机器人学基础

国家级《智能科学基础系列课程教学团队》

“机器人学”课程配套教材　　　蔡自兴　主编

第3章　机器人运动学（3）

第3章　机器人运动学

3.4 机器人运动学建模

机器人运动学方程

$$ {}^{0}_{n}\mathbf{T} = {}^{0}_{1}\mathbf{T}(q_1)\cdot {}^{1}_{2}\mathbf{T}(q_2)\cdots {}^{n-1}_{n}\mathbf{T}(q_n) = \begin{bmatrix} & {}^{0}_{n}\mathbf{R} & & {}^{0}_{n}\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{n}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^{0}_{n}\mathbf{n} & {}^{0}_{n}\mathbf{o} & {}^{0}_{n}\mathbf{a} & {}^{0}_{n}\mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

式中，前三列表示末端坐标系相对于参考坐标系的姿态，

第四列表示末端坐标系原点的位置。

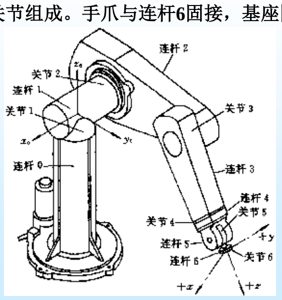
表示末端连杆的位姿与关节变量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 之间的关系。

例　PUMA560机器人运动学建模

PUMA系列机器人是串联工业机器人中的典型代表。PUMA机器人是有美国Unimation公司研制开发的一种计算机控制的多关节装配工业机器人，在瑞典和日本也有生产，分为大型、中型和小型三类。每一机型均有腰回转、肩回转和肘回转，构成实现空间位置坐标的三个基本关节轴；手腕回转、摆动和旋转实现三个姿态的自由度，共有6个自由度。

1.基本结构

PUMA 560机器人是关节式机器人，由**6**个连杆和**6**个关节组成。手爪与连杆**6**固接，基座固定。基座称为连杆**0**，不包含在**6**个连杆之内。连杆**1**与基座由关节**1**相连接；连杆**2**与连杆**1**通过关节 2 相 连 接 ，……。

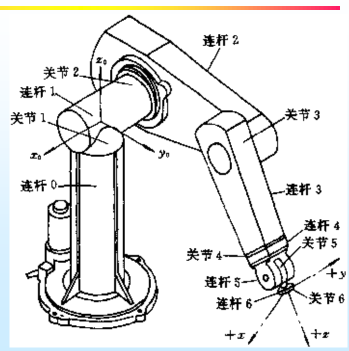


PUMA 560　机器人的连杆与关节示意图

1.基本结构

前3个关节确定手腕参考点的位置，后3个确定手腕的方位。

由于后3个关节轴线交于一点。该点选作手腕的参考点，也是坐标系{4}，{5}，{6}的原点。



1.基本结构

PUMA560的6个关节都是转动关节(见图3–7a)。关节1的轴线为铅直方向，关节2和3的轴线水平平行，距离为a_2；关节1和2的轴线垂直相交，关节3和4的轴线垂直交错，距离为a_3。

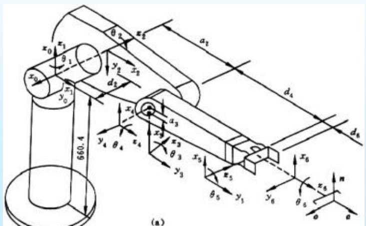


图3–7 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

其中，

a_2=431.8mm

a_3=20.32mm

d_2=149.09mm

d_4=433.07mm

2.建立连杆坐标系

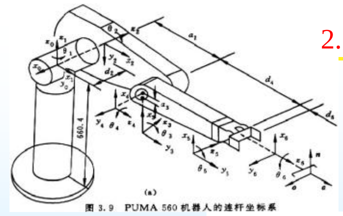


图 3.9 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

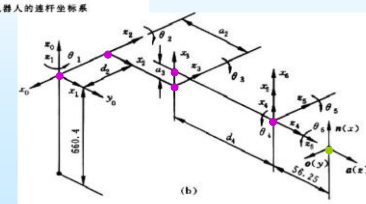


图3–7 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

3.列出连杆参数表

表 3.3 PUMA 560 机器人连杆参数表

连杆 i	变量θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	变量范围
1	$\theta_1(90°)$	0°	0	0	−160°～160°
2	$\theta_2(0°)$	−90°	0	d_2	−225°～45°
3	$\theta_3(-90°)$	0°	a_2	0	−45°～225°
4	$\theta_4(0°)$	−90°	a_3	d_4	−110°～170°
5	$\theta_5(0°)$	90°	0	0	−100°～100°
6	$\theta_6(0°)$	−90°	0	0	−266°～266°

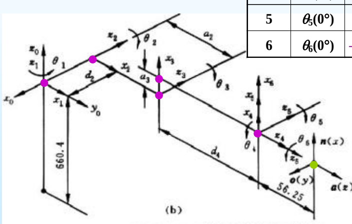


图3–8 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

注意：表中数据是按前置坐标系定义各连杆的参数；对后置坐标系情况，上述参数的值是不同的。

4.计算各连杆的齐次变换矩阵

对前置坐标系情况，连杆齐次变换矩阵的通式为：

$$ {}^{i-1}_{\ \ i}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.13} $$

表 3.3 PUMA 560 机器人连杆参数表

连杆 i	变量θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	变量范围
1	$\theta_1(90°)$	0°	0	0	−160°～160°
2	$\theta_2(0°)$	−90°	0	d_2	−225°～45°
3	$\theta_3(-90°)$	0°	a_2	0	−45°～225°
4	$\theta_4(0°)$	−90°	a_3	d_4	−110°～170°
5	$\theta_5(0°)$	90°	0	0	−100°～100°
6	$\theta_6(0°)$	−90°	0	0	−266°～266°

4.计算各连杆的齐次变换矩阵

$$ {}^0_1\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^3_4\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1_2\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^4_5\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_3\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^5_6\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

5.计算运动学方程：

将各相邻连杆的齐次坐标变换矩阵相乘，即得到PUMA560机器人的机械臂末端相对于基坐标系的齐次变换矩阵。

$$ {}^0_6\mathbf{T}={}^0_1\mathbf{T}(\theta_1)\cdot{}^1_2\mathbf{T}(\theta_2)\cdot{}^2_3\mathbf{T}(\theta_3)\cdot{}^3_4\mathbf{T}(\theta_4)\cdot{}^4_5\mathbf{T}(\theta_5)\cdot{}^5_6\mathbf{T}(\theta_6) $$

它是关节变量 $\theta_i\,(i=1,2,\cdots,6)$ 的函数。

要求解此运动方程，需先计算某些中间结果：

$$ {}^4_6\mathbf{T}={}^4_5\mathbf{T}(\theta_5)\cdot{}^5_6\mathbf{T}(\theta_6)=\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ =\begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5s_6 & -s_5c_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

同样有:

$$
{}^{3}_{6}\mathbf{T}={}^{3}_{4}\mathbf{T}(\theta_4)\cdot{}^{4}_{6}\mathbf{T}(\theta_5,\theta_6)=\begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 1 & d_4\\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0\\ s_6 & c_6 & 0 & 0\\ s_5s_6 & -s_5c_6 & c_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5c_6-s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3\\ s_5s_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4\\ -s_4s_5s_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

由于PUMA560机器人的关节2和关节3相互平行，把 ${}^{1}_{2}\mathbf{T}(\theta_2)$ 和 ${}^{2}_{3}\mathbf{T}(\theta_3)$ 相乘得：

$$
{}^{1}_{3}\mathbf{T}={}^{1}_{2}\mathbf{T}(\theta_2)\cdot{}^{2}_{3}\mathbf{T}(\theta_3)=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & d_2\\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2\\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2\\ 0 & 0 & 1 & d_2\\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

式中，$c_{23}=\cos(\theta_2+\theta_3)$ ，$s_{23}=\sin(\theta_2+\theta_3)$

即两旋转关节平行时，利用和角公式可得到较简单的表达式。

将上面两式相乘得：

$$
{}^{1}_{6}\mathbf{T}={}^{1}_{3}\mathbf{T}\cdot{}^{3}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2\\ 0 & 0 & 1 & d_2\\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5c_6-s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3\\ s_5s_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4\\ -s_4s_5s_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} {}^{1}n_x & {}^{1}o_x & {}^{1}a_x & {}^{1}p_x\\ {}^{1}n_y & {}^{1}o_y & {}^{1}a_y & {}^{1}p_y\\ {}^{1}n_z & {}^{1}o_z & {}^{1}a_z & {}^{1}p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}n_x &= c_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_5)-s_{23}s_5c_6\\
{}^{1}n_y &= -s_4c_5c_6-c_4s_6\\
{}^{1}n_z &= -s_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-c_{23}s_5c_6\\
{}^{1}o_x &= -c_{23}(c_4c_5s_6+s_4c_6)+s_{23}s_5s_6\\
{}^{1}o_y &= s_4c_5s_6-c_4c_6\\
{}^{1}o_z &= s_{23}(c_4c_5s_6+s_4c_6)+c_{23}s_5s_6\\
{}^{1}a_x &= -c_{23}c_4s_5-s_{23}c_5\\
{}^{1}a_y &= s_4s_5\\
{}^{1}a_z &= s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5\\
{}^{1}p_x &= a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}\\
{}^{1}p_y &= d_2\\
{}^{1}p_z &= -a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23}
\end{aligned}
$$

PUMA560机器人机械臂的运动学方程为：

$$
{}^{0}_{6}\mathbf{T}={}^{0}_{1}\mathbf{T}\cdot{}^{1}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x\\ n_y & o_y & a_y & p_y\\ n_z & o_z & a_z & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
\quad
\left.\begin{aligned}
n_x &= c_1[c_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_{23}s_5s_6]+s_1(s_4c_5c_6+c_4s_6)\\
n_y &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_{23}s_5s_6]-c_1(s_4c_5c_6+c_4s_6)\\
n_z &= -s_{23}(c_4c_5c_6-s_4s_6)-c_{23}s_5c_6\\
o_x &= c_1[c_{23}(-c_4c_5c_6-s_4c_6)+s_{23}s_5s_6]+s_1(c_4c_6-s_4c_5s_6)\\
o_y &= s_1[c_{23}(-c_4c_5c_6-s_4s_6)-s_{23}s_5s_6]-c_1(c_4c_6-s_4c_5c_6)\\
o_z &= -s_{23}(-c_4c_5c_6-s_4c_6)+c_{23}s_5s_6\\
a_x &= -c_1(c_{23}c_4s_5+s_{23}c_6)-c_1s_4s_5\\
a_y &= -s_1(c_{23}c_4s_5+s_{23}c_6)+c_1s_4s_5\\
a_z &= s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5\\
p_x &= c_1[a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}]-d_2s_1\\
p_y &= s_1[a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}]+d_2c_1\\
p_z &= -a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23}
\end{aligned}\right\}
$$

描述了末端{6}相对{0}的位姿，是机械手运动分析和综合的基础。

为校核 ${}^{0}_{6}\mathbf{T}$ 的正确性，计算 $\theta_1=90^\circ,\theta_2=0^\circ,\theta_3=-90^\circ,\theta_4=\theta_5=\theta_6=0^\circ$ 时手臂变换矩阵 ${}^{0}_{6}\mathbf{T}$ 的值。计算结果为：

$$
{}^{0}_{6}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -d_2\\ 0 & 0 & 1 & a_2+d_4\\ 1 & 0 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

与图3.7所示情况完全一样。

6. 手爪坐标系

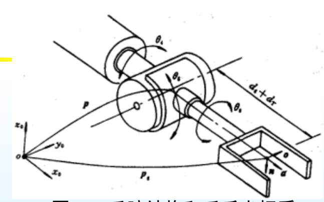


图3.8 手腕结构和手爪坐标系

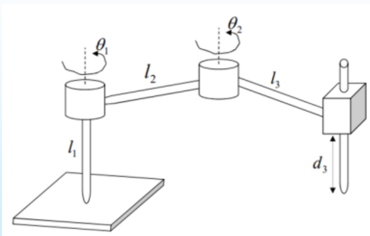
图3.8是手爪系{T}的规定方法。手爪的三个单位矢量分别为n、o和a (代表坐标轴)，位矢p代表工具坐标系{T}的原点。

若基系{0}相对工作台{S}的变换为${}^{S}_{0}\mathbf{T}$，工具坐标系{T}相对末端连杆{6}的变换为${}^{6}_{T}\mathbf{T}$，则{T} 相对于{S}的位姿为:

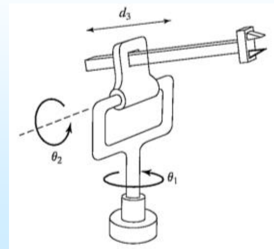
$$
{}^{S}_{T}\mathbf{T}={}^{S}_{0}\mathbf{T}\,{}^{0}_{6}\mathbf{T}\,{}^{6}_{T}\mathbf{T}
$$

机器人运动学建模举例

例1　3自由度机械臂

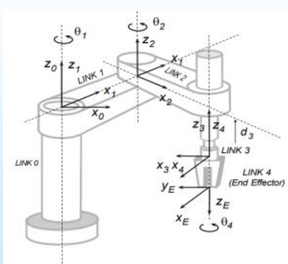


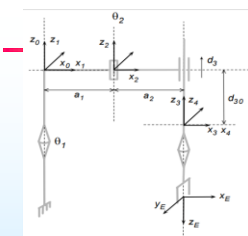
例2　3自由度机械臂



机器人运动学建模举例

例3：SCARA机械臂





i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	a_1	0	0	θ_2
3	a_2	0	d_3	0
4	0	180	0	θ_4

$$ {}^0_1\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

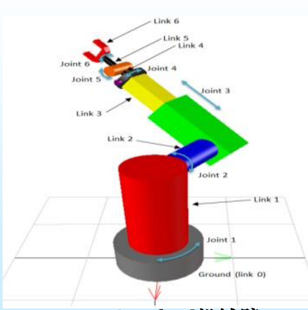
$$ {}^1_2\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_3\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3-d_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^3_4\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

机器人运动学建模举例

课后作业题

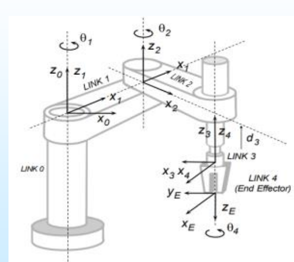


Stanford机械臂

（1）教材P60页
　3.4题和3.5题
（2）左图的6自由度机械臂，绘制坐标系，给出连杆参数表。

课后作业

SCARA机械臂



如图所示的4自由度机械臂，
（1）绘制坐标系
（2）给出连杆参数表
（3）写出连杆齐次坐标变换矩阵
（4）推导运动学方程

End

25