机器人学基础

国家级《智能科学基础系列课程教学团队》

“机器人学”课程配套教材　　蔡自兴 主编

第2章　数学基础（1）

第2章 数学基础

重点内容：

- 刚体位姿的表示
- 掌握坐标变换方程
  （平移变换、旋转变换、一般变换）
- 理解齐次坐标概念
- 齐次坐标矩阵物理意义
- 齐次坐标矩阵求逆
- 旋转变换通式

难点：

- 齐次变换矩阵及运算
- 绝对变换：如果所有的变换都是相对于固定坐标系中各坐标轴旋转或平移，则依次左乘，称为绝对变换。
- 相对变换：如果动坐标系相对于自身坐标系的当前坐标轴旋转或平移，则齐次变换为依次右乘，称为相对变换。

复习：向量、矩阵

向量的大小、点积、交积？

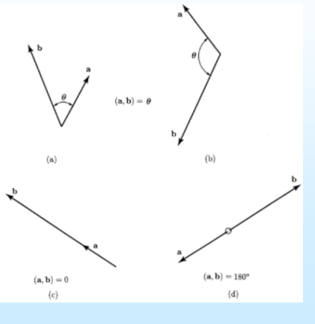
向量的方向如何表示？

向量用黑体小写字母表示，是既有大小又有方向的量，又称为矢量。

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}$$

向量的夹角



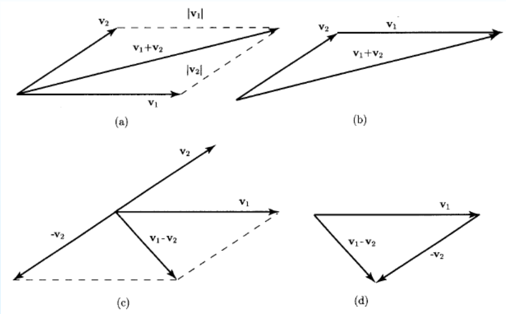
$(a)\quad 0^\circ<\theta<90^\circ$

$(b)\quad 90^\circ<\theta<180^\circ$

$(c)\quad \theta=0^\circ$

$(d)\quad \theta=180^\circ$

向量的和与差



向量的点积——标量

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$$

两矢量的点积——标量

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

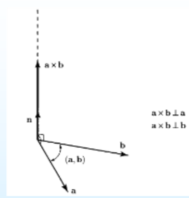
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = |a|\cdot|b|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$$

两向量的交积——向量



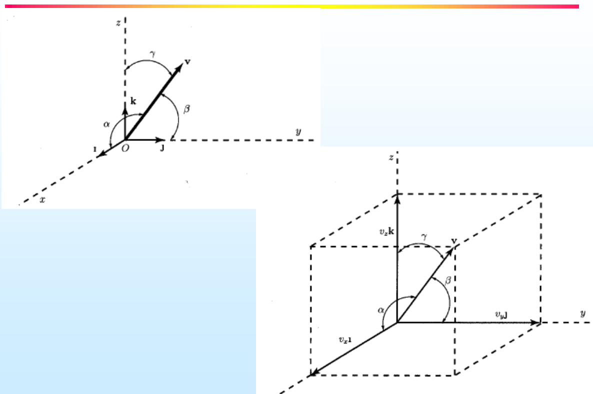
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = |a|\cdot|b|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{n}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \perp \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \perp \mathbf{b}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}\end{aligned}}$$

向量的方向角



矩阵乘法　矩阵的乘法法则　“左行乘右列”

矩阵求逆

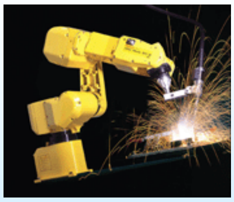
若A可逆，即$|\mathbf{A}|\neq 0$，则 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^{*}$

第2章　数理基础

Motoman UP500

有效载荷500kg，最大可达长度2542mm，6轴驱动，高可靠性52000小时MTBF，重复定位精度±0.5 mm

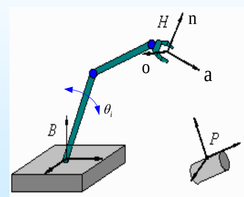
Fanuc ArcMate 50iB



6轴驱动，安装灵活方便，与主要品牌的焊接设备兼容，先进的运动控制减少了机械磨损。

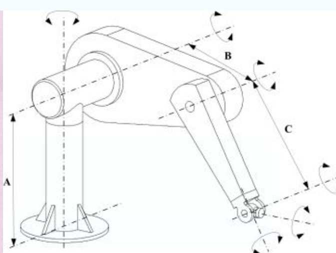
机器人运动学

- 机器人由若干个驱动器驱动的转动或移动关节串联而成
- 一端固定在基座上，另一端是自由的，安装工具，用以操作物体
- 机器人可以用一个开环关节链来进行运动学建模
- 感兴趣的是操作机末端执行器相对于固定参考坐标数的空间位姿，这就是机器人运动学问题
- 机器人的运动学即是研究机器人手臂末端执行器位置和姿态与关节变量空间之间的关系，包括运动学正问题和逆问题



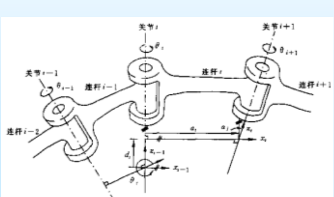
机器人运动学

研究机器人末端与各关节间的位移、速度、加速度间关系。



机器人可以看作是由一系列连杆通过运动副连接起来的机构。研究机器人的运动学，不仅需要采用数学方法来描述机器人各连杆之间以及连杆与末端执行器之间的相互关系，而且需要描述机器人各连杆与末端执行器间的位置和姿态（简称位姿）、速度和加速度。

- 1955年，丹纳维特（Denavit）和哈顿伯格（Hartenberg） 提出了一种矩阵代数方法解决机器人的运动学问题—简称**D-H坐标法**
  - 具有直观的几何意义
  - 数学基础即是齐次坐标变换



$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1　位置和姿态的表示

2.1 位置和姿态的表示

机器人系统的各连杆、操作对象及工具等都可以看作刚体。

如何描述一个刚体在空间的位置和姿态呢？

对于一个刚体，当给定其上某点的位置和刚体的姿态（或方位）时，则该刚体在空间可以得到完全定位。

2.1 位置和姿态的表示

定义：

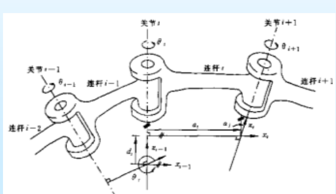
刚体位姿：刚体参考点的位置和刚体的姿态统称为刚体的位姿。

描述方法：

- 齐次变换法
- 旋量法
- 矢量法
- 四元数法

2.1 位置和姿态的表示

- 1955年，丹纳维特（Denavit）和哈顿伯格（Hartenberg） 提出了一种矩阵代数方法解决机器人的运动学问题—简称**D-H坐标法**
  - 具有直观的几何意义
  - 数学基础即是齐次坐标变换



$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1 位置和姿态的表示

齐次变换法描述刚体优点：

- 位置的描述——位置矢量
- 姿态或方位的描述——旋转矩阵
- 位姿的描述？

位置矢量描述刚体参考点的位置；

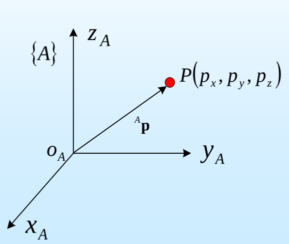
旋转矩阵描述刚体的姿态。

2.1 位置和姿态的表示

2.1.1 点位置的表示

要素：参考点

参考坐标系（规定在直角坐标系下表示）



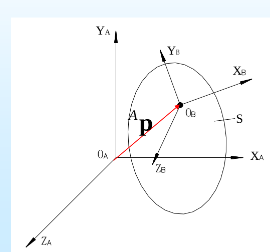
$$^A\mathbf{p}=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$^A\mathbf{p}=\begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

刚体位置的表示(位置矢量)

如图所示，坐标系$O_A X_A Y_A Z_A$ 简称 $\{A\}$ 系）为固定坐标系，又称基坐标系，S 为空间一个刚体，o_B 为刚体上任意一点。则刚体在 $\{A\}$ 系的位置可以用点o_B 在 $\{A\}$ 系中的坐标表示

$$^A\mathbf{p}=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$



式中，矢量$^A\mathbf{p}$左上角的A说明向量 $\mathbf{p}$ 是在坐标系 $\{A\}$中表示的。

2.1.2 姿态表示——旋转矩阵

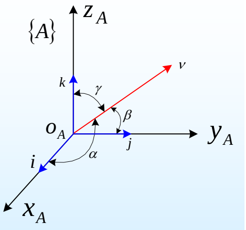
要素：参考坐标系

- **坐标轴方向的描述：**

$\mathbf{i}=[1\quad 0\quad 0]^T$

$\mathbf{j}=[0\quad 1\quad 0]^T$

$\mathbf{k}=[0\quad 0\quad 1]^T$



- **向量方向的描述：**

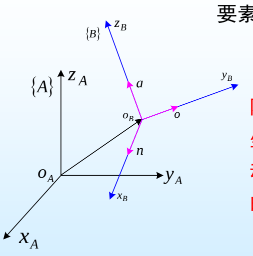
$$v=[a\quad b\quad c]^T=[\cos\alpha\quad \cos\beta\quad \cos\gamma]^T$$

3个方向角的余弦

2.1.2 刚体姿态的表示（旋转矩阵）

要素：参考坐标系 $\{A\}: o_A x_A y_A z_A$

刚体固接坐标系 $\{B\}: o_B x_B y_B z_B$



刚体的姿态可以用固结于刚体上的动坐标系的描述。动坐标系姿态的描述既是对动坐标系的各坐标轴方向进行描述。

刚体姿态的描述

$\mathbf{n}=[n_x\quad n_y\quad n_z]^T$

$\mathbf{o}=[o_x\quad o_y\quad o_z]^T$

$\mathbf{a}=[a_x\quad a_y\quad a_z]^T$

2.1.2 刚体姿态的表示

$\mathbf{n}=[n_x\quad n_y\quad n_z]^T$

$\mathbf{o}=[o_x\quad o_y\quad o_z]^T$

$\mathbf{a}=[a_x\quad a_y\quad a_z]^T$

旋转矩阵：

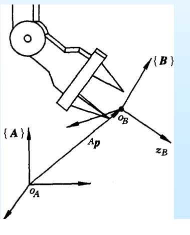
$$ {}^A_B\mathbf{R}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

2.1.2 刚体姿态的表示

例：手爪姿态的表示

为研究机器人的运动与操作，不仅要表示空间点的位置，也需要表示机器人末端手爪的姿态(orientation)。手爪姿态可用固接于其上的坐标系描述。

为描述手爪的姿态，设一直角坐标系{B}与手爪固接，如图2.2 所示，并相对于参考坐标系{A}运动。



2.1.2 刚体姿态的表示

用{B}的三个坐标轴单位矢量x_B，y_B，z_B相对于{A}的方向余弦组成的3×3旋转矩阵

$$ {}^A_B\boldsymbol{R}=[{}^A x_B,\ {}^A y_B,\ {}^A z_B]=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

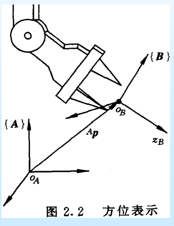


图 2.2 方位表示

表示刚体B相对于{A}的姿态。

称 ${}^A_B\boldsymbol{R}$ 为旋转矩阵，

上标A表示参考坐标系{A}.

下标B代表被描述的{B}.

2.1.2 刚体姿态的表示

在刚体上 o_B点建立一个坐标系$o_B x_B y_B z_B$(简称{B}系），该坐标系与刚体固接。当刚体运动时，坐标系 {B}随刚体一起运动，故此坐标系又称为动坐标系。刚体S在空间的方位可以用动坐标系{B}各坐标轴相对基坐标系 {A} 各坐标轴之间夹角的余弦函数来表示

$$ {}^A_B\mathbf{R}=\begin{bmatrix} \cos(x_A,x_B) & \cos(x_A,y_B) & \cos(x_A,z_B) \\ \cos(y_A,x_B) & \cos(y_A,y_B) & \cos(y_A,z_B) \\ \cos(z_A,x_B) & \cos(z_A,y_B) & \cos(z_A,z_B) \end{bmatrix}$$

${}^A_B\mathbf{R}$ 称为方向余弦矩阵或旋转矩阵，上标 A 代表坐标系 {A}，下标 B 代表坐标系{B} 。

2.1.2 刚体姿态的表示

${}^A_B\mathbf{R}$ 中有九个元素，但只有三个是独立的。并且 ${}^A_B\mathbf{R}$ 的逆矩阵与它的转置矩阵相同；其行列式等于1。即

$${}^A_B\mathbf{R}^{-1} = {}^A_B\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \qquad \left|{}^A_B\mathbf{R}\right| = 1$$

故旋转矩阵 ${}^A_B\mathbf{R}$ 为单位正交矩阵。

当刚体分别绕某直角坐标系中的 x、y、z 轴旋转时，其旋转变换是一般旋转变换的特例，因此可得分别绕 x、y、z 轴旋转 θ 角时的旋转变换矩阵

$$\mathbf{R}(x,\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix} \quad \mathbf{R}(y,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

31

2.1.2 刚体姿态的表示

${}^A_B\boldsymbol{R}$ 共有9个元素，但只有3个独立。${}^A_B\boldsymbol{R}$ 的三个列矢量 ${}^A\mathbf{x}_B$，${}^A\mathbf{y}_B$，${}^A\mathbf{z}_B$ 都是单位矢量，且相互垂直。这 9 个元素满足 6 个约束条件

$${}^A\mathbf{x}_B\cdot{}^A\mathbf{x}_B={}^A\mathbf{y}_B\cdot{}^A\mathbf{y}_B={}^A\mathbf{z}_B\cdot{}^A\mathbf{z}_B=1 \qquad (2.3)$$

$${}^A\mathbf{x}_B\cdot{}^A\mathbf{y}_B={}^A\mathbf{y}_B\cdot{}^A\mathbf{z}_B={}^A\mathbf{z}_B\cdot{}^A\mathbf{x}_B=0 \qquad (2.4)$$

可见，是正交的，且满足条件

$${}^A_B\boldsymbol{R}^{-1}={}^A_B\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\ , \qquad \left|{}^A_B\boldsymbol{R}\right|=1 \qquad (2.5)$$

对轴 x，y 或 z 作转角为 θ 的旋转变换时，其旋转矩阵为：

32

2.1.2 刚体姿态的表示

绕坐标轴的旋转矩阵：

$$\mathbf{R}(x,\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

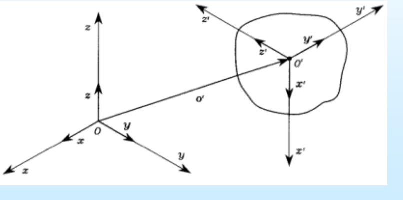
$$\mathbf{R}(y,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

33

2.1.3 刚体位姿的描述

刚体位姿的描述即对固结于刚体上动坐标系的描述，也即对动坐标系的原点位置及对动坐标系的各坐标轴方向的描述。



34

2.1.3 刚体位姿的描述

$${}^A\mathbf{p}_{Bo}=\begin{bmatrix}p_x & p_y & p_z & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$${}^A_B\mathbf{R}=\begin{bmatrix}n_x&o_x&a_x\\n_y&o_y&a_y\\n_z&o_z&a_z\end{bmatrix}_{3\times3}$$

刚体的位姿描述：用动坐标系 $\{B\}$ 的原点 o_B 相对于参考坐标系的位置矢量和旋转矩阵组成的齐次坐标变换矩阵来描述。

$${}^A_B\mathbf{T}=\begin{bmatrix}{}^A_B\mathbf{R} & {}^A\mathbf{p}_{Bo}\\0&1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}=[\mathbf{n}\quad\mathbf{o}\quad\mathbf{a}\quad\mathbf{p}]=\begin{bmatrix}n_x&o_x&a_x&p_x\\n_y&o_y&a_y&p_y\\n_z&o_z&a_z&p_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

35

例2.2

如图 2.5 所示，固结于刚体的坐标系 $\{B\}$ 位于 O_B 点，$x_b=10, y_b=5, z_b=0$。

Z_B 轴与画面垂直，坐标系 $\{B\}$ 相对固定坐标系 $\{A\}$ 有一个 30° 的偏转。写出表示刚体位姿的齐次变换矩阵。

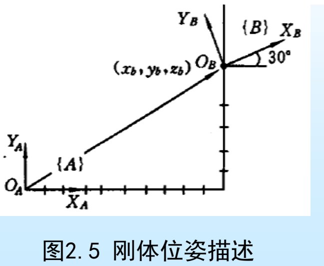
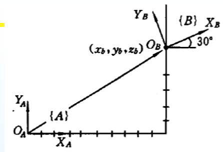


图2.5 刚体位姿描述

36

解：刚体的位置向量用“与刚体固连的坐标系”的原点的位置向量表示为：

$$ {}^{A}\mathbf{p}=\begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix} $$



旋转矩阵：

$$ {}_{B}^{A}\mathbf{R}=Rot(z,30^{\circ})=\begin{bmatrix}\cos 30^{\circ} & -\sin 30^{\circ} & 0\\ \sin 30^{\circ} & \cos 30^{\circ} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

则齐次坐标变换矩阵： $ {}_{B}^{A}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}{}_{B}^{A}\mathbf{R} & {}^{A}\mathbf{p}\\ 0 & 1\end{bmatrix} $

解：坐标系 $\{B\}$ 的各坐标轴相对于参考坐标系 $\{A\}$ 的方向列阵为：

X_B 的方向列阵： $\mathbf{n}=\begin{bmatrix}\cos 30^{\circ} & \cos 60^{\circ} & \cos 90^{\circ} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0.866 & 0.5 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

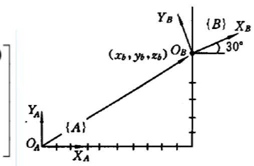
Y_B 的方向列阵： $\mathbf{o}=\begin{bmatrix}\cos 120^{\circ} & \cos 30^{\circ} & \cos 90^{\circ} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.866 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

Z_B 的方向列阵： $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

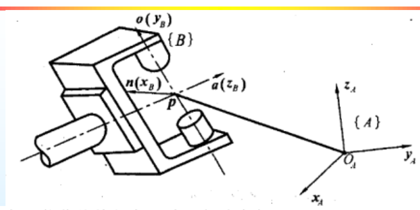
坐标系 $\{B\}$ 的位置列阵： $\mathbf{p}=\begin{bmatrix}10 & 5 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

则，坐标系 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的齐次变换矩阵：

$$ \mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.866 & -0.5 & 0 & 10\\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$



例2.3 手爪坐标系



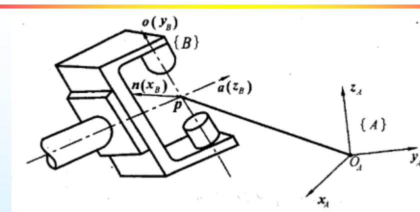
坐标原点一般取物体的特征点（质心或对称中心）

z_B 轴——手指接近物体的方向为正，称接近矢量 **a**（approach）；

y_B 轴——两手指的连线方向，称方向矢量 **o**（orientation）；指向可任意选定；

x_B 轴——由右手法则确定， $\mathbf{n}=\mathbf{o}\times\mathbf{a}$ 称法向矢量 **n**（normal）。

z_B 与 y_B 交点为坐标原点 o_B



则手爪的位姿可用矩阵表示为：

$$ \mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_x & o_x & a_x & p_x\\ n_y & o_y & a_y & p_y\\ n_z & o_z & a_z & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

End