# 机器人学基础

国家级《智能科学基础系列课程教学团队》
“机器人学”课程配套教材
蔡自兴 主编

第4章 操作臂的雅可比矩阵



## 第4章 操作臂的雅可比矩阵





## 第4章 操作臂的雅可比矩阵

- 第三章建立机器人的运动学方程，分析运动学逆解，建立了机器人操作空间和关节空间的位移映射关系。
- 本章在位移分析的基础上，进行机器人的速度分析，研究机器人操作空间与关节空间速度之间的线性映射关系——雅可比矩阵（ Jacobian ）
- 雅可比矩阵不仅表示两空间之间速度线性映射关系，也表示两空间之间力的传递关系。



## 重点掌握：

- 机器人操作臂雅克比矩阵的定义、物理意义？

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$　　$\mathbf{V} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$

$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$　　$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}$

- 雅克比矩阵的两种构造方法

矢量积法

微分变换法

- 运动（或速度）和力雅克比矩阵的关系？　$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\cdot\mathbf{F}$



## 雅可比矩阵数学定义

在向量微积分中，雅克比矩阵是一阶偏导数以一定方式排列成的矩阵。是以数学家卡尔·雅可比（1804-1851）名字命名的。

已知m个函数：
$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

则雅克比矩阵：
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{x}}$$



## 4.1 雅可比矩阵的定义

机器人操作臂的运动学方程为：

$$\mathbf{x} = \mathrm{x}(\mathbf{q}) \qquad (4.1)$$

——描述操作空间与关节空间之间的位移关系。

三维空间机器人操作臂末端的广义位姿向量为：

$$ {}^0_T\mathbf{T} = {}^0_n\mathbf{T}\cdot{}^n_T\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(q_1,\dots,q_n) \\ y(q_1,\dots,q_n) \\ z(q_1,\dots,q_n) \\ \varphi_x(q_1,\dots,q_n) \\ \varphi_y(q_1,\dots,q_n) \\ \varphi_z(q_1,\dots,q_n) \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

两边对时间$t$求导，即得 q 与 x 间的微分关系：

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x(q_1,\dots,q_n) \\ y(q_1,\dots,q_n) \\ z(q_1,\dots,q_n) \\ \varphi_x(q_1,\dots,q_n) \\ \varphi_y(q_1,\dots,q_n) \\ \varphi_z(q_1,\dots,q_n) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}=?$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_n} \end{bmatrix}_{6\times n} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad \dot{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad 或 \quad \mathbf{V}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \qquad (4.2)$$

**雅可比矩阵的第*i*行第*j*列元素为：**

$$\mathbf{J}_{ij}(\mathbf{q})=\frac{\partial \mathbf{x}_i(\mathbf{q})}{\partial q_j}, \quad i=1,2,\dots,m.\ j=1,2,\dots,n \qquad (4.3)$$



$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad 或 \quad \mathbf{V}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \qquad (4.2)$$

**式中，$\dot{\mathbf{q}}$ 为关节速度向量；**

**$\dot{\mathbf{x}}$ 为操作空间速度向量；**

**$\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 是操作臂的雅可比矩阵，$m \times n$ 阶偏导数矩阵。**

定义：

机器人操作臂的雅可比矩阵指从关节空间速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 向操作空间速度 $\dot{\mathbf{x}}$ 或 $\mathbf{V}$ 映射的线性变换，简称雅可比。

当操作臂自由度较多时，用定义计算雅可比矩阵较为复杂。



操作臂雅克比矩阵J(q)的特点：

**（1）雅克比矩阵是一阶偏导数矩阵；**

**（2）雅可比矩阵依赖于机器人的关节变量q，即与机器人的位姿有关，记作J(q)，是一个依赖于q的线性变换矩阵。**

**（3） J(q) 不一定是方阵，$m \times n$ 阶矩阵，行数*m*表示机器人的操作空间的维数，而列数*n*表示机器人的关节变量数。**

**例如，平面机器人操作臂的雅可比一般为3行，而空间操作臂则有6行。**

**具有n个关节变量的空间机器人，雅可比矩阵是6xn阶。**



**雅可比矩阵 ⟹ 逆雅可比矩阵**

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}$$

$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$ **——逆雅可比矩阵**

逆雅可比矩阵，用于计算实现机器人末端的期望速度时的每个关节速度。一般逆雅可比矩阵计算复杂，计算量大。

雅可比矩阵为非方阵时，如何求其逆矩阵？



**例4.1** 利用雅可比矩阵可进行机器人奇异形位判断

方法：计算雅可比矩阵的秩，满秩？

二自由度平面关节机器人，运动学方程：

$$\begin{cases} x=l_1\cos\theta_1+l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y=l_1\sin\theta_1+l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

即，
$$\begin{cases} x=x(\theta_1,\theta_2) \\ y=y(\theta_1,\theta_2) \end{cases}$$

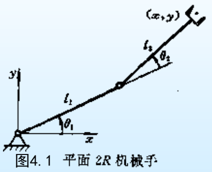



图4.1 平面2R机械手

两端分别对时间 $t$ 求导：

$$\begin{cases} \dot{x}=-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1-l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \dot{y}=l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$



合并相关项：

$$\begin{cases} \dot{x}=(-l_1\sin\theta_1-l_2\sin(\theta_1+\theta_2))\dot{\theta}_1-l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ \dot{y}=(l_1\cos\theta_1+l_2\cos(\theta_1+\theta_2))\dot{\theta}_1+l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_2 \end{cases}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -l_1s_1-l_2s_{12} & -l_2s_{12} \\ l_1c_1+l_2c_{12} & l_2c_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

式中： $\dot{\mathbf{x}}=[\dot{x} \quad \dot{y}]^{\mathrm{T}}, \dot{\mathbf{q}}=[\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix} -l_1s_1-l_2s_{12} & -l_2s_{12} \\ l_1c_1+l_2c_{12} & l_2c_{12} \end{bmatrix}$$

对关节空间的某些形位$\mathbf{q}$，$\mathbf{J(q)}$的秩减少，这些形位称为操作臂的**奇异形位**。

可用$|\mathbf{J(q)}|$判别奇异形位。

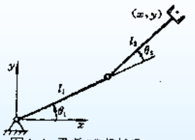


图4.1 平面2R机械手

$$\mathbf{J(q)}=\begin{bmatrix}-l_1s_1-l_2s_{12} & -l_2s_{12}\\ l_1c_1+l_2c_{12} & l_2c_{12}\end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J(q)}|=l_1l_2s_2$$

当$\theta_2=0^\circ$(或$180^\circ$)时。$|\mathrm{J(q)}|=0$，矩阵的秩为1，处于奇异状态。从几何上看，机械手完全伸直($\theta_2=0^\circ$)，或完全缩回($\theta_2=180^\circ$)时，机械手末端**丧失一个径向自由度**，仅能沿切向运动。**在奇异形位时，机械手在操作空间的自由度将减少**。



## 利用逆雅可比矩阵计算关节速度

例4.2 平面2R机械手末端沿$x_0$轴以1m/s的速度运动，求相应的关节速度 $\dot{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2\end{bmatrix}^T$

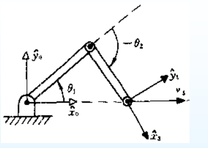


图4.2 平面2R机械手

只要J(q)是满秩方阵，则存在逆雅可比矩阵 $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$

$$\mathbf{J(q)}=\begin{bmatrix}-l_1s_1-l_2s_{12} & -l_2s_{12}\\ l_1c_1+l_2c_{12} & l_2c_{12}\end{bmatrix}$$ 代入求逆矩阵公式可得：

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})=\frac{1}{l_1l_2s_2}\begin{bmatrix}l_2c_{12} & l_2s_{12}\\ -l_1c_1-l_2c_{12} & -l_1s_1-l_2s_{12}\end{bmatrix}$$



$$\because\quad \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})=\frac{1}{l_1l_2s_2}\begin{bmatrix}l_2c_{12} & l_2s_{12}\\ -l_1c_1-l_2c_{12} & -l_1s_1-l_2s_{12}\end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad \dot{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{c_{12}}{l_1s_2}\\ -\dfrac{c_1}{l_2s_2}-\dfrac{c_{12}}{l_1s_2}\end{bmatrix}$$

当$\theta_2\to0^\circ$(或$180^\circ$)时，$\dot{\mathbf{q}}\to\infty$，机械臂$\to$奇异形位。



## 小结：

操作臂雅克比矩阵的定义？

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x(q_1,\dots,q_n)\\ y(q_1,\dots,q_n)\\ z(q_1,\dots,q_n)\\ \varphi_x(q_1,\dots,q_n)\\ \varphi_y(q_1,\dots,q_n)\\ \varphi_z(q_1,\dots,q_n)\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial q_n}\\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial q_n}\\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial q_n}\\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_n}\\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_n}\\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_n}\end{bmatrix}_{6\times n}\cdot\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix}_{n\times1}$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J(q)}\dot{\mathbf{q}}\qquad 或 \qquad \mathbf{V}=\mathbf{J(q)}\dot{\mathbf{q}}\qquad (4.2)$$

**雅可比矩阵的第*i*行第*j*列元素为：**

$$\mathbf{J}_{ij}(\mathbf{q})=\frac{\partial \mathbf{x}_i(\mathbf{q})}{\partial q_j},\quad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n\qquad (4.3)$$



$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J(q)}\dot{\mathbf{q}}\qquad 或 \qquad \mathbf{V}=\mathbf{J(q)}\dot{\mathbf{q}}\qquad (4.2)$$

定义：

机器人操作臂的雅可比矩阵指从关节空间速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 向操作空间速度 $\dot{\mathbf{x}}$或$\mathbf{V}$ 映射的线性变换，简称雅可比。

J(q)不一定是方阵，$m\times n$ 阶矩阵

行数$m$表示机器人的操作空间的维数，

列数$n$表示机器人的关节自由度数。



## 4.2 雅可比矩阵构造法

1. **雅可比矩阵J(q)的分块**
2. **矢量积法（移动关节、转动关节）**

   **雅可比矩阵看成是由关节空间向操作空间的速度传递的线性关系。**$\mathbf{V}=\mathbf{J(q)}\dot{\mathbf{q}}$
3. **微分变换法（移动关节、转动关节）**

   **雅可比矩阵看成是由关节空间向操作空间的微分运动转换的线性关系**$\mathbf{D}=\mathbf{J(q)}d\mathbf{q}$

## 1. 雅可比矩阵J(q)的分块

三维空间机器人操作臂末端的广义位姿矢量为：

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x(q_1,\dots,q_n) \\ y(q_1,\dots,q_n) \\ z(q_1,\dots,q_n) \\ \varphi_x(q_1,\dots,q_n) \\ \varphi_y(q_1,\dots,q_n) \\ \varphi_z(q_1,\dots,q_n) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_n} \end{bmatrix}_{6\times n}$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$



## 1. 雅可比矩阵J(q)的分块

三维空间机器人末端的广义速度V 由线速度 v 和角速度ω组成的 6 维列向量。

$$\because \quad \dot{\mathbf{x}}=\mathbf{V}=\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{l1} & \mathbf{J}_{l2} & \cdots & \mathbf{J}_{ln} \\ \mathbf{J}_{a1} & \mathbf{J}_{a2} & \cdots & \mathbf{J}_{an} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

三维空间n个关节机器人雅克比矩阵**J(q)**是6xn阶矩阵，

其前三行为位置雅可比矩阵，与手爪线速度相关的线性映射；

其后三行为方位雅可比矩阵，与手爪角速度相关的线性映射。



$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{l1} & \mathbf{J}_{l2} & \cdots & \mathbf{J}_{ln} \\ \mathbf{J}_{a1} & \mathbf{J}_{a2} & \cdots & \mathbf{J}_{an} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

将v和ω表示成 $\dot{q}_i\ (i=1,2,\dots,n)$ 的线性函数：

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{J}_{l1}\dot{q}_1+\mathbf{J}_{l2}\dot{q}_2+\dots+\mathbf{J}_{ln}\dot{q}_n \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{J}_{a1}\dot{q}_1+\mathbf{J}_{a2}\dot{q}_2+\dots+\mathbf{J}_{an}\dot{q}_n \end{aligned} \quad (4.4)$$

式中，$\mathbf{J}_{li}$和$\mathbf{J}_{ai}$分别表示关节 *i* 的单位关节速度引起手爪的线速度和角速度。



当操作臂有较多自由度时，难以用定义直接计算雅可比矩阵。有两种构造性方法相对较简单：

- **矢量积法**

雅可比矩阵是从关节空间向操作空间的速度传递的线性关系：

$$\mathbf{V}=\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{l1} & \mathbf{J}_{l2} & \cdots & \mathbf{J}_{ln} \\ \mathbf{J}_{a1} & \mathbf{J}_{a2} & \cdots & \mathbf{J}_{an} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

- **微分变换法**

雅可比矩阵是从关节空间向操作空间的微分运动映射的线性关系： $\mathbf{D}=\mathbf{J}(\mathbf{q})d\mathbf{q}$



## 2.矢量积法

**Whitney基于运动坐标系的概念，提出机器人雅可比矩阵的矢量积法。图4–2是关节速度的传递，末端手爪的线速度v和角速度ω 与关节速度 $\dot{q}_i$ 有关。**

### 1. 移动关节 *i*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ 0 \end{bmatrix}\dot{q}_i$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{l1} & \cdots & \mathbf{J}_{li} & \cdots & \mathbf{J}_{ln} \\ \mathbf{J}_{a1} & \cdots & \mathbf{J}_{ai} & \cdots & \mathbf{J}_{an} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_i=\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

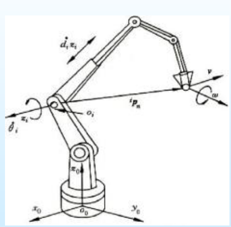


图4–2 关节速度的传递



## 二.矢量积法

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{l1} & \cdots & \mathbf{J}_{li} & \cdots & \mathbf{J}_{ln} \\ \mathbf{J}_{a1} & \cdots & \mathbf{J}_{ai} & \cdots & \mathbf{J}_{an} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

### 2. 转动关节*i*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times {}^i\mathbf{p}_n^0 \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix}\dot{q}_i \quad (4.5)$$

$$\mathbf{J}_i=\begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times {}^i\mathbf{p}_n^0 \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

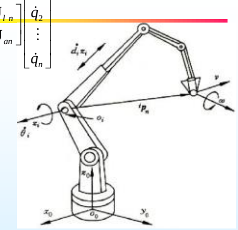


图4－2 关节速度的传递

**式中，${}^i\mathbf{p}_n^0$ 表示末端手爪坐标系的原点相对坐标系$\{i\}$的位置矢量 ${}^i\mathbf{p}_n$在基坐标系$\{0\}$中的表示，即 ${}^i\mathbf{p}_n^0={}^0_i\mathbf{R}\cdot{}^i\mathbf{p}_n$**

**$\mathbf{z}_i$ 是坐标系$\{i\}$的 *z* 轴单位矢量在基坐标系$\{0\}$中的表示。**

## 二.矢量积法

### 矢量积法求解雅克比矩阵

**对于三维空间n个关节机器人：**

（1） 分别求旋转矩阵 ${}^0_1\mathbf{R}, {}^0_2\mathbf{R}, \cdots, {}^0_n\mathbf{R}$

（2） 分别求 $\mathbf{z}_i\,(i=1,2\cdots,n)$——坐标系 $\{i\}$ 的 z 轴单位向量在基坐标系中的表示.

（3） 分别求 ${}^i\mathbf{p}_n\,(i=1,2\cdots,n)$——手爪坐标原点相对坐标系 $\{i\}$ 的位置矢量.

（4） 分别求 ${}^i\mathbf{p}_n^0\,(i=1,2\cdots,n)$——${}^i\mathbf{p}_n^0 = {}^0_i\mathbf{R}\cdot{}^i\mathbf{p}_n$ . 位置矢量 ${}^i\mathbf{p}_n\,(i=1,2\cdots,n)$ 基坐标系中的表示.

（5） 分别求 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 的各列 $\mathbf{J}_1(\mathbf{q})$、 $\mathbf{J}_2(\mathbf{q})$、 $\cdots$ $\mathbf{J}_i(\mathbf{q})$、 $\cdots$、 $\mathbf{J}_n(\mathbf{q})$——

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times {}^i\mathbf{p}_n{}^0 \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix} \quad \text{（转动关节 i）} \qquad \mathbf{J}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{（移动关节 i）}$$



## 三、微分变换法

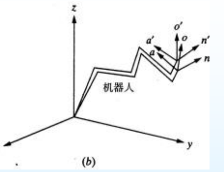



图 机器人关节与手爪坐标系微分运动的关联

机器人关节的微分运动与手爪坐标系的微分运动是如何关联的？

机器人的雅克比矩阵建立关节微分运动与手爪微分运动的关联关系。

$$\mathbf{D} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,d\mathbf{q}$$



## 三、微分变换法

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(q_1,\ldots,q_n) \\ y(q_1,\ldots,q_n) \\ z(q_1,\ldots,q_n) \\ \varphi_x(q_1,\ldots,q_n) \\ \varphi_y(q_1,\ldots,q_n) \\ \varphi_z(q_1,\ldots,q_n) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{求微分}} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix}$$

或 $\mathbf{D} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,d\mathbf{q}$



## 三、微分变换法

### 1. 转动关节$i$

刚体或坐标系的微分运动用向量表示为：

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x & d_y & d_z & \delta_x & \delta_y & \delta_z \end{bmatrix}^T \qquad (4.7)$$

对于转动关节$i$，若连杆$i$相对连杆$i$-1绕坐标系$\{i\}$的$z_i$轴作

微分转动 $d\theta_i$

相当于微分运动矢量为：

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\theta_i$$



## 从关节到末端？

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\theta_i$$

$$\begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (\mathbf{p}\times\mathbf{n})_x & (\mathbf{p}\times\mathbf{n})_y & (\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z \\ o_x & o_y & o_z & (\mathbf{p}\times\mathbf{o})_x & (\mathbf{p}\times\mathbf{o})_y & (\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z \\ a_x & a_y & a_z & (\mathbf{p}\times\mathbf{a})_x & (\mathbf{p}\times\mathbf{a})_y & (\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}$$

T=?

$$\begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z \\ (\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z \\ (\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z \\ n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} d\theta_i \qquad (4.8)$$

——手爪相应的微分运动向量



## 三、微分变换法

雅可比矩阵的第$i$列为：

$$\begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z \\ (\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z \\ (\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z \\ n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} d\theta_i \qquad \mathbf{D} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,d\mathbf{q} \qquad {}^T\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z \\ (\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z \\ (\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z \\ n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} \quad \text{(转动关节}i\text{)}$$

式中，$\mathbf{n},\mathbf{o},\mathbf{a},\mathbf{p}$ 是 ${}^i_n\mathbf{T}$的四个列向量。

> 微分变换法
>
> 雅可比矩阵是从关节空间向操作空间的微分运动映射的线性关系：$\mathbf{D} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\,d\mathbf{q}$

$$ {}^{T}\mathbf{J}_i(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix} \quad (\text{转动关节}i) $$

$$ {}^{T}\mathbf{J}_{li}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\end{bmatrix} \quad (\text{转动关节}i) $$

$$ {}^{T}\mathbf{J}_{ai}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix} \quad (\text{转动关节}i) $$



## 三、微分变换法

### 2、移动关节*i*

刚体或坐标系的微分运动用向量可表示为：

$$ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\\boldsymbol{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_x & d_y & d_z & \delta_x & \delta_y & \delta_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad (4.8) $$

若关节$i$是移动关节，连杆$i$沿$z_i$轴相对于连杆$i$-1作微分移动 $\mathrm{d}d_i$ ，则相当于微分运动向量为：

$$ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\\boldsymbol{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\mathrm{d}d_i \qquad \begin{bmatrix}{}^{T}d_x\\{}^{T}d_y\\{}^{T}d_z\\{}^{T}\delta_x\\{}^{T}\delta_y\\{}^{T}\delta_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_z\\o_z\\a_z\\0\\0\\0\end{bmatrix}\mathrm{d}d_i \qquad (4.27) $$

——手爪相应的微分运动向量



## 三、微分变换法

### 2、移动关节*i*

雅可比矩阵的第$i$列为：

$$ \begin{bmatrix}{}^{T}d_x\\{}^{T}d_y\\{}^{T}d_z\\{}^{T}\delta_x\\{}^{T}\delta_y\\{}^{T}\delta_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_z\\o_z\\a_z\\0\\0\\0\end{bmatrix}\mathrm{d}d_i \qquad {}^{T}\mathbf{J}_i(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}n_z\\o_z\\a_z\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad (\text{移动关节}i) $$

$$ {}^{T}\mathbf{J}_{li}=\begin{bmatrix}n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix} \quad (\text{移动关节}i) \qquad {}^{T}\mathbf{J}_{ai}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad (\text{移动关节}i) $$

式中，$\mathbf{n},\mathbf{o},\mathbf{a},\mathbf{p}$ 是$\boxed{{}^{i}_{n}\mathbf{T}}$的四个列向量。

微分变换法构造雅可比矩阵，由机器人连杆间的坐标变换矩阵 ${}^{i}_{n}\mathbf{T}(i=1,2,\ldots,n)$ 确定。



## 微分变换法求解雅克比矩阵具体步骤：

① 计算各连杆间的齐次变换矩阵 ${}^{i-1}_{i}\mathbf{T}$: ${}^{0}_{1}\mathbf{T}$, ${}^{1}_{2}\mathbf{T}$, ${}^{2}_{3}\mathbf{T}$, ${}^{3}_{4}\mathbf{T}$, ${}^{4}_{5}\mathbf{T}$, ${}^{5}_{6}\mathbf{T}$

② 计算各连杆至末端的齐次变换 ${}^{i}_{n}\mathbf{T}$: ${}^{1}_{n}\mathbf{T}$, ${}^{2}_{n}\mathbf{T}$, ${}^{3}_{n}\mathbf{T}$, ${}^{4}_{n}\mathbf{T}$, ${}^{5}_{n}\mathbf{T}$, ${}^{6}_{n}\mathbf{T}$

$$ {}^{n-1}_{n}\mathbf{T};\ {}^{n-2}_{n}\mathbf{T}={}^{n-2}_{n-1}\mathbf{T}\cdot{}^{n-1}_{n}\mathbf{T};\ \cdots\ {}^{n-i}_{n}\mathbf{T}={}^{n-i}_{n-i+1}\mathbf{T}\cdot{}^{n-i+1}_{n}\mathbf{T};\cdots\ {}^{n-n+1}_{n}\mathbf{T} $$

③ 计算$^{T}$J(q)的各列元素:第 *i* 列$\boxed{{}^{T}\mathbf{J}_i(\mathbf{q})}$ 由 $\boxed{{}^{i}_{n}\mathbf{T}(i=1,2\cdots,n)}$ 所确定。

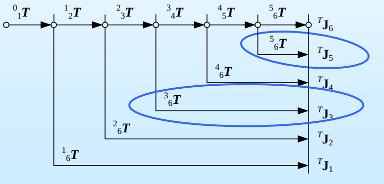


图4-3 ${}^{T}\mathbf{J}_i$和 ${}^{i}_{n}\mathbf{T}(i=1,2\cdots,n)$ 间的关系



## 小结：

两种雅可比矩阵构造法：

➢矢量积法

$$ \mathbf{J}_i(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}\mathbf{z}_i\\0\end{bmatrix} \quad (\text{移动关节}i) \qquad \mathbf{J}_i(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}\mathbf{z}_i\times{}^{i}\mathbf{p}_n^{0}\\\mathbf{z}_i\end{bmatrix} \quad (\text{转动关节}i) $$

➢微分变换法（$^{T}J(q)$的第 *i* 列 $\boxed{{}^{T}\mathbf{J}_i(\mathbf{q})}$由 $\boxed{{}^{i}_{n}\mathbf{T}}$ 所确定）

$$ {}^{T}\mathbf{J}_i(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}n_z\\o_z\\a_z\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad (\text{移动关节}i) \qquad {}^{T}\mathbf{J}_i(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix} \quad (\text{转动关节}i) $$



END

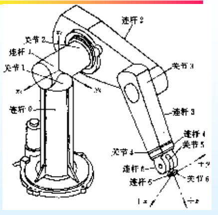
## 4.4 PUMA560机器人雅可比矩阵

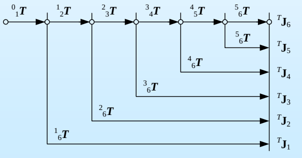
**微分变换法求雅克比矩阵：**

**PUMA 560有6个旋转关节，**

**其雅可比矩阵有6列。**

$$^{T}J(q)=\left[{}^{T}J_1\quad {}^{T}J_2\quad {}^{T}J_3\quad {}^{T}J_4\quad {}^{T}J_5\quad {}^{T}J_6\right]$$





$$^{i}_{6}\mathbf{T}\Rightarrow {}^{T}\mathbf{J}_i=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}$$



## 4.4 PUMA560机器人雅可比矩阵

$^{T}\mathbf{J}_i(\mathbf{q})(i=1,\ldots,6)$的第1列对应的变换矩阵是 $^{1}_{6}\mathbf{T}$

$$^{1}_{6}T=\begin{bmatrix}{}^{1}n_x & {}^{1}o_x & {}^{1}a_x & {}^{1}p_x\\{}^{1}n_y & {}^{1}o_y & {}^{1}a_y & {}^{1}p_y\\{}^{1}n_z & {}^{1}o_z & {}^{1}a_z & {}^{1}p_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$ 中各元素已知 教材第41页式（3.14）

$$^{1}_{6}\mathbf{T}\Rightarrow \quad {}^{T}\mathbf{J}_1(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_xn_y-p_yn_x\\p_xo_y-p_yo_x\\p_xa_y-p_ya_x\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}$$

将教材第41页式（3.14）中的相关元素代入上式，即得 $^{T}\mathbf{J}_1(\mathbf{q})$ 中6个元素。



## $^{T}\mathbf{J}_2(\mathbf{q})=?$

$$^{2}_{6}\mathbf{T}={}^{2}_{3}\mathbf{T}{}^{3}_{4}\mathbf{T}{}^{4}_{5}\mathbf{T}{}^{5}_{6}\mathbf{T}={}^{2}_{3}\mathbf{T}{}^{3}_{6}\mathbf{T}$$

$$=\begin{bmatrix}c_3&-s_3&0&a_2\\s_3&c_3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_4c_5c_6-s_4s_6&-c_4c_5c_6-s_4s_6&-c_4s_5&a_3\\s_5c_6&-s_5s_6&c_5&d_4\\-s_4c_5c_6-c_4s_6&s_4c_5s_6-c_4c_6&s_4s_5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}c_3(c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_3s_5c_6 & c_3(-c_4c_5c_6-s_4s_6)+s_3s_5s_6 & -c_3c_4s_5-s_3c_5 & a_3c_3-d_4s_3+a_2\\s_3(c_4c_5c_6-s_4s_6)+c_3s_5c_6 & s_3(-c_4c_5c_6-s_4s_6)-c_3s_5s_6 & -s_3c_4s_5+c_3c_5 & a_3s_3+d_4c_3\\-s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



$$^{2}_{6}T=\begin{bmatrix}{}^{2}n_x & {}^{2}o_x & {}^{2}a_x & {}^{2}p_x\\{}^{2}n_y & {}^{2}o_y & {}^{2}a_y & {}^{2}p_y\\{}^{2}n_z & {}^{2}o_z & {}^{2}a_z & {}^{2}p_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$^{2}_{6}\mathbf{T}\Rightarrow \quad {}^{T}\mathbf{J}_2(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_xn_y-p_yn_x\\p_xo_y-p_yo_x\\p_xa_y-p_ya_x\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}$$

将$^{2}_{6}\mathbf{T}$中的相关元素代入上式，即得 $^{T}\mathbf{J}_2(\mathbf{q})$ 中6个元素。



$$p_xn_y-p_yn_x$$
$$=(a_3c_3-d_4s_3+a_2)(s_3(c_4c_5c_6-s_4s_6)+c_3s_5c_6)-(a_3s_3+d_4c_3)(c_3(c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_3s_5c_6)$$
$$=(a_3c_3-d_4s_3+a_2)(s_3c_4c_5c_6-s_3s_4s_6+c_3s_5c_6)-(a_3s_3+d_4c_3)(c_3c_4c_5c_6-c_3s_4s_6-s_3s_5c_6)$$
$$=a_3c_3s_3c_4c_5c_6-a_3c_3s_3s_4s_6+a_3c_3c_3s_5c_6-d_4s_3s_3c_4c_5c_6+d_4s_3s_3s_4s_6-d_4s_3c_3s_5c_6$$
$$-a_3s_3c_3c_4c_5c_6+a_3s_3c_3s_4s_6+a_3s_3s_3s_5c_6-d_4c_3c_3c_4c_5c_6+d_4c_3c_3s_4s_6+d_4c_3s_3s_5c_6+a_2(s_3(c_4c_5c_6-s_4s_6)+c_3s_5c_6)$$
$$=a_3c_3c_3s_5c_6-d_4s_3s_3c_4c_5c_6+d_4s_3s_3s_4s_6+a_3s_3s_3s_5c_6-d_4c_3c_3c_4c_5c_6+d_4c_3c_3s_4s_6+a_2(s_3(c_4c_5c_6-s_4s_6)+c_3s_5c_6)$$
$$=a_3s_5c_6-d_4c_4c_5c_6+d_4s_4s_6+a_2(s_3(c_4c_5c_6-s_4s_6)+c_3s_5c_6)$$



同理： $^{T}\mathbf{J}_3(\mathbf{q})=?$

教材第41页式（3.12）已求得 $^{3}_{6}\mathbf{T}$

$$^{3}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}c_4c_5c_6-s_4s_6&-c_4c_5c_6-s_4s_6&-c_4s_5&a_3\\s_5c_6&-s_5s_6&c_5&d_4\\-s_4c_5c_6-c_4s_6&s_4c_5s_6-c_4c_6&s_4s_5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$^{3}_{6}T=\begin{bmatrix}{}^{3}n_x & {}^{3}o_x & {}^{3}a_x & {}^{3}p_x\\{}^{3}n_y & {}^{3}o_y & {}^{3}a_y & {}^{3}p_y\\{}^{3}n_z & {}^{3}o_z & {}^{3}a_z & {}^{3}p_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

则，$$ {}^{T}\mathbf{J}_3(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_xn_y-p_yn_x\\p_xo_y-p_yo_x\\p_xa_y-p_ya_x\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_3(s_5c_6)-d_4(c_4c_5c_6-s_4s_6)\\a_3(-s_5s_6)-d_4(-c_4c_5c_6-s_4s_6)\\a_3(c_5)-d_4(-c_4s_5)\\-s_4c_5c_6-c_4s_6\\s_4c_5s_6-c_4c_6\\s_4s_5\end{bmatrix} $$



同理：${}^{T}\mathbf{J}_4(\mathbf{q})=?$

教材第41页式（3.11）已求得 ${}^{4}_{6}\mathbf{T}$

$$ {}^{4}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}c_5c_6&-c_5s_6&-s_5&0\\s_6&c_6&0&0\\s_5c_6&-s_5s_6&c_5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{4}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}{}^4n_x&{}^4o_x&{}^4a_x&{}^4p_x\\{}^4n_y&{}^4o_y&{}^4a_y&{}^4p_y\\{}^4n_z&{}^4o_z&{}^4a_z&{}^4p_z\\0&0&0&1\end{bmatrix} $$



则，$$ {}^{T}\mathbf{J}_4(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_xn_y-p_yn_x\\p_xo_y-p_yo_x\\p_xa_y-p_ya_x\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\s_5c_6\\-s_5s_6\\c_5\end{bmatrix} $$



同理：${}^{T}\mathbf{J}_5(\mathbf{q})=?$

教材第40页式（3.9）已求得 ${}^{5}_{6}\mathbf{T}$

$$ {}^{5}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}c_6&-s_6&0&0\\0&0&1&0\\-s_6&-c_6&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{5}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}{}^5n_x&{}^5o_x&{}^5a_x&{}^5p_x\\{}^5n_y&{}^5o_y&{}^5a_y&{}^5p_y\\{}^5n_z&{}^5o_z&{}^5a_z&{}^5p_z\\0&0&0&1\end{bmatrix} $$



则，$$ {}^{T}\mathbf{J}_5(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_xn_y-p_yn_x\\p_xo_y-p_yo_x\\p_xa_y-p_ya_x\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-s_6\\-c_6\\0\end{bmatrix} $$



同理：${}^{T}\mathbf{J}_6(\mathbf{q})=?$

$$ {}^{6}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{T}\mathbf{J}_6(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{o})_z\\(\mathbf{p}\times\mathbf{a})_z\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_xn_y-p_yn_x\\p_xo_y-p_yo_x\\p_xa_y-p_ya_x\\n_z\\o_z\\a_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} $$

## 矢量积法求PUMA560机器人的雅克比矩阵：

由于PUMA560的6个关节都是转动关节，其雅可比矩阵具有如下形式：

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1(q) & \mathbf{J}_2(q) & \mathbf{J}_3(q) & \mathbf{J}_4(q) & \mathbf{J}_5(q) & \mathbf{J}_6(q)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_i(q)=\begin{bmatrix}\mathbf{z}_i\times{}^{i}\mathbf{p}_n^{\,0}\\ \mathbf{z}_i\end{bmatrix}\qquad (\text{转动关节}i)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1\times{}^{1}\mathbf{p}_6^{0} & \mathbf{z}_2\times{}^{2}\mathbf{p}_6^{0} & \cdots & \mathbf{z}_6\times{}^{6}\mathbf{p}_6^{0}\\ \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \cdots & \mathbf{z}_6\end{bmatrix}$$



## 矢量积法求解雅克比矩阵具体步骤：

参考教材第40页：图3.7 以及式（3.9）坐标变换矩阵的结果${}^{0}_{1}\mathbf{T},{}^{1}_{2}\mathbf{T},{}^{2}_{3}\mathbf{T},{}^{3}_{4}\mathbf{T},{}^{4}_{5}\mathbf{T},{}^{5}_{6}\mathbf{T}$

（1） 分别求旋转矩阵 ${}^{0}_{1}\mathbf{R},{}^{0}_{2}\mathbf{R},{}^{0}_{3}\mathbf{R},{}^{0}_{4}\mathbf{R},{}^{0}_{5}\mathbf{R},{}^{0}_{6}\mathbf{R}$

（2） 分别求 $\mathbf{z}_i\,(i=1,2\cdots,6)$——坐标系 $\{i\}$ 的 z 轴单位向量在基坐标系中的表示.

（3） 分别求 ${}^{i}\mathbf{p}_6\,(i=1,2\cdots,6)$——手爪坐标原点相对坐标系 $\{i\}$ 的位置矢量.

（4） 分别求 ${}^{i}\mathbf{p}_6^{0}\,(i=1,2\cdots,6)$——${}^{i}\mathbf{p}_n^{0}={}^{0}_{i}\mathbf{R}\cdot{}^{i}\mathbf{p}_n$. 位置矢量 ${}^{i}\mathbf{p}_6\,(i=1,2\cdots,6)$ 基坐标系中的表示.

（5） 分别求 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 的各列 $\mathbf{J}_1(\mathbf{q})$、 $\mathbf{J}_2(\mathbf{q})$、 $\mathbf{J}_3(\mathbf{q})$、 $\mathbf{J}_4(\mathbf{q})$、 $\mathbf{J}_5(\mathbf{q})$、 $\mathbf{J}_6(\mathbf{q})$——

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}\mathbf{z}_i\times{}^{i}\mathbf{p}_n^{\,0}\\ \mathbf{z}_i\end{bmatrix}\quad（转动关节 i）\qquad \mathbf{J}_i(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}\mathbf{z}_i\\ 0\end{bmatrix}\quad（移动关节 i）$$



## （1） ${}^{0}_{1}\mathbf{R},{}^{0}_{2}\mathbf{R},{}^{0}_{3}\mathbf{R},{}^{0}_{4}\mathbf{R},{}^{0}_{5}\mathbf{R},{}^{0}_{6}\mathbf{R}$

各个连杆（坐标系）相对于基坐标系的旋转矩阵：

$${}^{0}_{1}\mathbf{R}=\begin{bmatrix}c_1 & -s_1 & 0\\ s_1 & c_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$${}^{0}_{2}\mathbf{R}=\begin{bmatrix}c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1\\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1\\ -s_2 & -c_2 & 0\end{bmatrix}\qquad {}^{0}_{2}\mathbf{R}={}^{0}_{1}\mathbf{R}\cdot{}^{1}_{2}\mathbf{R}$$

$${}^{0}_{3}\mathbf{R}=\begin{bmatrix}c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1\\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1\\ -s_{23} & -c_{23} & 0\end{bmatrix}\qquad {}^{0}_{3}\mathbf{R}={}^{0}_{1}\mathbf{R}\cdot{}^{1}_{2}\mathbf{R}\cdot{}^{2}_{3}\mathbf{R}$$



$${}^{0}_{4}\mathbf{R}=\begin{bmatrix}c_1c_{23}c_4+s_1s_4 & -c_1c_{23}s_4+s_1c_4 & -c_1s_{23}\\ s_1c_{23}c_4-c_1s_4 & -s_1c_{23}s_4-c_1c_4 & -s_1s_{23}\\ -s_{23}c_4 & s_{23}s_4 & -c_{23}\end{bmatrix}$$

$${}^{0}_{5}\mathbf{R}=\begin{bmatrix}(c_1c_{23}c_4+s_1s_4)c_5-c_1s_{23}s_5 & -(c_1c_{23}c_4+s_1s_4)s_5-c_1s_{23}c_5 & c_1c_{23}s_4-s_1c_4\\ (s_1c_{23}c_4-c_1s_4)c_5-s_1s_{23}s_5 & -(s_1c_{23}c_4-c_1s_4)s_5-s_1s_{23}c_5 & s_1c_{23}s_4+c_1c_4\\ -s_{23}c_4c_5-c_{23}s_5 & s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5 & -s_{23}s_4\end{bmatrix}$$

$${}^{0}_{6}\mathbf{R}=\begin{bmatrix}n_x & o_x & a_x\\ n_y & o_y & a_y\\ n_z & o_z & a_z\end{bmatrix}$$

见教材42页式（3.15）



## (2)求坐标系{i}的z轴单位向量在基坐标系中的表示

$$\mathbf{z}_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{z}_1={}^{0}_{1}\mathbf{R}\cdot z_0=\begin{bmatrix}c_1 & -s_1 & 0\\ s_1 & c_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_2={}^{0}_{2}\mathbf{R}\cdot z_0=\begin{bmatrix}c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1\\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1\\ -s_2 & -c_2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s_1\\c_1\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_3={}^{0}_{3}\mathbf{R}\cdot z_0=\begin{bmatrix}c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1\\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1\\ -s_{23} & -c_{23} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s_1\\c_1\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_4={}^{0}_{4}\mathbf{R}\cdot z_0=\begin{bmatrix}c_1c_{23}c_4+s_1s_4 & -c_1c_{23}s_4+s_1c_4 & -c_1s_{23}\\ s_1c_{23}c_4-c_1s_4 & -s_1c_{23}s_4-c_1c_4 & -s_1s_{23}\\ -s_{23}c_4 & s_{23}s_4 & -c_{23}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c_1s_{23}\\-s_1s_{23}\\-c_{23}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_5={}^{0}_{5}\mathbf{R}\cdot z_0=\begin{bmatrix}(c_1c_{23}c_4+s_1s_4)c_5-c_1s_{23}s_5 & -(c_1c_{23}c_4+s_1s_4)s_5-c_1s_{23}c_5 & c_1c_{23}s_4-s_1c_4\\ (s_1c_{23}c_4-c_1s_4)c_5-s_1s_{23}s_5 & -(s_1c_{23}c_4-c_1s_4)s_5-s_1s_{23}c_5 & s_1c_{23}s_4+c_1c_4\\ -s_{23}c_4c_5-c_{23}s_5 & s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5 & -s_{23}s_4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1c_{23}s_4-s_1c_4\\ s_1c_{23}s_4+c_1c_4\\ -s_{23}s_4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_6={}^{0}_{6}\mathbf{R}\cdot z_0=\begin{bmatrix}-c_1(c_{23}c_4s_5+s_{23}c_5)-s_1s_4s_5\\ -s_1(c_{23}c_4s_5+s_{23}c_5)+c_1s_4s_5\\ s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5\end{bmatrix}$$



## (3)求手爪坐标原点相对坐标系{i}的位置矢量

$${}^{i}\mathbf{p}_6\,(i=1,2\cdots,6)$$

$${}^{1}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}c_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_{23}s_5c_6 & -c_{23}(c_4c_5s_6+s_4c_6)+s_{23}s_5s_6 & -c_{23}c_4s_5-s_{23}c_5 & a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}\\ -s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & d_2\\ -s_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-c_{23}s_5c_6 & s_{23}(c_4c_5s_6+s_4c_6)+c_{23}s_5s_6 & s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5 & -a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

教材41页式（3.14）

$${}^{1}\mathbf{p}_6=\begin{bmatrix}a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}\\ d_2\\ -a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23}\end{bmatrix}$$

$$
{}^{2}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c_3(c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_3s_5c_6 & c_3(-c_4c_5c_6-s_4s_6)+s_3s_5s_6 & -c_3c_4s_5-s_3c_5 & a_3c_3-d_4s_3+a_2 \\ s_3(c_4c_5c_6-s_4s_6)+c_3s_5c_6 & s_3(-c_4c_5c_6-s_4s_6)-c_3s_5s_6 & -s_3c_4s_5+c_3c_5 & a_3s_3+d_4c_3 \\ -s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\mathbf{p}_6=\begin{bmatrix} a_3c_3-d_4s_3+a_2 \\ a_3s_3+d_4c_3 \\ 0 \end{bmatrix}
$$



$$
{}^{3}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}\mathbf{p}_6=\begin{bmatrix} a_3 \\ d_4 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{4}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{4}\mathbf{p}_6=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$



$$
{}^{5}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{5}\mathbf{p}_6=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{6}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{6}\mathbf{p}_6=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$



## （4）求 ${}^{i}\mathbf{p}_6^0\,(i=1,2\cdots,6)$

$$
{}^{1}\mathbf{p}_6^0={}^{0}_{1}\mathbf{R}\cdot{}^{1}\mathbf{p}_6=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23} \\ d_2 \\ -a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} c_1(a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23})-d_2s_1 \\ s_1(a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23})+d_2c_1 \\ -a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23} \end{bmatrix}
$$



$$
{}^{2}\mathbf{p}_6^0={}^{0}_{2}\mathbf{R}\cdot{}^{2}\mathbf{p}_6=\begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_3c_3-d_4s_3+a_2 \\ a_3s_3+d_4c_3 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} c_1c_2(a_3c_3-d_4s_3+a_2)-c_1s_2(a_3s_3+d_4c_3) \\ s_1c_2(a_3c_3-d_4s_3+a_2)-s_1s_2(a_3s_3+d_4c_3) \\ -s_2(a_3c_3-d_4s_3+a_2)-c_2(a_3s_3+d_4c_3) \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} a_3c_1c_{23}-d_4c_1s_{23}+a_2c_1c_2 \\ a_3s_1c_{23}-d_4s_1s_{23}+a_2s_1c_2 \\ -a_3s_{23}-d_4c_{23}-a_2s_2 \end{bmatrix}
$$



$$
{}^{3}\mathbf{p}_6^0={}^{0}_{3}\mathbf{R}\cdot{}^{3}\mathbf{p}_6=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_3 \\ d_4 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} a_3c_1c_{23}-d_4c_1s_{23} \\ a_3s_1c_{23}-d_4s_1s_{23} \\ -a_3s_{23}-d_4c_{23} \end{bmatrix}
$$

$$ {}^{4}\mathbf{p}_6{}^{0} = {}^{0}_{4}\mathbf{R}\cdot{}^{4}\mathbf{p}_6 = {}^{0}_{4}\mathbf{R}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} $$

$$ {}^{5}\mathbf{p}_6{}^{0} = {}^{0}_{5}\mathbf{R}\cdot{}^{5}\mathbf{p}_6 = {}^{0}_{5}\mathbf{R}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} $$

$$ {}^{6}\mathbf{p}_6{}^{0} = {}^{0}_{6}\mathbf{R}\cdot{}^{6}\mathbf{p}_6 = {}^{0}_{6}\mathbf{R}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} $$



## (5)求$\mathbf{J}_1(\mathbf{q})$， $\mathbf{J}_2(\mathbf{q})$， $\mathbf{J}_3(\mathbf{q})$， $\mathbf{J}_4(\mathbf{q})$， $\mathbf{J}_5(\mathbf{q})$， $\mathbf{J}_6(\mathbf{q})$

$$ \mathbf{J}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\mathbf{z}_1\times{}^{1}\mathbf{p}_6{}^{0}\\ \mathbf{z}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-s_1(a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23})-d_2c_1\\ c_1(a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23})-d_2s_1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} $$

$$ \mathbf{J}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\mathbf{z}_2\times{}^{2}\mathbf{p}_6{}^{0}\\ \mathbf{z}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-c_1(a_3s_{23}+d_4c_{23}+a_2s_2)\\ -s_1(a_3s_{23}+d_4c_{23}+a_2s_2)\\ -a_3c_{23}+d_4s_{23}-a_2c_2\\ -s_1\\ c_1\\ 0\end{bmatrix} $$

$$ \mathbf{J}_3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\mathbf{z}_3\times{}^{3}\mathbf{p}_6{}^{0}\\ \mathbf{z}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-c_1(a_3s_{23}+d_4c_{23})\\ -s_1(a_3s_{23}+d_4c_{23})\\ -a_3c_{23}+d_4s_{23}\\ -s_1\\ c_1\\ 0\end{bmatrix} $$



$$ \mathbf{J}_4(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\mathbf{z}_4\times{}^{4}\mathbf{p}_6{}^{0}\\ \mathbf{z}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ -c_1s_{23}\\ -s_1s_{23}\\ -c_{23}\end{bmatrix} $$

$$ \mathbf{J}_5(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\mathbf{z}_5\times{}^{5}\mathbf{p}_6{}^{0}\\ \mathbf{z}_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ c_1c_{23}s_4-s_1c_4\\ s_1c_{23}s_4+c_1c_4\\ -s_{23}s_4\end{bmatrix} $$

$$ \mathbf{J}_6(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}\mathbf{z}_6\times{}^{6}\mathbf{p}_6{}^{0}\\ \mathbf{z}_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ -c_1(c_{23}c_4s_5+s_{23}c_5)-s_1s_4s_5\\ -s_1(c_{23}c_4s_5+s_{23}c_5)+c_1s_4s_5\\ s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5\end{bmatrix} $$



## 两种计算结果间关系：

矢量积法：　$\mathbf{J}(\mathbf{q})$

微分变换法：${}^{T}\mathbf{J}(\mathbf{q})$

$$ \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}{}^{0}_{n}\mathbf{R} & 0\\ 0 & {}^{0}_{n}\mathbf{R}\end{bmatrix}\cdot{}^{T}\mathbf{J}(\mathbf{q}) $$

$$ {}^{T}\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}{}^{0}_{n}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & {}^{0}_{n}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{q}) $$



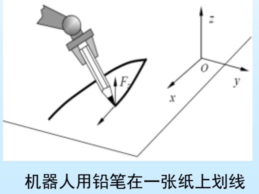
## 4.5　力雅可比

运动/速度雅克比矩阵

静力雅克比矩阵

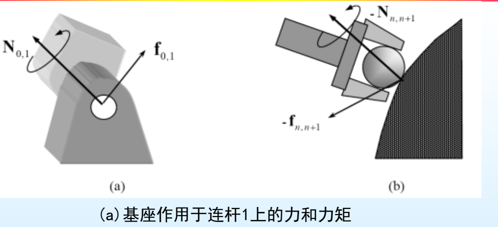
机器人与外界环境接触，在接触的地方要产生力和力矩，统称为末端广义操作力向量。

$$ \mathbf{F} = \begin{bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{n}\end{bmatrix} $$




机器人用铅笔在一张纸上划线






(a) 基座作用于连杆1上的力和力矩

(b) 环境作用于末端连杆的力和力矩

设$\mathbf{f}_{n,n+1}$,$\mathbf{N}_{n,n+1}$分别表示末端作用于环境的力和力矩. $\begin{bmatrix}\mathbf{f}_{n,n+1}\\ \mathbf{N}_{n,n+1}\end{bmatrix}$

则环境作用于机器人末端连杆的力和力矩 $\mathbf{F} = \begin{bmatrix}-\mathbf{f}_{n,n+1}\\ -\mathbf{N}_{n,n+1}\end{bmatrix}$

## 如何建立操作臂操作空间力与关节空间力间的映射关系？

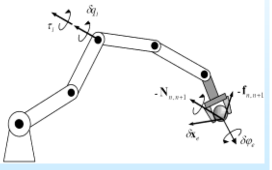
**（1）关节广义驱动力向量**

若机器人由n个关节构成，$n$个关节的驱动力或力矩构成了关节广义驱动力向量，记为 $\boldsymbol{\tau}=\left[\tau_1\ \tau_2\ \cdots\tau_n\right]^{\mathrm{T}}$ 。

**（2）末端广义操作力向量**

机器人与外界环境接触，在接触的地方产生力和力矩，称为末端广义操作力向量，记为

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}-\mathbf{f}_{n,n+1}\\-\mathbf{N}_{n,n+1}\end{bmatrix}$$



操作臂末端和各关节的虚位移



虚功原理：一个原为静止的质点系，如果约束是理想双面定常约束，则系统继续保持静止的条件是所有作用于该系统的主动力对作用点的虚位移所作的功之和为零。$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=0$

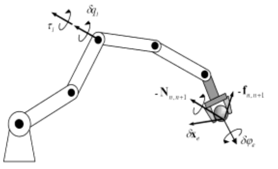
虚位移：指弹性体（或质点系）满足约束条件及连续条件的无限小可能位移。

（1）设各关节的虚位移为 $\delta q_i$ ，各关节所作的虚功之和为：

$$\delta W_1=\tau_1\delta q_1+\tau_2\delta q_2+\cdots+\tau_n\delta q_n$$

$$=\left[\tau_1\quad\tau_2\quad\cdots\quad\tau_n\right]\begin{bmatrix}\delta q_1\\\delta q_2\\\vdots\\\delta q_n\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{q}$$



对于质点和质点系中各质点位置和速度的限制称为约束。

表示这种限制条件的数学方程称为约束方程。

1. 定常约束和非定常约束

约束方程中不显含时间$t$的约束称为定常约束。

约束方程中明显地包含$t$的约束称为非定常约束。

2. 双面约束和单面约束

如果约束在两个方向都起限制运动的作用，称为双面约束。

如果约束在一个方向起限制作用，称为单面约束。



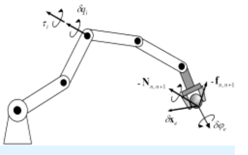
**（2）设末端执行器相应的虚位移为** $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\delta\mathbf{x}_e\\\delta\boldsymbol{\varphi}_e\end{bmatrix}$

**末端执行器所作的虚功为：**

$$\delta W_2=-\mathbf{f}_{n,n+1}{}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{x}_e-\mathbf{N}_{n,n+1}{}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\varphi}_e$$

$$=\left[-\mathbf{f}_{n,n+1}{}^{\mathrm{T}}\quad-\mathbf{N}_{n,n+1}{}^{\mathrm{T}}\right]\begin{bmatrix}\delta\mathbf{x}_e\\\delta\boldsymbol{\varphi}_e\end{bmatrix}$$

$$=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}$$



**（3）由虚功原理** $\delta W=\delta W_1+\delta W_2=0$

$$\delta W=\tau_1\cdot\delta q_1+\tau_2\cdot\delta q_2+\cdots+\tau_n\cdot\delta q_n-\mathbf{f}_{n,n+1}{}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{x}_e-\mathbf{N}_{n,n+1}{}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}_e$$

$$=\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{q}-\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}$$

$$=0$$

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{q}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}\qquad(4.32)$$



$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{q}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}\qquad(4.32)$$

**由雅可比矩阵是从关节空间向操作空间的速度传递的线性关系，也可看成是微分运动转换的线性关系。即：**

$$\mathbf{D}=\mathbf{J}(\mathbf{q})d\mathbf{q}\qquad(4.20)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{q}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{q})d\mathbf{q}$$

$$\delta\mathbf{q}=d\mathbf{q}\neq0\qquad\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{q})$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}=\mathbf{J}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{F}\qquad(4.33)}$$

$\mathbf{J}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q})$ **——操作臂的力雅可比。**

物理意义：表示在静平衡状态下，操作力向关节力的线性映射。操作臂的力雅可比是运动雅可比的转置。



END