§3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

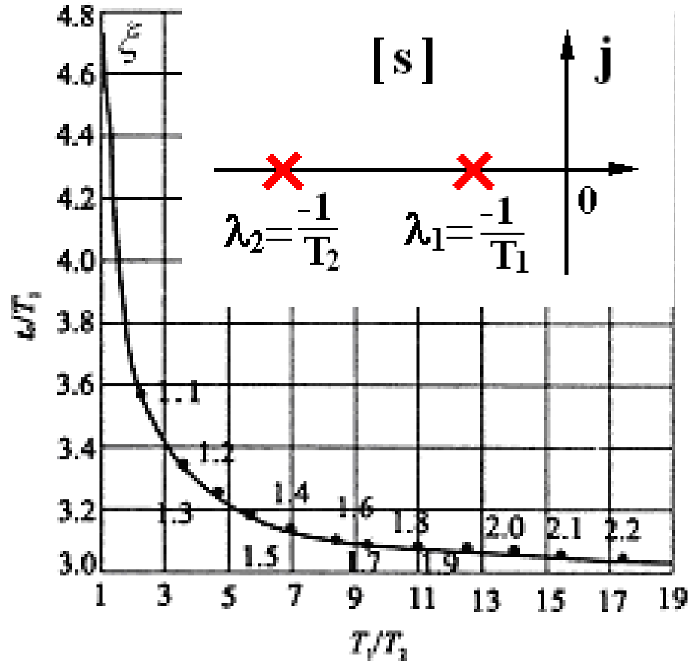
$$\Phi(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad \xi \geqslant 1$$

$$T_1=\frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{1}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}$$

$$T_2=\frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{1}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}} \qquad T_1>T_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} T_1/T_2 \\ \xi=\dfrac{1+T_1/T_2}{2\sqrt{T_1/T_2}} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{P57 图3-7}} \frac{t_s}{T_1}$$

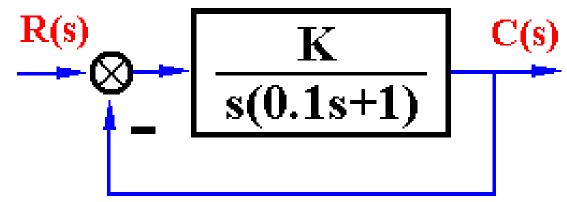
$$t_s=\left(\frac{t_s}{T_1}\right)T_1$$



§3.3.3 典型欠阻尼二阶系统动态性能指标计算

§3.3.3 $0 \le \xi < 1$（欠阻尼，零阻尼）时系统 动态性能指标的计算

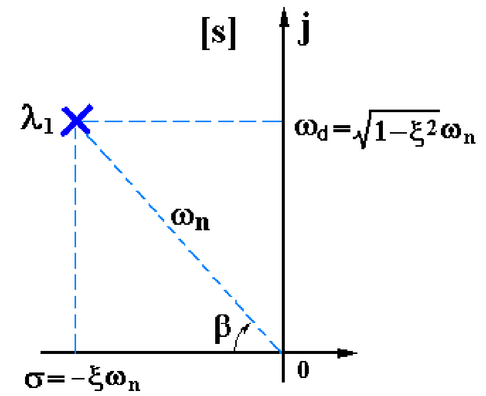
$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad 0 \le \xi < 1$$



（1） $0 \le \xi < 1$时系统极点的两种表示方法

（2）单位阶跃响应h(t) 表达示

$$h(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t+\beta)$$



（3）动态指标计算公式

$$\begin{cases} t_p=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n} \\ \sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \\ t_s=\dfrac{3.5}{\xi\omega_n} \end{cases}$$

（4）“最佳阻尼比”概念

（5）动态性能随系统极点分布变化的规律

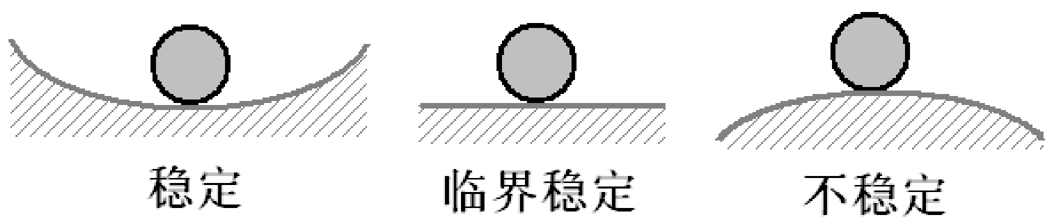
(第 10 讲)

§3　线性系统的时域分析与校正

§3.5 线性系统的稳定性分析（1）

§3.5.1 稳定性的概念

稳定是控制系统正常工作的首要条件。分析、判定系统的稳定性，并提出确保系统稳定的条件是自动控制理论的基本任务之一。



定义：在扰动作用下系统偏离了原来的平衡状态，如果扰动消除后，系统能够以足够的准确度恢复到原来的平衡状态，则系统是稳定的；否则，系统不稳定。

§3.5 线性系统的稳定性分析（2）

§3.5.2 稳定的充要条件

根据系统稳定的定义，若 $\lim\limits_{t\to\infty} k(t)=0$，则系统是稳定的。

必要性：

$$\Phi(s)=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}$$

$$C(s)=\Phi(s)=\frac{A_1}{s-\lambda_1}+\frac{A_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-\lambda_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-\lambda_i}$$

$$k(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+\cdots A_ne^{\lambda_n t}=\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\lambda_i t}$$

$$\lim_{t\to\infty}k(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\lambda_i t}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_i<0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

充分性：

$$\lambda_i<0 \qquad i=1,2,\cdots,n \quad\Rightarrow\quad k(t)=\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\lambda_i t}\xrightarrow{t\to\infty}0$$

系统稳定的充要条件：系统的所有闭环极点均具有负的实部，

或所有闭环极点均严格位于左半s平面。

§3.5 线性系统的稳定性分析（3）

§3.5.3 稳定判据

$$D(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0 \qquad (a_n>0)$$

(1) 必要条件 $\boxed{a_i>0}$ $\quad i=0,1,2,\cdots,n-1$

说明：

$$\begin{aligned} D(s)&=(s+1)(s+2)(s+3)\\ &=(s^2+3s+2)(s+3)\\ &=s^3+6s^2+11s+6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(s^2+3s+2)(s+3)\\ &=s^3+3s^2+2s\\ &\quad\;\; 3s^2+9s+6\\ \hline &=s^3+6s^2+11s+6 \end{aligned}$$

例1

$$\begin{cases} D(s)=s^5+6s^4+9s^3-2s^2+8s+12=0 & \text{不稳定}\\ D(s)=s^5+4s^4+6s^2+9s+8=0 & \text{不稳定}\\ D(s)=-s^4-5s^3-7s^2-2s-10=0 & \text{可能稳定} \end{cases}$$

劳斯表第一列元素均大于零时系统稳定，否则系统不稳定；
且第一列元素符号改变的次数等于特征方程中正实部根的个数。

§3.5 线性系统的稳定性分析（5）

例2：$D(s)=s^4+5s^3+7s^2+2s+10=0$

解.　列劳斯表

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 7 & 10 \\
s^3 & 5 & 2 & \\
\hline
s^2 & \frac{33}{5} & 10 & \\
s^1 & -\frac{184}{33} & & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}
$$

$$\frac{5\times7-2}{5}=\frac{33}{5} \qquad \frac{5\times10-1\times0}{5}=10$$

$$\frac{33/5\times2-5\times10}{33/5}=-\frac{184}{33}$$

$$\frac{-184/33\times10}{-184/33}=10$$

劳斯表第一列元素变号 2次，有2个正根，系统不稳定。

§3.5 线性系统的稳定性分析（6）

（3）劳斯判据特殊情况处理

例3：$D(s)=s^3-3s+2=0$ 判定在右半s平面的极点数。

解. 列劳斯表

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & -3 \\
s^2 & \varepsilon & 2 \\
\hline
s^1 & -\infty & 0 \\
s^0 & 2 &
\end{array}
$$

$$\frac{-3\varepsilon-2}{\varepsilon}=-\infty$$

$$\frac{-2\times\infty-0}{-\infty}=2$$

若某行第一列元素为0，而该行元素不全为0时：

将此0改为ε，继续运算。

劳斯表第一列元素变号 2次，有2个正根，系统**不稳定**。

§3.5 线性系统的稳定性分析（7）

例4 $D(s)=s^5+3s^4+12s^3+20s^2+35s+25=(s\pm j\sqrt{5})(s+1)(s+1\pm j2)$

解. 列劳斯表

s^5	1	12	35
s^4	3	20	25
s^3	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	
s^2	5	25	
s^1	10	0	
s^0	25		

出现全零行时：

用上一行元素组成辅助方程，将其对S求导一次，用新方程的系数代替全零行系数，之后继续运算。

列辅助方程： $5s^2+25=0$

$$\frac{d}{ds}\left(5s^2+25\right)=10s+0$$

出现全零行时，系统可能出现一对纯虚根；或一对符号相反的实根；或两对实部符号相异、虚部相同的复根。

§3.5 线性系统的稳定性分析（8）

例5 $D(s)=s^5+2s^4-s-2=0$ $=(s+2)(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$

解. 列劳斯表

s^5	1	0	-1
s^4	2	0	-2
s^3	8	0	
s^2	ε	-2	
s^1	$16/\varepsilon$	0	
s^0	-2		

列辅助方程： $2s^4-2=0$

$$\frac{d}{ds}\left(2s^4-2\right)=8s^3=0$$

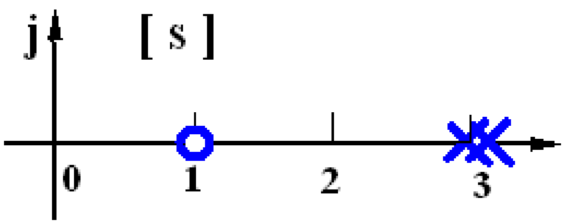
第一列元素变号一次，有一个正根，系统不稳定

§3.5 线性系统的稳定性分析（9）

（4）劳斯判据的应用

例6 某单位反馈系统的开环零、极点分布如图所示，判定系统能否稳定，若能稳定，试确定相应开环增益K的范围。

解 依题意有



$$G(s)=\frac{K(s-1)}{(s/3-1)^2}=\frac{9K(s-1)}{(s-3)^2}$$

$$D(s)=(s-3)^2+9K(s-1)=s^2+(9K-6)s+9(1-K)=0$$

$$\begin{cases}9K-6>0\\ 1-K>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}<K<1$$

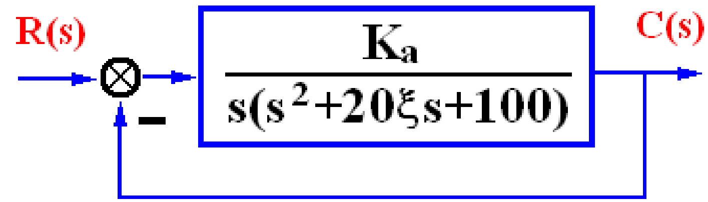
系统闭环稳定与开环稳定之间没有直接关系

§3.5 线性系统的稳定性分析（10）

例7 系统结构图如右，

（1）确定使系统稳定的参数 (K, ξ) 的范围；

（2）当ξ=2时，确定使全部极点均位于s=-1之左的K值范围。

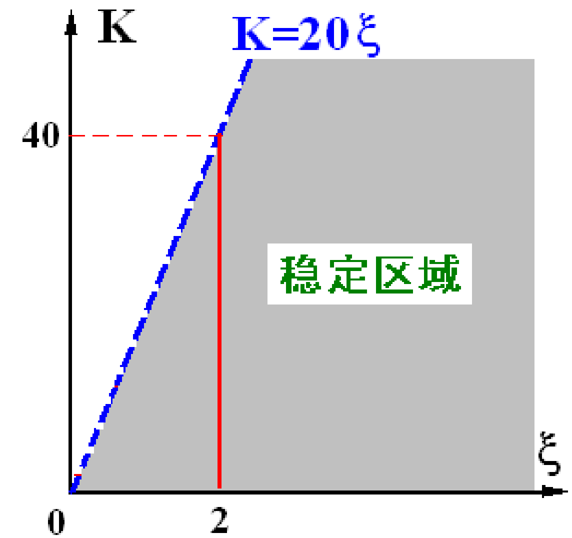


解.

（1）$G(s)=\dfrac{K_a}{s\,(s^2+20\xi s+100)}$　　$K=\dfrac{K_a}{100}$

$$D(s)=s^3+20\xi s^2+100\,s+100K=0$$

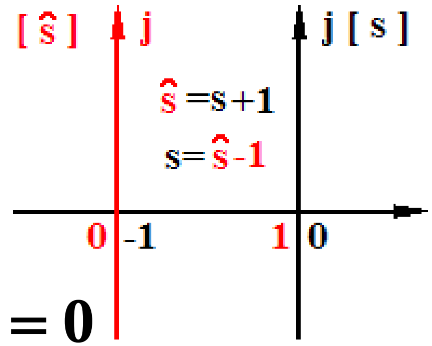
s^3	1	100	
s^2	20ξ	$100K$	$\Rightarrow\ \xi>0$
s^1	$\dfrac{2000\xi-100K}{20\xi}$	0	$\Rightarrow\ K<20\xi$
s^0	$100K$		$\Rightarrow\ K>0$



§3.5 线性系统的稳定性分析 (11)

(2) 当 $\xi=2$ 时，确定使全部极点均位于s=-1之左的K值范围。

当 $\xi=2$ 时，进行平移变换： $s=\hat{s}-1$



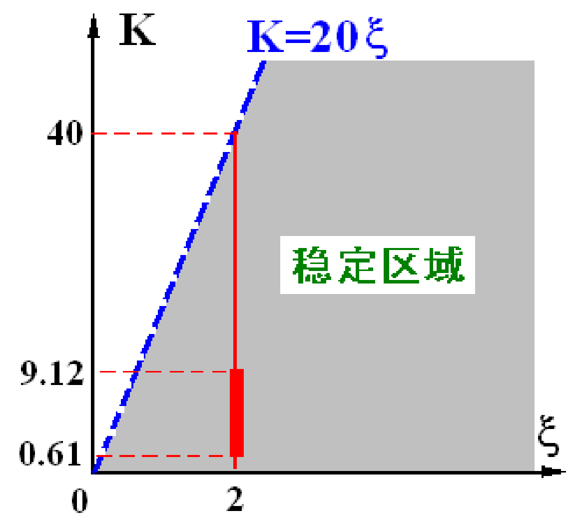
$$D(s)=s^3+20\times 2\,s^2+100\,s+100K=0$$

$$\Big\downarrow\ s=\hat{s}-1$$

$$D(\hat{s})=(\hat{s}-1)^3+40\,(\hat{s}-1)^2+100(\hat{s}-1)+100K=0$$

$$=\hat{s}^3+37\,\hat{s}^2+23\,\hat{s}+(100K-61)=0$$

s^3	1	23	
s^2	37	$100K-61$	
s^1	$\dfrac{912-100K}{37}$	0	$\Rightarrow\ K<9.12$
s^0	$100K-61$		$\Rightarrow\ K>0.61$



§3.5 线性系统的稳定性分析（12）

问题讨论：

(1) 系统的稳定性是其自身的属性，与输入类型、形式无关。

(2) 系统稳定与否，只取决于闭环极点，与闭环零点无关。

$$\Phi(s)=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}=\frac{C_1}{s-\lambda_1}+\frac{C_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-\lambda_n}$$

$$k(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2{}^{e\lambda_2 t}+\cdots+C_ne^{\lambda_n t}$$

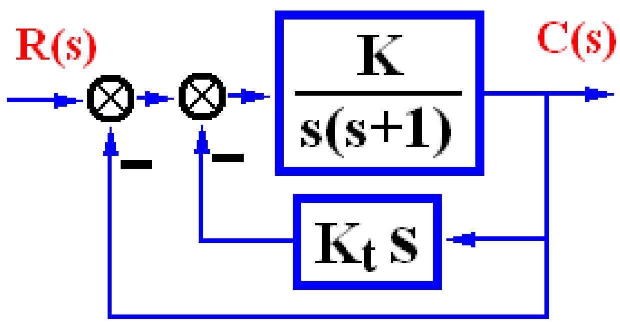
闭环零点影响系数C_i，会改变动态性能，但不影响稳定性。

闭环极点决定模态，因此决定系统的稳定性，也影响动态性能。

(3) 闭环系统的稳定性与其开环是否稳定没有直接关系。

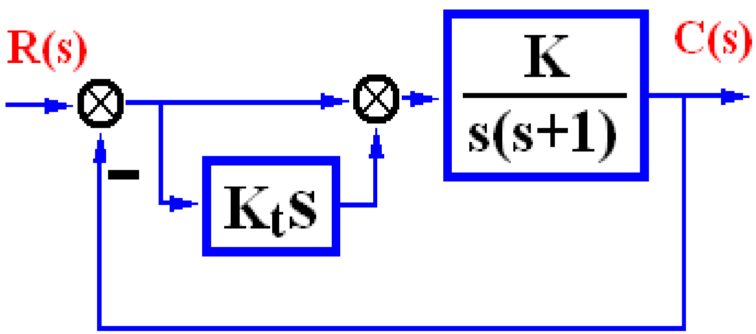
课程小结(1) —— 改善二阶系统动态性能的措施

(1) 改善二阶系统动态性能的措施



测速反馈控制

增加阻尼



比例+微分控制

提前控制

(2) 附加闭环零点的影响

改变：部分分式系数→模态的加权值→阶跃响应→性能

课程小结(2) —— 高阶系统的阶跃响应及动态性能

§3.4.1 高阶系统单位阶跃响应

$$\Phi(s)=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ \cdots\ +b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ \cdots\ +a_1 s+a_0}=\frac{K\prod\limits_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(s-\lambda_j)}\qquad n\geq m$$

$$c(t)=\frac{M(0)}{D(0)}+\sum_{\lambda_i=-\alpha_i}\left.\frac{M(s)}{sD'(s)}\right|_{s=\alpha_i}\cdot e^{-\alpha_i t}+\sum_{\lambda_i=-\sigma\pm j\omega_{di}}A_i e^{-\sigma_i t}\sin\left(\omega_{di}t+\varphi_i\right)$$

§3.4.2 闭环主导极点

§3.4.3 估算高阶系统动态指标的零点极点法

课程小结(3) —— 稳定性分析

§3.5.1　稳定性的概念 $\lim_{t\to\infty} k(t) = 0$

§3.5.2　稳定的充要条件

系统闭环特征方程的所有根都具有负的实部

或所有闭环极点均严格位于左半s平面

§3.5.3　稳定判据

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

（1）判定稳定的必要条件 $a_i > 0$

（2）劳斯判据

（3）劳斯判据特殊情况的处理

（4）劳斯判据的应用（判定稳定性，使系统稳定的参数范围）