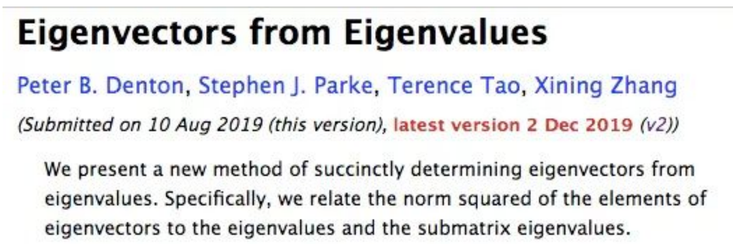
陶哲轩等重写论文回应争议：七种证明，全面回顾“颠覆数学常识”的公式是怎么来的？

新智元
已认证的官方帐号

> 【新智元导读】还记得上个月三位物理学家和陶哲轩发现的新公式吗？这个被称为“颠覆性”的公式早已被数学家提出并写入教材。虽然翻了车，但陶哲轩等人一不做二不休，索性深挖这个公式的前世今生，并给出[illegible]种证明方法，还发表了新论文。今天为大家带来独家论文解读。现在戳右边链接上 新智元小程序 了解更多！

还记得上个月三位物理学家和陶哲轩发现的新公式吗？

简言之，三位物理学家请教数学天才、菲尔兹奖得主陶哲轩一个偶然发现的公式。三位物理学家很快收到了陶哲轩的回复，并给出[illegible]个证明。一周半后，他们一起发表了论文，阐述了这个公式的证明过程。



Eigenvectors from Eigenvalues

Peter B. Denton, Stephen J. Parke, Terence Tao, Xining Zhang

(Submitted on 10 Aug 2019 (this version), latest version 2 Dec 2019 (v2))

We present a new method of succinctly determining eigenvectors from eigenvalues. Specifically, we relate the norm squared of the elements of eigenvectors to the eigenvalues and the submatrix eigenvalues.

第一篇论文地址：[illegible]

化弄人，没多久网友就扒出这个简化方法早已被数学家提出并写入教材，然后又有人顺藤摸瓜发现这个定理出[illegible]年一篇《线性代数及其应用》[illegible]的文章里。

新智元新智元2/朋友圈也在热议这个公式

紧接着，陶哲轩在自己的博客中说明，发现了之前这个公式的很多等价版本，意识到这个公式并非首创。

事情本来到这里就可以结束，但没想到陶哲轩他们一不做二不休，**索性做了个文献调查，系统整理了这个公式的历史引用情况和应用沿袭，然后整理成图，并给出[illegible]种证明方法，还将更新版的论文发表了。**

Eigenvectors from Eigenvalues: a survey of a basic identity in linear algebra

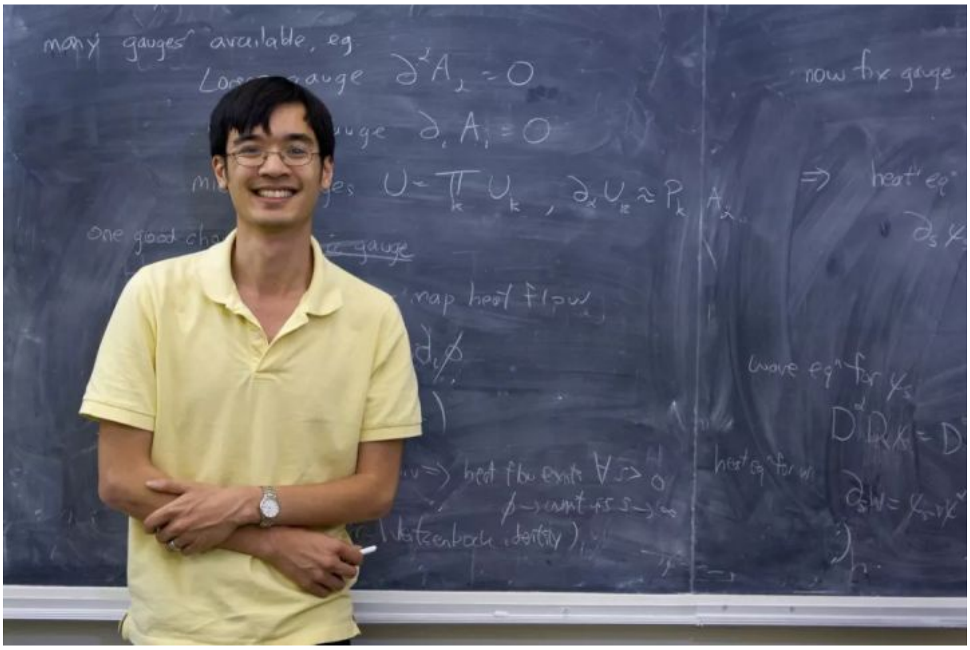
Peter B. Denton, Stephen J. Parke, Terence Tao, Xining Zhang

(Submitted on 10 Aug 2019 (v1), last revised 2 Dec 2019 (this version, v2))

第二篇论文地址：[illegible]

陶哲轩：确实不是我们首次发现，最早可追溯至[illegible]年

伴随这篇预印本论文的发表，陶哲轩更新了个人博客。文章表示，写第二篇文章是因为第一篇文章的所引发的争议，就是说这个恒等式早就有，他们不是第一次发现，还给出了更早的出处。**这篇文章基本可以视作一个文献调查，系统整理了这个式子的历史引用情况和应用沿袭，然后整理成图，并给出[illegible]种证明方法。**



陶哲轩

陶哲轩在这篇博客中也承认，写第一篇文章之前团队并不知道此恒等式之前曾在历史文献中多次出现。

Eigenvectors from Eigenvalues: a survey of a basic identity in linear algebra

3 December, 2019 in math.CO, math.HO, math.NA, math.RA, update | Tags: eigenvalues, eigenvectors, Peter Denton, Stephen Parke, Xining Zhang

Peter Denton, Stephen Parke, Xining Zhang, and I have just uploaded to the arXiv a completely rewritten version of our previous paper, now titled "Eigenvectors from Eigenvalues: a survey of a basic identity in linear algebra". This paper is now a survey of the various literature surrounding the following basic identity in linear algebra, which we propose to call the *eigenvector-eigenvalue identity*:

以下是陶哲轩博客内容：

ĒXmx̧Hk Xęmẻęn̉ģmXḤŰXęĒ ļáX、张西宁和我，将最近发表的一篇论文进行了补足，并完全重写，上传到了2ļŰḁ上。新文章的主要内容变为关于线性代数中特征值ά特征向量基本恒等式的一项。本文中的特征向量ά特征值恒等式的形式如下：

Theorem 1 (Eigenvector-eigenvalue identity) Let A be an $n \times n$ Hermitian matrix, with eigenvalues $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$. Let v_i be a unit eigenvector corresponding to the eigenvalue $\lambda_i(A)$, and let $v_{i,j}$ be the j^{th} component of v_i. Then

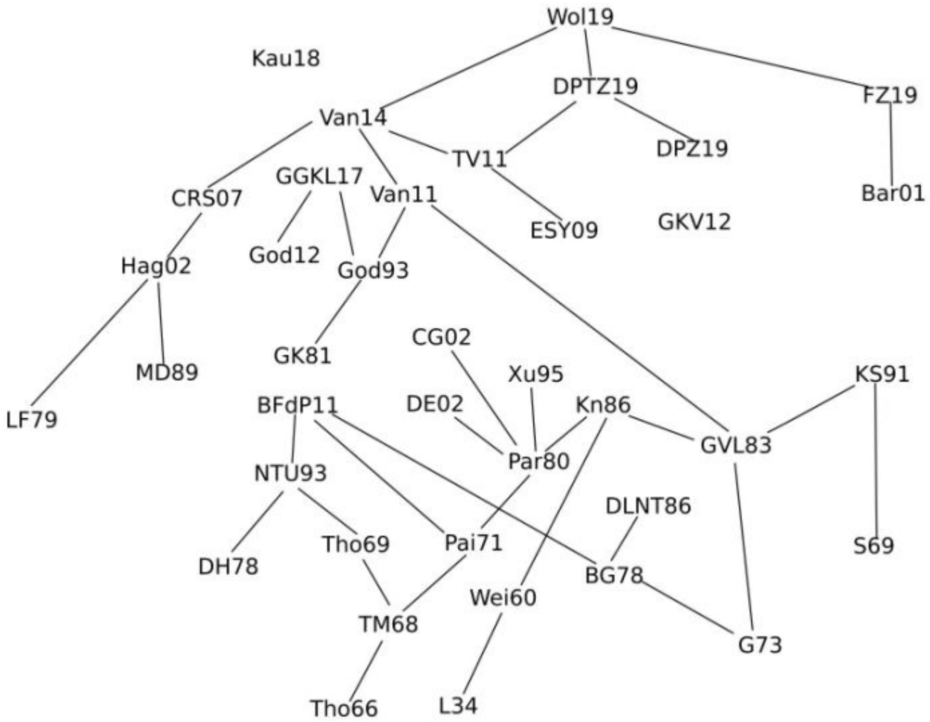
$$|v_{i,j}|^2 \prod_{k=1;k\neq i}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_k(A)) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j))$$

where M_j is the $n-1 \times n-1$ Hermitian matrix formed by deleting the j^{th} row and column from A.

我们几个月前发布的第一个比较简略的版本的论文时，我们并不知道这个恒等式在以前的文献中多次出现，过去我和其他研究人员的关于随机矩阵理论的论文中曾经使用过相关的恒等式，但就我们所知，这个恒等式似乎是新出现的。即使在几个月前，我们的第一篇论文发表之后到现在，我们也只在一篇其他论文中见到这个恒等式的引用。

随着上个月ĕő ęṁȟ nj ẆęX网站上发表了关于此恒等式论文的科普文章，情况发生了相当大的变化，在几周内，我们被告知（私人交流、在线讨论以及对我们的文章的参考文献的相关引文树的探索），之前的文献中，已有不止三处出现了这个恒等式，或某些其他与该式紧密相关的恒等式，包括数值线性代数，图论的各个方面（图重建，化学图论和图论），特征值反问题，随机矩阵论和中微子物理学等等。

因此，我们决定完全重写我们的文章，以整理这些信息，并调查这个恒等式出现的历史。目前，从全部已有证据（我们收集了七种不同的方法证明了这个恒等式（或其推广形式）），以及我们目前所知的对这个恒等式的所有应用来看，结果表明，临时众包工作所产生的文献引用图之间的联系非常薄弱，这一发现是非常令人惊讶的：



就我们目前所知，特征向量-特征值恒等式最早明确出现是在[illegible]年汤普森的一篇论文中，不过这篇论文只被引用了寥寥数次，其中还算上了间接引用。**而早在[illegible]年就出现勒夫纳恒等式实际上是该恒等式在限制条件下的一个特例。**

在这篇文章的最后，我们推测了一些可能的原因，分析了为什么在[illegible]年[illegible]月的[illegible]文章出炉之前，特征向量-特征值恒等式的知名度这么低，其传播是如此缓慢。

接下来，新智元将为大家解读陶哲轩和三位物理学家更新版的论文。

[illegible]种证明，陶哲轩等人更新版论文解读

摘要：假设2为一个[illegible]的厄米特矩阵，它的特征值为[illegible]。那么对应于特征值[illegible]的特征向量[illegible]它的第[illegible]个元素[illegible]是和2的子矩阵[illegible]（2去掉了第[illegible]行和第[illegible]列后的矩阵）有如下恒等关系：

$$|v_{i,j}|^2\prod_{k=1;k\neq i}^{n}(\lambda_i(A)-\lambda_k(A))=\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_i(A)-\lambda_k(M_j))\ .$$

(?)

这个恒等式就是 特征向量-特征值恒等式[illegible]。 这个恒等式因为此前文章火了，被当作新公式看待，但是在这篇综述里会说明，这个恒等式其实很早就被发现了（最早可追溯到[illegible]年）。文中给出了一系列的证据证明。

[illegible]部分

这部分重新详细的叙述了一遍摘要里这个恒等式的定理。过程如下：

定义好前设条件：

2为一个[illegible]的厄米特矩阵，它的特征值为[illegible]，为了更具体说明就按照常规给特征值升序排列：

$$\lambda_1(A)\leq\cdots\leq\lambda_n(A).$$

2的子矩阵[illegible]（2去掉[illegible]
式可以得到：

$$\lambda_i(A) \le \lambda_i(M_j) \le \lambda_{i+1}(A)$$

根据谱理论，总能找到与特征值 Ȁ ⱨ2ɪŋŋŋŋȦęⱨ2ɪ对应的这些特征向量ț ŋŋŋŋț ę的一组正交基。

下面正式提出讨论主题：

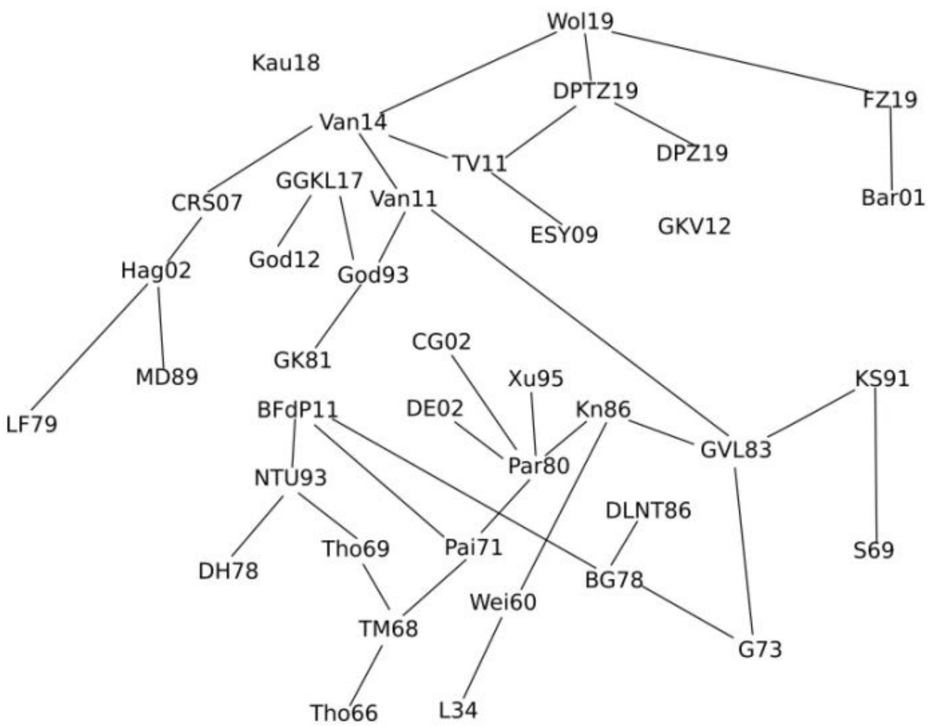
定理 ⱨ ǎŋXęț X⌊ṁḫďXǎŋXęț ȄXǎ Xęṁǖɪŋ特征向量ď特征值恒等式：

$$|v_{i,j}|^2 \prod_{k=1;k\neq i}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_k(A)) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j)) \ .$$

还可以有另一种写法：

$$|v_{i,j}|^2 p'_A(\lambda_i(A)) = p_{M_j}(\lambda_i(A)).$$

接下来引入正题，介绍ț ǎŋXęț X⌊ṁḫďXǎŋXęț ȄXǎ Xęṁǖ 这个恒等式有非常复杂的惊人历史，在二十多个参考文献中以各种形式出现，并在数字线性代数、随机矩阵理论、特征值反问题、图论、和中微子物理学领域被独立的重新发现了 次。见图 'H



虽然这个恒等式对于一些数学领域来说相当熟悉，但它不像线性代数的其他恒等式那样广为人知，例如克拉默法则，柯西行列式公式等。虽然它在一些论文中被发现而被引用了几次，但随后的工作中只有非常弱的引用关系，特别从上面关系图中可以看出，**许多引用来自最早的工作，但是没有传播到后面的工作了，而是又作为新的恒等式重新被发现**。并且，在许多情况下，这个恒等式并没有被强调特征向量和特征值之间的关系，而是作为一种工具的引入，辅助其他的应用了。

另外，**在不同文献中所使用的符号从外观上也有很大的差异，这使得在检索过程中很难看到它的出现**。现在由于上篇文章被广泛宣传之后，我们收到大量相关通知，在许多地方发现了这个恒等式或跟它密切相关的地方，这是我们把这些引用整理在一起的一个初衷。并且为此做了大量的工作，找到了这个恒等式的各种外观不同的表达形式，并提供了相关证明。

ŋ恒等式的证明

ŋ ķŪX Ì Ǻnj ṁX ḤḦ” Nǘ伴随证明。利用伴随矩阵进行证明：

设2 是ę˝lę的矩阵，其伴

$$\mathrm{adj}(A) := \left((-1)^{i+j}\det(M_{ji})\right)_{1\le i,j\le n}$$

（? ）

Î Å还是2出去第Å行第Ä列的子矩阵。根据bḤHň XḤ法则，则有：

$$\mathrm{adj}(A)A = A\mathrm{adj}(A) = \det(A)I_n.$$

如果2是对角阵，则伴随矩阵也是对角阵。更通用的，如果2是正规矩阵，对角化后可以写成：

$$A = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)v_iv_i^*$$

的形式。则其伴随矩阵就可以写成如下形式：

$$\mathrm{adj}(A) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{k=1;k\neq i}^{n}\lambda_k(A)\Big)v_iv_i^*.$$

这时候，用ÀḁE”I 2 代替2代入上式，则有：

$$\mathrm{adj}(\lambda I_n - A) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{k=1;k\neq i}^{n}(\lambda-\lambda_k(A))\Big)v_iv_i^*.$$

这时候，我们另

$$\lambda = \lambda_i(A)$$

再代入上式，消去右边连乘，可得到

$$\mathrm{adj}(\lambda_i(A)I_n - A) = \Big(\prod_{k=1;k\neq i}^{n}(\lambda_i(A)-\lambda_k(A))\Big)v_iv_i^*.$$

这是很根据（? ）式，用2的子矩阵Î 代替2，则可得

$$\det(\lambda_i(A)I_{n-1} - M_j) = \Big(\prod_{k=1;k\neq i}^{n}(\lambda_i(A)-\lambda_k(A))\Big)|v_{i,j}|^2$$

而这个等式结果是和特征向量ǘ特征值恒等式是等效的。因此，可证。

6 ῃ ḲŰX bḤHň XḤḲĖḤó ÏX ḤḤ” N克莱默规则证明

现在回到厄米特矩阵的情况，根据克莱默法则，我们给出一个 特征向量ǘ特征值恒等式 的一个变体的证明。要证明这个恒等式，等价于证明厄米特矩阵2有简单的谱（所有特征值都有重复性），或者等价于证明

$$\lambda_1(A) < \lambda_2(A) < \cdots < \lambda_n(A).$$

因为任何一个具有重复特征值的厄米特矩阵都可以用一个简单谱的厄米特矩阵来无限逼近。

与之前一样，对2进行对角化。对于任意不等于特征值的À， 可以分解成如下形式：

$$(\lambda I_n - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i v_i^*}{\lambda - \lambda_i(A)}.$$

根据克莱默法则抽去2矩阵的第Å行第Å列，可以得到如下等式：

$$\frac{\det(\lambda I_{n-1} - M_j)}{\det(\lambda I_n - A)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|v_{i,j}|^2}{\lambda - \lambda_i(A)}$$

用特征值表示的话就等同于：

$$\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda - \lambda_k(M_j))}{\prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k(A))} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|v_{i,j}|^2}{\lambda - \lambda_i(A)}.$$

两边都是关于 Å的式子，可以对上式进行化简得到：

$$\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j))}{\prod_{k=1:k\neq i}^{n}(\lambda_i(A) - \lambda_k(A))} = |v_{i,j}|^2$$

这个表达是和特征向量ǘ特征值恒等式是等价的。

⁶ ή b” ” ḨI ȃȩ mẊǘŅẊX ḤḤ” Ŋ无坐标证明

该部分证明尽可能避免使用坐标或者矩阵。

ɨ引理ʆ：无坐标特征向量ǘ特征值恒等式。设Ķ是消除了单位向量ţ 的自伴随线型图。对于每个单位向量ŅJ 令

$$\Delta_T(f)$$

为二次型Ţ 的行列式，在

$$f^{\perp} := \{w \in \mathbb{C}^n : (f, w)_{\mathbb{C}^n} = 0\}$$

的约束条件下，有

$$|(v, f)_{\mathbb{C}^n}|^2 \Delta_T(v) = \Delta_T(f)$$

成立。

证明该引理即等同于证明了特征向量ǘ特征值恒等式。

⁶ ή ĒḤ” Ŋǿķȃęnj ḤẊḤǿḤ mȃX ę Ȅķȃ 使用摄动分析证明

该证明方法最早出现在⁵ⁿ ⁾ ⁿ 年的一篇文献里。

假设2有简单的特征值，设ï 为极小参数，考虑2的第一扰动量

$$A + \varepsilon e_j e_j^*$$

，其中X⁵ ήήήήXȩ为标准差，根据辅因子扩展和ȂĢKĖ˙ kńbĶÆÔ定理⁵ 中的恒等式另一种表示方法，则这个扰动的特征多项

$$p_{A+\varepsilon e_j e_j^*}(\lambda)$$

可以扩写为：

$$p_{A+\varepsilon e_j e_j^*}(\lambda) = p_A(\lambda) - \varepsilon p_{M_j}(\lambda) + O(\varepsilon^2).$$

另一方面，扰动的特征值同样可以扩写为下面的形式：

$$\lambda_i(A + \varepsilon e_j e_j^*) = \lambda_i(A) + \varepsilon |v_{i,j}|^2 + O(\varepsilon^2).$$

如果我们进行泰勒级数展开，则可以得到：

$$p_{A+\varepsilon e_j e_j^*}(\lambda_i(A + \varepsilon e_j e_j^*)) = 0$$

通过把中的线性项提到外面，我们可以得到：

$$\varepsilon |v_{i,j}|^2 p'_A(\lambda_i(A)) - \varepsilon p_{M_j}(\lambda_i(A)) = 0$$

根据定理5的其他数学表述形式可知，恒等式成立。

6 ŋ̂ ĒḨ ” Nǿķǟęnj b ǿ\Ṻǘά^ǟęXmṻḢ.X ŇǇħ ǿȄ 使用b ǿ\Ṻǘά^ǟęXm类型公式进行证明

ɨ引理：b ǿ\Ṻǘά^ǟęXm类型公式ʃ对于一个厄米特矩阵2，2有一个特征值为0 ŋ那么，对于任意ę˝lęά的矩阵^，有下式成立：

$$\det(B^* A B) = (-1)^{n-1} p'_A(0) \left|\det\begin{pmatrix} B & v_i \end{pmatrix}\right|^2$$

当特征向量刚好为单位向量的时候，我们可以把2写成块矩阵形式：

$$A = \begin{pmatrix} M_n & 0_{n-1\times 1} \\ 0_{1\times n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

那对于^则可以写成

$$B = \begin{pmatrix} B' \\ x^* \end{pmatrix}$$

的形式，^˝是ęά ǘęά的矩阵，Ǘ维度为ęά。这样我们可以计算出下式：

$$\det(B^* A B) = \det((B')^* M_n B') = \det(M_n)|\det(B')|^2$$

and

$$\det\begin{pmatrix} B & v_i \end{pmatrix} = \det(B').$$

通过上面6 ŋ̂ 中提示，对2 ^矩阵进行对角化，因此可以用ʅ ! ʅ 代替2，用ń ^代替^，

根据上面

$$B = \begin{pmatrix} 0_{1\times n-1} \\ I_{n-1} \end{pmatrix}$$

引理代入，则可以得到：

$$\det(B^*AB) = \det(M_1) = (-1)^{n-1}p_{M_1}(0)$$

and

$$\det\begin{pmatrix}B & v_i\end{pmatrix} = v_{i,1}.$$

这样，通过引理我们可以得到 定理⁵ 的另一种表达形式得证，因此定理⁵ 也就得证。

⁶ ῃ ËḤ” Nốķąęnj ę ȅXḩę mX XǗḤXķķẳ ę ŇḤXǡjXęţ X⁅mḤ⁅” ȟ Ḥ’ ęXęmȟ nįęǎőI Xķ对特征向量分量幅度使用替代表达式进行证明

ɨ引理：ţ ãῃ的替代表达ʃ 2是一个厄米特矩阵，写成块矩阵形式如下所示：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & X^* \\ X & M_1 \end{pmatrix}$$

假设 Ảǟ2ı不在Î ⁵的特征值之中，则有如下等式成立：

$$|v_{i,1}|^2 = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n-1} X^*(\lambda_i(A)I_{n-1}-M_1)^{-2}X}.$$

该引理在随机矩阵理论中非常有用。

该方法的证明过程用到定理⁵ 特征向量ǿ特征值恒等式的两个特性：排列对称性和平移对称性。通过比较定理⁵ 的第二种表达形式和上面引理相比较，可以简化建立成等式：

$$p'_A(0) = p_{M_1}(0)(1+X^*M_1^{-2}X).$$

对于任意不等于Î ⁵特征值的Ả，对下面矩阵应用舒尔互补法则，

$$\lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -X^* \\ -X & \lambda I_{n-1} - M_1 \end{pmatrix}$$

则可以得到：

$$\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_{n-1} - M_1)(\lambda - a_{11} - X^*(\lambda I_{n-1} - M_1)^{-1}X)$$

使用Ḥ2 （⁰ ）'I⁰ 在Ả'I⁰ 处对上式进行泰勒展开，得到

$$p'_A(0)\lambda + O(\lambda^2) = (p_{M_1}(0)+O(\lambda))(\lambda - a_{11} + X^*M_1^{-1}X + \lambda X^*M_1^{-2}X + O(\lambda^2)).$$

设置Ả'I⁰ 代入，则上式中

$$a_{11} + X^*M_1^{-1}X$$

项消失，然后再提取Ả系数，则可得到结论。

⁶ ῃ 一个概括。下面关于特征向量ǿ特征值恒等式的概括来自ṁęnjǚőȟąęnį的观察。

ɨ主张：广义的特征向量ǿ特征值恒等式ʃ 对于一个正规矩阵2，对角化为：

$$A = UDU^*$$

令

，则有下式成立：

$$\overline{\det M_{J^c,I^c}(U)}(\det M_{K^c,I^c}(U))\prod_{i\in I,j\in I^c}(\lambda_j-\lambda_i)=\det M_{J,K}(\prod_{i\in I}(A-\lambda_i I_n))$$

证明：

根据上述可得：

$$\prod_{i\in I}(A-\lambda_i I_n)=U\prod_{i\in I}(D-\lambda_i I_n)U^*$$

根据柯西比内公式可得：

$$\det M_{J,K}(\prod_{i\in I}(A-\lambda_i I_n))=\sum_{L,L'}(\det M_{J,L}(U))(\det M_{L,L'}(\prod_{i\in I}(D-\lambda_i I_n)))(\det M_{L',K}(U^*))$$

经过计算得知，

$$\det M_{L,L'}(\prod_{i\in I}(D-\lambda_i I_n))$$

项会消去，除非‡'l‡''E/E 而这种情况下，数量就等于

$$\prod_{i\in I,j\in I^c}(\lambda_j-\lambda_i).$$

这样，就得到：

$$\overline{\det M_{J^c,I^c}(U)}(\det M_{K^c,I^c}(U))=\det M_{J,I}(U)\det M_{I,K}(U^*).$$

由于

$$\det M_{I,K}(U^*)=\overline{\det M_{K,I}(U)},$$

这就足以证明：

$$\det M_{J,I}(U)=\overline{\det M_{J^c,I^c}(U)}\det U$$

如果我们把矩阵Aȩ拆成左右两部分，左边ȟ 列等于：

$$I_n^1:=\begin{pmatrix}I_m\\0_{n-m\times m}\end{pmatrix}$$

，和右边ȩőȟ 列

$$I_n^2:=\begin{pmatrix}0_{m\times n-m}\\I_{n-m}\end{pmatrix}$$

，然后求等式两边的行列式可得：

$$U\begin{pmatrix}U^*I_n^1 & I_n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n^1 & UI_n^2\end{pmatrix}$$

进而可得：

7 ῆ恒等式的历史

这一节中，按照大致的时间顺序给出我们所知道的关于特征向量ǘ特征值恒等式的参考文献。我们将在这些参考文献中找出同一性，以突出这中同一性出现的上下文和符号的多样性。（详见论文）

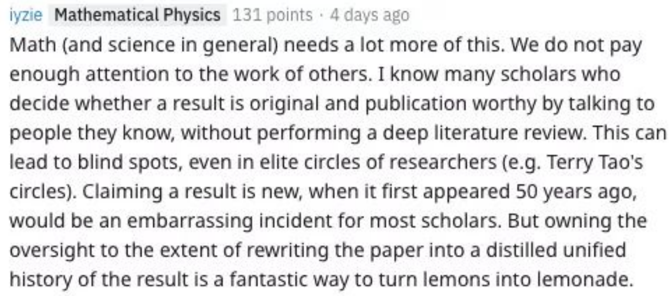
8 ῆ总结

从图5 中可以看出，在一些数学社区中，特征向量ǘ特征值的同一性被部分传播，以至于其中一些社区将其视为ῆ民俗学ῆ。但是，此过程无法提高对这种恒等式的更广泛的了解，导致引人注目的现象是：多个引用树从独立的根源萌芽，并且彼此之间只有松散的交互作用。例如，如上一节所述，在发布我们自己的预印本之后的两个月里，尽管进行了一些在线讨论和数十份关于恒等式的文件的考查，但是对流行科学文章的回应才使对恒等式的认识最终ῆ传播开ῆ，从而有效地进行了一项临时的众包工作，以收集文献中所有先前提及的恒等式。

我们尚不清楚如何最好地将作者权归属于特征向量特征值恒等式。最早包含隐含恒等式的参考文献是由ț” ŢẹẊḤ提出的，但含义并不直接，该参考文献仅对随后的文献产生了适度的影响。汤普森的论文是我们所知道的第一个显露恒等式的地方，并且它通过引文传播到文献中的其他几篇论文中；但这并不能阻止其后再次独立发现该恒等式。此外，我们不能保证在文献中甚至更早的地方已经出现了这种形式的某种形式。我们基于恒等式的描述性，提出ῆ本征向量ǘ本征值恒等式ῆ这个名称，希望这个词可以被研究者通过搜索引擎发现以寻找这种形式的恒等式。

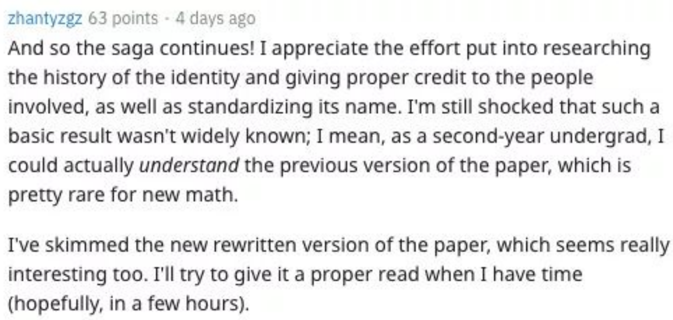
网友热议：传奇还在继续，我认为这是最近数学上最酷的事情之一

陶哲轩等人发表的这篇新论文引发了ḤẊl ǎ网友的热议，下面摘取部分评论和大家分享：


iyzie Mathematical Physics 131 points · 4 days ago

Math (and science in general) needs a lot more of this. We do not pay enough attention to the work of others. I know many scholars who decide whether a result is original and publication worthy by talking to people they know, without performing a deep literature review. This can lead to blind spots, even in elite circles of researchers (e.g. Terry Tao's circles). Claiming a result is new, when it first appeared 50 years ago, would be an embarrassing incident for most scholars. But owning the oversight to the extent of rewriting the paper into a distilled unified history of the result is a fantastic way to turn lemons into lemonade.

ῆ数学（以及一般科学）需要更多这样的东西。我们对他人的工作没有给予足够的重视。我认识许多学者，他们通过与他们认识的人交谈，而不进行深入的文献ḤẊ ǎŢ，来决定一个结果是否具有原创性和出版价值。即使在研究人员的精英圈子中（例如陶哲轩的圈子），这也可能导致盲点。宣称一个结果是新的，当它在+ 0 年前首次出现时，对大多数学者来说是一个尴尬的事件。但是，如果你能把这篇论文改写成一部经过提炼的历史综述，那将是把柠檬变成柠檬水的一个极好的方法。ῆ

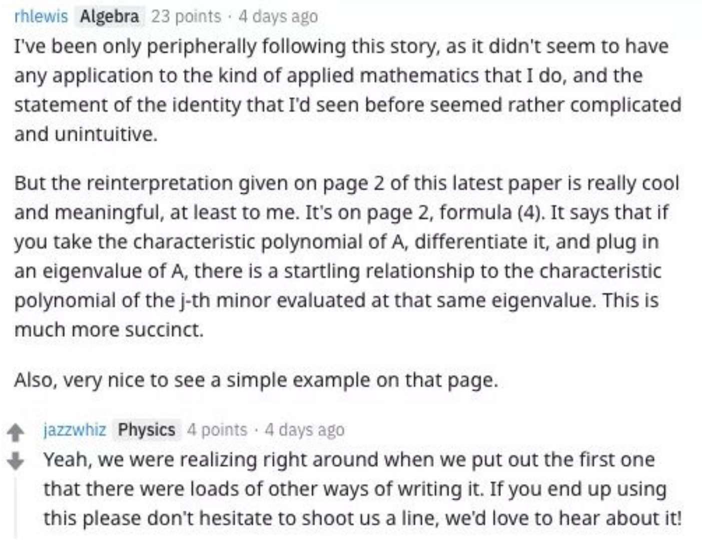

zhantyzgz 63 points · 4 days ago

And so the saga continues! I appreciate the effort put into researching the history of the identity and giving proper credit to the people involved, as well as standardizing its name. I'm still shocked that such a basic result wasn't widely known; I mean, as a second-year undergrad, I could actually *understand* the previous version of the paper, which is pretty rare for new math.

I've skimmed the new rewritten version of the paper, which seems really interesting too. I'll try to give it a proper read when I have time (hopefully, in a few hours).

ῆ所以传奇还在继续！我很欣赏作者对于历史的研究、对相关人员给予适当赞扬以及使名称标准化所做的努力。我仍然感到震惊的是，这样一个基本的结果并没有广为人知；我的意思是，作为大学二年级的学生，我实际上可以理解之前的论文版本，这对于新数学来说是相当罕见的。

我略读了这篇论文的新改写版本，它看起来也很有趣。我会尽量在有时间的时候（希望在几个小时内）好好读一读。ῆ



rhlewis Algebra 23 points · 4 days ago

I've been only peripherally following this story, as it didn't seem to have any application to the kind of applied mathematics that I do, and the statement of the identity that I'd seen before seemed rather complicated and unintuitive.

But the reinterpretation given on page 2 of this latest paper is really cool and meaningful, at least to me. It's on page 2, formula (4). It says that if you take the characteristic polynomial of A, differentiate it, and plug in an eigenvalue of A, there is a startling relationship to the characteristic polynomial of the j-th minor evaluated at that same eigenvalue. This is much more succinct.

Also, very nice to see a simple example on that page.

jazzwhiz Physics 4 points · 4 days ago

Yeah, we were realizing right around when we put out the first one that there were loads of other ways of writing it. If you end up using this please don't hesitate to shoot us a line, we'd love to hear about it!

ή我没太关注这个故事，因为它似乎对我所做的那种应用数学没有任何应用，而我以前见过的关于恒等式的陈述似乎相当复杂且不直观。但是，至少对我来说，这份最新论文的第6 页上的重新解释确实很酷且有意义。比如第6 页上的公式（8）。ή

doughishere 6 points · 4 days ago

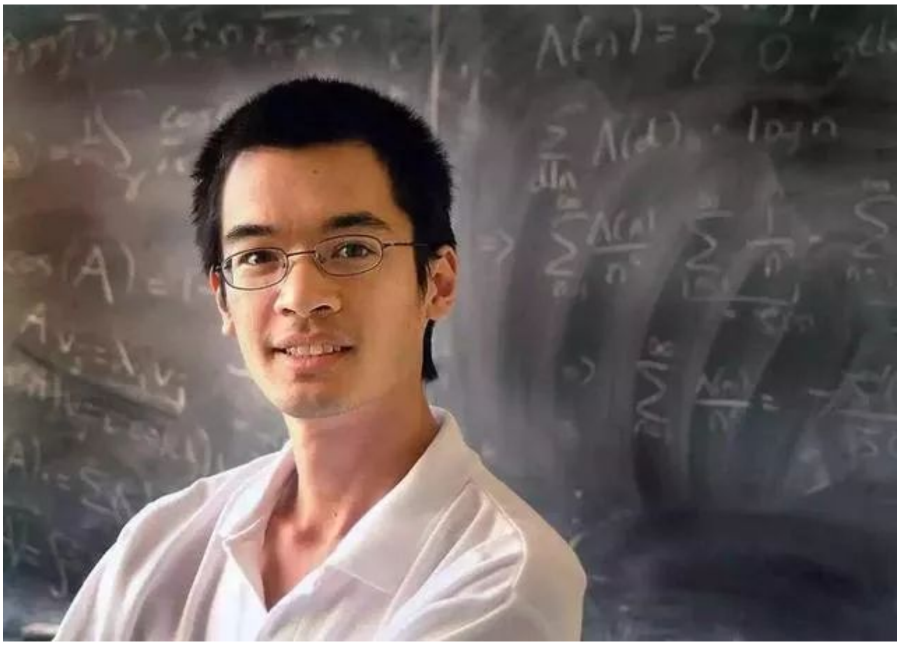
I think this is one of the coolest things in math lately.

我认为这是最近数学上最酷的事情之一。

陶哲轩是谁？(岁自学微积分，75 岁斩获ή菲尔兹ή奖

陶哲轩，就是那个传说中的ή别人家的小孩ή:

”A(岁：自学微积分并出版一本关于^ ką程序计算完全数的书；
”A) 岁：参加ş2Ķ数学测试得了(-0 分的高分（)00 分为满分）；
”A50 岁、55岁、56 岁：参加国际数学奥林匹克竞赛，分别获铜牌、银牌、金牌，年级最小奥赛金牌获得者，该记录一直保持至今；
”A58 岁：正式进入弗林德斯大学就读；
”A5- 岁：获得该校荣誉理科学位，仅一年后就取得了硕士学位；
”A5(岁：进入普林斯顿大学就读；
”A65岁：获得该校博士学位；
”A68 岁：被加利福尼亚大学洛杉矶分校聘为正教授，成为该校有史以来最年轻的正教授；
”A600- 年：获得麦克阿瑟基金天才奖和数学界的诺贝尔奖ή菲尔兹ή奖；
”A600) 年：获得美国国家科学基金会（Ôşô）的艾伦沃特曼奖。



陶哲轩

著名数学家格罗斯教授曾表示：陶哲轩的智商介于6 6 0 至6 7 0 之间，Æ达到6 7 0，远超爱因斯坦、牛顿、霍金。

对于陶哲轩和三位物理学家深挖公式的前世今生后重新发表论文，你怎么看？

博客地址：

mXHűm” ñ” HHXkkñ” h ıñ

发布于 6 0 5 n ἇ6 ἇ0

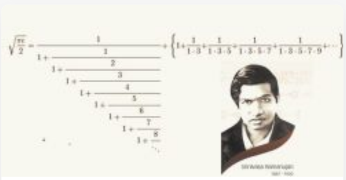
数学史 数学 数学家

文章被以下专栏收录

新智元
新智元重点关注人工智能、机器人等前沿领域发展，关注人机融合、人工智能和机器'H

关注专栏

推荐阅读



谷歌造出拉马努金机：几毫秒求解数学常数，无需任何先验信息

量子位

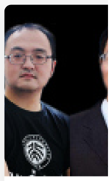
费马大定理证明过程 – 费马版

话说皮皮马ά费马老爷子有一天在看书研究直角三角形ά余弦定理就是这么个玩意，皮皮马一看公式突然灵光一闪 他又翻出了推导过程 Xň ň ň ň ň ň 皮皮马要搞事情 他觉得这个东西看起来非常的神奇，为什'H

邹海豹

+ 5 年被发现n 次，陶哲轩证明的公式成了重复造轮子？事情并'H

量子位 发表于量子位



北大数学 玮、张伟

新智元

▲ 赞同 + 6 ▼ 条评论 分享 收藏 ···

(条评论 切换为时间排序

写下你的评论...

一念永安 5 个月前
数学上会有很多这种等价公式，所以怎么做能够确认一个公式是不是已经被人发现过了？
5

帅性某 回复 一念永安 5 个月前
逆否命题不成立就是新的公式吧

5

蓝色幻灭 回复 一念永安 6 n 天前
我认为要看使用频率
赞

普通工人 5 个月前
媒体在宣传陶的时候从来都拿他的智商履历奖项说事，但是几乎不提他的成就，为什么？
赞

云横 回复 普通工人 5 个月前
直观一些提到过，剩下的媒体理解不了，写出来也没几个看得懂
+

Eą̃ H” 回复 普通工人 5) 天前
道理跟媒体不宣传杨振宁的成就是一样的，普通人根本就看不懂，这样做的坏处就是不少脑子缺筋的人都认为杨振宁、陶哲轩这些很垃圾
6

食野蒿 5 (天前
我已经膨胀到点开这篇文章了'HH (
赞

赞同 + 6 ▼ (条评论 分享 收藏 ···