$$ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0$$

$$\{a,b,c\}=\{r,s\}$$

一道一元二次方程好题

双木止月...
上海大学 运筹学与控制论硕士

2019-AMC12B-21（2019年美国数学竞赛AMC12B卷第21题）

Problem

How many quadratic polynomials with real coefficients are there such that the set of roots equals the set of coefficients? (For clarification: If the polynomial is $ax^2+bx+c, a\neq 0$, and the roots are r and s, then the requirement is that $\{a,b,c\}=\{r,s\}$.)

$\textbf{(A)}\ 3 \qquad \textbf{(B)}\ 4 \qquad \textbf{(C)}\ 5 \qquad \textbf{(D)}\ 6 \qquad \textbf{(E)}\ \text{infinitely many}$

> 题意：请问有多少一元二次方程 $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ ，其系数 a,b,c 所组成的集合与其根 r,s 所组成的集合相等， $\{a,b,c\}=\{r,s\}$ ？

【详细解答】

如果 $r=s$ ，那么 $a=b=c$ ，于是

$ax^2+ax+a=0\Rightarrow x^2+x+1=0$ ，

$\Delta=1^2-4=-3<0$ ，无实数根。

因此，**接下去考虑** $r\neq s$ **的三种情况**：

Case 1: $a=b=r, c=s\neq r$

根据韦达定理可知：

$$\begin{cases} r+s=-\frac{r}{r}=-1 \\ rs=\frac{s}{r} \end{cases}$$

$$(r^2-1)s=0$$

(1.1) $s=0, r=-1, x^2+x=0, x(x+1)=0$ 符合；

(1.2) $r=1, s=-2, x^2+x-2=0, (x-1)(x+2)=0$ 符合；

(1.3) $r=-1, s=0, x^2+x=0, x(x+1)=0$,与1.1相同。

Case 1有两种符合题意。

Case 2： $a=c=r, b=s\neq r$

方程为 $rx^2+sx+r=0$

根据韦达定理可知：

$$\begin{cases} r+s=-\frac{s}{r} \\ rs=\frac{r}{r}=1 \end{cases}$$

易知 $r=\dfrac{1}{s}$ 带入，可得方程 $s^3+s^2+1=0$

> 注：这里我们只需要知道上述一元三次方程有多少实数根，而不需要知道具体值是多少，下面用两种方法来判断实根个数。

方法一：求导

$$f(x)=x^3+x^2+1$$

$$f'(x)=3x^2+2x=x(3x+2)=0 \Rightarrow x=0, x=-\frac{2}{3}$$

$f''(x)=6x+2$,利用一阶导与二阶导判断极值，

$$f''(0)>0, f''(-\frac{2}{3})<0$$

$f(0) > 0, f(-\frac{2}{3}) > 0$

因此 $f(x)$ 在 $x \in \mathrm{R}$ 只有一个负根。

方法二：Descartes' Rule of Sign

***Descartes' Rule of Sign**

If $p(x)$ is a polynomial with real coefficients, then

1. the number of positive real zeros of $p(x)$ is either equal to the number of variations in sign of $p(x)$ or less than this by an even number.
2. the number of negative real zeros of $p(x)$ is either equal to the number of variations in sign of $p(-x)$ or less than this by an even number.

$f(x) = x^3 + x^2 + 1$,符号变化为0，所以没有正根；

$f(-x) = -x^3 + x^2 + 1$ ，有一个符号变化，所以有一个负根。

因此 $f(x)$ 在 $x \in \mathrm{R}$ 只有一个负根。

Case2有一种符合要求。

Case 3： $a = r, b = c = s \neq r$

于是方程为 $rx^2 + sx + s = 0$

根据韦达定理可知：

$$\begin{cases} r + s = -\frac{s}{r} \\ rs = \frac{s}{r} \end{cases}$$

于是 $(r^2 - 1)s = 0$

（3.1） $s = 0, r = 0$ 不符合；

（3.2） $r = 1, s = -\frac{1}{2}, x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0,$

（3.3） $r=-1,-1+s=s\Rightarrow -1=0$，矛盾，不符合。

Case 3中有一种符合要求。

综上所述，一共有 $\boxed{4}$ 个一元二次方程满足要求。 $\square$

刚看到这道题感觉还很新奇，思路也很顺，先分类讨论，再用韦达定理，其中还涉及到了一元三次方程的实根个数判断，很好的一道题。这是2019年AMC12B的第21题，个人觉得放在体制内也是一道很好的题目。

不知道大家对于这道题有什么看法，欢迎交流讨论~

想了解更多关于国际数学竞赛及课程的知识，可参阅：

双木止月Tong：国际数学竞赛及课程
zhuanlan.zhihu.com

编辑于 2020-01-15

一元二次方程 高中数学 数学竞赛

IMO 2019
60th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

zdr0 发表于数学及自然...

在中学很多概念是不严格...

杨树森 发表于做以数学为...

7 条评论

切换为时间排序

写下你的评论...

lgqq 13 天前

请问一下，您这里的数学公式是怎么打进去的啊

1

双木止月Tong (作者) 回复 **lgqq** 13 天前

你好，我是用知乎自带的公式编辑器，和latex一样，还挺简单的。如果需要，可以给你发本latex电子书看看。

1

lgqq 回复 **双木止月Tong** (作者) 12 天前

可以吗，我很想学啊，我在乡下做教育，平时忙不过来，想做一些课件给学生们看，让他们学习，乡下教育资源落后，我想帮帮他们，孩子的教育关系着孩子的一生啊，如果可以的话，真的谢谢您啦，

赞

双木止月Tong (作者) 回复 **lgqq** 12 天前

客气了，我私信给你。

赞

云非非 回复 **双木止月Tong** (作者) 1 小时前

呜呜呜 好感动啊 现在很少有这么可爱这么负责的作者了 给你点赞！！！

赞

双木止月Tong (作者) 回复 **云非非** 1 小时前

集合元素不是有互异性吗。。

1