

知乎

首发于
国际理科

科学技术提高生产力

【国际数学竞赛】还有其他解法吗？！



双木止月...

上海大学 运筹学与控制论硕士

+ 关注他

19 人赞同了该文章

之前发过《一题七解——几何知识串讲》想通过一道题把几何知识点串讲一下，现在又拿出来想了一下，发现还有很多不同的解法，感觉很有趣。下面把题目以及方法写出来，大家可以想想还有其他解法吗？

2009-AMC10B-20

Triangle ABC has a right angle at B , $AB = 1$, and $BC = 2$. The bisector of $\angle BAC$ meets \overline{BC} at D . What is BD ?



(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

(E) $2\sqrt{3}-1$

知乎 @双木止月Tong

大家可以直接思考下面两个问题，看看自己能想到多少种解法：



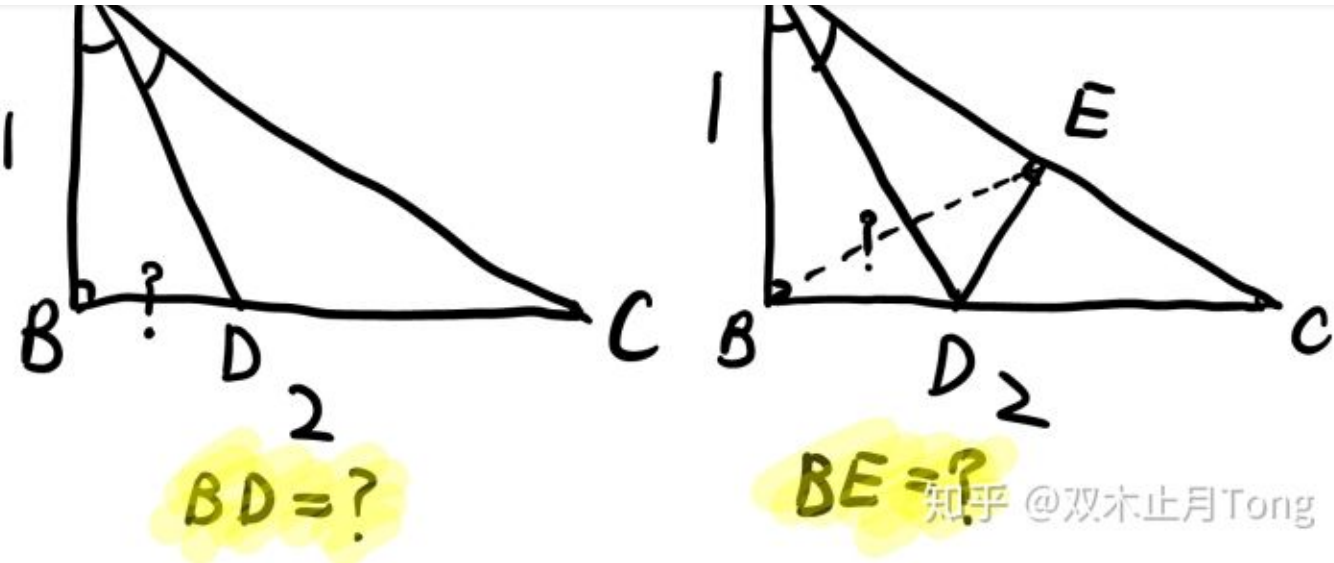
▲ 赞同 19



● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏



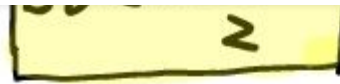
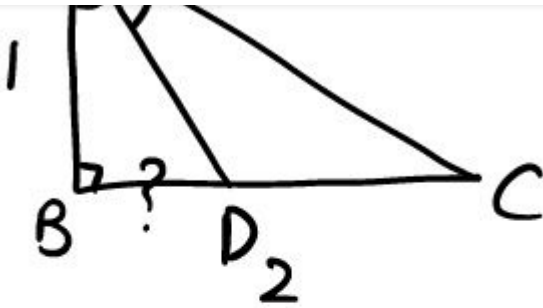
【下面是我想的方法仅供参考】

【一题多解】

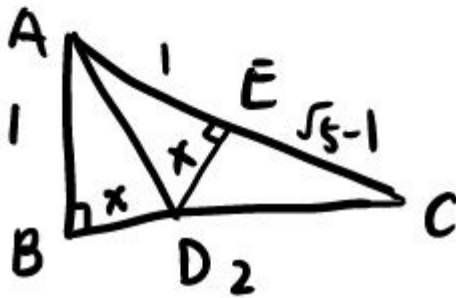
问题一方法		问题二方法	
1	勾股定理	1	余弦定理
2	相似三角形	2	托勒密定理
3	面积法	3	等腰三角形性质
4	三角函数	4	面积法
5	余弦定理	5	互补角的余弦值相反
6	角平分线定理	6	向量法
7	圆幂定理	7	两点间距离公式
8	点到直线距离公式	8	斯特瓦尔特定理
9	两角和差公式	9
10	梅涅劳斯定理		
11		知乎 @双木止月Tong

首先是第一题：BD=?

知乎

首发于
国际理科

① 勾股定理

在 $Rt\triangle CDE$ 中

$$CD^2 = CE^2 + DE^2$$

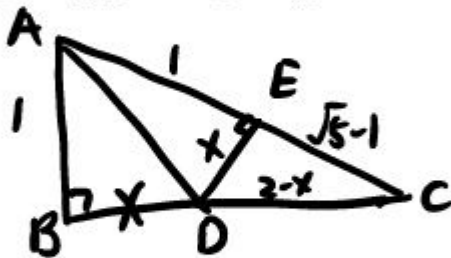
$$(2-x)^2 = (\sqrt{5}-1)^2 + x^2$$

$$4 - 4x + x^2 = 6 - 2\sqrt{5} + x^2$$

$$2\sqrt{5} - 2 = 4x$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

② 相似三角形



$$\angle C = \angle C, \angle CED = \angle CBA$$

$$\triangle CED \sim \triangle CBA$$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA} = \frac{ED}{BA}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2-x}{\sqrt{5}} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

知乎 @双木止月Tong

▲ 赞同 19



● 9 条评论

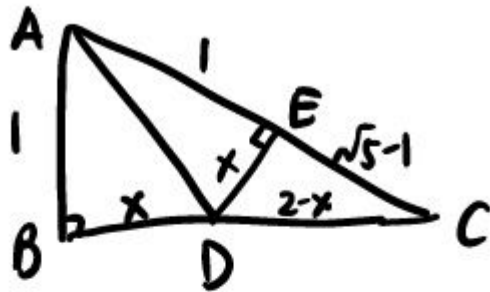
➤ 分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

③ 面积法



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC}$$

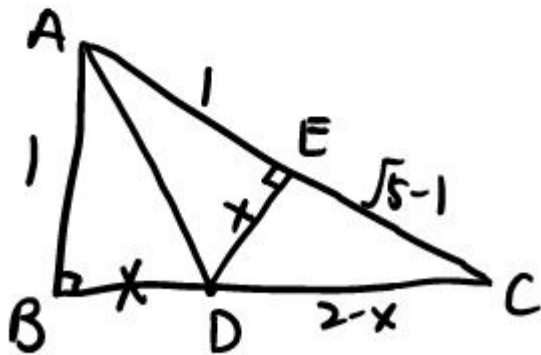
$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{5}-1$$

$$1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

④ 三角函数 Sin, cos, tan

 $\triangle ABC$ $\triangle DEC$

$$\sin C = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{x}{2-x}$$

$$\cos C = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2-x}$$

$$\tan C = \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{5}-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

知乎 @2020 双木止月Tong

▲ 赞同 19

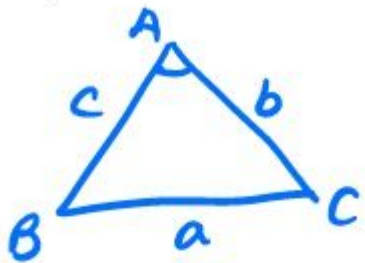


● 9 条评论

➤ 分享

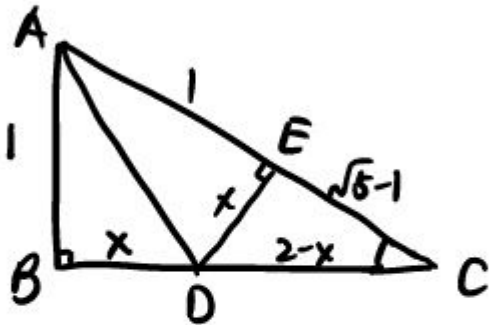
★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



$$\cos C = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{(2-x)^2 + (\sqrt{5}-1)^2 - x^2}{2 \cdot (2-x) \cdot (\sqrt{5}-1)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4 - 4x + x^2 + 6 - 2\sqrt{5} - x^2}{(3\sqrt{5}-2)(2-x)}$$

$$\frac{4\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}} = \frac{10-2\sqrt{5}-4x}{2-x}$$

$$8\sqrt{5}-8-4\sqrt{5}x+4x=10\sqrt{5}-10-4\sqrt{5}x$$

$$4x = 2\sqrt{5}-2$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

tips: 已知任意两边及角
求另一边都用law of cos

知乎 @双木止月Tong

赞同 19

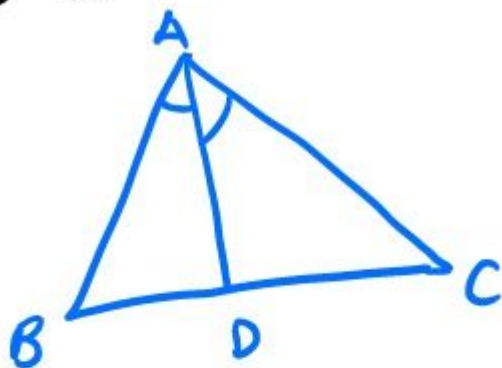


9 条评论

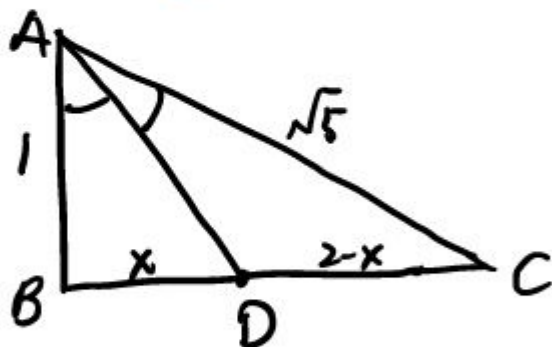
分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科 AD 平分 $\angle BAC$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{x}{2-x}$$

$$2-x = \sqrt{5}x$$

$$2 = (\sqrt{5}+1)x$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

知乎 @双木止月Fong



▲ 赞同 19

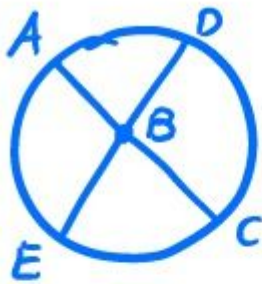


● 9 条评论

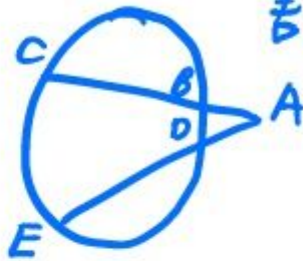
➤ 分享

★ 收藏

知乎

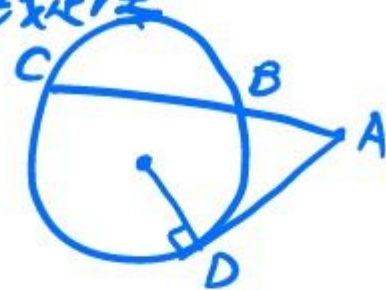
首发于
国际理科

$$AB \cdot BC = DB \cdot BE$$

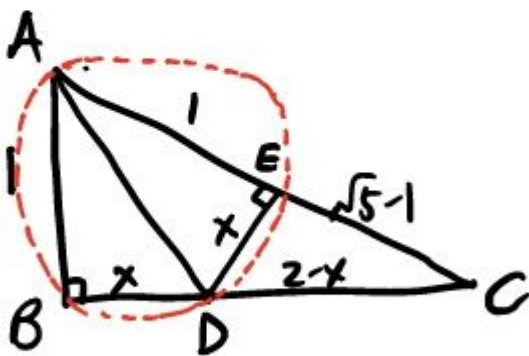


$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

割线定理



$$AB \cdot AC = AD^2$$



$$CD \cdot CB = CE \cdot CA$$

$$(2-x) \cdot 2 = (\sqrt{5}-1) \cdot \sqrt{5}$$

$$2-x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$x = 2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

tips: 四点共圆

 \Leftrightarrow 对角和为 180°

知乎 @双木止月Tong

▲ 赞同 19

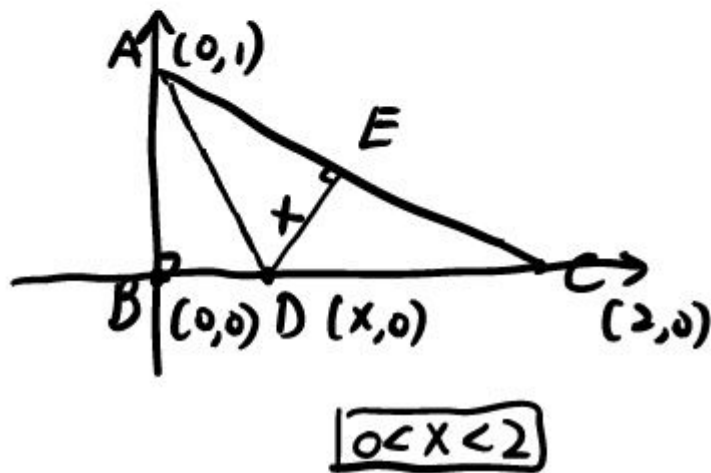
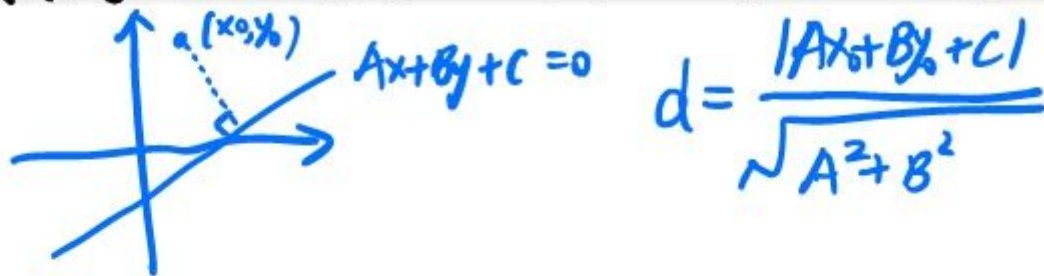


● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

$l_{AC}:$

$$k_{AC} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

$$y-1 = -\frac{1}{2}x$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y + \frac{1}{2}x - 1 = 0$$

$$x = \frac{|\frac{1}{2}x - 1|}{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2}} \quad 0 < x < 2$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}x = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}x = 1$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

知乎 @双木止月Tong

▲ 赞同 19



● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏

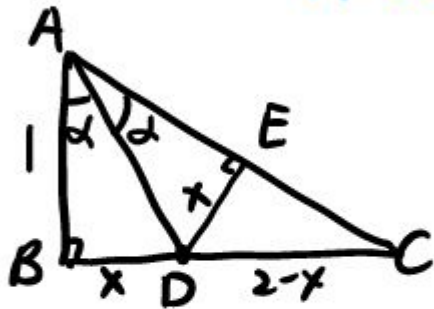
知乎

首发于
国际理科

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$



$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha}$$

$$= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$2 = \frac{2 \cdot x}{1 - x^2}$$

$$2 - 2x^2 = 2x$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad x > 0$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

知乎 @双木止月Tong



赞同 19

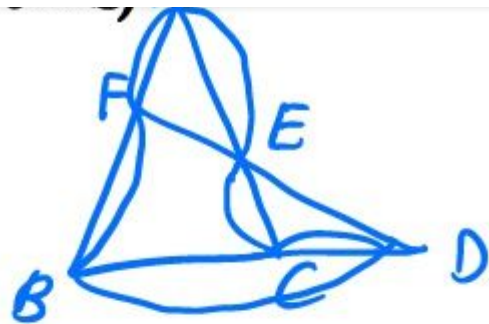
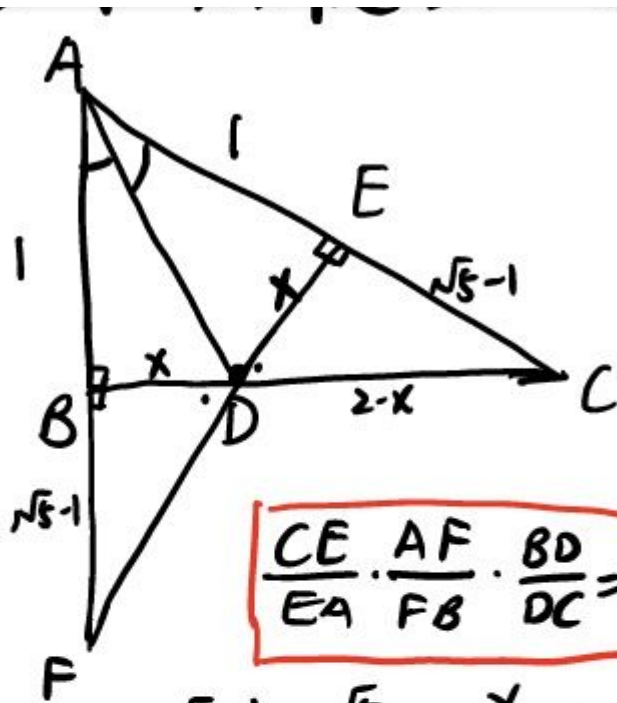


9 条评论

分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{1} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{x}{2-x} = 1$$

$$\sqrt{5}x = 2-x$$

$$(\sqrt{5}+1)x = 2$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

知乎 @双木止月Tong

不知道大家还有其他解法吗? ~~

下面是第二题: BE=?



▲ 赞同 19

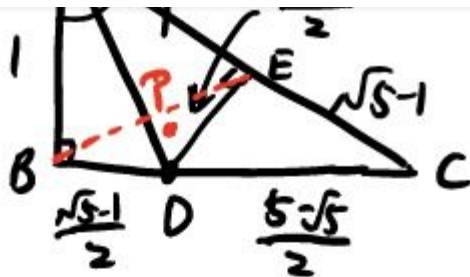


● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

$$BE = ?$$

$$BE = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

① 余弦定理

$$\cos \angle CAB = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = 2 - x^2$$

$$x^2 = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$x^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}$$

$$x = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

知乎 @双木止月Tong



▲ 赞同 19

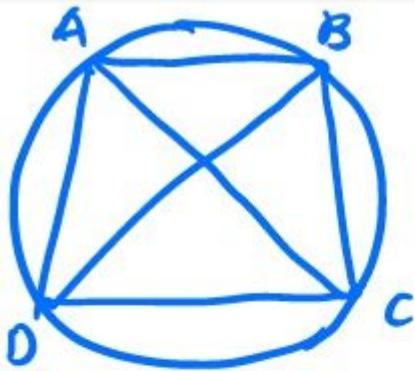


● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏

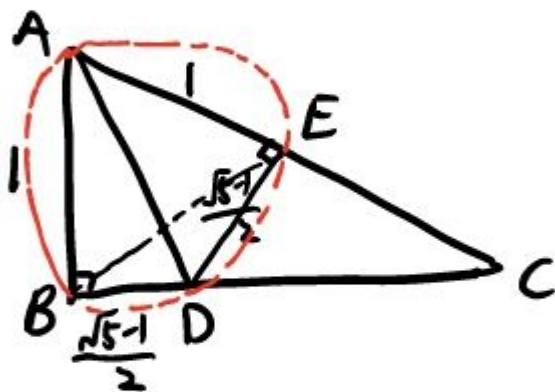
知乎

首发于
国际理科

Ptolemy's theorem

圆内接四边形

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$AD = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}$$

$$AD \cdot BE = AE \cdot BD + AB \cdot DE$$

$$BE = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}} =$$

$$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}$$

知 @双木止月Tong

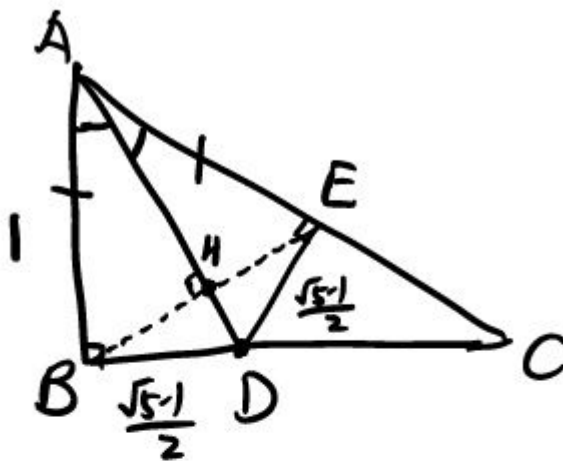
▲ 赞同 19 ▼

● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD = \frac{1}{2} BH \cdot AD$$

$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$AD = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}$$

$$BH = \frac{AB \cdot BD}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot 1}{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

$$BE = 2BH = \sqrt{\frac{(12-4\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{\frac{60+12\sqrt{5}-20\sqrt{5}-20}{20}}$$

$$= \sqrt{\frac{40-8\sqrt{5}}{20}}$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

知乎 @双木止月Tong

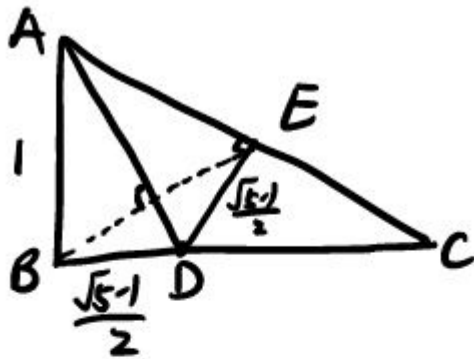
▲ 赞同 19 ▼

● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

$$AD = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$S_{\square ABDE} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADE} = 2 S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BE$$

$$2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cdot BE$$

$$BE = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{\frac{12-4\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(12-4\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{\frac{60+12\sqrt{5}-20\sqrt{5}-20}{20}}$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

知乎 @双木止月Tong



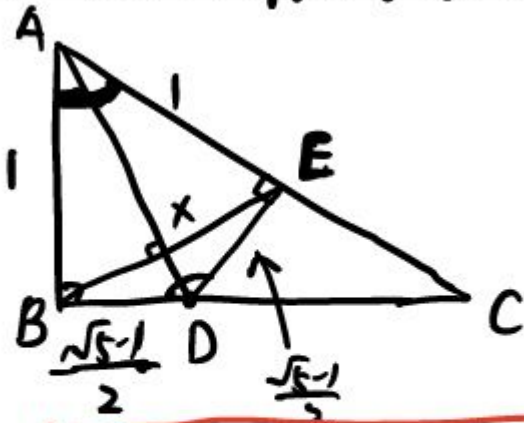
▲ 赞同 19 ▼

● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

$$\angle CAB + \angle EDB = 180^\circ$$

$$\cos \angle CAB = -\cos \angle EDB$$

$$\frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = -\frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - x^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} = x^2 \cdot \frac{2}{(\sqrt{5}-1)^2} - 1$$

$$2 = \left(\frac{2}{6-2\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right) x^2$$

$$2 = \left(\frac{12+4\sqrt{5}}{36-20} + \frac{1}{2} \right) x^2$$

$$2 = \frac{5 \cdot 20 + 4\sqrt{5}}{16} x^2$$

$$x^2 = \frac{8}{5+\sqrt{5}} = \frac{8(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{40-8\sqrt{5}}{20-5} = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}$$

$$x = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

赞同 19

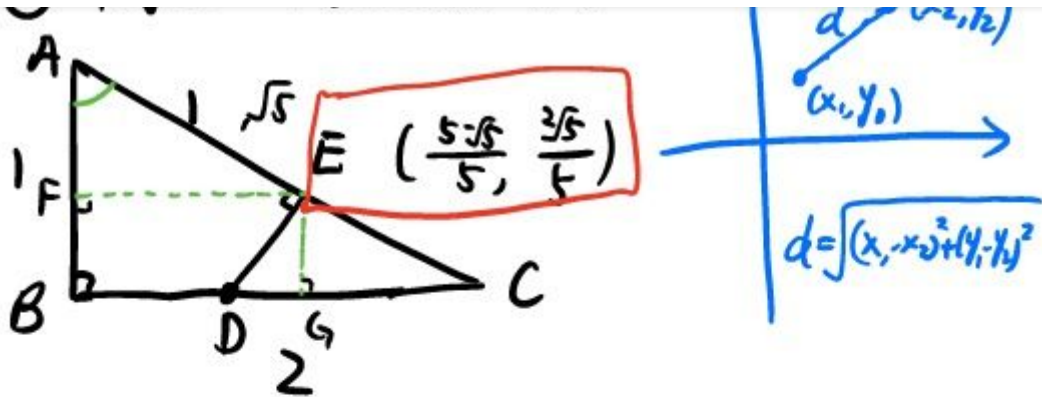


9 条评论

分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$EF = 1 \cdot \sin A = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$EG = 1 - 1 \cdot \cos A = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$$

$$BE^2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$= \frac{30 - 10\sqrt{5} + 20}{25}$$

$$= \frac{10 - 3\sqrt{5}}{5}$$

$$BE = \sqrt{\frac{10 - 3\sqrt{5}}{5}}$$

知乎 @双木止月Tong



▲ 赞同 19

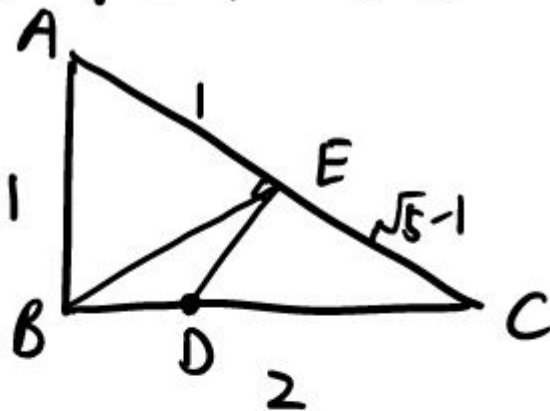


● 9 条评论

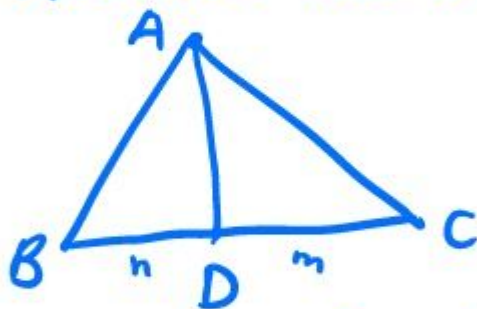
➤ 分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

Stewart's Theorem



$$\frac{BD}{DC} = \frac{n}{m}$$

$$m \cdot AB^2 + n \cdot AC^2 = m \cdot BD^2 + n \cdot DC^2 + (n+m)AD^2$$

Apollonius' Theorem

$$\frac{BD}{DC} = \frac{1}{1}$$

$$AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$$

知乎 @双木止月Tong



▲ 赞同 19



● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏

知乎

首发于
国际理科

$$\frac{CE}{EA} = \frac{\sqrt{5}-1}{1}$$

$$1 \cdot CB^2 + (\sqrt{5}-1) \cdot AB^2 = 1 \cdot CE^2 + (\sqrt{5}-1) \cdot AE^2 + (\sqrt{5}-1) \cdot BE^2$$

$$1 \cdot 4 + (\sqrt{5}-1) \cdot 1 = 6-2\sqrt{5} + \sqrt{5}-1 + \sqrt{5}BE^2$$

$$4 + \sqrt{5}-1 = 5-\sqrt{5} + \sqrt{5}BE^2$$

$$\sqrt{5}BE^2 = 2\sqrt{5}-2$$

$$BE^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}$$

$$BE = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$$

知乎 @双木止月Tong

大家还有其他想法吗? 欢迎大家留言讨论~

如果了解更多的国际数学竞赛及课程的知识, 可参阅:

双木止月Tong: 国际数学竞赛及课程

zhuanlan.zhihu.com

编辑于 2019-11-22

平面几何

解析几何

数学竞赛



赞同 19




9 条评论

分享

★ 收藏

文章被以下专栏收录



国际理科

传播数学知识，接轨国际教育。

关注专栏

推荐阅读

三元不等式：SOS-Schur方法

简介竞赛党可能比较熟悉不等式里的SOS大法，以三元不等式为例，就是把一个关于 a,b,c 的函数配凑成以下形式 $f(a,b,c)=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2$ 其中 S_a,S_b,S_c 是关于 a,b,c 的...

讚讚

发表于中等偏上数...



[超难的几何] CYB问题的解答

cyb酱

发表于cyb酱の...




佐数

cj

9 条评论


切换为时间排序

写下你的评论...




 一言一字

文章封面的字好好看呀！




 赞


2 个月前

 双木止月Tong (作者) 回复 一言一字

嗯嗯[赞同]以后都让她写👉 [捂嘴][捂嘴]

 赞

2 个月前



情归陌路

知乎

首发于
国际理科

双木止月Tong (作者) 回复 情归陌路

2 个月前

[尴尬][尴尬]感谢指正

赞



驢乸

2 个月前

总结得非常赞，就是哪个体系元素，（角/边/旋）发生动态变化时候就不太好解释了，并且不好固定，延展线无穷长，不好确定边界定义域值。

赞



tsai

2 个月前

不錯!

赞



驢乸

2 个月前

确实很专业，历史课老师要批评你了。

赞



双木止月Tong (作者) 回复 驢乸

2 个月前

是的呀，教不了体育了。

赞



驢乸 回复 驢乸

1 个月前

你的爱好超越了你选择专业的初心，显然你是找不太准基础专业学生的基调啦！提问回答活跃但太突兀，不敢恭维。

赞



▲ 赞同 19



● 9 条评论

➤ 分享

★ 收藏