

光是什么？

Scully M. O.

1997

量子辐射理论完整地描述了辐射与物质的相互作用（要补充某些重正化的假设）。然而我们想要指出，思考量子辐射理论的基础概念与光子的概念，最好的方式是将其看作经典电磁场加上真空涨落。但是，量子光学的发展为电磁场量子化带来了新的讨论，并随之带来了对光子概念本质的更深入的理解。本书后文将会讨论的量子拍现象、量子擦除、某些双光子干涉现象，这些量子光学发展的实例启示我们，将光子看作一种量子力学实体是必要的，其基本物理原理要比半经典理论加上真空涨落深刻得多。也要注意与量子场论中的度规相关的若干深入问题，通过负概率与不定度规的结合，来更为深入地理解重正化理论的可行性，Feynman 在其晚年的一篇论文中对这些问题做出过有趣的评注。其中某些观点，以及对光子概念理解的扩展，就是本章这最后一节的主题。

1 真空涨落与光子的概念

在解释电子辐射与物质的相互作用时，量子辐射理论与经典电动力学取得了巨大成功，但其中仍存在若干概念问题，例如说计算某些物理量（比如 Lamb 位移、反常磁矩）时出现的各种无穷大。

另一方面，在本书后文将会看到，将场作经典处理，将物质（有质量粒子）作量子处理，这种半经典方法很好地解释了涉及辐射与物质间相互作用的许多物理过程。有些物理现象可以全部或大部分地由半经典理论解释，其中包括光电效应，Wentzel 于 1927 年首次使用半经典理论对其做出解释。受激辐射、共振荧光以及其他许多物理现象，都不需要量子辐射理论的完整体系来解释；而半经典的分析就足以解释这些现象了。

似曾相识的¹，请注意二十世纪初物理学界上空出的两片乌云，有趣的是这两片乌云都与电磁辐射有关。读者们无疑会回忆起，当时的物理学仅有的两个不能解释的问题，是 Michelson-Morley 实验的零结果，与黑体辐射的 Rayleigh-Jeans 灾难。Michelson-Morley 实验引出了狭义相对论，狭义相对论逻辑上统一了经典力学与电动力学；而 Planck 对 Rayleigh-Jeans 灾难的解释开启了量子力学。

有趣而重要的是，这两种现象并不涉及光子的概念。在 Michelson-Morley 实验中，Einstein 的思想本质上是对 Maxwell 方程组进行变换；而在 Rayleigh-Jeans 灾难中，Planck 的思想是腔壁中谐振子能量的量子化，而非辐射场的量子化。到此为止，量子辐射理论与理想的光子概念都没有构想出来。

光子概念的首次引入，是 Einstein 以之解释光电效应。前文已经略微提到，可以使用半经典方法来理解光电效应的大多数内容，这又是很有趣的。请读者回忆一下，任何描述光电效应的理论都需要解释三个问题。第一，频率为 ν 的光射入一种光电发射体表面时，其所射出电子的能量 T_e 服从表达式

$$h\nu = \Phi + T_e \quad (1)$$

式中 Φ 为功函数，在讨论时是特定材料的特性参数；第二，电子的发射率正比于入射光电场的平方；第三，入射光落在光敏表面和光电子的发射之间不存在时间延迟²。与大多数教科书中我们读到的相反，这三种现象中的前两种，可以完全通过将（光感应器中的）原子量子化来简单解释。然而第三种现象，也就是光射入与光电子射出之间不存在延迟，就有点微妙了。在量子力学中可以合理地认为，在一个即便非常小（例如辐射场的数个光周期）时间内，电子发射的速率是有限的。如此，为了遵循能量守恒，我们显然需要光子的概念。也就是说，辐射场与光电发射体中原子开始相互作用的瞬间，与光电子射出的瞬间，这两者之间如果存在一个很小的时间间隔 τ ，那么射入光电发射体表面的能量大小服从 $\epsilon_0 E^2 A \tau$ ，式中 A 为入射光束的横截面积。在足够短的时间内，射入光电探测器的能量不会超过 Φ ，这表明使用半经典观点时能量不能守恒。但光电子出射时一个光子湮灭的观点完全解决了这一问题，这时的光子概念完全绕开了这一问题，这也是量子场论取得成功

¹译注：这里指用不着完整理论去解释的某些物理现象

²译注：近年人们利用阿秒激光的技术，发现实际上存在一个约 10^{-17} s 的时间延迟。但这并不影响本文的论述。

的一个原因。

无论如何，归功于 Einstein 对物理学的深刻理解，他通过这样有限并且在某种意义上错误的信息，引入了光子的概念。上文已经列出了半经典理论的若干优点，现在转向它所不能解释的问题。对于半经典理论的失效存在许多种说法，其中一种说法宣称，半经典理论缺少原子对场的反作用。当然，像图1将反作用手加进理论中以使理论自洽的，就没法这样来批评了。我们看到 Schrödinger 方程中相对未扰动的原子多了一项偶极扰动。这个偶极矩会产生辐射，从而作为吸收、受激辐射、共振荧光等的来源。如图1所示，在自洽分析中，偶极矩辐射的场自身作为原子波函数的一个扰动（即，反作用）。但半经典理论的成功只能到此为止了，现在转向半经典理论所不能解释的，并将说明如何通过向半经典理论中补充进真空涨落来理解它们。

2 真空涨落

在图1中半经典理论讨论范围之外，最重要的一个例子也许是电子的自发辐射。注意到，一个初始位于激发态的原子，会因为任何处在量子纯态³的原子都没有电偶极矩，而将一直维持在激发态，从而永远不会发出辐射。这种情况大体类似于不稳定平衡态，如果不引入某种涨落来影响原子的话，原子将在激发态存在无穷长的时间。比如说，Lamb 位移就是很好的例子，人们只有引入了真空涨落的概念才能理解。回忆一下，氢原子的 Dirac 解表明其能级 $2^2S_{1/2}$ 与 $2^2P_{1/2}$ 是完全简并的。然而像 1.3 节那样纳入了真空涨落时，就可以定性描述并从概念上理解 Lamb 位移。其他现象，比如 Planck 黑体辐射分布、激光线宽，也可以通过这种半经典方法加上真空涨落的观点来理解。

在 20 世纪 70 年代，当时物理学界整体认为，真空涨落对理解光子的概念至关重要，并且处理光子问题的标准方法可能就是经典场论加上真空涨落的噪声，或不确定性。将相干压缩视作对不确定性的重新分布（第 2 章讨论）以及其他相关物理上的论据都倾向于支持以上看法。然而我们会很快看到，这时的“光子”概念虽然实用，但却是不完整的。我们现在转向更为深入更为美妙的辐射场量子化的观点。

³译注：即能量本征态

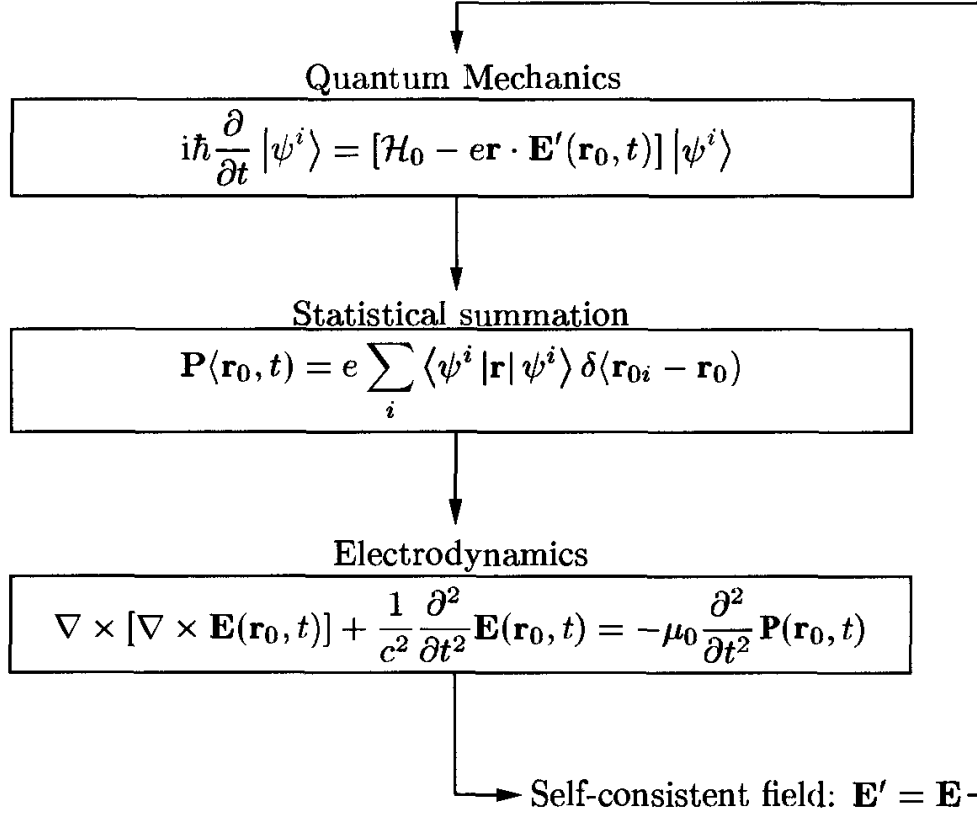


图 1: 自洽方程, 展示了根据量子力学方程第 i 个原子如何被猜测场 $\mathbf{E}'(\mathbf{r}_0, t)$ 扰动并产生电偶极矩。位于 \mathbf{r}_0 处的原子将在此处贡献宏观极化 $\mathbf{P}(\mathbf{r}_0, t)$ 。这个极化表现为 Maxwell 方程组中场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$ 的源。这个循环需要一直进行下去直至自洽条件被满足, 即猜测场 \mathbf{E}' 等于所产生的场 \mathbf{E} 。

3 量子拍、量子擦除、Bell 定理等等

正如我们在 1.4 节中所讨论的，量子拍仅存在于高态为双态的 V 型系统，而不存在于低态为双态的 Λ 型系统这个现象，在不涉及真空涨落的前提下给出了辐射场量子化的另一个证据。量子拍的存在说明了，仅仅用半经典理论加上真空涨落是不足以理解全部物理现象的。从这个例子出发可以引出量子擦除和双光子关联干涉等现象。这实际上能说明在解释杨氏双缝干涉实验时所提出的‘光子只和它自己干涉’，也仅能用在这个实验而不应被推广到其他地方。这里可以考察一个重要的例子：光子纠缠态。纠缠的光子被用于检验 Bell 不等式，从而提供了对光子以及量子力学的概念更深层次的理解。正如本书最后一章中会说到，从最近的量子光学研究中，我们对光的量子理论有了更深刻的了解。

4 ‘光子的波函数’

我把这一节的标题放在了引号里，这样做有两个原因。首先，它也是 Power 的 QED 经典教材中一节的标题。其次，这引号也是为了提醒读者注意，严格来说，不存在所谓‘光子波函数’这回事。

作为一个例子，Power 和 Kramers 都曾指出过，人们通常不会认为⁴‘光子’和一个（非相对论性）有质量粒子是一回事。另一方面，一些物理学家会辩解道，自由空间中的单光子和一个质量趋于零的介子基本上是一回事。因此，仔细考察一下支持和反对‘光子波函数’这个概念的证据和论证将会是有趣的。

光的‘波粒二象性’这个哲学信念使得 De Broglie 提出电子可能也会存在波动行为。尽管如此，从现代量子光学的观点来看，波动力学，Maxwell-Schrödinger 方程，对于光和物质波是完全分开处理的。物质波的干涉和衍射是完完全全的量子力学效应。而光的相应行为由经典 Maxwell 方程描述。

那么我们自然就可以问出问题：是否能把光的电场看作是某种‘光子波函数’呢？在 Kramers 的书中，他在‘光子波函数：动机和定义’一节中问道：

人们能在多宽泛、多精确的程度上，去比较辐射场和独立粒子系综之间的一致

⁴又见 I. Bialynicki-Birula and Z. Bialynicka-Birula, *Quantum Electrodynamics*, (Pergamon Press, Oxford 1976)

性呢？

在 1924 年 De Broglie 提出物质粒子也应当表现出波动行为... 这样的比较是非常有启发意义的。现在波动力学已经是一套完整的理论，容许人们去考虑 Maxwell 方程组是否也是某种光粒子的 Schrödinger 方程，而不是我们之前所认为的，仅仅是某种长得像波动方程的经典运动方程，还得再量子化一次；或者说这两种想法都是等价的？

在这一节的最后 Kramers 作了如下回答：

本节开头问题的答案是，我们不能说辐射场中的粒子和（非相对论性）量子力学中的点粒子是一回事。

Kramers 的理由和 Power 说的一样（在他书中 5.1 节‘光子的波函数’中）

所以很自然就会问到，光子的 ϕ 是啥？严格来讲不存在这类的波函数！我们不能说辐射场中的粒子和上一章中用过的初等量子力学系统中的粒子是一回事。这是因为波函数...Schrödinger 的含时波函数对应于能量 E_λ 的解具有一个圆频率 $\omega_\lambda = +E_\lambda/\hbar$ ，而波动方程的单色光解同时具有 $\pm\omega_\lambda$ 。 E 和 B 场满足自由空间中的 Maxwells 方程组，从而也满足波动方程。它们是实函数而不是 $i\partial/\partial t$ 的本征函数。具有给定能量的 Schrödinger 波一定是复的。

这是在说，实的电场波（公式 (1.1.27)）同时具有 $\exp(-i\nu_k t)$ 和 $\exp(i\nu_k t)$ 两个部分，而物质波只有 $\exp(-i\nu_p t)$ 这样的项。稍后我们将会回到这一点，但现在先让我们看看 Bohm 在他经典的《量子理论》一书中对此的讨论。在 98 页，他提到

电子被发现位于 x 到 $x + dx$ 之间的概率为

$$P(x) = \psi^*(x)\psi(x) dx.$$

然后他将此与光作比较，说道：

这样，严格说来，不存在一个函数用来表示某一个给定点发现一个光量子的概率。如果取一个相对波长而言较大的区域，我们可以近似得到

$$P(x) \simeq \frac{\mathcal{E}^2(x) + \mathcal{H}^2(x)}{8\pi h\nu(x)},$$

但如果所考虑的区域过于狭窄， $\nu(x)$ 将不存在什么确切的意义。

随后 Bohm 声称，对于物质而言⁵

存在概率流

$$S = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*)$$

满足关系

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div } S = 0,$$

他又提到

对于光而言不存在对应的量。

我们同意 Kramers 和 Bohm 的结论，即光子波函数的概念必须被谨慎的使用，且非常容易引起误解。尽管如此，我们将看到上面所给出的这些反对意见其实都是可以被克服的。

首先得注意到，从准经典理论的观点出发，我们处理的是（经典）辐射和（量子）物质系统的波动描述。仅当我们将辐射场也同样量子化之后，辐射-物质方程才被以同样的方式处理。在全量子理论中，应该从二次量子化的视角来考虑物质。在 1.1 节中，我们曾将场的 Fourier 振幅用算符替代以完成量子化过程。考虑线偏振光的经典复数场 $E(\mathbf{r}, t)$ 。由于光是线偏振的，我们可以暂时忽略场的矢量特性。在从对场的经典描述到量子描述转变过程中，我们将场的本征函数 $U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 前的系数替换成算符，即

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} e^{-i\nu_{\mathbf{k}} t} U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

其中 $\alpha_{\mathbf{k}}$ 是经典场振幅，进行替换

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\nu_{\mathbf{k}} t} U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

其中 $a_{\mathbf{k}}$ 是量子场算符。

现在，考虑对物质场进行类似的量子化过程。例如，有质量系统（原子、电子、介子等）的波函数由一系列本征态叠加而成

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} e^{-i\nu_{\mathbf{p}} t} \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

⁵译注：下式中 Δ 应为 ∇

表 1: 根据 Maxwell 方程组和 Schrödinger 方程得到的辐射和物质 ‘场’ 相互作用的半经典理论。两类场都表现出波动行为, 但仅在物质场方程中出现了 \hbar 。采用完整的量子场论, 例如 Dirac 和 Schwinger 表述, 辐射和物质可以相同的被对待。

	光	物质
半经典	$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ $\square^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{P}$ Maxwell	$\psi(\mathbf{r}, t)$ $\dot{\psi}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} \psi(\mathbf{r}, t)$ Schrödinger
量子场	$ \dot{\psi}_f\rangle = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f \psi_f\rangle$ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}(t) U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ Dirac	$ \dot{\psi}_m\rangle = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_m \psi_m\rangle$ $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}}(t) \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ Schwinger

其中 $\nu_p = E_p/\hbar$, $c_{\mathbf{p}}$ 是粒子处在具有动量 \mathbf{p} 的态 $\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ 的概率幅

$$\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}. \quad (5)$$

二次量子化过程即, 将所有概率幅 $c_{\mathbf{p}}$ 替换成满足 Fermi-Dirac 或者 Bose-Einstein 对易关系的湮灭算符 $\hat{c}_{\mathbf{p}}$ 。这样波函数就成了一个算符

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}} e^{-i\nu_{\mathbf{p}} t} \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

其能湮灭掉由态矢 $|\psi\rangle$ 描述的位于 \mathbf{r} 处的一个粒子。在这个层面上, 物质和光子都用量子化的场来描述, 而光子和/或介子场的状态都由态矢 $|\psi\rangle$ 描述。对辐射-物质体系的半经典和全量子处理逻辑比对总结于表1之中。

注意, 我们第二次引入了算符, 从而 ‘二次’ 量子化这个术语对于物质场适用。首先是令 $p_x \rightarrow (\hbar/i)\partial/\partial x$ 这样, 然后再把概率幅替换成算符 $c_{\mathbf{p}}(t) \rightarrow \hat{c}_{\mathbf{p}}(t)$ 。尽管如此, 对于光子来说, 由于 \hbar 仅仅出现了一次, 不能这样讲。在这个意义下, 辐射场的量子化可以被称为 ‘首次’ 量子化。

现在我们转过身来, 假装我们是第一次从全量子的观点学到光子和介子这些东西。粒子波函数可以从位置本征态 $|\mathbf{r}\rangle$ 和态矢 $|\psi(t)\rangle$ 的内积得到

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle. \quad (7)$$

前面过提到态 $|\mathbf{r}\rangle$ 可以写成

$$|\mathbf{r}\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})|0\rangle, \quad (8)$$

即产生算符

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\nu_{\mathbf{p}}t} \phi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}), \quad (9)$$

作用到真空态上能够产生一个位于 \mathbf{r} 处的粒子。从公式(7)和(8)出发, 可以得到关于物质波函数的常用结论:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle 0 | \hat{\psi}(\mathbf{r}) | \psi(t) \rangle. \quad (10)$$

现在自然会有疑问: 我们是否也可以为光子写下类似于公式(7)的式子呢? 答案是, 严格来说, ‘不能’, 这是因为对于光子而言不存在 $|\mathbf{r}\rangle$ 态。

知道了这件事后, 让我们再来问一个技术性问题: 对于

$$|\psi\rangle = \sum_{\{n\}} c_{\{n\}}(t) |\{n\}\rangle, \quad (11)$$

这样一个单光子态 (其中 $\{n\}$ 表示每个模式 \mathbf{k} 上有 (且仅有) 一个光子的态的集合), 有多大的概率会导致在 \mathbf{r} 处的探测原子被激发处一个光电子?

例如, 公式(11)给出的态可以由一个从激发态弛豫到基态的原子产生, 稍后我们会给出具体的例子。不论什么情况, 我们知道了, 表征在空间中传播的单光子的波包和概率幅 $c_{\{n\}}$ 包含了一般与单光子脉冲的 Fourier 系数相关的信息。

正如在 4.2 节所讨论的一样, 在 \mathbf{r} 处激发一个原子 (试探原子) 的概率由下式给出

$$P_\psi(\mathbf{r}, t) \propto \langle \psi | \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle, \quad (12)$$

其中, 湮灭算符 $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ 的形式为

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\nu_{\mathbf{k}}t} U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (13)$$

而产生算符 $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ 是湮灭算符(13)的伴随算符, 将在上式中插入一组对态完备集的求和

$\sum_{\{n'\}} |\{n'\}\rangle \langle \{n'\}| = 1$, 写成

$$P_\psi(\mathbf{r}, t) \propto \sum_{\{n'\}} \langle \psi | \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) | \{n'\} \rangle \langle \{n'\} | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle. \quad (14)$$

但由于态 ψ 只有一个光子，并且 $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ 将使它湮灭，只有真空态 $|0\rangle\langle 0|$ 会对(14)有贡献，于是得到

$$P_\psi(\mathbf{r}, t) \propto \sum_{\{n'\}} \langle \psi | \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle \langle 0 | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi \rangle, \quad (15)$$

因此可以将与单光子态 $|\psi_\gamma\rangle$ 相关联的“电场”定义为

$$\Psi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \langle 0 | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi_\gamma \rangle. \quad (16)$$

对于由原子衰变产生的光子态 (方程 6.3.24) $|\psi_\gamma\rangle$ ，可以得到

$$\Psi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{E}_0}{r} \Theta\left(t - \frac{r}{c}\right) e^{-i(t-r/c)(\omega - i\Gamma/2)}, \quad (17)$$

其中 \mathcal{E}_0 是常数， r 是原子到试探点的距离， $\Theta(x)$ 是阶跃函数， Γ 是原子衰变率。我们注意到，方程(17)所给出的波包在原子跃迁频率 ω 附近有锐利的峰值，本节中所考虑的全体波包都是此类情形。

把公式(17)用电场湮灭算符的正频部分公式 (1.1.32) 更具体地改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \langle 0 | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi_\gamma \rangle \\ &= \langle 0 | \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \sqrt{\frac{\hbar v_k}{2\epsilon_0 V}} a_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-iv_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | \psi_\gamma \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

正如在之前所提，电场将会在频率 ω 附近出现极其尖锐的峰，所以将平方根中相对变化比较缓慢的频率 v_k 用 ω 代替，并重写为

$$\Psi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} \langle 0 | \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} a_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-iv_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | \psi_\gamma \rangle. \quad (19)$$

对比电场形式(19)和波函数形式，定义光电探测概率幅为

$$\varphi_\gamma(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \langle 0 | a_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{e^{-iv_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} | \psi_\gamma \rangle. \quad (20)$$

即

$$\Psi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0}} \varphi_\gamma(\mathbf{r}, t). \quad (21)$$

我们可以利用 Maxwell 方程组写出 $\varphi_\gamma(\mathbf{r}, t)$ 的运动方程，即将电场(16)和下面式子中的磁场耦合起来

$$\Psi_{\mathcal{H}}(\mathbf{r}, t) = \langle 0 | \mathbf{H}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \psi_\gamma \rangle. \quad (22)$$

其中 $\mathbf{H}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ 是磁场算符的正频部分，即以下面的形式写出

$$\mathbf{H}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \sqrt{\frac{\hbar v_k}{2\mu_0}} a_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{e^{-iv_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}}. \quad (23)$$

利用上面两个方程(22) (23)得到

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{H}}(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \langle 0 | \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \sqrt{\frac{\hbar v_k}{2\mu_0}} a_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{e^{-iv_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}} | \psi_{\gamma} \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \chi_{\gamma}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (24)$$

现在写出基于 φ_{γ} (方程(21)) 和 χ_{γ} (方程(24)) 的 Maxwell 方程组

$$\begin{aligned} \nabla \times \chi_{\gamma} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_{\gamma}}{\partial t}, \\ \nabla \times \varphi_{\gamma} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \chi_{\gamma}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \chi_{\gamma} &= 0, \\ \nabla \cdot \varphi_{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

继续将上述方程组(25)化简为更美观的矩阵形式，将 φ 和 χ 写成 1×3 的列矩阵。

$$\varphi_{\gamma} = \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}; \quad \chi_{\gamma} = \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} \quad (26)$$

在这个形式下，参照习题 1.7，Maxwell 方程组(25)可以写为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi_{\gamma} \\ \chi_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} \\ c\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\gamma} \\ \chi_{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

以及

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{\gamma} \\ \chi_{\gamma} \end{bmatrix} = 0, \quad (28)$$

其中 s_x, s_y, s_z 是习题 1.7 中给出的 3×3 矩阵， \mathbf{p} 是动量算符 $(\hbar/i)\nabla$ 。有趣的是，将这种形式的 Maxwell 方程组(25)与中微子的 Dirac 方程⁶ 进行对比

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi_{\eta} \\ \chi_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\eta} \\ \chi_{\eta} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

⁶Dirac 方程与 Maxwell 方程的对应众所周知，更多细节可以参考 I. Bialynicki-Birula and Z. Bialynicka-Birula, *Quantum Electrodynamics*, (Pergamon Press, Oxford 1976) 的相关章节。

表 2: 关于光子和中微子的一个对称表述。在经典极限下（最后一行），光由射线光学描述，而物质由类似于经典 Hamilton 原理的东西描述。第一行关于光子和中微子的量子场论表述也是非常对称的。‘波动’力学这一行给出了 $\Psi_\gamma(\mathbf{r}, t)$ 和 $\Psi_\eta(\mathbf{r}, t)$ 的运动方程

	光子	中微子
“波动”力学	$\psi_\gamma = \begin{bmatrix} \phi_\gamma \\ \chi_\gamma \end{bmatrix}$ $\dot{\Psi}_\gamma = -\frac{i}{\hbar} \begin{bmatrix} 0 & -c\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} \\ c\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{bmatrix} \Psi_\gamma$	$\psi_\eta = \begin{bmatrix} \phi_\eta \\ \chi_\eta \end{bmatrix}$ $\dot{\Psi}_\eta = -\frac{i}{\hbar} \begin{bmatrix} 0 & -c\sigma \cdot \mathbf{p} \\ c\sigma \cdot \mathbf{p} & 0 \end{bmatrix} \Psi_\eta$
经典极限：程函物理	$n(\mathbf{r})$ 射线光学 $\delta \int n \, ds = 0$ Fermat 原理	$V(\mathbf{r})$ 经典力学 $\delta \int L \, dt = 0$ Hamilton 原理

两个旋量 φ_η 和 χ_η 组成了中微子的 Dirac 波函数

$$\Psi_\eta = \begin{bmatrix} \varphi_\eta \\ \chi_\eta \end{bmatrix}. \quad (30)$$

由已有的运动方程(25)很容易导出连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_\gamma^\dagger \Psi_\gamma = -\nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (31)$$

其中

$$\Psi_\gamma = \begin{bmatrix} \varphi_\gamma \\ \chi_\gamma \end{bmatrix}, \quad (32)$$

流密度可以由习题 1.8 得到

$$\mathbf{j} = \Psi_\gamma^\dagger \mathbf{v} \Psi_\gamma \quad (33)$$

“速度”算符由下式给出

$$\mathbf{v} = c \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

关于 Ψ_γ 和 Ψ_η 的对比在表2中总结

虽然光子和中微子运动方程之间的相似性很值得玩味，但同时也必须注意到它们之间重要且基本的差异性。举例而言，如果考虑非相对论极限下的光子体系(29)，我们可以得到一个如下形式的平面波

$$\varphi_{\text{electron}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (35)$$

其中 $k_z = p_z/\hbar$ 和 $\omega_z = p_z^2/2m\hbar$ ，通过作用一个操作 $\exp(ik_x x)$ (在这里 $x = \partial/\partial k_x$)，沿 x 方向给电子一个冲量。新的动量将由下式给出

$$\mathbf{k} = \hat{e}_x k_x + \hat{e}_z k_z \quad (36)$$

现在考虑将同样的操作作用到(20)上。正如最初将沿 z 轴传播并沿 x 轴极化的平面波写成 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ 的形式，即

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \hat{e}_x \frac{e^{i(k_z z - \omega_k t)}}{\sqrt{V}} \quad (37)$$

随后作用之前的操作在这个波函数上，我们可能会认为得到了新的波函数

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) = \hat{e}_x \frac{e^{i(k_z z - \omega_k t)}}{\sqrt{V}} \quad (38)$$

但是这时不能满足 Maxwell 方程(25)

$$\nabla \cdot \tilde{\varphi} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^{i(k_z z + k_x x - \omega_k t)}}{\sqrt{V}} \right] \neq 0. \quad (39)$$

这只是一个光子“波函数”如何区别于非相对论性有质量粒子波函数的例子⁷，况且，“像粒子的光子”这个图像本身就容易引起误解。

此外还有更值得注意的例子，考虑两个光子相互作用的情形。特别而言，考虑图2中所双光子辐射和探测，正如将会在第四章中详细讨论的细节一样，在 D_1 和 D_2 处同时探测到两个光电子的概率由双光子关联函数给出，最后可以计算得到

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \psi | \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | \psi \rangle, \quad (40)$$

对应于光场作用下，由 $|\psi\rangle$ 描述的，在 t_1 和 t_2 时刻的 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处的两个探测器。

注意到对于单原子辐射而言，只有两个光子会参与这个过程，即

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{E}_1^{(-)} \mathbf{E}_2^{(-)} \mathbf{E}_2^{(+)} \mathbf{E}_1^{(+)} | \psi \rangle &= \sum_{\{n\}} \langle \psi | \mathbf{E}_1^{(-)} \mathbf{E}_2^{(-)} | \{n\} \rangle \langle \{n\} | \mathbf{E}_2^{(+)} \mathbf{E}_1^{(+)} | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \mathbf{E}_1^{(-)} \mathbf{E}_2^{(-)} | 0 \rangle \langle 0 | \mathbf{E}_2^{(+)} \mathbf{E}_1^{(+)} | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (41)$$

⁷译注：这个矛盾可以通过使用相对论性的洛伦兹变换，而不是此处的伽利略变换，以得到解决。

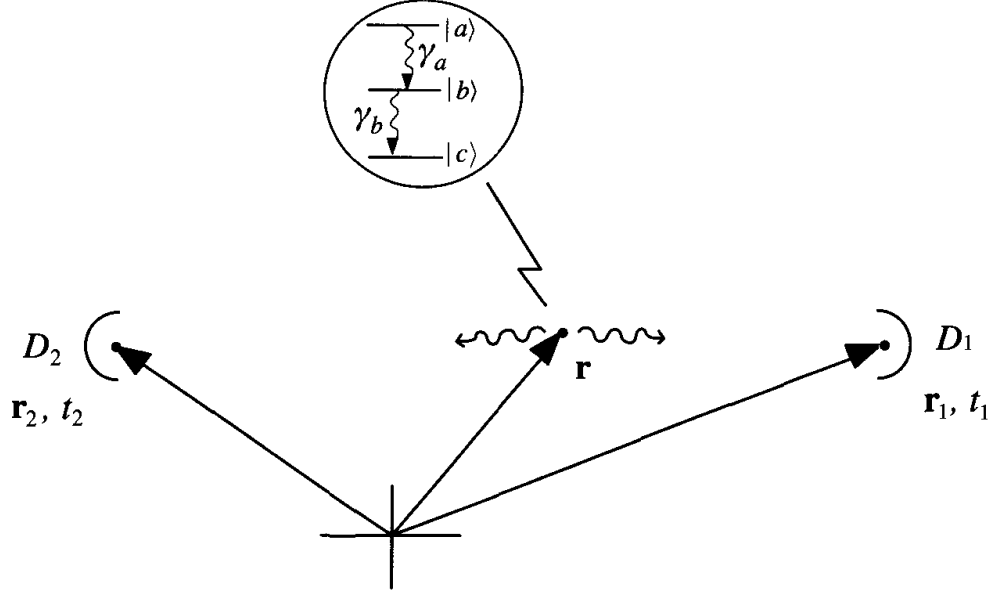


图 2: 位于 \mathbf{r} 处的三能级原子, 以 γ_a 的速率通过 $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ 弛豫, 以 γ_b 的速率通过 $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ 弛豫。分别位于 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 处的两个探测器 D_1 和 D_2 在时间 t_1 和 t_2 时开启。

因此双光子探测概率幅为

$$\Psi^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) \equiv \langle 0 | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | \psi \rangle \quad (42)$$

也就是现在需要考虑的。

首先考虑原子从 $|a\rangle$ 到 $|b\rangle$ 的辐射, γ_a , $|b\rangle$ 到 $|c\rangle$ 的辐射, γ_b 使得 $\gamma_a \gg \gamma_b$, 也就是说原子会极快地衰变到能级 $|b\rangle$ 上, 然后经过一段时间再衰变到能级 $|c\rangle$ 上, 在这种情况下, 根据 21.4.1 节, 我们可以得到

$$\Psi^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \Psi_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1) \Psi_\beta(\mathbf{r}_2, t_2) + \Psi_\beta(\mathbf{r}_1, t_1) \Psi_\alpha(\mathbf{r}_2, t_2) \quad (43)$$

其中

$$\Psi_\alpha(\mathbf{r}_i, t_i) = \frac{\mathcal{E}_a}{\Delta r_i} \Theta(t_i - \frac{\Delta r_i}{c}) e^{-\gamma_a(t_i - \frac{\Delta r_i}{c})} e^{-i\omega_{ab}(t_i - \frac{\Delta r_i}{c})}, \quad (44)$$

$$\Psi_\beta(\mathbf{r}_i, t_i) = \frac{\mathcal{E}_b}{\Delta r_i} \Theta(t_i - \frac{\Delta r_i}{c}) e^{-\gamma_b(t_i - \frac{\Delta r_i}{c})} e^{-i\omega_{bc}(t_i - \frac{\Delta r_i}{c})}, \quad (45)$$

其中 $i = 1, 2$, ω_{ab} 和 ω_{bc} 是原子发生跃迁 $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ 以及 $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ 的频率, Δr_i 是原子到第 i 个试探点的距离, \mathcal{E}_a 和 \mathcal{E}_b 是不重要的常数, (44)和(45)的对比以及单光子的光电探测概

率幅都是十分显然的。在这里，我们清楚地得到了得到一类公式——Bose-Einstein 的表达形式，它们可以用来得出两个氢原子体系的关联函数。

但只需条件改为 $\gamma_b \gg \gamma_a$ ，求解就会变得极为困难。也就是说原子需要一些时间跃迁到 $|b\rangle$ 能级，然后马上跃迁到 $|c\rangle$ 能级。根据 21.4.1 节，我们有下述的双光子探测概率幅

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) &= \frac{-\kappa}{\Delta r_1} \Delta r_2 \exp[-(i\omega_{ac} + \gamma_a)(t_1 - \frac{\Delta r_1}{c})] \Theta(t_1 - \frac{\Delta r_1}{c}) \\ &\times \exp\{-(i\omega_{bc} + \gamma_b)[(t_2 - \frac{\Delta r_2}{c}) - (t_1 - \frac{\Delta r_1}{c})]\} \\ &\times \Theta[(t_2 - \frac{\Delta r_2}{c}) - (t_1 - \frac{\Delta r_1}{c})] + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (46)$$

这种差异所传递的信息十分明显，当 $\gamma_a \gg \gamma_b$ 时，光子辐射几乎完全独立，但当 $\gamma_a \ll \gamma_b$ 时，两个事件将产生关联，而“像粒子的光子”这个图像极其容易引起误解。

作为结论，我们可以说我们或许已经克服了 Kramers 所遇到的困难（概率幅仅满足 $\langle 0|E|\psi\rangle \sim e^{-i\omega t}$ ），而且部分地克服了 Bohm 的困难（对于小于波长的尺度而言，光电探测事件毫无疑问是局域⁸的），简单地将 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ 在字面上看成是“类粒子”的波函数，这一行为十分具有误导性。而“光子”的物理与则 Schrödinger 体系中的粒子完全不同。

Wills Lamb 很好地总结了一个靠谱的光子概念

接下来该做些什么呢？我们可以，并且应当运用量子辐射理论。Fermi 在 Lippmann 条纹的例子中展示了如何进行这种处理，其思想十分简单，但细节上完善起来却容易变得一团糟，好的记号系统和大量的实践会使这个过程变得简单起来：先确定讨论中应当引入何种物理规律，然后决定进行合适的处理所需要的简正模式，再进行对光源的建模并解释它们是如何驱动整个系统的。

我们将在接下来的 20 个章节中完成这些事情。

⁸注意到光子的局域性（与光子探测概率幅的局域性相对立）与有质量粒子，例如电子，定量分析的结果截然不同。对于一个电子，把它“装”进一个大于或等于电子 Compton 波长的小盒子里是可能的，然而对于光子而言，既不可能“装”也不可能“强迫”它进入小于它自身波长的盒子中，参见 I. H. Deutsch and J. C. Garrison *Phys. Rev.* **43**, 2498 (1991).