一、选择题（每题 4 分，共 20 分,根据正确答案的选项涂黑答题卡对应的位置）

1. 设子空间 $U=\{(x,y,z)^T\in R^3 \mid x+y+z=0\}, W=\{(x,y,z)^T\in R^3 \mid x=y=\frac{z}{-2}\}$，

则 $\dim(U+W)-\dim U=$ (**A**)

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

2. 下列选项中“**错误**”的是 (**C**)

(A) $A^H=A\in C^{n\times n}$，则 $\|A\|_1=\|A\|_\infty$；

(B) $A\in C^{n\times n}$ 为可逆矩阵，λ 为其任一特征值，$\|\cdot\|$ 为任意的算子范数，则 $|\lambda|\geq\frac{1}{\|A^{-1}\|}$；

(C) $A=E-2uu^H, u\in C^n$ 且 $\|u\|_2=1$，则 $\|A\|_2=\sqrt{n}$；

(D) 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}, X\in \mathbf{C}^{n\times r}, B\in \mathbf{C}^{r\times s}$，则 $\mathrm{Vec}(AXB)=(B^T\otimes A)\mathrm{Vec}X$.

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，$r(A)$ 是其谱半径，$\|\bullet\|$ 是任意算子范数，则必有(**B**)

(A) $\|A^{-1}\|=1/\|A\|$; (B) $\|A^5\|\leq\|A\|^5$; (C) $\|A^5\|\geq\|A\|^5$; (D) $\|A\|\geq r(A^HA)$.

4. 下列选项中“**错误**”的是 (**A**)

(A) $A\in C^{n\times n}$ 且 $\|A\|_{m_\infty}<1$，则 $r(A)<1$；

(B) $A\in C_r^{n\times n}$ 为正规矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为其非零特征值，则 $\|A^+\|_2=\frac{1}{\min\limits_{1\leq i\leq r}|\lambda_i|}$；

(C) $A\in C^{n\times n}$，λ 为其任一特征值，$\|\cdot\|$ 为任意的算子范数，则 $|\lambda|\leq\sqrt[m]{\|A^m\|}$；

(D) $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r$ 为 A 的所有正奇异值，则 $\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2$.

5. 设 $M=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&-1&2\\-1&2&-1\end{bmatrix}$，则 M 不存在 (**C**)

(A) 奇异值分解; (B) 最大秩分解; (C) QR 分解(其中 Q 是正交矩阵; (D) 谱分解.

二. 判断题（20 分）（正确的在答题卷涂黑【T】，错误的涂黑【F】）

6. $A\in C^{n\times n}$ 为酉矩阵，则 $\|A\|_{m_2}^2=n$. (**T**)

7. $A\in C^{n\times n}$，则 $\|A\|_1\bullet\|A\|_\infty<\|A\|_2^2$. (**F**)

8. 设 $A \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$，则 $\left\|e^{A}\right\| > e^{\|A\|}$.　　(F)

9. 设 $A \in C_m^{m\times n}, B \in C_m^{n\times m}$，则 $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$.　　(F)

10. 若 $\text{rank}(A)$ 表示矩阵 A 的秩，$R(A)$ 表示矩阵 A 的值域。如果 $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$，则 $R(A) = R(AB)$. (T)

三(10 分).设 $A \in C^{n\times n}$ 可逆，$B \in C^{n\times n}$ 不可逆，$\|\bullet\|$ 为相容矩阵范数，证明：$\|A-B\| \geq \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$.

证:

A 可逆, B 不可逆 $\Rightarrow A^{-1}B$ 不可逆 $\Leftrightarrow 0$ 为 $A^{-1}B$ 的特征值 $\Rightarrow 1$ 为 $E-A^{-1}B$ 的特征值　**(5 分)**

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|\cdot\|(A-B)\| \geq \|A^{-1}(A-B)\| = \|E-A^{-1}B\| \geq r(E-A^{-1}B) \geq 1 \quad \textbf{(4 分)}$$

$$\Rightarrow \|A-B\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}. \quad \textbf{(1 分)}$$

四(10 分).设 $A \in C_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为 $A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H$,其中 $D = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$. 证明：

V 的列向量是 $A^H A$ 的特征向量.

证：由 $A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H$ 得

$$A^H A = V\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H = V\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}V^{-1} \quad \textbf{(5 分)}$$

令 $V = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$，　**(2 分)**　得 $\begin{cases} A^H A v_i = \sigma_i^2 v_i, & i = 1, 2, \cdots, r; \\ A^H A v_j = 0 v_j, & j = r+1, \cdots, n \end{cases}$.　**(3 分)**

故 V 的列向量是 $A^H A$ 的特征向量.

五(10 分). $A\in C^{n\times n}$ 且 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为其特征值，证明：$\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$ 的充要条件是 A 为正规矩阵.

证：(充分性)

A 正规 $\Leftrightarrow A=UDU^H=Udiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H\Rightarrow\|A\|_F^2=\|UDU^H\|_F^2=\|D\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$ **(5 分)**

(必要性) 由 Schur 分解 $A=URU^H$，其中 $R=\begin{pmatrix}\lambda_1 & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & r_{n-1,n}\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 可得

$$\|A\|_F^2=\|URU^H\|_F^2=\|R\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n-1}|r_{ij}|^2 .\quad \textbf{(3 分)}$$

$$\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n-1}|r_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\ \Leftrightarrow\ \sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n-1}|r_{ij}|^2=0\ \Leftrightarrow\ r_{ij}=0(i=1,\cdots,n-1;j>i)$$

$\Leftrightarrow R=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\Leftrightarrow\ A=Udiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H$ (即 A 为正规矩阵). **(2 分)**

六(10 分). 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，求 $\cos A$.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=3$ **(3 分)**

对应的特征向量为：$\alpha_1=(1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,-1)^T$. **(3 分)**

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，则 $\cos A=P\begin{pmatrix}\cos 0 & & \\ & \cos 3 & \\ & & \cos 3\end{pmatrix}P^{-1}$ **(2 分)**

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & \cos 3 & \\ & & \cos 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\cos 3 & -1+\cos 3 & 1-\cos 3\\ -1+\cos 3 & 1+2\cos 3 & -1+\cos 3\\ 1-\cos 3 & -1+\cos 3 & 1+2\cos 3\end{pmatrix}$$

(2 分)

七(15 分). 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$. (1) 求 A 的最大秩分解；(2) 求 A^+ ；(3) 用广义逆矩

阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；(4) 线性方程组 $Ax=b$ 如有解，求通解和最小范数解；如无解，求最小二乘解和最佳逼近解.

解：(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&0&2&2\\2&2&3&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&2&2\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，$A$ 的最大秩分解为

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&2&2\\0&0&1&-1&-1\end{pmatrix}=BD \qquad \textbf{(4 分)}$$

$$B^{+}=(B^TB)^{-1}B^T=\left[\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\1&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&7\\7&10\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}10&-7\\-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}10&-7\\-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}10&-1&3\\-7&4&-1\end{pmatrix}$$

$$D^{+}=D^T(DD^T)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\2&-1\\2&-1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&1&0&2&2\\0&0&1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\2&-1\\2&-1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\2&-1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&-4\\-4&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\2&-1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&10\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\2&-1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&10\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\\4&10\\2&-2\\2&-2\end{pmatrix}$$

(2) $A^{+}=D^{+}B^{+}=D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\\4&10\\2&-2\\2&-2\end{pmatrix}\frac{1}{11}\begin{pmatrix}10&-1&3\\-7&4&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{154}\begin{pmatrix}2&13&5\\2&13&5\\-30&36&2\\34&-10&8\\34&-10&8\end{pmatrix}$ **(5 分)**

(3) $AA^{+}b=\begin{pmatrix}1&1&0&2&2\\2&2&3&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\frac{1}{154}\begin{pmatrix}2&13&5\\2&13&5\\-30&36&2\\34&-10&8\\34&-10&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{154}\begin{pmatrix}72&-14&42\\-14&140&42\\42&42&28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{154}\begin{pmatrix}86\\308\\154\end{pmatrix}$,所以方程组无解 **(2 分)**

(4) 最佳逼近解为 $A^{+}b=\frac{1}{154}\begin{pmatrix}2 & 13 & 5\\ 2 & 13 & 5\\ -30 & 36 & 2\\ 34 & -10 & 8\\ 34 & -10 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{154}\begin{pmatrix}33\\33\\44\\44\\22\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}3\\3\\4\\2\\2\end{pmatrix}$，**(2 分)**

最小二乘解为 $x=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}3\\3\\4\\2\\10\end{pmatrix}+(E-A^{+}A)u,\quad \forall u\in C^{n}$ **(2 分)**

八 (5 分).设 $A^2=A, E$ 为单位矩阵且 $A=BC$ 是 A 的最大秩分解，证：$CB=E.$

证：(1) $A^2=A, A=BC \;\Rightarrow\; BCBC=BC$ **(1 分)**

(2) $rank(B^H B)=rank(CC^H)=r$ ($\Leftrightarrow B^H B, CC^H$ 可逆) **(2 分)**

$B^H B(CB-E)CC^H=0 \Rightarrow\; CB-E=0$ (即 $CB=E$) **(2 分)**

或

(2) $B\in C_r^{n\times r}\Leftrightarrow B_L^{-1}$ 存在，$C\in C_r^{r\times n}\Leftrightarrow C_R^{-1}$ 存在 **(2 分)**

$\Rightarrow\; B_L^{-1}BCBCC_R^{-1}=B_L^{-1}BCC_R^{-1} \;\Rightarrow\; CB=E$ **(2 分)**