个条件被称为狄里赫利条件，其内容为

(1) 函数在任意有限区间内连续，或只有有限个第一类间断点（当 t 从左或右趋于这个间断点时，函数有有限的左极限和右极限）

(2) 在一个周期内，函数有有限个极大值或极小值。

(3) $x(t)$ 在单个周期内绝对可积

$$\int_0^T |x(t)| dx < \infty$$

传递函数的定义

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y$$

$$= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s)$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X(s)$$

分子与系统和外界之间的关系有关，如输入点位置、输入方式、被测量及测点布置等。

定义传递函数：表征了一个系统的传递特性

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

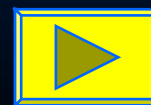
对稳定系统 $n > m$

n —— 系统微分方程阶数，称 n 阶系统

分母取决于系统的结构

$H(s)$ 的特点:

1. $H(s)$ 与输入无关, 不因 $x(t)$ 而异, 只反应系统的特性;
2. $H(s)$ 只反应系统的响应特性, 而和具体的物理结构无关;
3. $H(s)$ 虽与输入无关, 但对于任一具体的输入 $x(t)$ 都确定地给出输出 $y(t)$;
4. 拉普拉斯变换是一一对应变换, 不丢失任何信息, 故传递函数与微分方程等价。



同一传递函数可以表征两个完全不同的物理系统

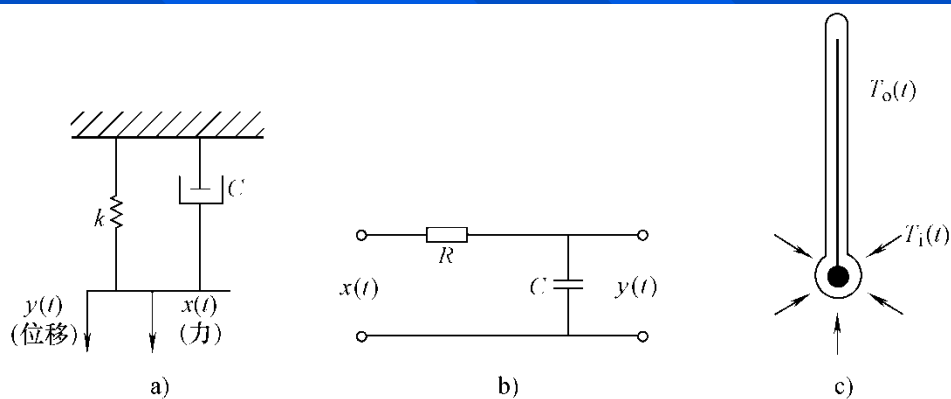


图4-16 一阶系统具体例子

a) 弹簧-阻尼系统 b) RC 滤波电路 c) 液柱式温度计

(P.158)

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

(P.158)

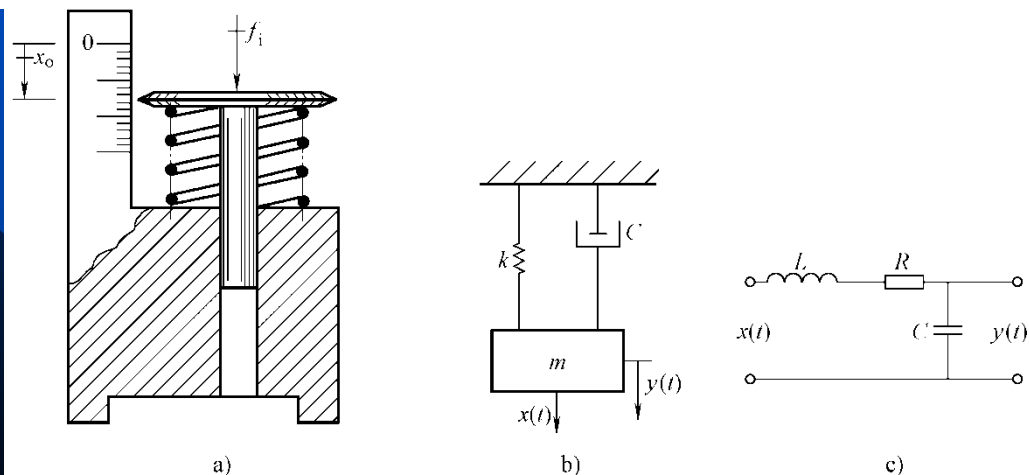


图4-17 二阶系统实例

a) 测力弹簧称 b) 弹簧-质量-阻尼系统 c) RLC 滤波电路

二、环节的串联、并联和反馈

1 串联

(P.158)

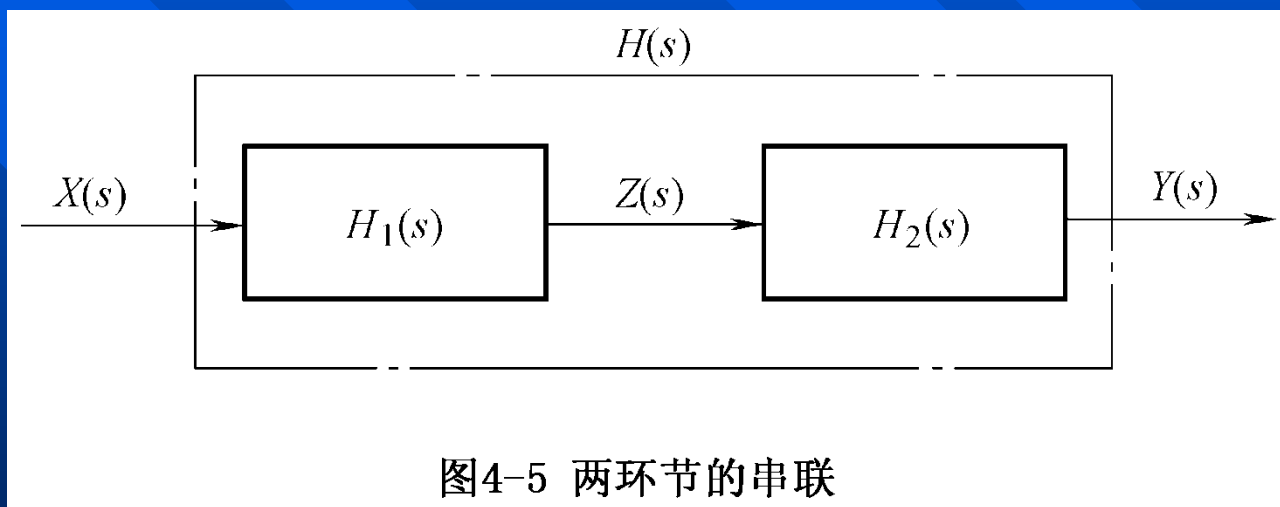


图4-5 两环节的串联

若两个环节

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Z(s)}{X(s)} \cdot \frac{Y(s)}{Z(s)} = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

若 n 个环节

$$H(s) = \prod_{i=1}^n H_i(s)$$

2 并联

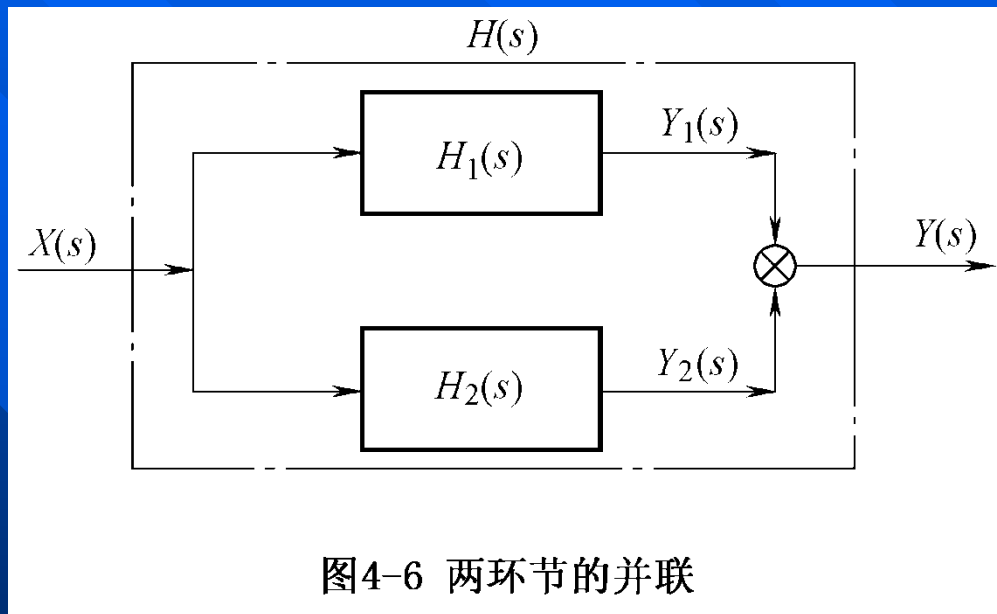


图4-6 两环节的并联

若两个环节： $Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s)}{X(s)} + \frac{Y_2(s)}{X(s)} = H_1(s) + H_2(s)$$

若 n 个环 $H(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s)$

节

3. 反馈环节

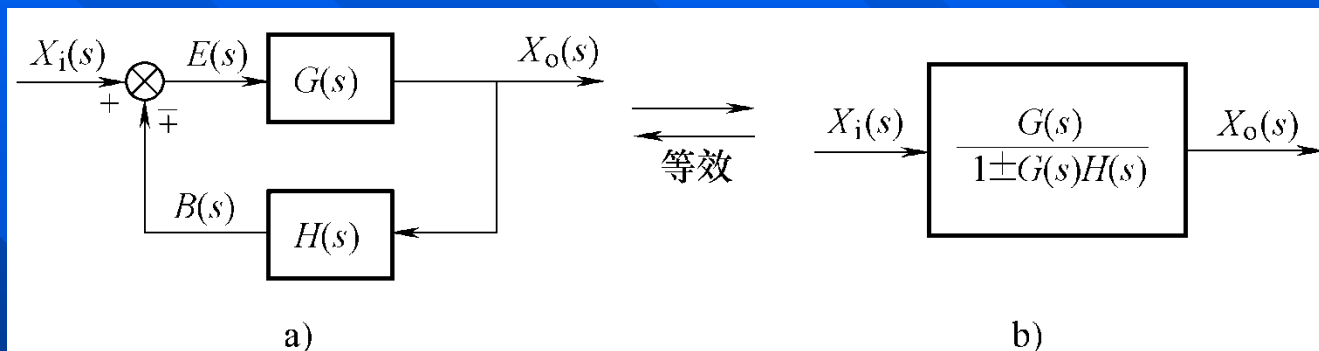


图4-7 反馈环节等效变换
a) 反馈联接 b) 等效传递函数

前向通道传递函数

$$G(s) = \frac{X_0(s)}{E(s)}$$

反馈回路传递函数

$$H(s) = \frac{B(s)}{X_0(s)}$$

系统开环传递函数

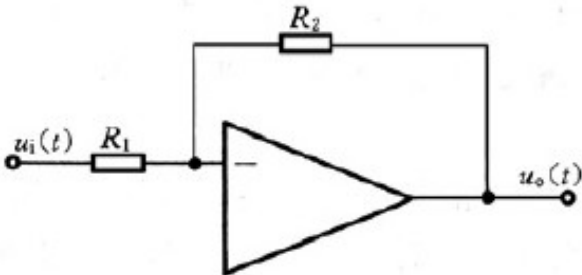
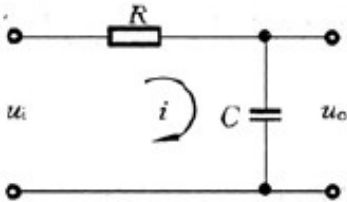
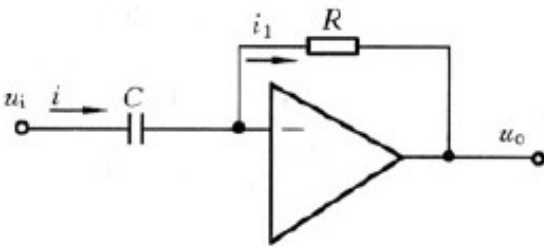
$$G_k(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

系统闭环传递函数

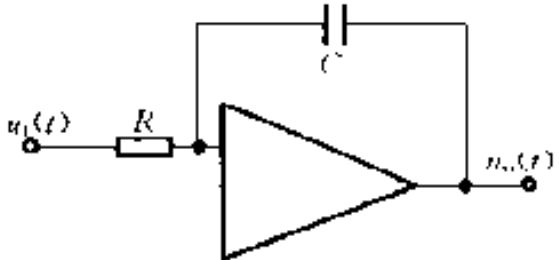
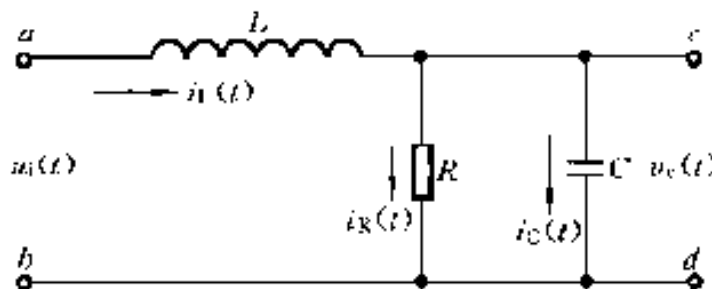
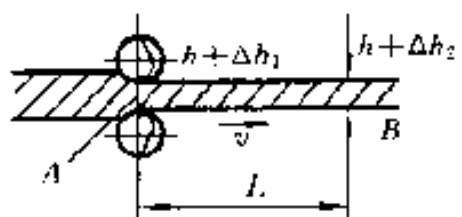
$$G_B(s) = \frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

三、一些典型环节的传递函数

表 4-1 一些典型环节的传递函数

环节	实例	传递函数	备注
比例环节		$H(s) = K$	K 为增益或放大系数
惯性环节		$H(s) = \frac{K}{1 + \tau \cdot s}$	K 为增益或放大系数； τ 为时间常数
微分环节		$H(s) = \tau \cdot s$	τ 为微分环节的时间常数

一些典型环节的传递函数

积分环节		$H(s) = \frac{1}{\tau \cdot s}$	τ 为积分环节的时间常数
振荡环节		$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	ω_n 为电路的固有振荡频率； ζ 为阻尼比
延时环节		$H(s) = e^{-\tau \cdot s}$	τ 为延迟时间

§3-3 系统频率响应函数

(P.162)

一、频率响应函数的定义

对于稳定系统 $s=j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

$H(j\omega)$ —— 系统的频率响应函数，
简称频率响应
或频率特性

二、频率响应函数的物理意义

$H(j\omega)$ 是当系统输入各个不同频率的正弦信号时，其达到稳态后的输出与输入之比。（包括幅值比和相位差）

证明：

$$x(t) = X_0 e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y(t) = Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = X_0 (j\omega) e^{j\omega t}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = Y_0 (j\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}$$

\vdots

\vdots

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} = X_0 (j\omega)^m e^{j\omega t}$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = Y_0 (j\omega)^n e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$H(j\omega)$ 的物理意义证明

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y$$

$$= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

$$[a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0] Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$= [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0] X_0 e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{X_0 e^{j\omega t}}$$

$$H(j\omega) \text{ 的物理意义 } H(j\omega) = \frac{Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{X_0 e^{j\omega t}} = \frac{\text{稳态正弦输出}}{\text{正弦输入}}$$

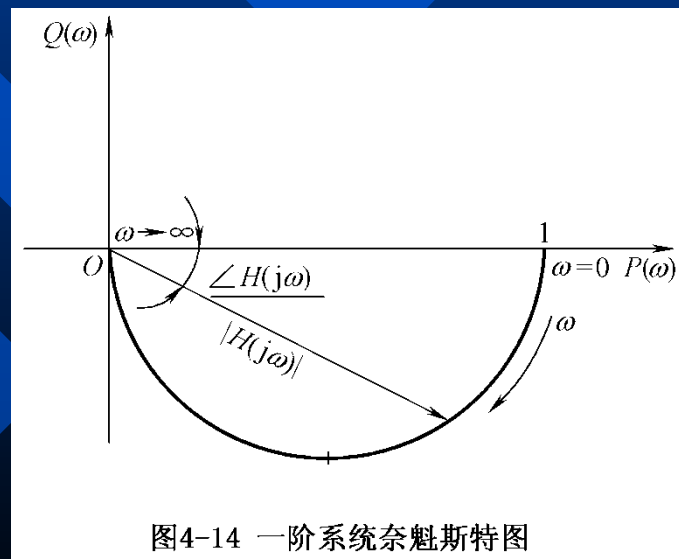
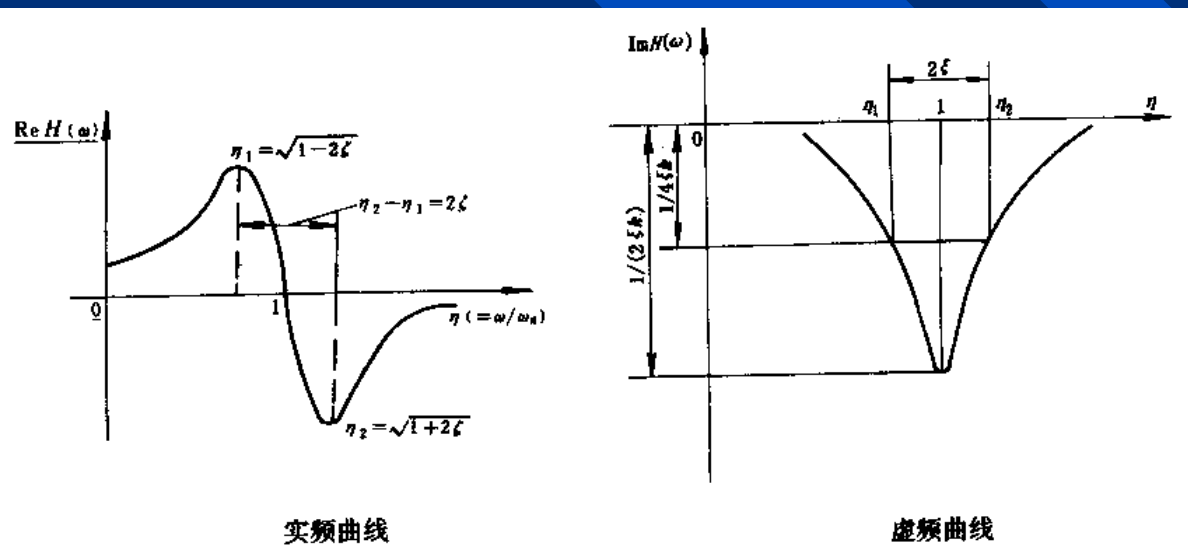
三、 $H(j\omega)$ 的两种形式

1. $H(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$

$P(\omega)-\omega$ (或 $\frac{\omega}{\omega_n}$) 曲线 —— 实频特性曲线

$Q(\omega)-\omega$ (或 $\frac{\omega}{\omega_n}$) 曲线 —— 虚频特性曲线

$Q(\omega)-P(\omega)$ 曲线 —— 奈魁斯特图 (矢量矢端联线)



H(j ω) 的第二种形式

$$H(j\omega) = \frac{Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{X_0 e^{j\omega t}}$$

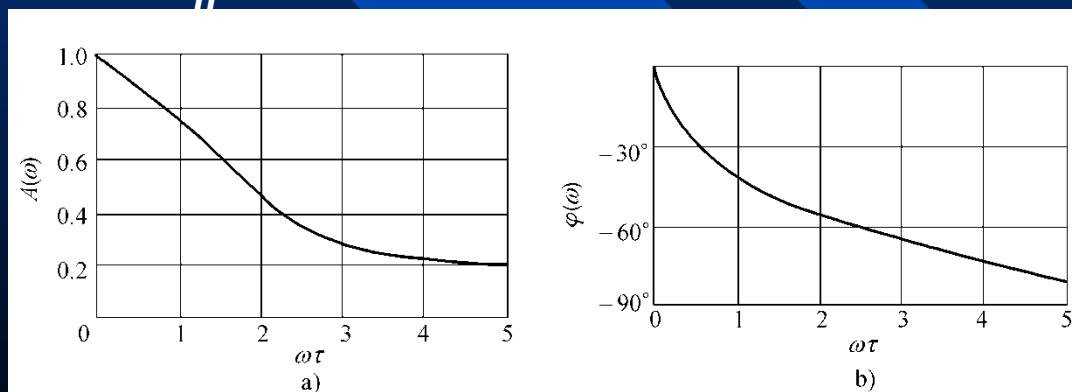
2. $H(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad \text{幅值比}$$

$$\varphi(\omega) = \angle H(j\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad \text{相位差}$$

$A(\omega) - \omega$ (或 $\frac{\omega}{\omega_n}$) 曲线 —— 幅频特性曲线

$\varphi(\omega) - \omega$ (或 $\frac{\omega}{\omega_n}$) 曲线 —— 相频特性曲线



(P.164)

图4-12 一阶系统幅频特性和相频特性曲线

a) 幅频特性曲线 b) 相频特性曲线

对数幅、相频曲线

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \angle H(j\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

伯德图:

对数幅频曲线:

$$20\lg A(\omega) - \lg \omega$$

对数相频曲线:

$$\varphi(\omega) - \lg \omega$$

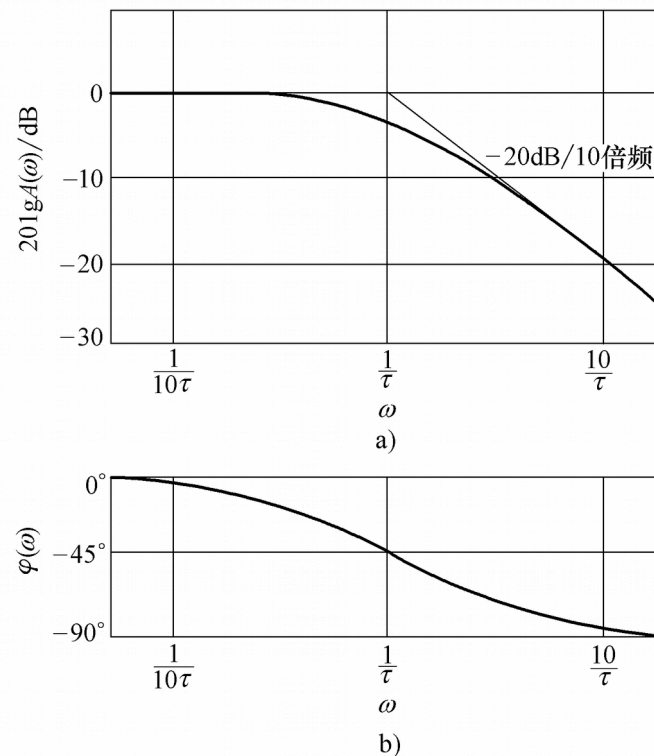


图4-13 一阶系统伯德图

a) 对数幅频特性曲线 b) 对数相频特性曲线

(P.164)

(四) $H(j\omega)$ 与 $H(s)$ 的关系和区别

1 关系: 从形式上看, $H(s)$ 的 $s \rightarrow j\omega$ 代入得到 $H(j\omega)$, 故 $H(j\omega)$ 是 $H(s)$ 的一个特例。

2 区别: (P.163)

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 其输入并不限于正弦激励, 而且它不仅决定了系统的稳态性能, 同时也决定了瞬态性能;

$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ 是正弦激励下, 系统稳态后的输出与输入之比。

传递函数在物理概念上较难建立相应的系统, 而频率响应函数物理概念明确, 因此频率响应函数是实验研究系统的重要工具。

§3-4 系统脉冲响应函数

(P.165)

脉冲响应函数

单位脉冲信号 $\delta(t)$ 的特点:

$$L[\delta(t)] = 1$$

脉冲响应函数——系统对单位脉冲输入的响应

$$h(t) \quad \delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{系 统}} \longrightarrow h(t)$$

$$\because x(t) = \delta(t) \quad \therefore X(s) = \Delta(s) = L[\delta(t)] = 1$$

$$\because H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \therefore Y(s) = H(s)$$

$$y(t) = L^{-1}[H(s)] = h(t)$$

$h(t)$ 、 $H(j\omega)$ 和 $H(s)$ 之间以及与系统定常线性微分方程的关系

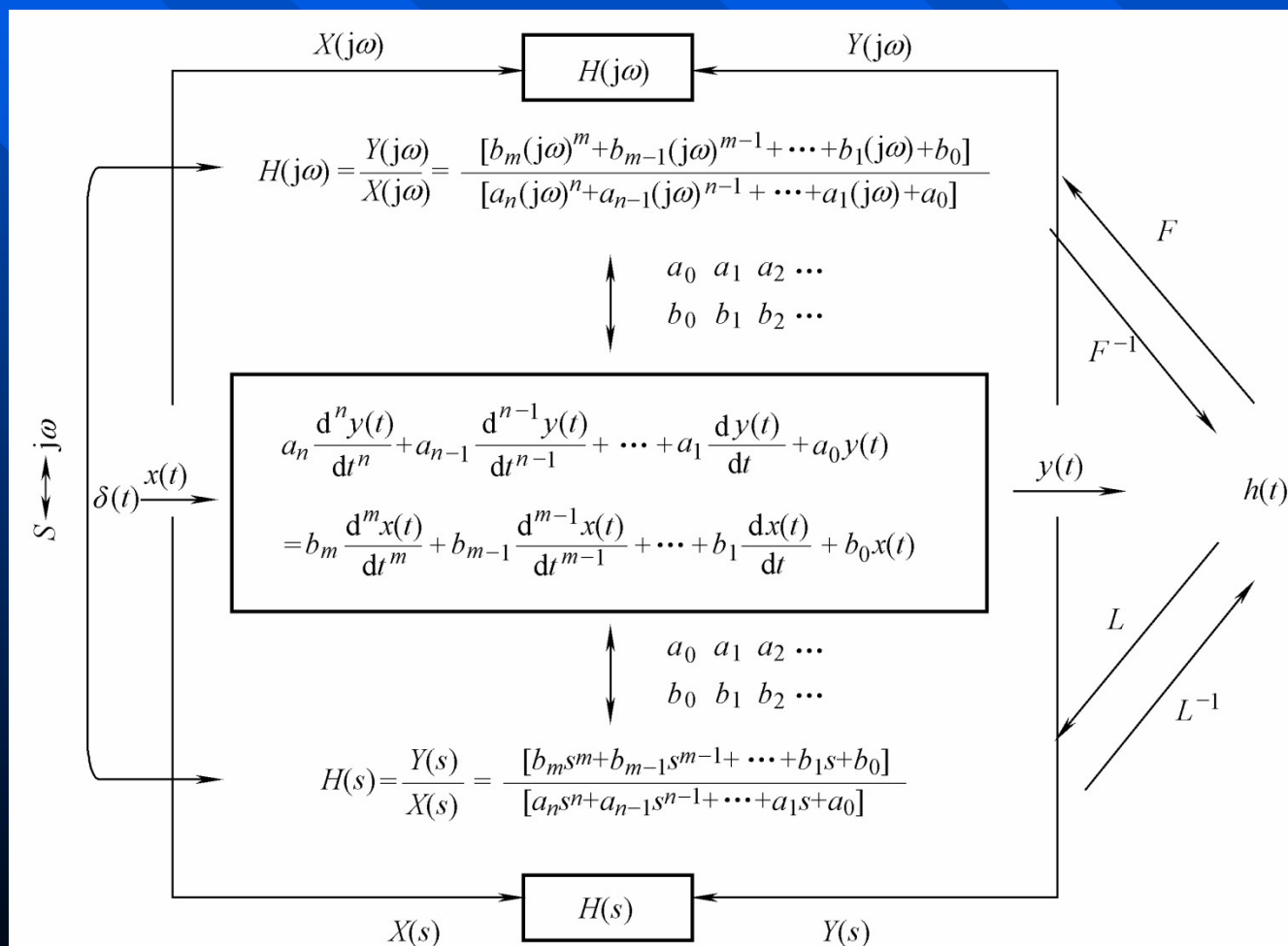


图4-15 系统 $h(t)$ 、 $H(\omega)$ 、 $H(s)$ 、常微分方程相互之间的关系

单位脉冲 \longrightarrow 测试系统 \longrightarrow 输出

{ 频域函数 \Rightarrow 频率响应
时域函数 \Rightarrow 脉冲响应

§3-5 一、二阶典型系统特性分析

(P.166)

一、一阶系统的传递函数及其频率响应

通式:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t)$$

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{b_0}{a_0} x(t)$$

$\frac{a_1}{a_0}$ — 具有时间的量纲，称为时间常数 $\tau = \frac{a_1}{a_0}$

$\frac{b_0}{a_0}$ — 是系统的灵敏度 s ，

令 $s=1$ 称为灵敏度归一化处理，
它只影响比例，不影响动态特性。

一阶系统的传递函数及其频率响应

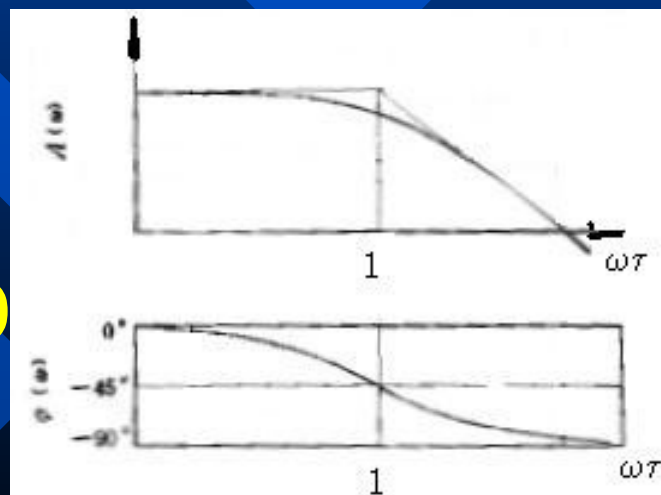
灵敏度归一化后: $\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

两边取拉氏变换: $\tau sY(s) + Y(s) = X(s)$

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau) \end{cases}$$

一阶系统的
动态特性参数



一阶系统的动态特性

传递函数只反映系统的响应特性

传递函数只反映系统的响应特性而和具体的物理结构无关

举例说明：同一个 $H(s)$ 可以表征两个完全不同的物理系统

例 1：液柱式温度计（热学系统）

设温度计液柱介质的热容量为 C ，传导介质的热阻为 R
根据热力学原理，温度计的吸热与散热，在略去热损耗的条件应保持平衡

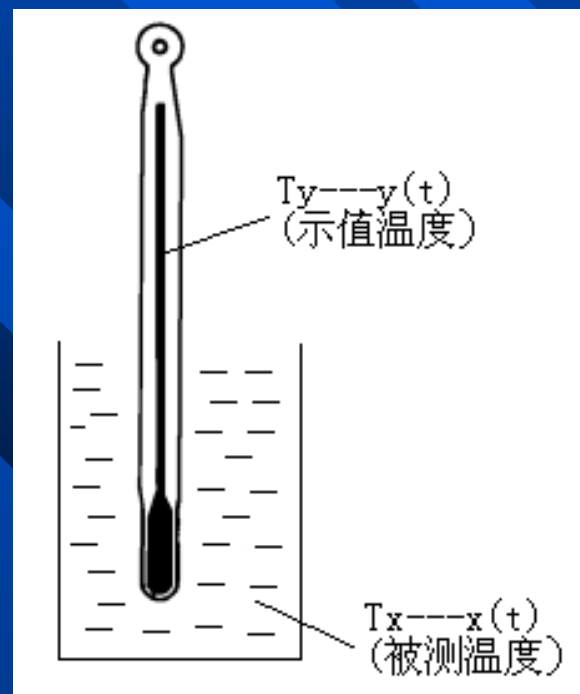
$$\frac{T_x - T_y}{R} = C \frac{dT_y}{dt}$$

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

两边作拉氏变换，
且 $\tau = RC$ 得：

$$\tau s Y(s) + Y(s) = X(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$



(P.166 图 4-16

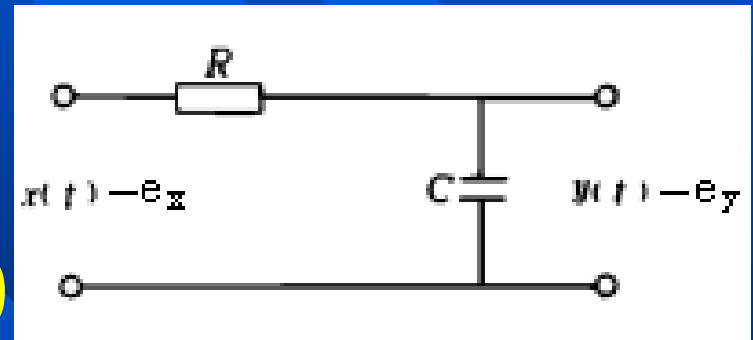
例 2：简单的 RC 电路（电系统）

$$RC \frac{de_y}{dt} + e_y = e_x$$

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

设 $RC = \tau$

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$



(P.166 图 4-16
b)

例 3：无质量弹簧阻尼系统 (机械系统)

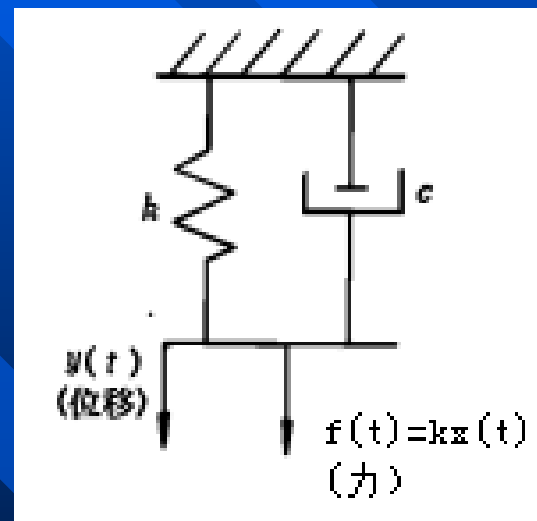
阻尼力 + 弹性力 = 外力

$$C \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t)$$

$$\frac{C}{k} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$\text{令 } \tau = \frac{C}{k}$$

$$\text{则 } H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$



(P.166 图 4-16
a)

二、二阶系统的传递函数及其频率响应

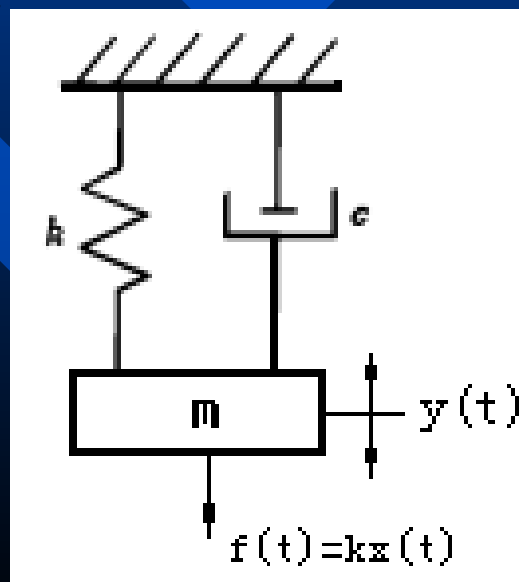
通式:
$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t)$$

灵敏度归一化:
$$\frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

以机械系统的单自由度质量、弹簧、阻尼系统为例
 惯性力 + 阻尼力 + 弹簧力 = 外力

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + C \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = kx(t)$$

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{C}{k} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$



推导过程

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{C}{k} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

令 $2\sqrt{mk} = C'$ (临界阻尼)

$$\frac{C}{C'} = \xi$$

(阻尼比)

{

$\xi < 1$ 欠阻尼

$\xi = 1$ 临界阻尼

$\xi > 1$ 过阻尼

$$\frac{C}{k} = 2 \cdot \frac{C}{2\sqrt{mk}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k/m}} = 2\xi / \omega_n \quad (\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$$\therefore \frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

两边取拉氏变换:

$$\left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \right) Y(s) = X(s)$$

传递函数及频率响应

传递函数 $H(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

频率响应 $H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2] + j2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}$

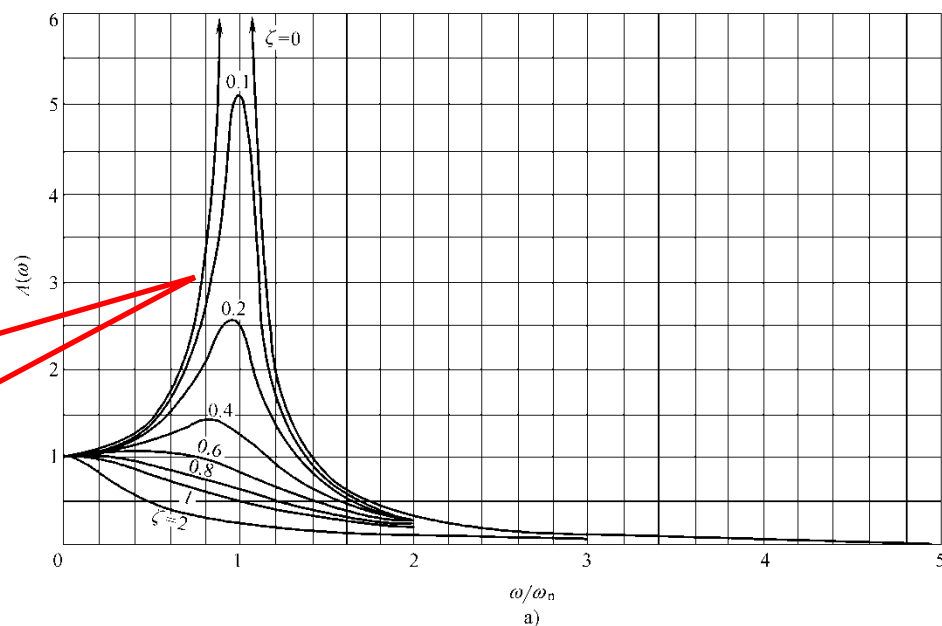
幅频特性 $A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}}$

相频特性 $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$

幅频特性、相频特性

(P.169)

输出与输入
幅值的比值



输出与输入
相位的差

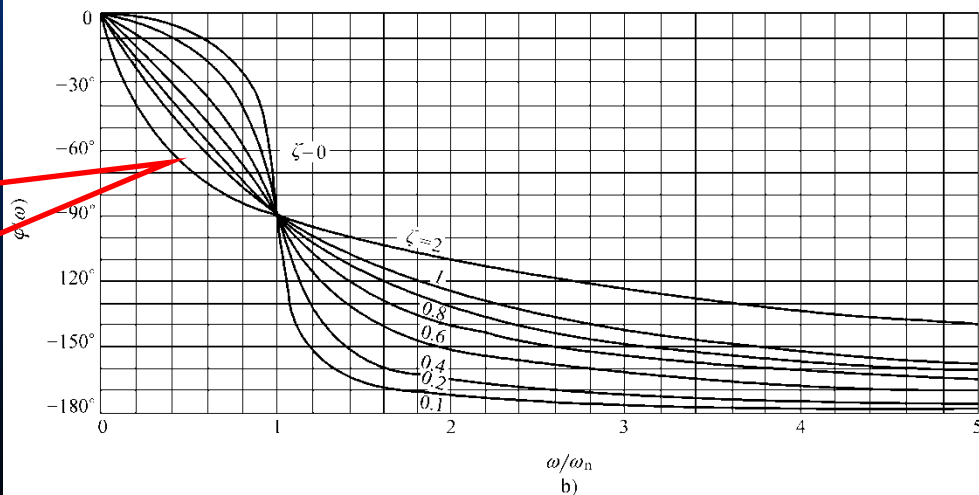


图4-18 二阶系统的幅频及相频特性图

a) 幅频特性 b) 相频特性

计算举例 1——求稳态响应

□ 求周期信号 $x(t) = 0.2\cos(100t-45^\circ)$

通过传递函数为 $(s) = \frac{10}{0.02s+5}$
的装置后所得到的稳态响应。



$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{y_0 \cos(\omega t + \theta_y)}{x_0 \cos(\omega t + \theta_x)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{y_0}{x_0}$$

$$\varphi(\omega) = \theta_y - \theta_x$$

?

?

计算举例 1——求稳态响应

一阶系统:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

二阶系统:

$$H(j\omega) = \frac{1}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2] + j2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

§3-6 一、二阶系统对典型激励的响应

(P. 169)

一、单位脉冲响应函数



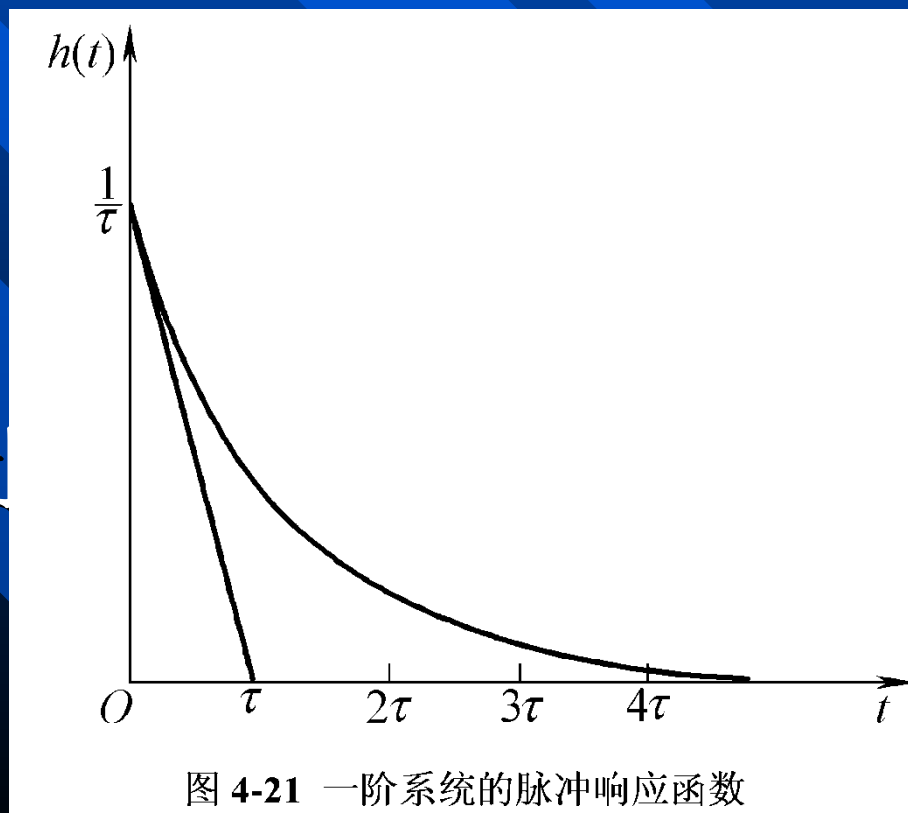
脉冲响应函数与频率响应函数互
为傅里叶变换

1. 一阶系统的脉冲响应函数

■ 一阶系统的脉冲响应函数

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

时间常数越小
过渡过程越短。



2. 二阶系统的脉冲响应函数

■ 二阶系统的脉冲响应函数

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t$$

欠阻尼系数的单位脉冲响应曲线是减幅的正弦振荡曲线，且 ζ 越小，衰减越慢，振荡频率越大。

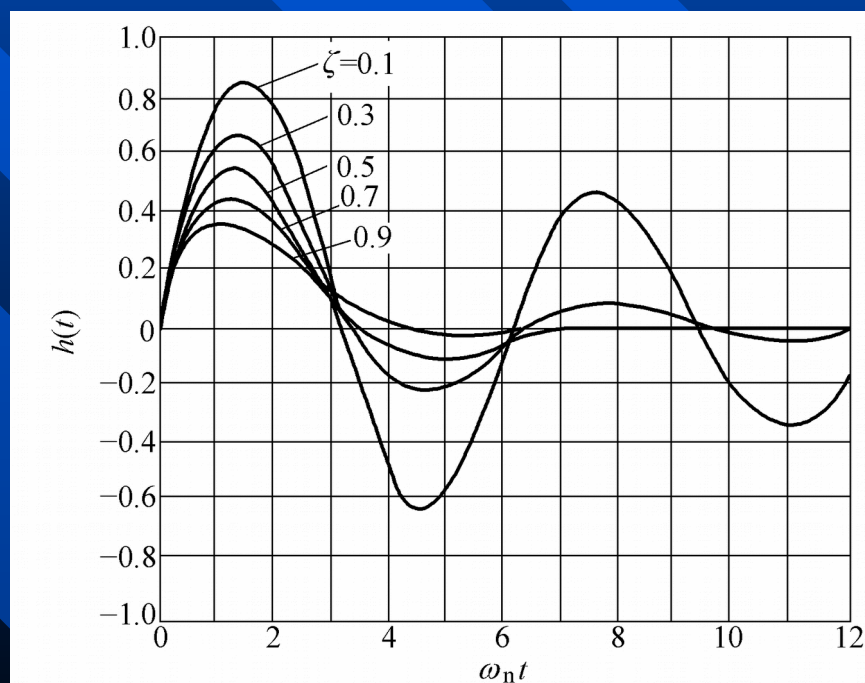
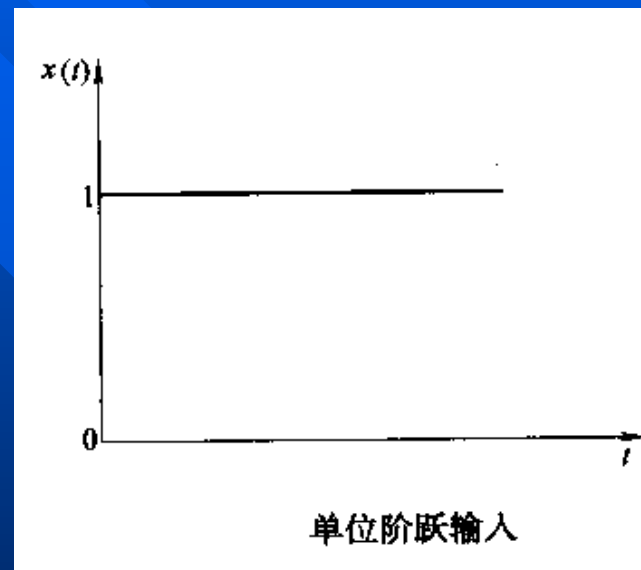


图 4-22 二阶欠阻尼系统的脉冲响应函数

二、单位阶跃响应

输入

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

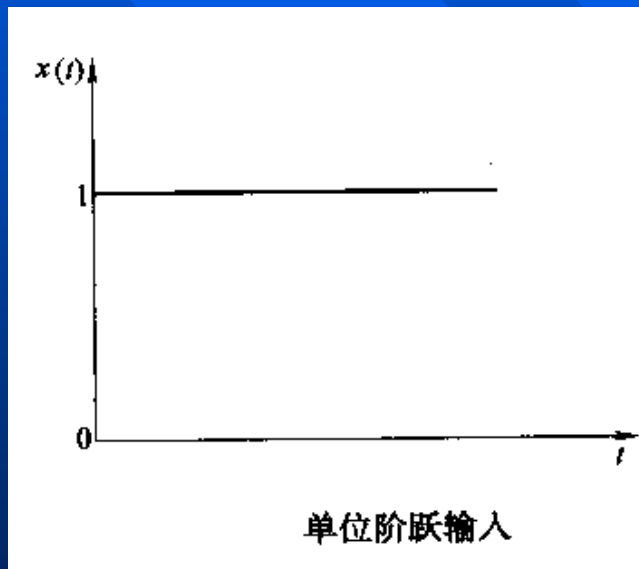


$$\therefore u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt$$

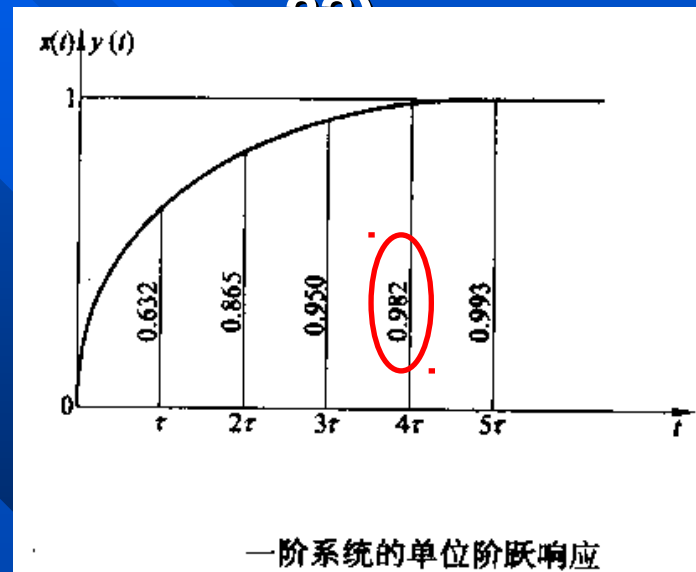
单位阶跃输入下的输出就是系统脉冲响应的积分

1) 一阶系统在 $u(t)$ 激励下, 稳态输出误差理论上为零

(P.171 图 4-22)



→ 一阶系统 →

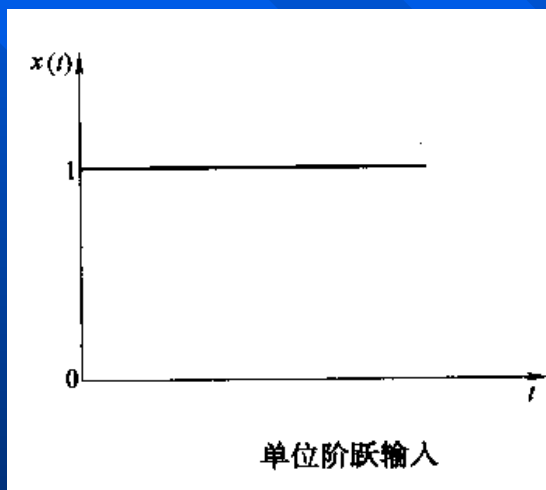


$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

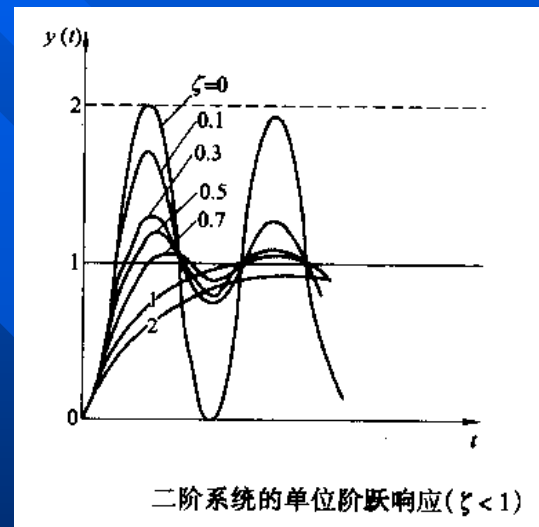
理论上, $t \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow 1$, 达到稳态值, 动态误差为 0;

实际上, $t = 4\tau$, 动态误差小于 2%, 可认为已达到稳态。

2) 二阶系统在 $u(t)$ 激励下, 稳态输出误差为零, 其响应取决于 ζ 和 ω_n



→ 二阶系统 →



ω_n 越高, 测试系统的响应越快;
 ζ 影响超调量和振荡次数

(P.172 图 4-24)

- $\zeta=0$ 超调量为 100%, 作无衰减振荡, 达不到稳态
- $\zeta>1$ 无振荡, 相当于两个一阶环节的串联, 这时虽不振荡, 但需经过较长时间才能达到稳态
- $\zeta=0.6\sim0.8$ 最大超调量 $<10\%\sim2.5\%$

若允许动态误差为 5%~2%, 则调整时间为最短

三、单位斜坡输入响应

(P.172-17

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$r(t) = \int_0^{\infty} u(t) dt$$

一阶响应

$$y(t) = t - \tau(1 - e^{-t/\tau})$$

不论是一阶还是二阶测试装置， $y(t)$ 与 $x(t)$ 总是差一恒定值 —— 存在稳态误差

若 $\tau \uparrow$ ——— 稳态误差 \uparrow
 $\omega_n \downarrow$ 、 $\zeta \uparrow$ —— 稳态误差 \uparrow

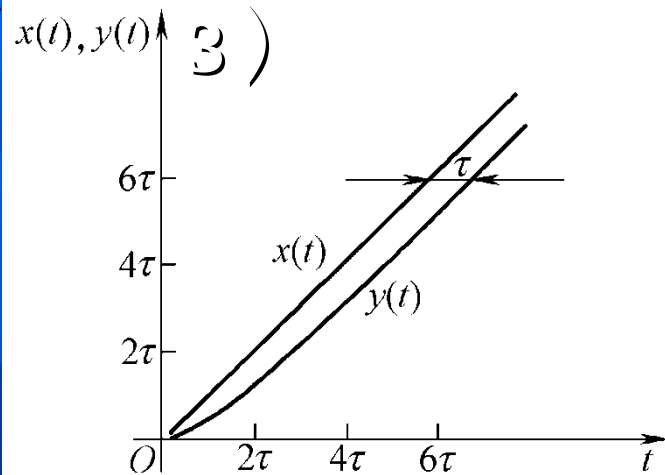


图 4-25 一阶系统的斜坡响应

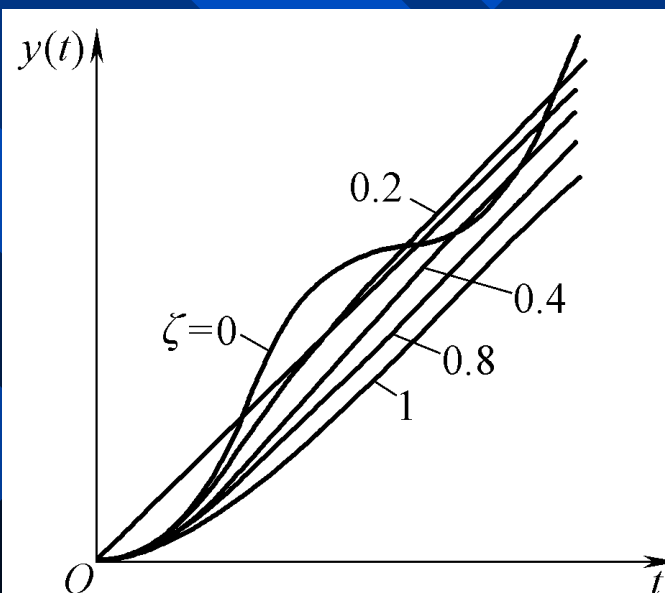
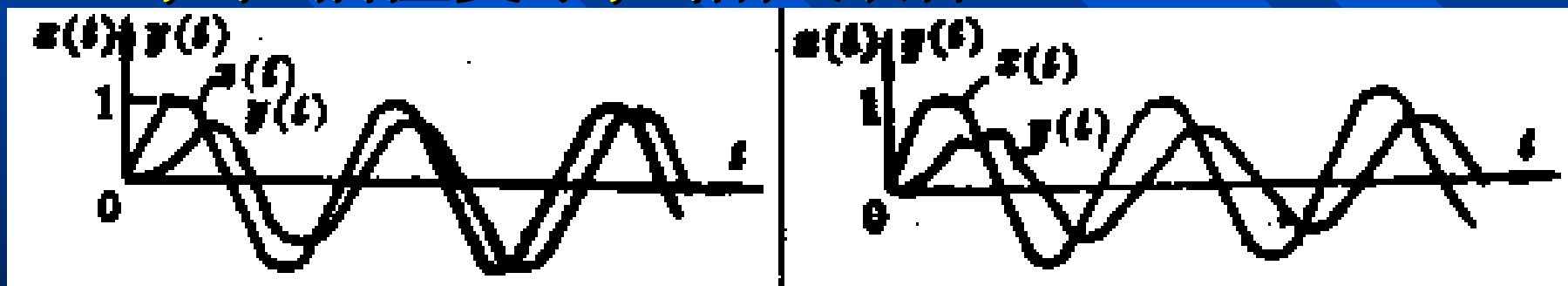


图 4-26 二阶系统的斜坡响应

四、正弦激励的响应

一、二阶测试系统的正弦激励响应稳态后输出是与激励同频的正弦函数，但幅值变小，相位滞后。



用不同频率
的正弦信号 →

测试系统

→

稳态响应

⇒

测试系统的
动态特性

幅值减小
相位滞后

五、系统对任意输入的响应

对于任意信号的输入，可将任意信号看成是许多脉冲信号的叠加。

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s) \times H(s)$$

卷积计算非常麻烦，可利用 $h(t)$ 同 $H(s)$ 、 $H(j\omega)$ 的关系以及卷积定理，以大大简化计算。

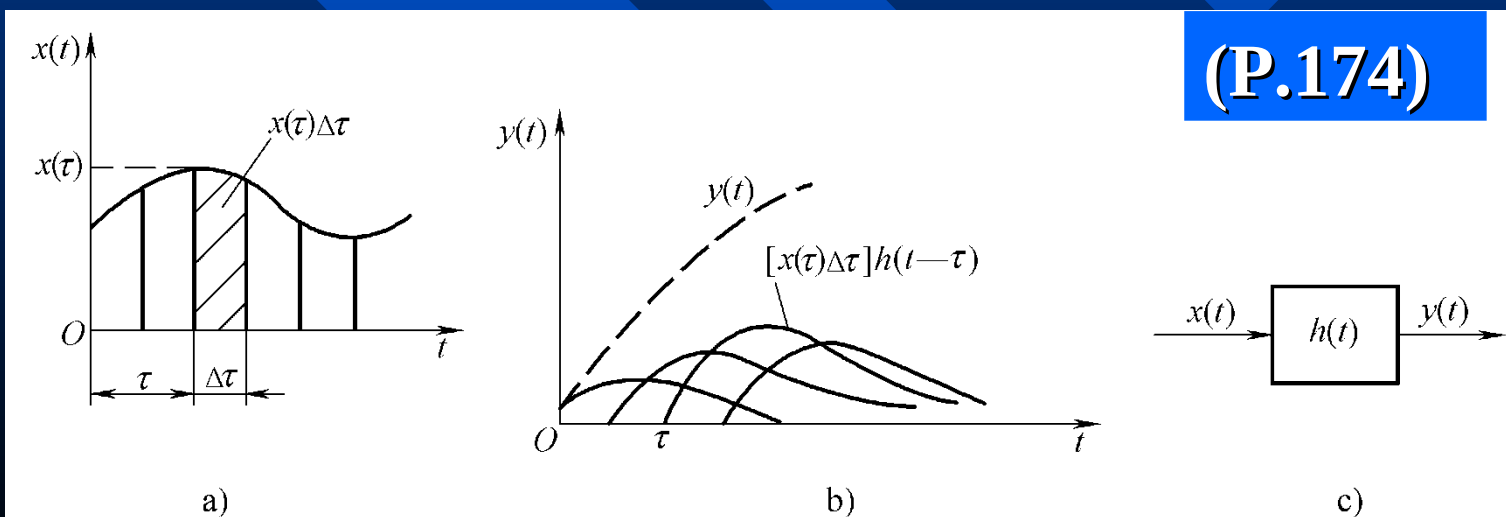


图 4-27 系统任意输入及其响应

a) 输入 b) 响应 c) 系统传输

§3-7 系统不失真测试的条件

(P. 174)

一、动态测试不失真条件

(P.175 图 4-28)

$$\begin{array}{ccccc}
 x(t) \rightarrow & \boxed{\text{测试系统}} & \rightarrow & y(t) = A_0 x(t - t_0) \\
 \updownarrow & & & \updownarrow \\
 X(j\omega) & & & Y(j\omega) = A_0 e^{-j\omega t_0} X(j\omega)
 \end{array}$$

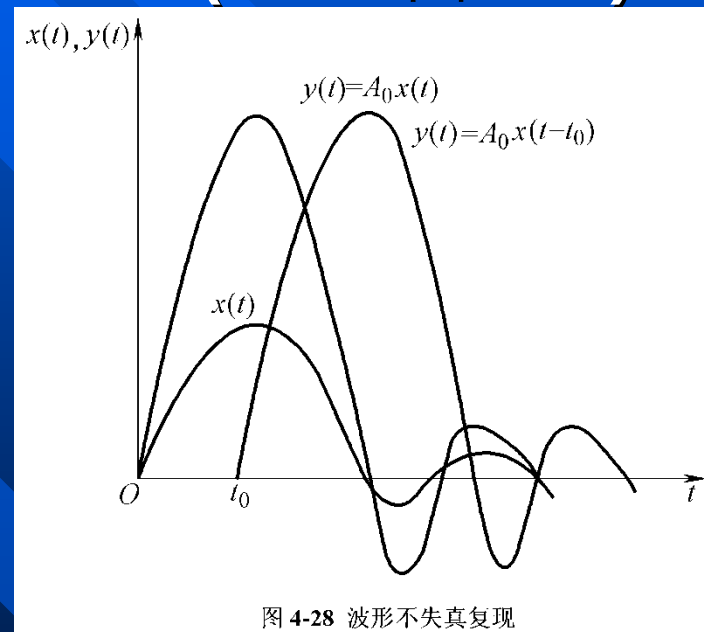


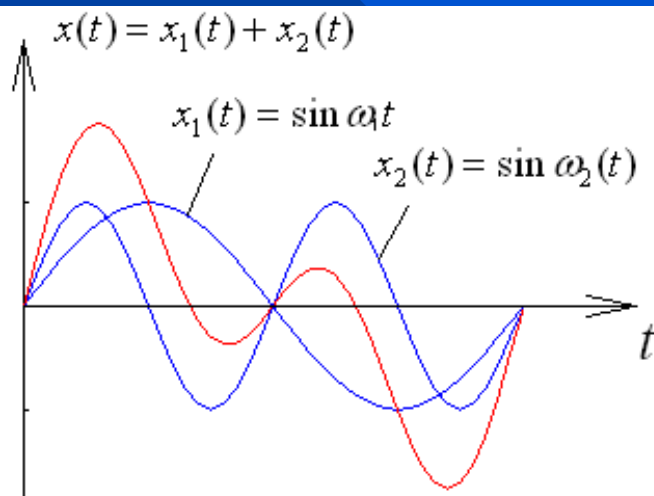
图 4-28 波形不失真复现

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = A_0 e^{-j\omega t_0} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{动态测试不失真条件为} \begin{cases} A(\omega) = A_0 = \text{常数} \\ \varphi(\omega) = -t_0\omega \text{ 或 } 0 \end{cases}$$

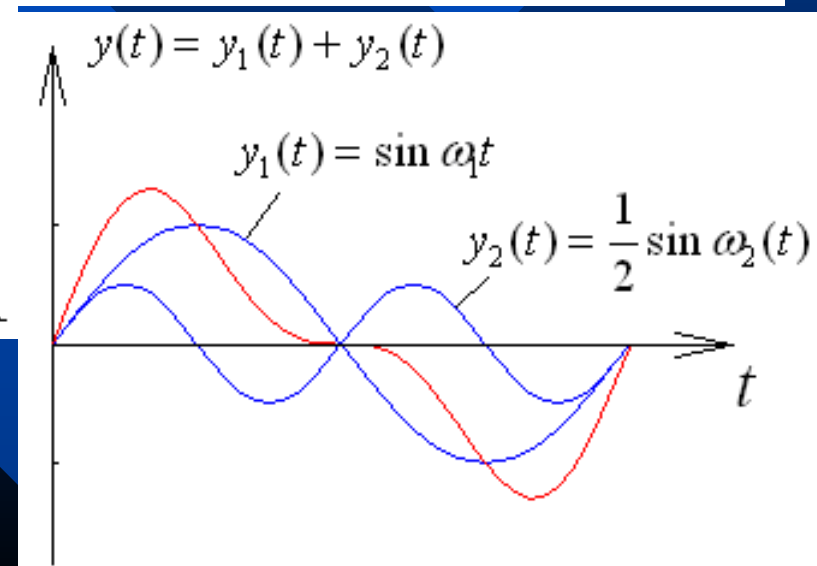
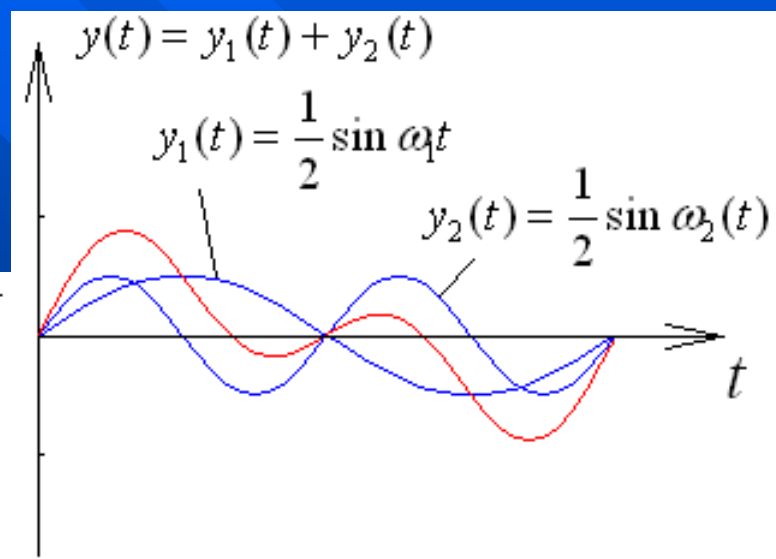
a. $A(\omega) \neq \text{常数}$ (若令 $\varphi(\omega) = 0$)

$A(\omega) = \text{常数}$



传
感
器

$A(\omega) \neq \text{常数}$



幅值失真

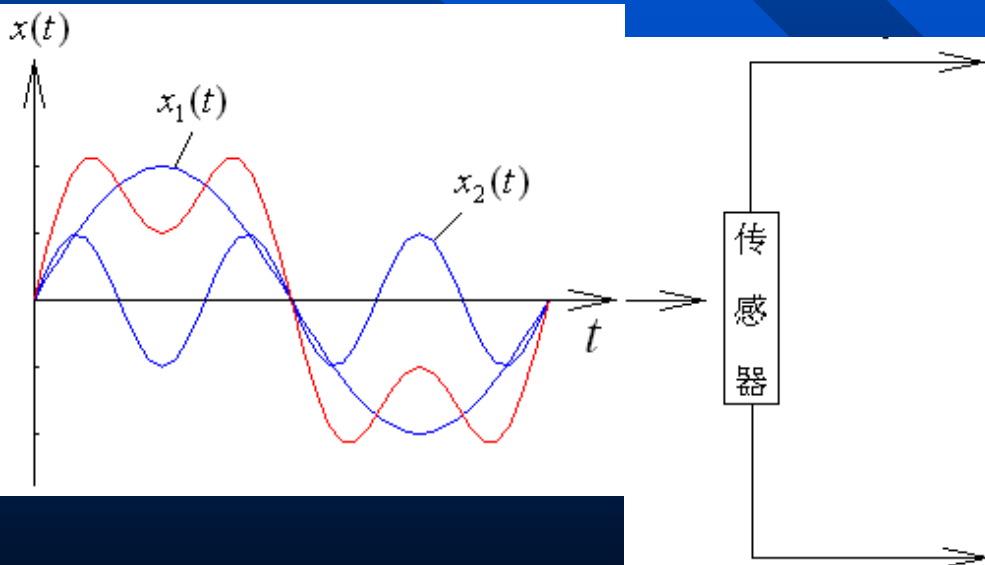
■ $A(\omega) \neq \text{常数} \Rightarrow \text{幅值失真}$

这种失真对多频成分信号的影响是严重的，而对于单频成分的信号只导致幅值测量的线性误差。

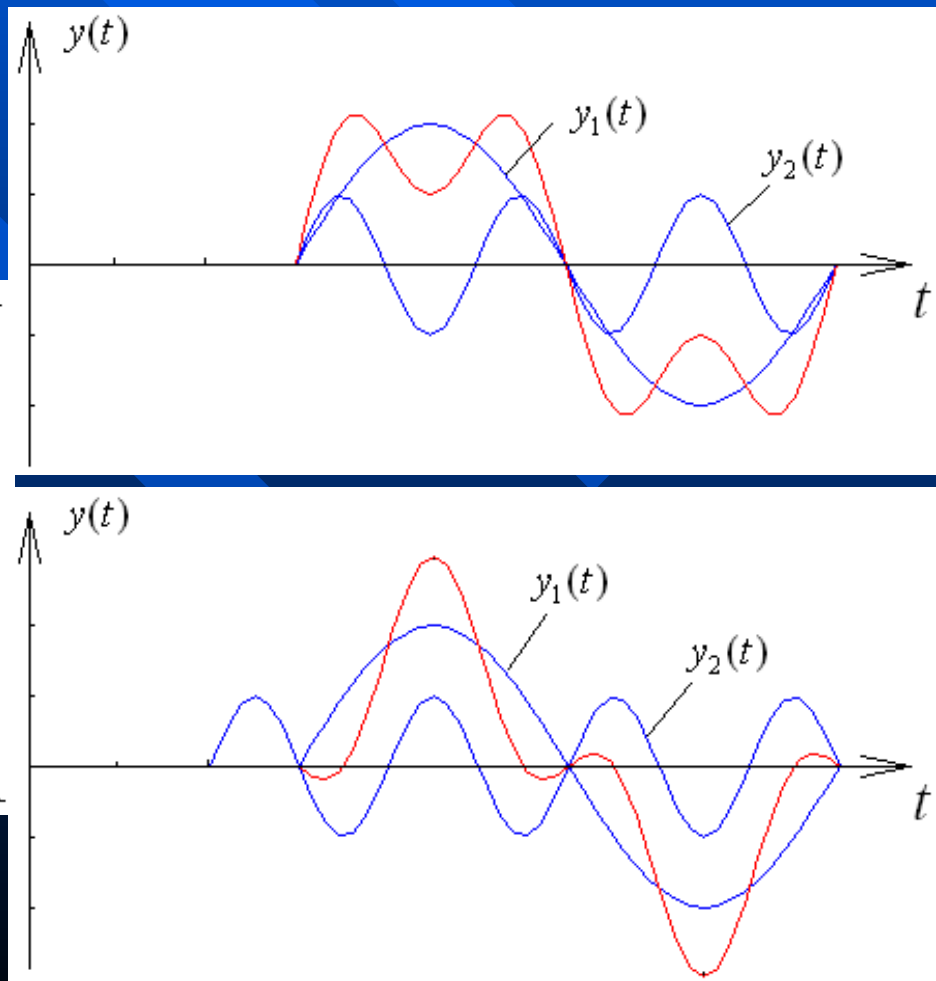
$$\Delta_A = \left| \frac{A_0 - A(\omega)}{A_0} \right| \times 100\%$$

b. $\varphi(\omega) \neq 0$ 或 $\varphi(\omega) \neq -t_0\omega$
(若令 $A(\omega)=1$)

$$\varphi(\omega) = -t_0\omega$$



$$\varphi(\omega) \neq -t_0\omega$$



相位失真

■ $\varphi(\omega) \neq -t_0 \omega$ 或 $0 \Rightarrow$ 相位失真

这种失真对多频信号测量就会造成失真，但是如果是单频信号，则一般可忽略相位失真。如果只需测得信号的有效值或功率，则相位失真对多频信号也无影响。

对于{ 控制系统用的测量
测量具体结构的动特性 则要求 $\begin{cases} A(\omega) = A_0 \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$ 均满足

信号中不同频率成分通过测试装置后的输出

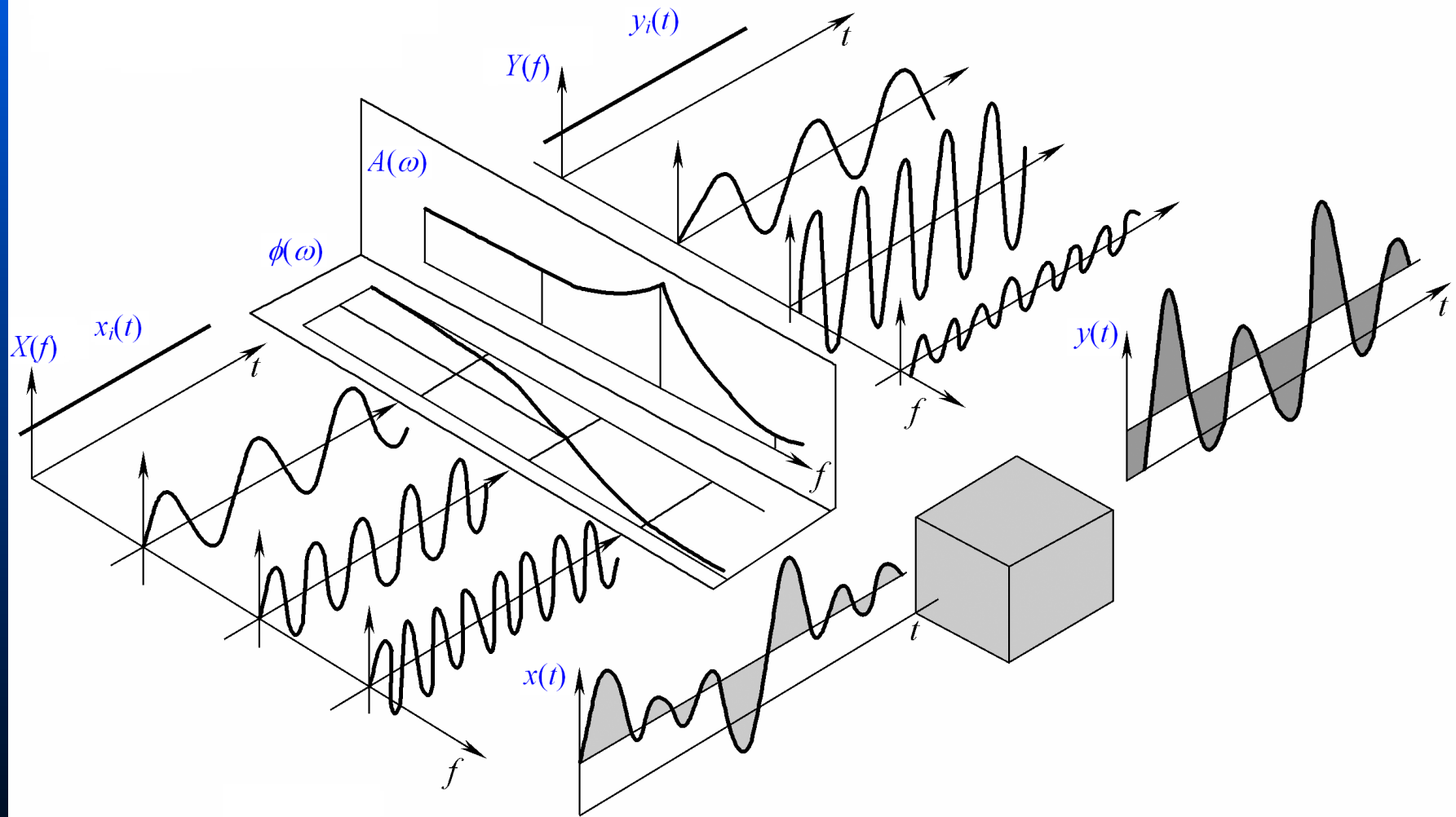


图 4-29 信号中不同频率成分通过系统后的输出

二、动态特性参数讨论

(根据动态测试不失真条件讨论)

1 一阶系统: 特性参数 τ

■ 从幅频特性看

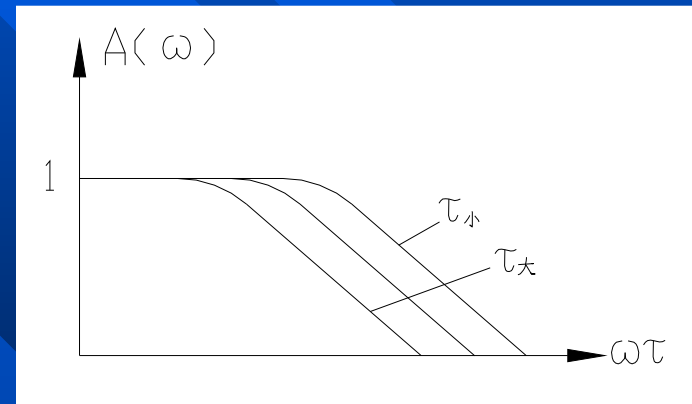
$$\therefore A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

\therefore 应工作在 $\omega\tau \ll 1$

$$A(\omega) \approx 1$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau) \approx -\omega\tau$$

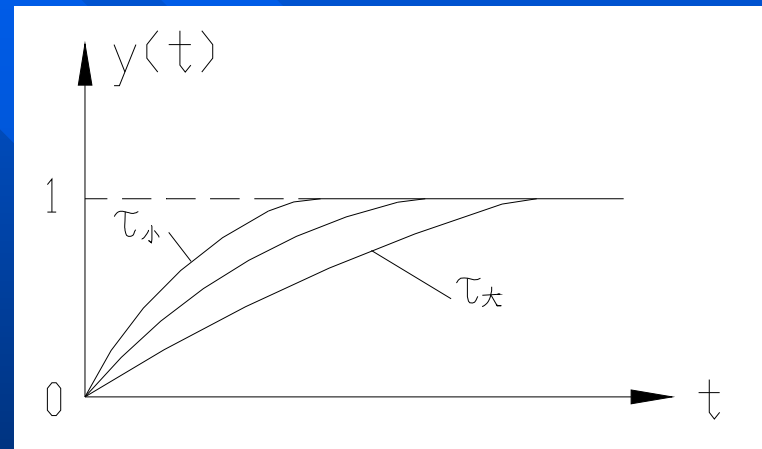
τ 越小, 保持在一定精度下幅值不失真的可用频带越长。



参数讨论 (二)

■ 从阶跃响应看

τ 越小，上升越快，达到稳态输出的时间越短，故原则上 τ 越小越好。



$$\tau = \frac{a_1}{a_0} \begin{cases} a_1 - \text{阻尼}, a_1 \downarrow, \text{稳定性差} \\ a_0 - \text{刚度}, \text{静态反映的是灵敏度}, S = \frac{b_0}{a_0} \therefore a_0 \uparrow, S \downarrow \end{cases}$$

希望 τ 越小越好，但受到灵敏度和稳定性限制，要适当选择。

参数讨论 (三)

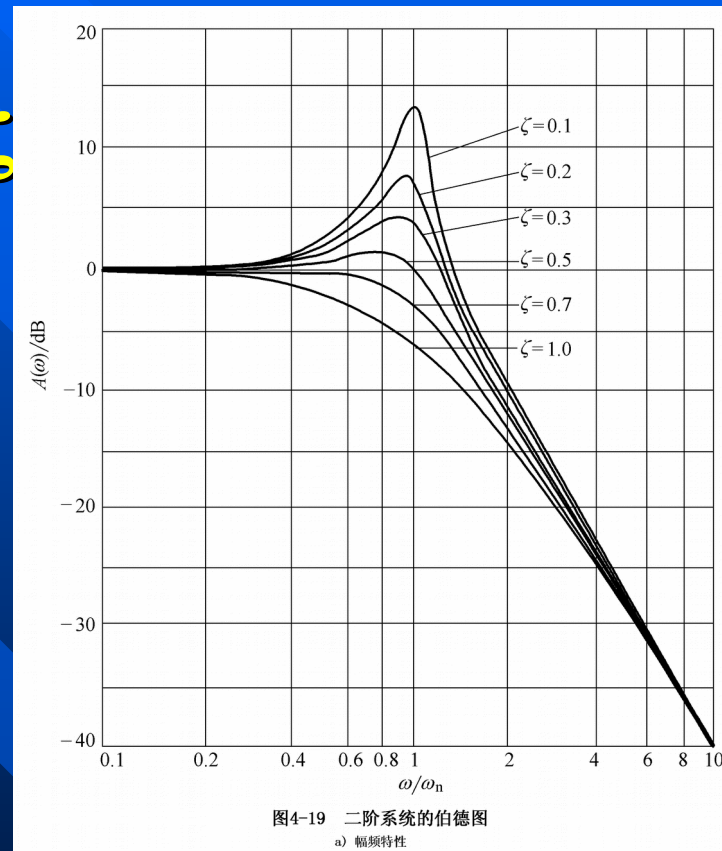
2 二阶系统: 特性参数 ω_n 、 ζ

1) 讨论 ω_n

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}}$$

当 $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ 时,

$A(\omega) = A_0$, 且这时 $\varphi(\omega) - \omega$ 接近直线。
 ω_n 越大, 可用频带越宽; 但 $\omega_n \uparrow k \uparrow S \downarrow$
 ω_n 受灵敏度限制, 只能适当高
一般 $\omega_n \geq (3 \sim 5) \omega$



(P.17
0)

参数讨论 (四)

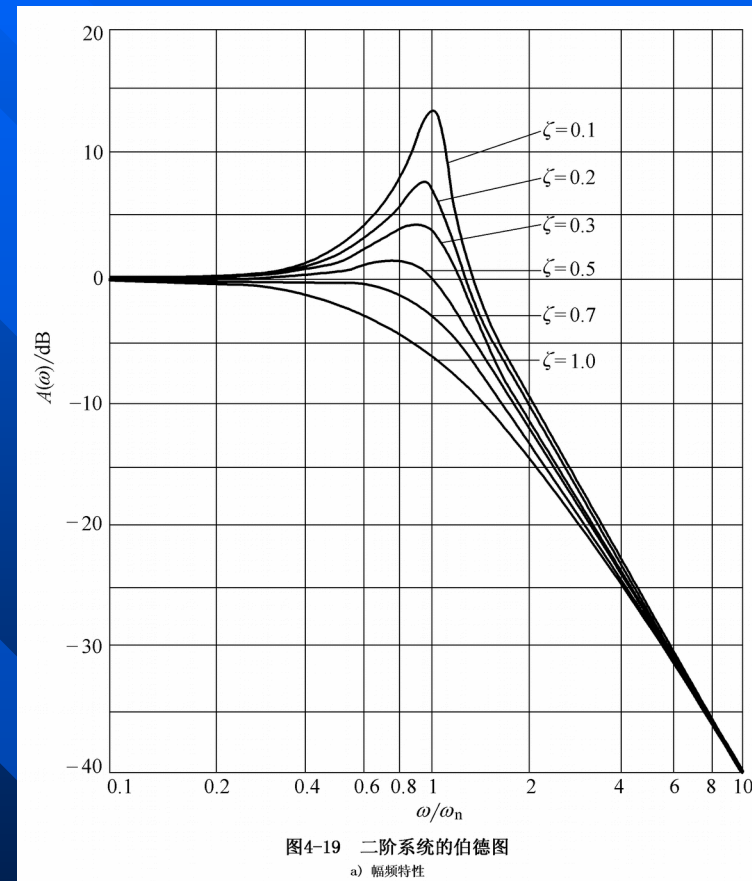
2) 讨论 ζ

a、从幅频特性看

当 $\zeta=0.6\sim0.8$ 时，在一定精度下

a) $A(\omega)=A_0$ 的频带较长，即可用频带较长。

b) 过共振区不致有过大的过载。因为这时的曲线共振处幅值较小，如果有夹杂 ω_n 附近频率信号时也不会过载。



(P.17
0)

b. 从相频特性看

当 $\zeta=0.6\sim0.8$ 时，特性曲线在 $\omega \ll \omega_n$ 区接近一条斜直线，满足一定精度下相位不失真的可用频带最长。

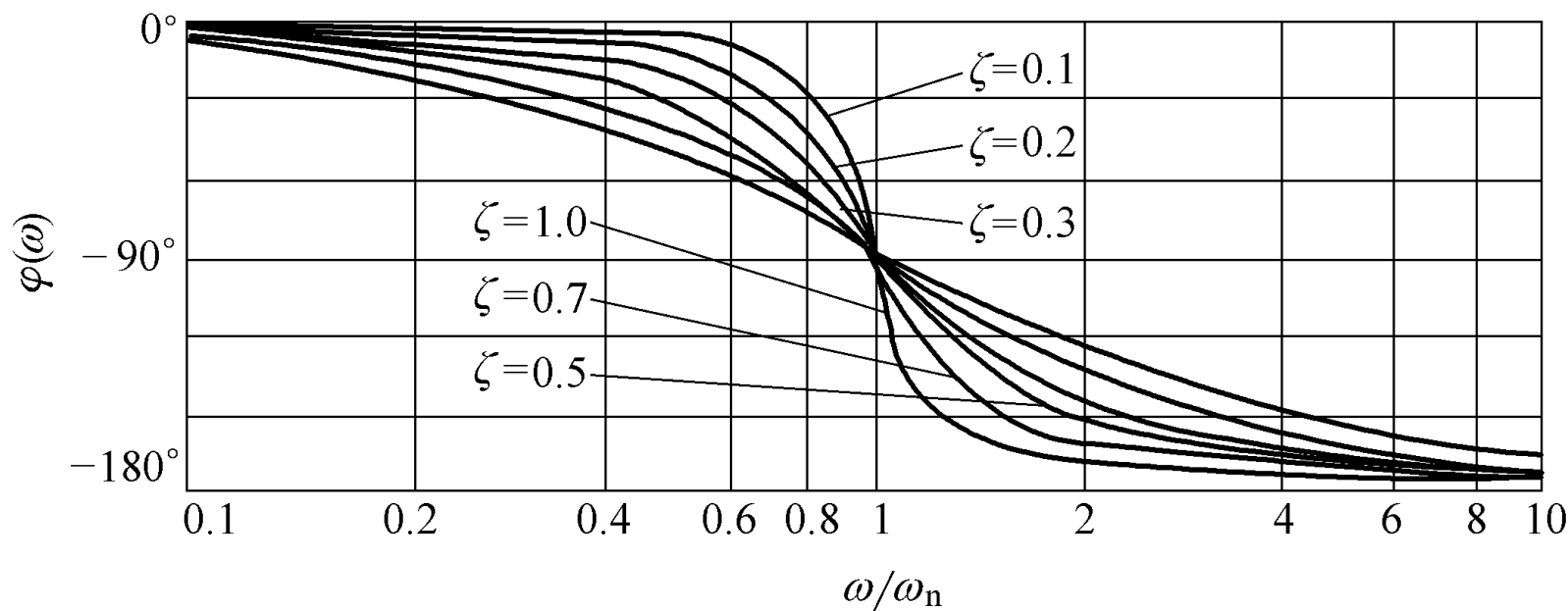


图4-19 二阶系统的伯德图

b) 相频特性

c. 阶跃响应看

当 $\zeta=0.6\sim0.8$ 时，过冲量（超调量）不大于 $2.5\%\sim10\%$ ，趋于稳态输出的时间最短，且这时的稳定性最好。(P.172)

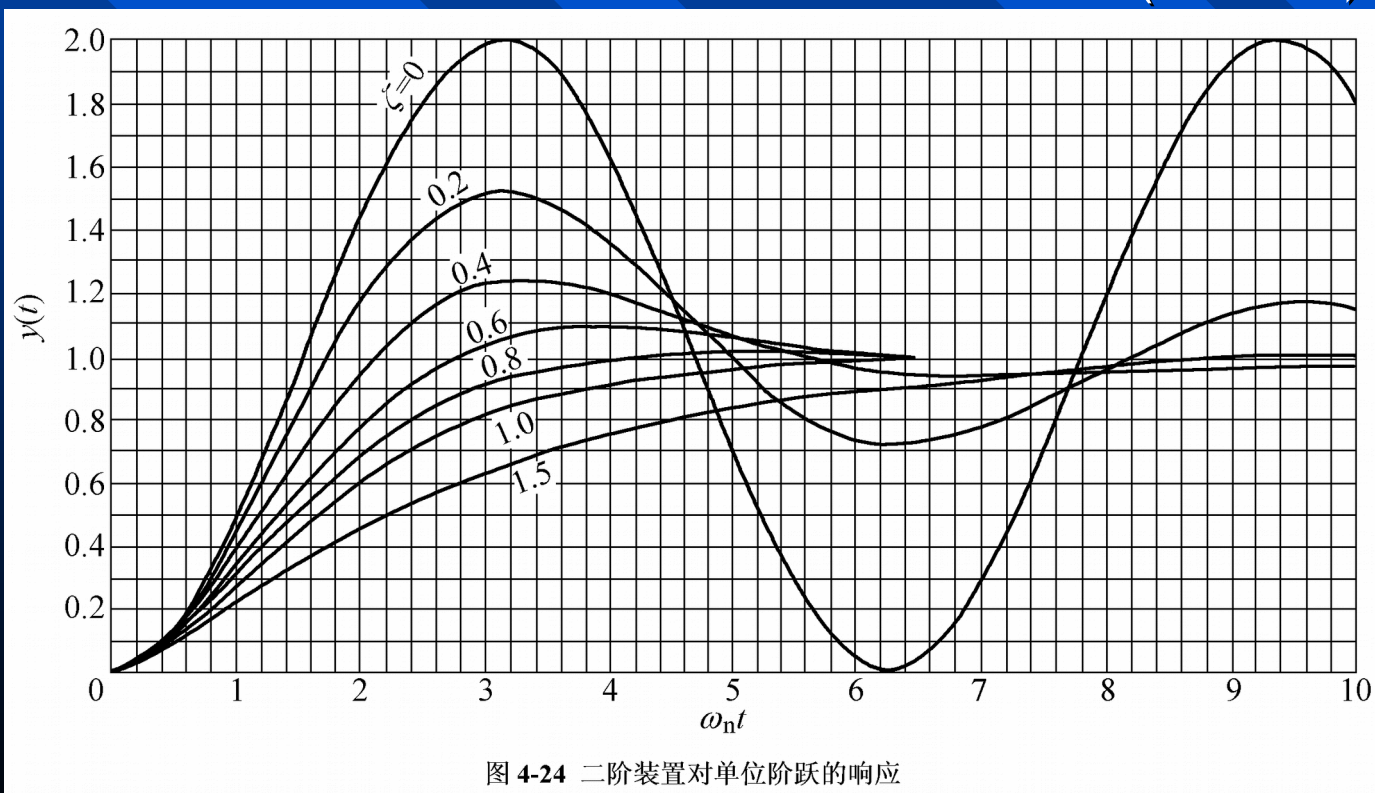


图 4-24 二阶装置对单位阶跃的响应

计算举例 2——求可用频带（工作频率范围）

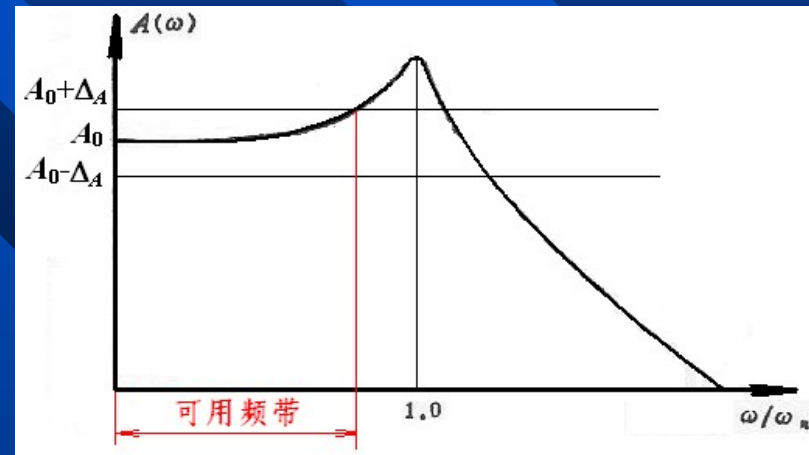
已知某二阶系统传感器的固有频率为 20kHz ，阻尼比 $\zeta = 0.1$ ，若要求传感器的输出幅值误差小于 3% ，试确定该传感器的工作频率范围？

$$\Delta_A = \left| \frac{A_0 - A(\omega)}{A_0} \right| \times 100\% \leq 3\%$$

$$\because A_0 = 1$$

$$\therefore 0.97 \leq A(\omega) \leq 1.03$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}}$$



§3-8 系统负载效应

(P. 176)

负载效应

- 组成系统的内部各环节相互连接存在相互作用关系，后续环节会从前一环节吸收和消耗能量，直接影响到前一环节信息输出的结果，这就是测控系统的负载效应。
- 同时由于各环节之间彼此存在能量交换和相互影响，以致系统的传递函数不再是各组成环节传递函数的简单叠加（并联）或连乘（串联）。

负载效应对测量结果的影响

$$U_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$U_1 = \frac{R_2 R_m}{R_1 (R_m + R_2) + R_m R_2} E$$

- U_0 — 未接入电压表测量电路时，电阻 R_2 上的电压降
- U_1 — 接入电压表测量电路时，电阻 R_2 上的电压降

电阻传感器，阻值随被测物理量变化

负载电阻

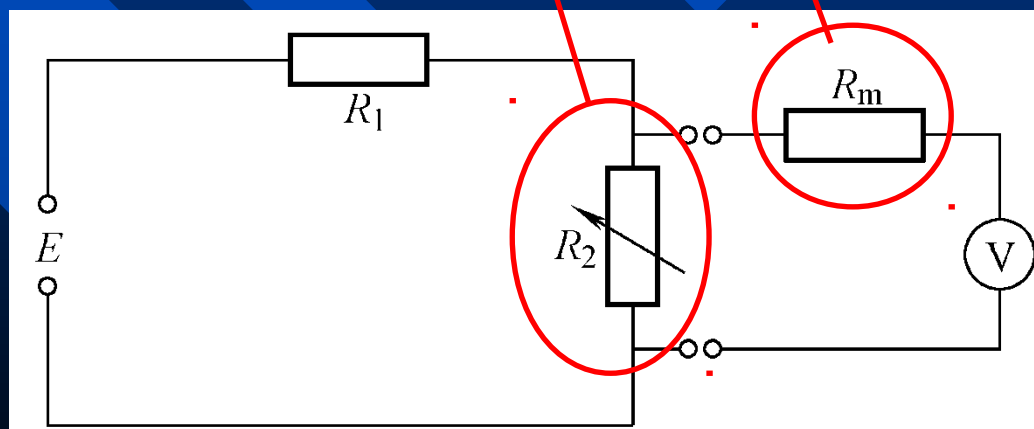


图 4-30 电阻传感器直流测量电路

P.177 举例计算

- 负载效应对测量结果的影响是很大的

设 $R_1 = 100\text{K}\Omega$

$R_2 = 150\text{K}\Omega$

$E=150\text{V}$

得 $U_0=90\text{V}$

若 $R_m = 150\text{K}\Omega$

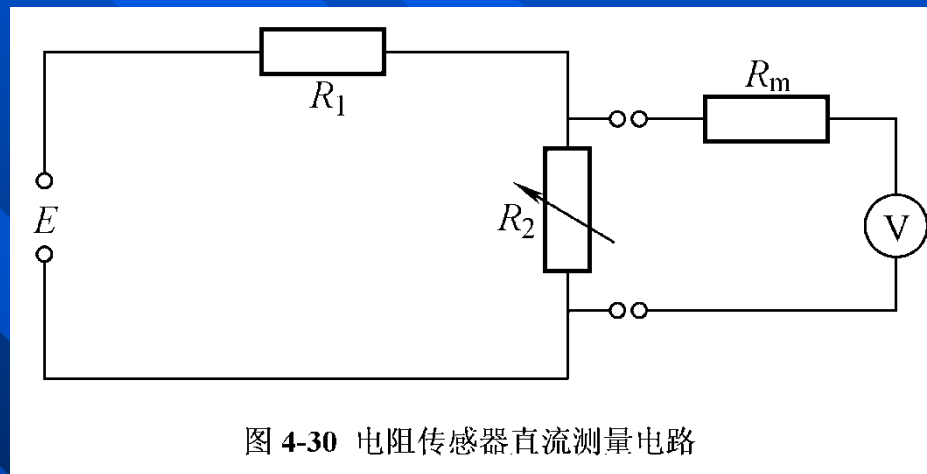
则 $U_1=64.3\text{V}$

↓
28.6%

若 $R_m = 1\text{M}\Omega$

则 $U_1=84.9\text{V}$

↓
5.76%



负载效应改变传递函数

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s} \quad \tau_1 = R_1 C_1$$

$$H_2(s) = \frac{1}{1 + \tau_2 s} \quad \tau_2 = R_2 C_2$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + (\tau_1 + \tau_2 + R_1 C_2)s + \tau_1 \tau_2 s^2}$$

$$H(s) \neq H_1(s)H_2(s)$$

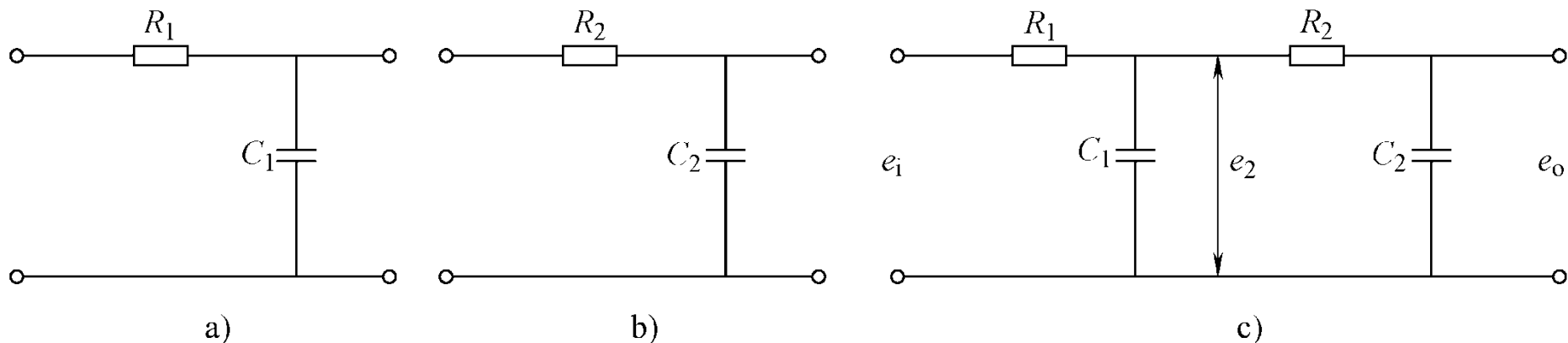


图 4-31 两个一阶环节的联接

a) 低通滤波器一 b) 低通滤波器二 c) 串联系统

负载效应改变系统固有频率

- 这种附加质量会导致系统固有频率的变化;
- 联接点的连接刚度也可等效为一个弹簧, 这种弹簧和壳体质量共同形成了附加的质量 - 弹簧振动系统, 使系统的自由度数增加, 引入了新的固有频率。

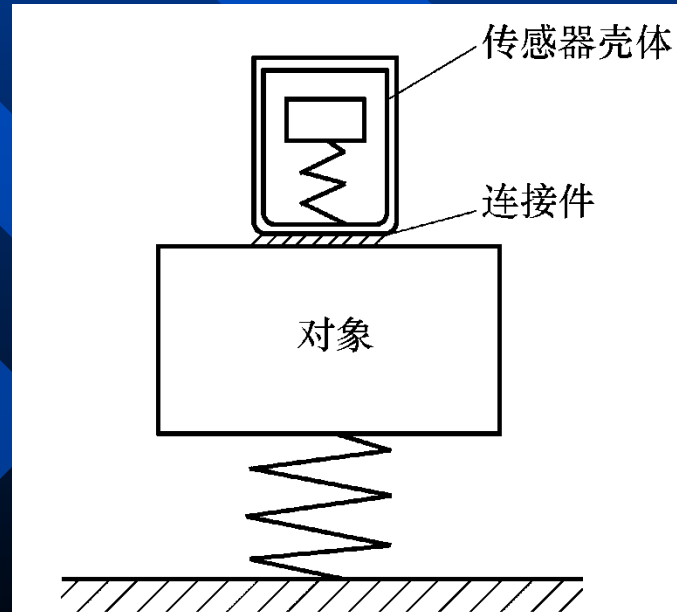


图 4-32 传感器与对象联接时所形成的附加自由度

减小负载效应误差的措施

- 1 提高后续环节（负载）的输入阻抗。
- 2 在原来两个相连接的环节中，插入高输入阻抗、低输出阻抗的放大器，以便减小从前一环节吸取的能量，减轻负载效应的影响。
- 3 使用反馈或零点测量原理，使后面环节几乎不从前面环节吸取能量。

总之，在组成系统时，要充分考虑各组成环节之间连接时的负载效应，并合理地加以解决，尽可能地减小负载效应的影响。

系统及系统特性分析基础总结

工程上——线性时不变系统

数学上——常系数线性微分方程式

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \\ = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

(P.156 式 (4-1))

总结——线性时不变系统的两个主要性质：

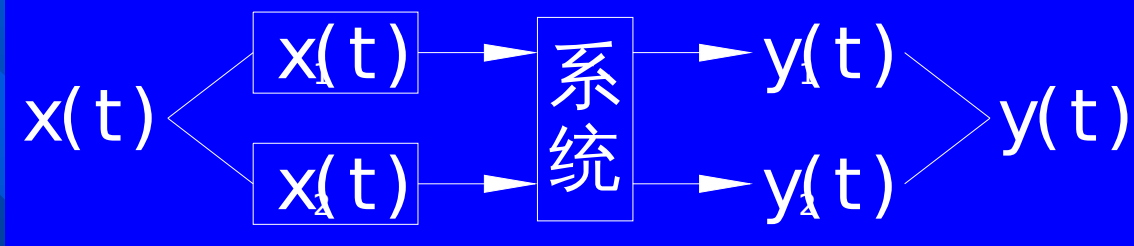
1 叠加性

若 $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

则

$$x_1(t) \pm x_2(t) \rightarrow y_1(t) \pm y_2(t)$$



当一个系统有几个激励同时作用时，那么它的响应就等于这几个激励单独作用的响应之和，也即各个输入所引起的输出是互不影响的。

总结——线性时不变系统的两个主要性质:

2 频率保持性 (或频率不变性)

$$x(t, f_1, f_2) \rightarrow \text{系统} \rightarrow y(t, f_1, f_2)$$

若系统的输入为某一频率的谐波信号, 则系统的稳态输出将为同一频率的谐波信号。

$$\text{若 } x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_x) \text{ 或 } x(t) = x_0 e^{j\omega t}$$

$$\text{则 } y(t) = B \cos(\omega t + \varphi_y) \text{ 或 } y(t) = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

总结——测试系统的动态特性

动态特性 —— 测试系统在随时间快速变化信号激励下，输出 - 输入的关系。

或系统对激励的响应特性。

动态误差包括瞬态动态误差和稳态动态误差，动态测试中的两个重要特征是时间响应和频率响应。

总结——动态特性的三种描述方法:

传递函数 —— 动特性的复数域描述

频率响应函数 —— 动特性的频域描述

采用频率响应法（正弦输入）研究

脉冲响应函数 —— 动特性的时域描述

采用瞬态响应法（脉冲、阶跃、斜坡等输入）研究

总结——传递函数

在初始值均为零时，输出 $y(t)$ 的拉氏变换和输入 $x(t)$ 的拉氏变换之比。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

总结——频率响应函数

对于稳定系统，输出 $y(t)$ 的单边傅里叶变换和输入 $x(t)$ 的单边傅里叶变换之比。

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{X_0 e^{j\omega t}} = \frac{\text{稳态正弦输出}}{\text{正弦输入}}$$

其物理意义是：系统输入一正弦信号，稳态下输出与输入之比（包括幅值比和相位差）。

$H(j\omega)$ 与 $H(s)$ 的关系和区别

1 关系：从形式上看， $H(s)$ 的 $s \rightarrow j\omega$ 代入得到 $H(j\omega)$ ，故 $H(j\omega)$ 是 $H(s)$ 的一个特例。

2 区别：(P.163)

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 其输入并不限于正弦激励，而且它不仅决定了系统的稳态性能，同时也决定了瞬态性能；

$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ 是正弦激励下，系统稳态后的输出与输入之比。

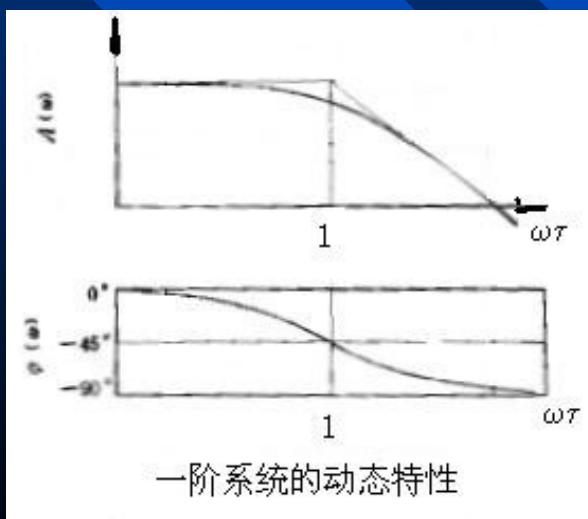
传递函数在物理概念上较难建立相应的系统，而频率响应函数物理概念明确，因此频率响应函数是实验研究系统的重要工具。

总结——时域描述

- 脉冲响应函数
- 阶跃响应函数
- 斜坡响应函数

总结——一阶系统的频率响应

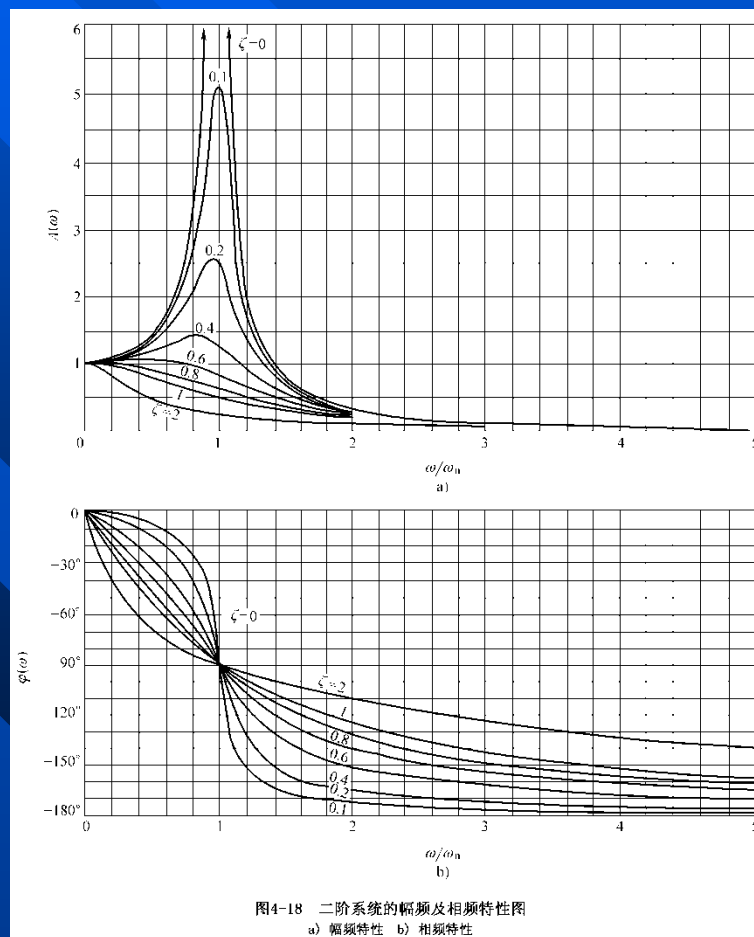
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad \begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau) \end{cases}$$



总结——二阶系统的频率响应

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$



总结——环节的串联

若两个环节

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

$$A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

若 n 个环节

$$H(s) = \prod_{i=1}^n H_i(s)$$

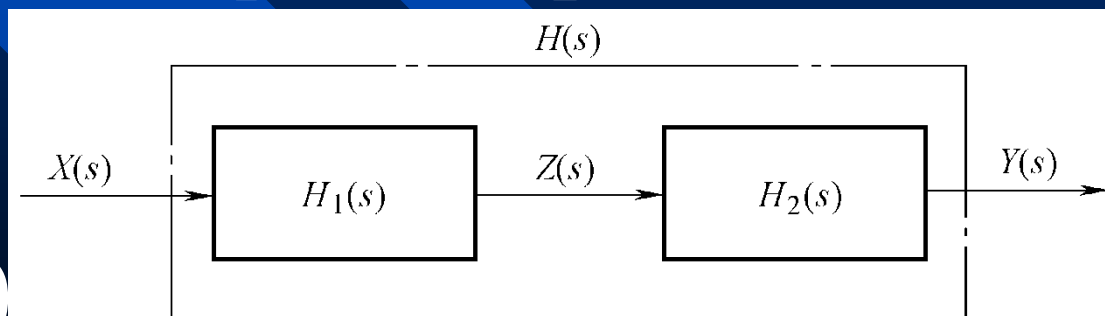


图4-5 两环节的串联

总结——环节的并联

若两个环节

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

若 n 个环节

$$H(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s)$$

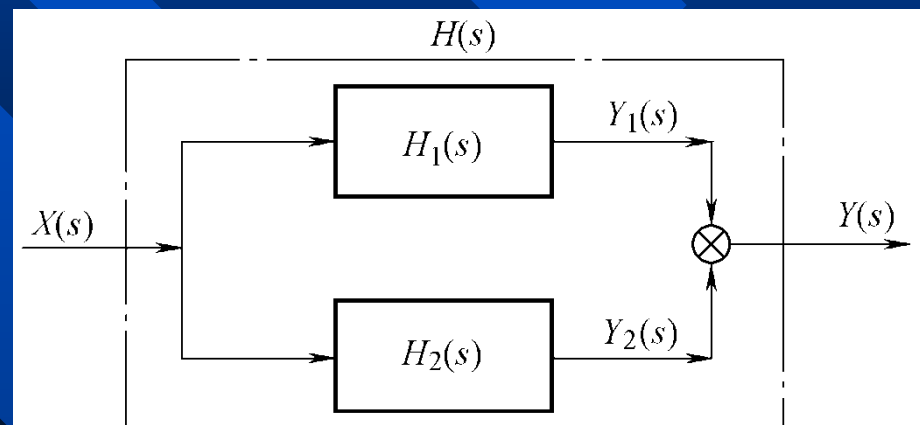


图4-6 两环节的并联

总结—— 反馈环节

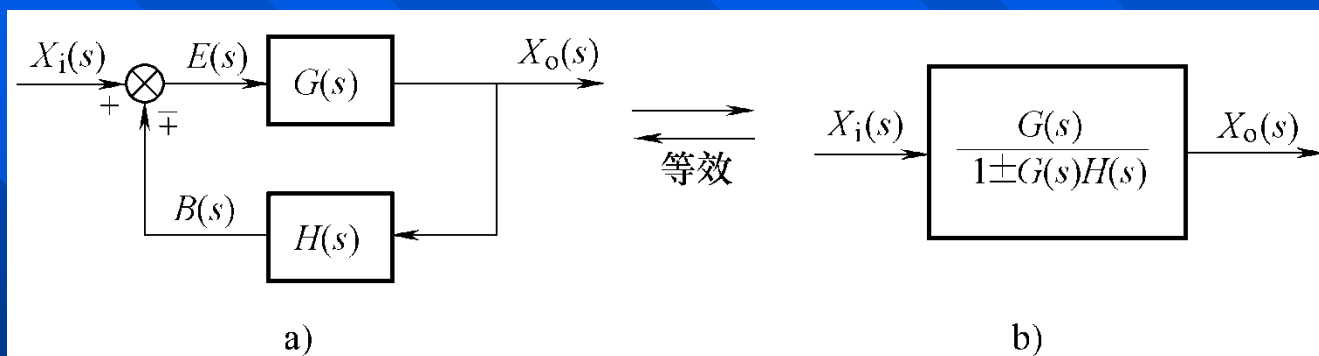


图4-7 反馈环节等效变换
a) 反馈联接 b) 等效传递函数

系统闭环传递函数

$$G_B(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

总结——实现不失真测试条件

$$A(\omega) = A_0 = \text{常数}$$

$$\varphi(\omega) = 0 \quad \text{无延时}$$

$$\varphi(\omega) = -t_0\omega \quad \text{有延时}$$

二阶系统阻尼比多采用 $\zeta = 0.6 \sim 0.8$

- 幅频特性
- 相频特性
- 阶跃响应

