

第五节 条件概率

- 条件概率
- 乘法公式
- 小结 布置作业

一、条件概率

1. 条件概率的概念

在解决许多概率问题时，往往需要在有某些附加信息(条件)下求事件的概率.

如在事件 B 发生的条件下求事件 A 发生的概率，将此概率记作 $P(A|B)$.

一般地 $P(A|B) \neq P(A)$



例如，掷一颗均匀骰子， $A=\{\text{掷出2点}\}$ ，
 $B=\{\text{掷出偶数点}\}$ ， $P(A)=1/6$ ， $P(A|B)=?$

已知事件 B 发生，此时试验所有可能结果构成的集合就是 B ，

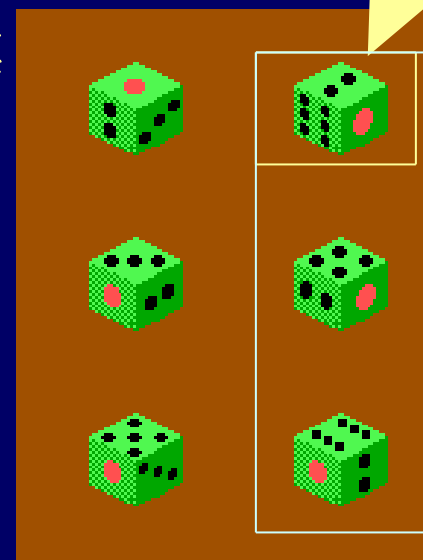
B 中共有3个元素，它们的出现是等可能的，其中只有1个在集 A 中。于是

$$P(A|B) = 1/3.$$

容易看到

$$P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

掷骰子

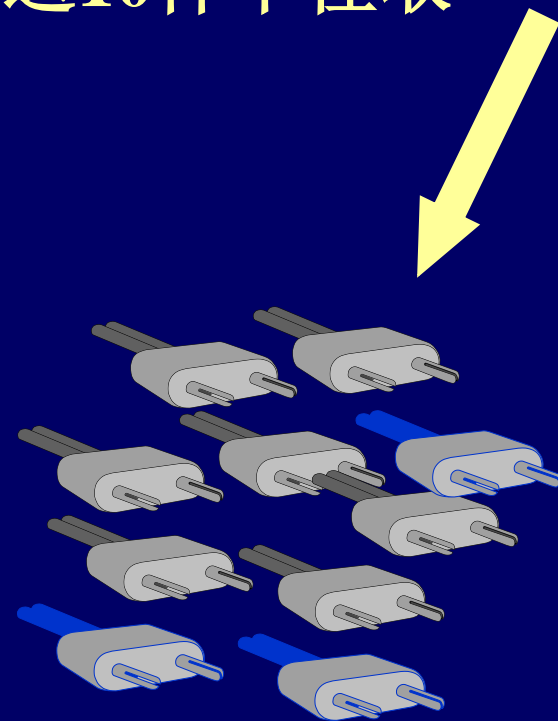


又如，10件产品中有7件正品，3件次品，7件正品中有3件一等品，4件二等品。现从这10件中任取一件，记

$A=\{\text{取到一等品}\}$, $B=\{\text{取到正品}\}$

则 $P(A) = 3/10$,

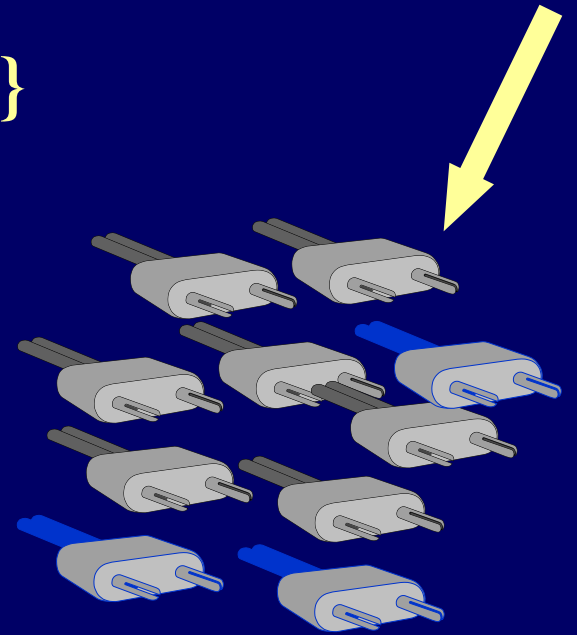
$$P(A|B) = \frac{3}{7} = \frac{3/10}{7/10} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



$A=\{\text{取到一等品}\}, B=\{\text{取到正品}\}$

$$P(A)=3/10, \quad P(A|B)=3/7$$

本例中，计算 $P(A)$ 时，依据的前提条件是10件产品中一等品的比例。



计算 $P(A|B)$ 时，这个前提条件未变，只是加上“事件 B 已发生”这个新的条件。

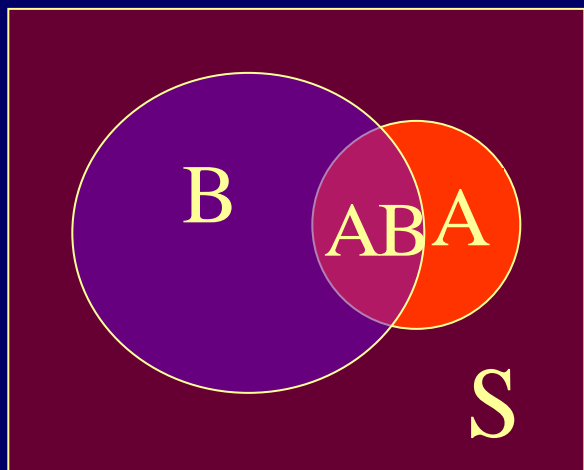
这好象给了我们一个“情报”，使我们得以在某个缩小了的范围内来考虑问题。

2. 条件概率的定义

设 A 、 B 是两个事件，且 $P(B)>0$ ，则称

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

为在事件 B 发生的条件下，事件 A 的条件概率。



若事件 B 已发生，则为使 A 也发生，试验结果必须是既在 B 中又在 A 中的样本点，即此点必属于 AB 。由于我们已经知道 B 已发生，故 B 变成了新的样本空间，于是有(1)。

3. 条件概率的性质(自行验证)

条件概率 $P(\bullet | A)$ 具备概率定义的三个条件:

- (1) 非负性: 对于任意的事件 B , $P(B | A) \geq 0$;
- (2) 规范性: $P(S / A) = 1$;
- (3) 可列可加性: 设 B_1, B_2, \dots 是两两互斥事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

所以在第二节中证明的性质对条件概率都成立.



4. 条件概率的计算

1) 用定义计算:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

2) 从加入条件后改变了的情况去算

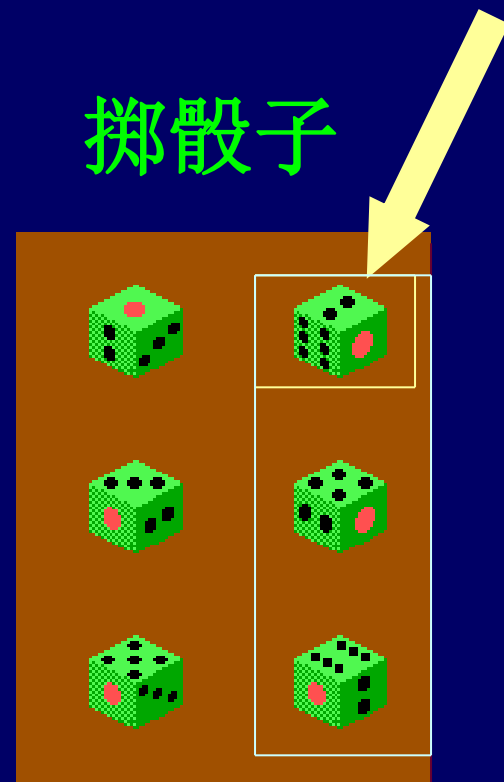
例: $A = \{\text{掷出2点}\}, B = \{\text{掷出偶数点}\}$

$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

B 发生后的缩减
样本空间所含样
本点总数

在缩减样本空
间中 A 所含样
本点个数

掷骰子



例1 掷两颗均匀骰子,已知第一颗掷出6点,问“掷出点数之和不小于10”的概率是多少?

解 设 $A=\{\text{掷出点数之和不小于10}\}$

$B=\{\text{第一颗掷出6点}\}$

应用 定义

解法1
$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3/36}{6/36} = \frac{1}{2}$$

解法2
$$P(A | B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

在 B 发生后的缩减样本空间中计算



二、乘法公式

由条件概率的定义: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

若已知 $P(B)$, $P(A|B)$ 时, 可以反求 $P(AB)$.

即 若 $P(B)>0$, 则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$ (2)

将(2)式中的 A 与 B 的位置调换一下

(2)和(3)式都称为乘法公式, 利用它们可计算两个事件同时发生的概率

而 $P(AB)=P(BA)$

故 $P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ (3)



注意 $P(AB)$ 与 $P(A | B)$ 的区别！

请看下面的例子



例2 甲、乙两厂共同生产1000个零件，其中 300 件是乙厂生产的. 而在这300个零件中，有189个是标准件，现从这1000个零件中任取一个，问这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少？

设 $B=\{\text{零件是乙厂生产}\}$, $A=\{\text{是标准件}\}$

所求为 $P(AB)$.



设 $B = \{\text{零件是乙厂生产}\}$

$A = \{\text{是标准件}\}$

所求为 $P(AB)$.

若改为“发现它是乙厂生产的,问它是标准件的概率是多少?”

求的是 $P(A|B)$.

300个
乙厂生产

189个是
标准件

甲、乙共生产
1000 个

B 发生,
在 $P(AB)$ 中作为结果;
在 $P(A|B)$ 中作为条件.



例3 设某种动物由出生算起活到20年以上的概率为0.8，活到25年以上的概率为0.4. 问现年20岁的这种动物，它能活到25岁以上的概率是多少？

解 设 $A=\{\text{能活20年以上}\}$ ， $B=\{\text{能活25年以上}\}$
所求为 $P(B/A)$.

依题意， $P(A)=0.8$, $P(B)=0.4$

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$



条件概率 $P(A|B)$ 与 $P(A)$ 的区别

每一个随机试验都是在一定条件下进行的, 设 A 是随机试验的一个事件, 则 $P(A)$ 是在该试验条件下事件 A 发生的可能性大小.

而条件概率 $P(A|B)$ 是在原条件下又添加 “ B 发生 ” 这个条件时 A 发生的可能性大小, 即 $P(A|B)$ 仍是概率.

$P(A)$ 与 $P(A|B)$ 的区别在于两者发生的条件不同, 它们是两个不同的概念, 在数值上一般也不同.



乘法定理可以推广到多个事件的积事件的情况。

设 A 、 B 、 C 为三个事件,且 $P(AB) > 0$, 则

$$P(ABC) = P(C | AB)P(B | A)P(A).$$

一般地,设有 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, n \geq 2$, 并且 $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$, 则由条件概率的定义, 可得

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1})P(A_{n-1} | A_1 A_2 \dots A_{n-2}) \dots \\ \cdot P(A_3 | A_1 A_2)P(A_2 | A_1)P(A_1)$$

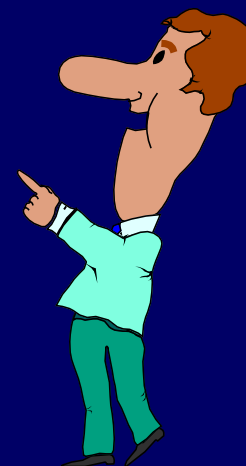

一场精彩的足球赛将要举行,5个球迷好不容易才搞到一张入场券.大家都想去,只好用抽签的方法来解决.

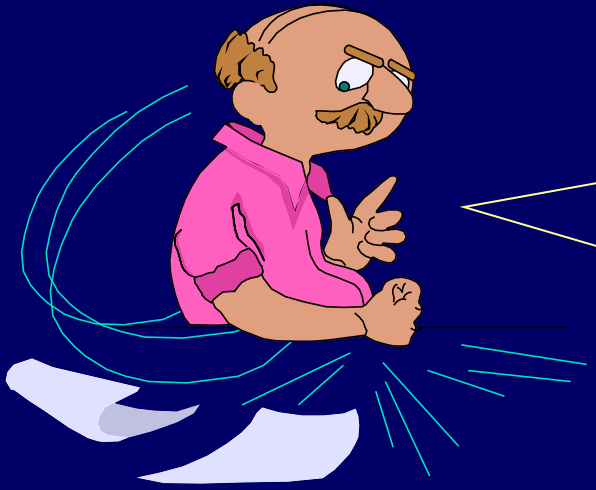


5张同样的卡片,只有一张上写有“入场券”,其余的什么也没写.将它们放在一起,洗匀,让5个人依次抽取.

“先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会大.”

后抽比先抽的确实吃亏吗?



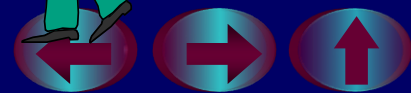


“大家不必争先恐后，你们一个一个按次序来，谁抽到‘入场券’的机会都一样大。”

到底谁说的对呢？让我们用概率论的知识来计算一下，每个人抽到“入场券”的概率到底有多大？



“先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会大。”



我们用 A_i 表示“第 i 个人抽到入场券”
 $i=1,2,3,4,5.$

则 \bar{A}_i 表示“第 i 个人未抽到入场券”

显然, $P(A_1)=1/5$, $P(\bar{A}_1)=4/5$

也就是说,

第1个人抽到入场券的概率是 $1/5$.



由于 $A_2 = \bar{A}_1 A_2$

因为若第2个人抽到了入场券，第1个人肯定没抽到。

由乘法公式

$$P(A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1)$$

也就是要想第2个人抽到入场券，必须第1个人未抽到，计算得：

$$P(A_2) = (4/5)(1/4) = 1/5$$

同理，第3个人要抽到“入场券”，必须第1、第2个人都没有抽到。因此

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= (4/5)(3/4)(1/3) = 1/5 \end{aligned}$$

继续做下去就会发现，每个人抽到“入场券”的概率都是1/5.

这就是有关抽签顺序问题的正确解答.

也就是说，

抽签不必争先恐后.



例4 设袋中有5个红球,3个黑球,2个白球,试按
(1)有放回抽样;(2)不放回抽样两种方式摸球三次
每次摸得一球,求第三次才摸得白球的概率.

解 设 $A = \{\text{第一次未摸得白球}\}$,
 $B = \{\text{第二次未摸得白球}\}$,
 $C = \{\text{第三次摸得白球}\}$.

则事件"第三次才摸得白球"可表示为 ABC .

(1)有放回抽样

$$P(A) = \frac{8}{10}, P(B|A) = \frac{8}{10}, P(C|AB) = \frac{2}{10},$$



$$\begin{aligned}P(ABC) &= P(C | AB)P(B | A)P(A) \\&= \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{16}{125}.\end{aligned}$$

(2) 无放回抽样

$$P(A) = \frac{8}{10}, P(B | A) = \frac{7}{9}, P(C | AB) = \frac{2}{8},$$

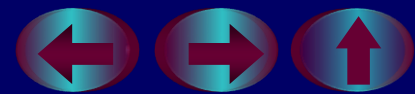
$$\begin{aligned}P(ABC) &= P(C | AB)P(B | A)P(A) \\&= \frac{2}{8} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{10} = \frac{7}{45}.\end{aligned}$$



例6 设某光学仪器厂制造的透镜,第一次落下时打破的概率为 $\frac{1}{2}$,若第一次落下未打破,第二次落下打破的概率是 $\frac{7}{10}$,若前两次未打破,第三次落下打破的概率是 $\frac{9}{10}$,试求透镜落下三次未打破的概率.

解 设 $A_i = \{\text{透镜第 } i \text{ 次落下打破}\}, i = 1, 2, 3,$
 $B = \{\text{透镜落下三次未打破}\}, \text{则 } B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3.$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{3}{200}. \end{aligned}$$

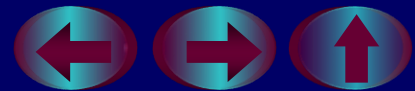


本题也可以先求 $P(\bar{B})$, 再由 $P(B) = 1 - P(\bar{B})$ 求得 $P(B)$.

由于 $\bar{B} = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$, 并且 $A_1, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 为两两不相容事件, 故有

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= P(A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ &= \frac{1}{2} + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{10}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{7}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{197}{200}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{197}{200} = \frac{3}{200}.$$



三、 小结

这一讲，我们介绍了条件概率的概念，给出了计算两个或多个事件同时发生的概率的乘法公式，它在计算概率时经常使用，需要牢固掌握.

