【国际数学竞赛】鸽笼原理

双木止月...
上海大学 运筹学与控制论硕士

有些论断看似没有道理，比如"一个班级里肯定有两个人生日在同一个月份"、"世界上肯定有两个人头发数一样多"等等，但是仔细一想还真是对的。

> 注：人类的头发根据种族和发色的不同，数量略有不同，最多在12万根左右；目前世界上的总人口超过了74亿；

再举一个例子，现在有十只鸽子但只有九个笼子，那么必定有一个笼子里至少有两只鸽子。因为九个鸽子先各占一个笼子，那么第十只就只能和其他鸽子挤挤了。

而上述看似显然的一个结论就是"鸽笼原理"(The Pigeonhole Principle)，也叫"抽屉原理"。

The Pigeonhole Principle

If $n+1$ or more pigeons are placed in n holes, then one hole must contain two or more pigeons.

> 如果有 $n+1$ 只或者更多的鸽子，而只有 n 个笼子，那么必定有一只笼子中至少有2只鸽子。

The extended version of the Pigeonhole Principle

If k objects are placed in n boxes then at least one box must hold at least $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ objects. Here $\lceil \cdot \rceil$ denotes the ceiling functio

> 上整函数，不小于该值的最小整数。

不要小看这个原理，感觉就是说了一句废话，但运用到某些竞赛题中会有四两拨千斤的作用。

下面我们通过竞赛题来实战一下，比如第一题2016AMC10A的第20题

Problem 4-2006 AMC 10A Problem 20

Six distinct positive integers are randomly chosen between 1 and 2006, inclusive. What is the probability that some pair of these integers has a difference that is a multiple of 5?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) 1

> 题意：从1到2006中随机取出6个数(包括1和2006), 问其中存在一对数的差是5的倍数的概率是多少?

首先这是一道概率题，按照古典概型的做法我们要先搞清楚样本空间，数数样本总数，这个比较简单 $\binom{2016}{6}$,但是满足要求的样本有多少个呢？这是一个问题，搞清楚了那么概率也就算出来了。

不过这道题有点不一样，不是这个套路了。下面我们证明一下随机选出来的6个数必定有一对数，它们的差值是5的倍数。（有点不按套路出牌）

> 证：因为一个数被5除，剩下的余数只有5种 $\{0,1,2,3,4\}$ ，如果随机取6个数，必定有两个数的余数相同， $5k_1+r,5k_2+r,r\in\{0,1,2,3,4\}$ 。所以，必定存在一对数，它们的差是5的倍数， $5|5(k_1-k_2)$ 。因此，概率为1，这是必然事件。

类似的，还有下题

Prove that having 100 whole numbers, one can choose 15 of them so that the difference of any two is divisible by 7.

> 题意:证明从100个整数中任意挑选15个数，其中必定存在一组数使任意一对数的差都是7的倍数。

感谢yyx和xielhy890指正。

与上题不同，这是是一道证明题，但是做法是类似的。

> 证：被7除的于是有 $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 7种情况，那么把100个数放入到这7个"笼子"中，根据鸽笼原理可知，必定有一个"笼子"中至少有 $\left\lceil\frac{100}{7}\right\rceil=15$ 个数，得证。

鸽笼原理对于解决存在性、任意性的问题是一把好手，解题的关键是构造笼子，这也是此类问题的难点。在此基础上更难的题型是，答案需要你自己去猜，然后再证明，往往是问满足条件的最小值是多少。

如下题

Problem 9-2001-USAMO-1

Each of eight boxes contains six balls. Each ball has been colored with one of n colors, such that no two balls in the same box are the same color, and no two colors occur together in more than one box. Determine, with justification, the smallest integer n for which this is possible.

> 题意：一共有8各箱子，每个箱子装了6个球。每个球从 n 种颜色中挑一种着色，要求每个箱子中球的颜色各不相同，两种不同颜色的球在一起最多一次。问最少需要多少种颜色的球?

根据题意 $n=48$ 肯定是满足的，每个球的颜色都不相同，但这肯定不是最少的，所以我们要先猜去这个最小的 n ,并且要说明比这个小的都不能满足要求。

> 证：首先说明 $n=23$ 是可行的，我们可以给出如下的着色方法：

1	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16
2	7	12	17	18	19
3	8	13	17	20	21
4	9	14	17	22	23
5	10	15	18	20	22
6	11	16	19	21	23

> 其中每一行代表一个箱子，每一列代表一个球，数字代表一种颜色；
> 下面证明 $n \leq 22$ 是不可能满足题意的。
> （1）如果有一种颜色的球在5个或者更多的箱子中出现，那么必须要有 $n \geq 5 \cdot 5 + 1 = 26$ 种颜色，矛盾；
> （2）如果有一种颜色的球在4个或者更多的箱子中出现，那么前4个箱子中一定含有 $5 \cdot 4 + 1 = 21$ 种颜色。

1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16
1	17	18	19	20	21

那么在第5个箱子中6个球可以从前4个箱子中挑4中颜色的球，但是剩下的两个必须要与前面21种颜色不同，所以至少需要23种颜色，矛盾；

> （3）那么根据鸽笼原理一定有一种颜色的球出现在3个不同的箱子中(48个鸽子到22个笼子中)不妨假设颜色1出现在了3个箱子中，那么这三个箱子的颜色分别为

1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16

1	2	3	4	5	6
1	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16
2	7	12			
3	8	13			
4	9	14			
5	10	15			
6	11	16			

> 于是我们还剩下22-16=6种颜色把15个球着色。与前面的分析类似，首先肯定不能有一种颜色的球出现在3个或者更多的箱子中，因为这样就需要 $1+2\cdot 3=7$ 种颜色，矛盾；于是就只能有1种颜色的球出现在2个箱子中，而剩下的两只箱子里面的球可以按照下图进行着色

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
2	**7**	**12**	17	18	19
3	**8**	**13**	17	20	21
4	**9**	**14**	18	20	
5	**10**	**15**	19	21	
6	**11**	**16**			

> 到这里，可以发现至少需要 23 种颜色，这与 $n\leq 22$ 矛盾。
> 综上所述，最少的 n 为23。

Question

At a party of six people either there are three mutual acquaintances or there are three mutual strangers?

答案是肯定的，任意六个人中，必定存在三个人相互认识或三个人相互不认识。这其实就是 Ramsey number， $R(3,3)=6$ ，可以利用鸽笼原理证明。

鸽笼原理一般应用在一些证明题中，特别是**存在性的证明**，在竞赛选择题中就出现比较少了，毕竟选择题只需要一个答案就够了。至于难点，前面也提到了，如何巧妙地构造笼子就要靠本事了。

一己拙见，欢迎大家一起交流讨论~~

想了解更多国际数学竞赛及课程，可参阅：

双木止月Tong：国际数学竞赛及课程
zhuanlan.zhihu.com

微信订阅号：数你好看

编辑于 2019-07-30

14岁"封神"，保送北大清华,信息学、数学竞赛双金牌和打败...
起跑线

使得对任意 x,y\in R ,均满足: f(f(x)f(y))+f(x+y)=f(xy) .(2017IMO p2)第一感觉想必是先猜一波常值，然后很容易猜到 f(x)=0 是一根要不要尝试一下找零...

philos

9 条评论

⇄ 切换为时间排序

写下你的评论...

想过奋不顾身 6 个月前

难道只有我一直学的是抽屉原理么？👀 👀

赞

双木止月Tong (作者) 回复 **想过奋不顾身** 6 个月前

[捂嘴]都一样

赞

想过奋不顾身 回复 **双木止月Tong** (作者) 6 个月前

哈哈哈

赞

乔子洋 6 个月前

大神，竞赛书上看到的第二型抽屉原理公式看懂了，但不会用啊。。。

赞

双木止月Tong (作者) 回复 **乔子洋** 6 个月前

并不是大神[飙泪笑]确实，这个原理看着很容易，别人一讲就会，但自己真正运用就是另外一回事了。

赞

yyx 6 个月前

1

xielhy890 回复 yyx 6 个月前

翻译有误，应该是“证明从100个整数中任意挑选15个数，其中必定存在一组数使任意一对数的差都是7的倍数。”我一开始和你一样有这个误解，原题里有个any。

1

双木止月Tong (作者) 回复 xielhy890 6 个月前

感谢指正

赞

小涯 1 个月前

老师好～想问下猜23这个答案的时候应该如何思考呀～

赞