课程回顾 (1)

§3.5.1 稳定性的概念 $\lim_{t\to\infty} k(t) = 0$

§3.5.2 稳定的充要条件

系统闭环特征方程的所有根都具有负的实部

或所有闭环特征根均严格位于左半s平面

§3.5.3 稳定判据

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

（1）判定稳定的必要条件 $a_i > 0$

（2）劳斯判据

（3）劳斯判据特殊情况的处理

（4）劳斯判据的应用 $\begin{cases}\text{判定系统的稳定性} \\ \text{确定使系统稳定的参数取值范围}\end{cases}$

课程回顾 (2)

关于系统的稳定性：

(1) 稳定性是系统自身的属性，与输入的类型，形式无关。

(2) 系统稳定与否，只取决于闭环极点，与闭环零点无关。

$$\Phi(s)=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}=\frac{C_1}{s-\lambda_1}+\frac{C_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-\lambda_n}$$

$$k(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2{}^{e\lambda_2 t}+\cdots+C_ne^{\lambda_n t}$$

闭环零点影响系数C_i，会改变动态性能，但不影响稳定性。

闭环极点决定模态，因此决定系统的稳定性，也影响动态性能。

(3) 闭环系统的稳定性与其开环是否稳定无直接关系。

(第 11 讲)

§3　线性系统的时域分析与校正

§3.6　线性系统的稳态误差(1)

概　述

稳态误差是系统的稳态性能指标，
是对系统控制精度的度量。

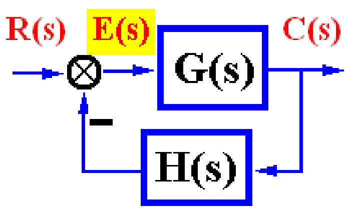
对稳定的系统研究稳态误差才有意义，
所以计算稳态误差以系统稳定为前提。

本讲只讨论系统的原理性误差，
不考虑由于非线性因素引起的误差。

通常把在阶跃输入作用下没有原理性稳态误差的系统称为“无差系统”，而把有原理性稳态误差的系统称为“有差系统”　。

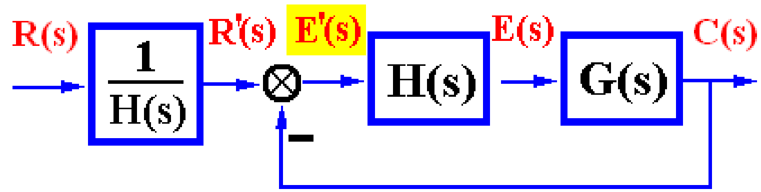
§3.6 线性系统的稳态误差(2)

§3.6.1 误差与稳态误差



按输入端定义的误差

$$E(s)=R(s)-H(s)C(s)$$



按输出端定义的误差

$$E'(s)=\frac{R(s)}{H(s)}-C(s)$$

稳态误差
- 静态误差：$e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=e(\infty)$
- 动态误差：误差中的稳态分量 $e_s(t)$

§3.6.2 计算稳态误差的一般方法

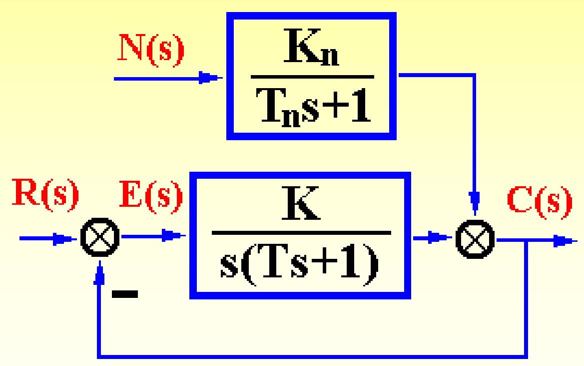
（1）判定系统的稳定性

（2）求误差传递函数 $\Phi_e(s)=\dfrac{E(s)}{R(s)},\quad \Phi_{en}(s)=\dfrac{E(s)}{N(s)}$

（3）用终值定理求稳态误差 $e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}s\left[\Phi_e(s)R(s)+\Phi_{en}(s)N(s)\right]$

§3.6.2 计算稳态误差的一般方法 (1)

例 1 系统结构图如图所示，已知 r(t) = n(t) = t，求系统的稳态误差。



解.

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{K}{s(Ts+1)}}=\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}$$

$$D(s)=Ts^2+s+K=0$$

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0} s\,\Phi_e(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{K}$$

$$\Phi_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-\dfrac{K_n}{T_n s+1}}{1+\dfrac{K}{s(Ts+1)}}=\frac{-K_n s(Ts+1)}{(T_n s+1)\left[s(Ts+1)+K\right]}$$

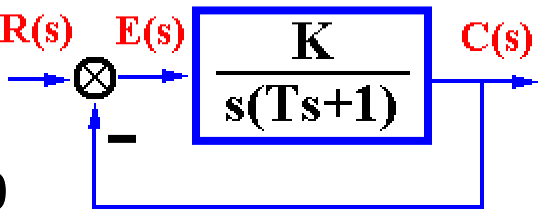
$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0} s\,\Phi_{en}(s)\,N(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-K_n s(Ts+1)}{(T_n s+1)\left[s(Ts+1)+K\right]}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{-K_n}{K}$$

$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=\frac{1-K_n}{K}$$

$$e_{ss}\begin{cases}\text{与系统自身的结构参数有关}\\ \text{与外作用的类型有关}\end{cases}$$

§ 3.6.2 计算稳态误差的一般方法 (2)

例 2 系统结构图如图所示，求 r(t)分别为A·1(t), At, At²/2时系统的稳态误差。



解. $$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}$$

$r(t)=A\cdot 1(t)$ $$e_{ss1}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{A}{s}=0$$

$r(t)=A\cdot t$ $$e_{ss2}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{A}{s^2}=\frac{A}{K}$$

$r(t)=\frac{A}{2}\cdot t^2$ $$e_{ss3}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}\cdot\frac{A}{s^3}=\infty$$

影响 e_{ss} 的因素：
- 系统自身的结构参数
- 外作用的类型（控制量，扰动量及作用点）
- 外作用的形式（阶跃、斜坡或加速度等）

§ 3.6.3 静态误差系数法 (1)

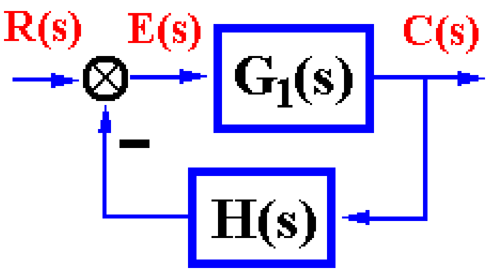
静态误差系数法 —— r(t) 作用时 e_{ss} 的计算规律

$$G(s)=G_1(s)H(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)}=\frac{K}{s^v}G_0(s)$$

$$\begin{cases} K: \text{开环增益} \\ v: \text{型别(类型)} \end{cases}$$

$$G_0(s)=\frac{(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)} \qquad \lim_{s\to 0}G_0(s)=1$$

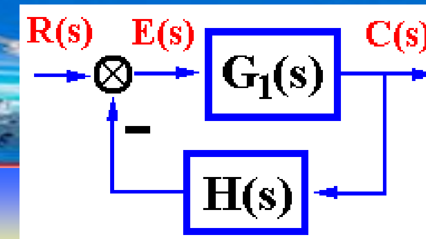
$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)H(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{K}{s^v}G_0(s)}$$



$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\,\Phi_e(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot R(s)\cdot\frac{1}{1+\dfrac{K}{s^v}G_0(s)}$$

稳态误差 e_{ss} 与 $\begin{cases} \text{输入r(t)的形式} \\ \text{系统结构参数(K, v)} \end{cases}$ 有关

§ 3.6.3 静态误差系数法 (2)



$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\,\Phi_e(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0} s\,R(s)\frac{1}{1+G_1(s)H(s)}=\lim_{s\to 0} s\cdot R(s)\cdot\frac{1}{1+\frac{K}{s^v}G_0(s)}$$

$r(t)=A\cdot 1(t)$

$$e_{ssp}=\lim_{s\to 0} s\,\Phi_e(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{A}{s}\cdot\frac{1}{1+G_1(s)H(s)}=\frac{A}{1+\lim\limits_{s\to 0}G_1(s)H(s)}=\frac{A}{1+K_p}$$

静态位置误差系数 $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_1(s)H(s)=\lim\limits_{s\to 0}\frac{K}{s^v}$

$r(t)=A\cdot t$

$$e_{ssv}=\lim_{s\to 0} s\,\Phi_e(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{A}{s^2}\cdot\frac{1}{1+G_1(s)H(s)}=\frac{A}{\lim\limits_{s\to 0} sG_1(s)H(s)}=\frac{A}{K_v}$$

静态速度误差系数 $K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG_1(s)H(s)=\lim\limits_{s\to 0}\frac{K}{s^{v-1}}$

$r(t)=\frac{A}{2}t^2$

$$e_{ssa}=\lim_{s\to 0} s\,\Phi_e(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{A}{s^3}\cdot\frac{1}{1+G_1(s)H(s)}=\frac{A}{\lim\limits_{s\to 0} s^2G_1(s)H(s)}=\frac{A}{K_a}$$

静态加速度误差系数 $K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G_1(s)H(s)=\lim\limits_{s\to 0}\frac{K}{s^{v-2}}$

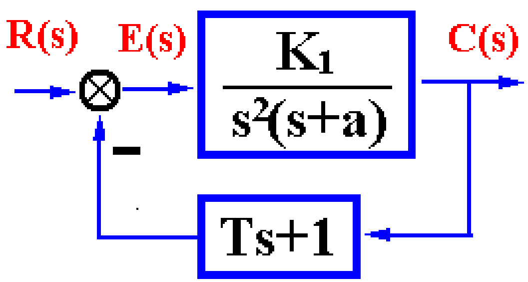
§ 3.6.3 静态误差系数法 (3)

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p=\lim\limits_{s\to0}G_1H=\lim\limits_{s\to0}\frac{K}{s^v}$	$K_v=\lim\limits_{s\to0}sG_1H=\lim\limits_{s\to0}\frac{K}{s^{v-1}}$	$K_a=\lim\limits_{s\to0}s^2G_1H=\lim\limits_{s\to0}\frac{K}{s^{v-2}}$	$r=A\cdot1(t)$ $e_{ss}=\frac{A}{1+K_p}$	$r=A\cdot t$ $e_{ss}=\frac{A}{K_v}$	$r=A\cdot t^2/2$ $e_{ss}=\frac{A}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$

§ 3.6.3 静态误差系数法 (4)

V	r=A·1(t)	r=A·t	r=A·t²/2
0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	0	0	$\frac{A}{K}$

例 3　系统结构图如图所示，已知输入 $r(t)=2t+4t^2$，求系统的稳态误差。



解. $G(s)=\dfrac{K_1(Ts+1)}{s^2(s+a)}$　$\begin{cases} K=K_1/a \\ v=2 \end{cases}$

$$\Phi(s)=\frac{K_1}{s^2(s+a)+K_1(Ts+1)}$$

$$D(s)=s^3+as^2+K_1Ts+K_1=0$$

s^3	1	K_1T		
s^2	a	K_1	⇨	a>0
s^1	$\frac{(aT-1)K_1}{a}$	0	⇨	aT>1
s^0	K_1		⇨	$K_1>0$

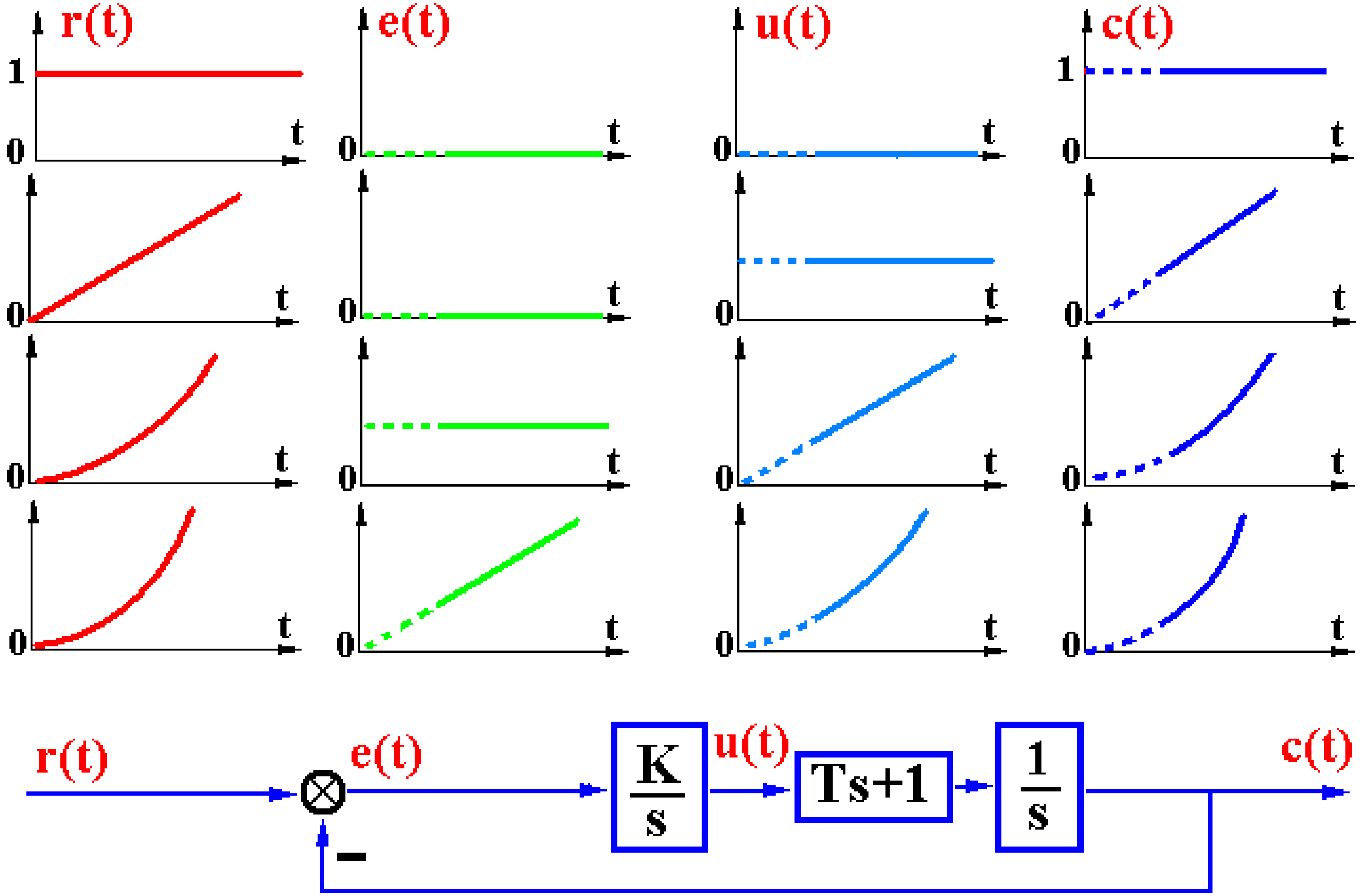
$r_1(t)=2t$　　$e_{ss1}=0$

$r_2(t)=4t^2=8\cdot\frac{1}{2}t^2$　　$e_{ss2}=\frac{A}{K}=\frac{8a}{K_1}$

$$e_{ss}=e_{ss1}+e_{ss2}=\frac{8a}{K_1}$$

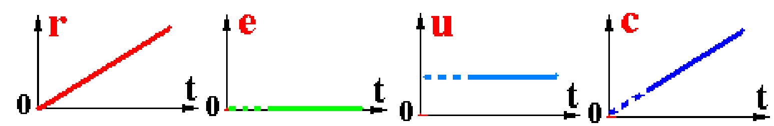
§3.6.3 静态误差系数法 (5)

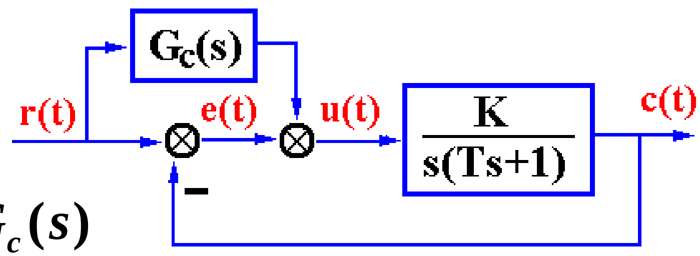
V	r=A·1(t)	r=A·t	r= A·t²/2
0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	0	0	$\frac{A}{K}$



§3.6.3 静态误差系数法（6）

例 4 系统结构图如图所示，已知输入 $r(t)=At$，求 $G_c(s)$，使稳态误差为零。





解. $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$　　$\begin{cases} K=K \\ v=1 \end{cases}$

$$D(s)=Ts^2+s+K=0$$

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1-\dfrac{KG_c(s)}{s(Ts+1)}}{1+\dfrac{K}{s(Ts+1)}}=\frac{s(Ts+1)-KG_c(s)}{s(Ts+1)+K}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\Phi_e(s)\frac{A}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{A\left[sT+1-\dfrac{K}{s}G_c(s)\right]}{s(Ts+1)+K}=\frac{A\left[1-\dfrac{K}{s}G_c(s)\right]}{K}=0$$

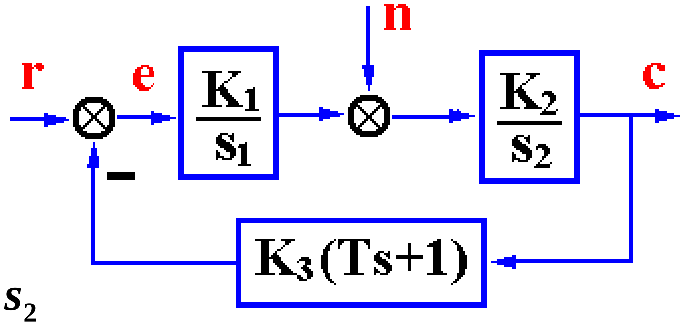
$$G_c(s)=\frac{s}{K}$$

按前馈补偿的复合控制方案可以有效提高系统的稳态精度

§3.6.4 干扰作用引

在主反馈口到干扰作用点之间的前向通道中提高增益、设置积分环节，可以同时减小或消除控制输入和干扰作用下产生的稳态误差。

例 5 系统如图所示，已知输入 $\begin{cases} r(t)=At^2/2 \\ n(t)=At \end{cases}$，求系统的稳态误差。



解.

$$G(s)=\frac{K_1K_2K_3(Ts+1)}{s_1s_2} \qquad \begin{cases} K=K_1K_2K_3 \\ v=2 \end{cases}$$

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{K_1K_2K_3(Ts+1)}{s_1s_2}}=\frac{s_1s_2}{s_1s_2+K_1K_2K_3(Ts+1)}$$

$$D(s)=s_1s_2+K_1K_2K_3Ts+K_1K_2K_3=0 \qquad \begin{cases} K_1K_2K_3>0 \\ T>0 \end{cases}$$

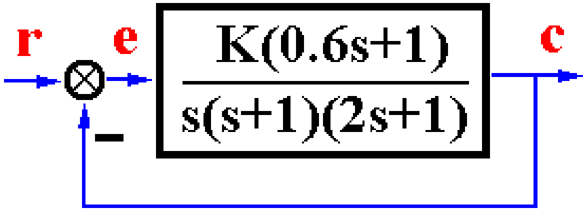
$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0} s\Phi_e(s)\frac{A}{s^3}=\lim_{s\to 0}\frac{A}{s^2}\frac{s_1s_2}{s_1s_2+K_1K_2K_3Ts+K_1K_2K_3}=\frac{A}{K_1K_2K_3}$$

$$\Phi_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-K_2K_3(Ts+1)/s_2}{1+K_1K_2K_3(Ts+1)/(s_1s_2)}=\frac{-K_2K_3\,s_1(Ts+1)}{s_1s_2+K_1K_2K_3Ts+K_1K_2K_3}$$

$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0} s\cdot\Phi_{en}(s)\cdot N(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{A}{s^2}\cdot\frac{-K_2K_3\,s_1(Ts+1)}{s_1s_2+K_1K_2K_3Ts+K_1K_2K_3}=\frac{-A}{K_1}$$

举 例

例1 系统结构图如图所示，当r(t)=t 时，要求e_{ss}<0.1，求K的范围。



解． $G(s)=\dfrac{K(0.6s+1)}{s(s+1)(2s+1)}$ $\quad \begin{cases} K \\ v=1 \end{cases}$

$r(t)=t \qquad e_{ss}=\dfrac{1}{K}<0.1 \quad \Rightarrow \quad K>10$

$$D(s)=s(s+1)(2s+1)+K(0.6s+1)=2s^3+3s^2+(1+0.6K)s+K=0$$

Routh

s^3	2	1+0.6K		
s^2	3	K		
s^1	$\dfrac{3(1+0.6K)-2K}{3}$	0	→ 3-0.2K>0	→ K<15
s^0	K		→ K>0	

10 < K <15

课程小结

误差定义： (1)按输入端定义误差；(2)按输出端定义误差
稳态误差： (1)静态误差； (2)动态误差

（1）判定系统的稳定性
（2）求误差传递函数
（3）用终值定理求稳态误差

（1）静态误差系数：Kp, Kv, Ka
（2）计算误差方法
（3）适用条件
1）系统稳定
2）按输入端定义误差
3）r(t)作用，且r(t)无其他前馈通道