矩阵的四个子空间及其联系

信息门下...

对任意一个矩阵 $A_{m\times n}$ 来说（本文只考虑实矩阵）,均有四个空间与其对应，他们分别是列空间（column space）、行空间（row space）、零（核）空间（nullspace or kernel space）、左零空间（left nullspace）。熟悉这些空间的性质及其联系能帮助我们在脑海中建立一个舞台,线代中的一些重要内容便是在这个舞台上展开的，比如线性方程组（linear equation system） $Ax=b$ 解的情况、奇异值分解（SVD）的几何直观。

Four Fundamental Subspaces

1. The ***row space*** is $C(A^{\mathrm{T}})$, a subspace of $\mathbf{R}^n$.
2. The ***column space*** is $C(A)$, a subspace of $\mathbf{R}^m$.
3. The ***nullspace*** is $N(A)$, a subspace of $\mathbf{R}^n$.
4. The ***left nullspace*** is $N(A^{\mathrm{T}})$, a subspace of $\mathbf{R}^m$. This is our new space.

Part 1 Four Subspaces

考虑一个矩阵 $A_{m\times n}$ ，不妨设其行阶梯形矩阵为 $R_{3\times5}=\begin{bmatrix}1&3&5&0&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ ，其主元分别在在1-1th, 4-2th两个位置。主元数目在取值上与矩阵的秩相等，所以 $r=rank(A)=rank(R)=2$ 。

1.1列空间的维度与秩相等

列空间（column space）就是由矩阵的列向量组张成的空间。

此处为 $column_1=(1,0,0)$ 和 $column_4=(0,1,0)$ 张成的空间。那么 $column_2,column_3,column_5$ 为什么不作为基向量呢？因为这三个向量可以由 $column_1$ ， $column_4$ 线性表示，在三维空间中表现为与这两个基向量共面，用它们作为基的一部分不能扩展基向量组的表达能力，根据奥卡姆剃刀原理舍弃它们。

$(1,0,0)$和$(0,1,0)$ 构成的无疑是一个3维空间中的（2维）平面，正好维度与rank(R)相等。观察我们选取的基向量 $column_1$ 和 $column_4$ ，他们是主元所在的列，也称为**pivot columns**

1.2行空间的维度与秩相等

行空间（row space）就是由矩阵的行向量组张成的空间。

此处为 $row_1 = (1\,3\,5\,0\,7)$ 和 $row_2 = (0\,0\,0\,1\,2)$ 张成的空间， row_3 为零向量，并不能作为空间的基向量（basis vector）。虽然行向量有5个元素，看似是在一个5维的空间中，但实际上因为我们的基向量只有两个，它们只能张成一个嵌套在5维空间中的2维子空间。我提供一个理解的思路，空间中任意向量由该空间基向量的线性组合表示，即 $\forall r \subset rowspace, \exists\, a,b \subset \mathbb{R}, r = a \cdot row_1 + b \cdot row_2$ ，这个式子意味着我们可以用 向量 (a,b) 来**唯一标识** r ，(a,b) 只有两个元素，所以 实际上 $r \subset \mathbb{R}^2$ 。

再观察下我们选的基向量 row_1 和 row_2 实际上是主元所在的行，这样的行称为**pivot rows**

1.3零空间的维度等于列数减去秩（n-r）

零空间（nullspace or kernel space）是 $Ax = 0 (\Leftrightarrow Rx = 0)$ **的全部解所构成的空间。**

为了形象直观，我们先来讨论下 $Rx = 0$ 的解。$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,第一列和第四列含有主元，为**pivot columns**，其对应的 x_1 和 x_4 称为**pivot variables。**其他三列不含主元，称为**free columns,**相应的 x_2, x_3, x_5 则称为**free variables，free variables可以自由取值，分别取三组值**（1，0，0），（0，1，0），（0，0，1），将三组值分别回代入方程，可解得相应的 x_1, x_4 。这样 $x_1 \sim x_5$ 的值就都知道了，我们可以写出方程 $Rx = 0$ 的解向量 s_2, s_3, s_5

$s_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，$s_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，$s_5 = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，这三个向量被称为**special solutions。**

容易验证， s_2, s_3, s_5 的任意线性组合 $s = a \cdot s_2 + b \cdot s_3 + c \cdot s_5 (a,b,c \subset \mathbb{R})$ 也为 $Rx = 0$ 的解，这意味着以 s_2, s_3, s_5 为基的空间中任一向量 s 是 $Rx = 0$ 的解。这个以**special solutions为基的空间就是** $R(or\ A)$ **的kernel space。**

1.4左零空间的维度等于行数目减去秩（m-r）

左零空间 （left nullspace）是 $R^\top y = 0 (\Leftrightarrow y^\top R = 0)$ **的全部解所构成的空间。**

零空间定义中是未知向量右乘 R ，而这里是未知向量左乘 R 按照**1.3的方法进行讨论可得：**

以 $R^\top y=0$ 的m-r个**special solutions为基的空间就是 left nullspace。**

> 上面的讨论是用A的行阶梯形矩阵R来作讨论的，一些人肯定会提出疑问？我们讨论的是R的四个子空间，这不代表A的四个子空间也具有相同的性质，其实可以证明A和R的子空间的维度是相同的。可参考Introduction to linear algebra 4th edtion p186-p189, The Four Subspace for A

Part 2 四个子空间的联系

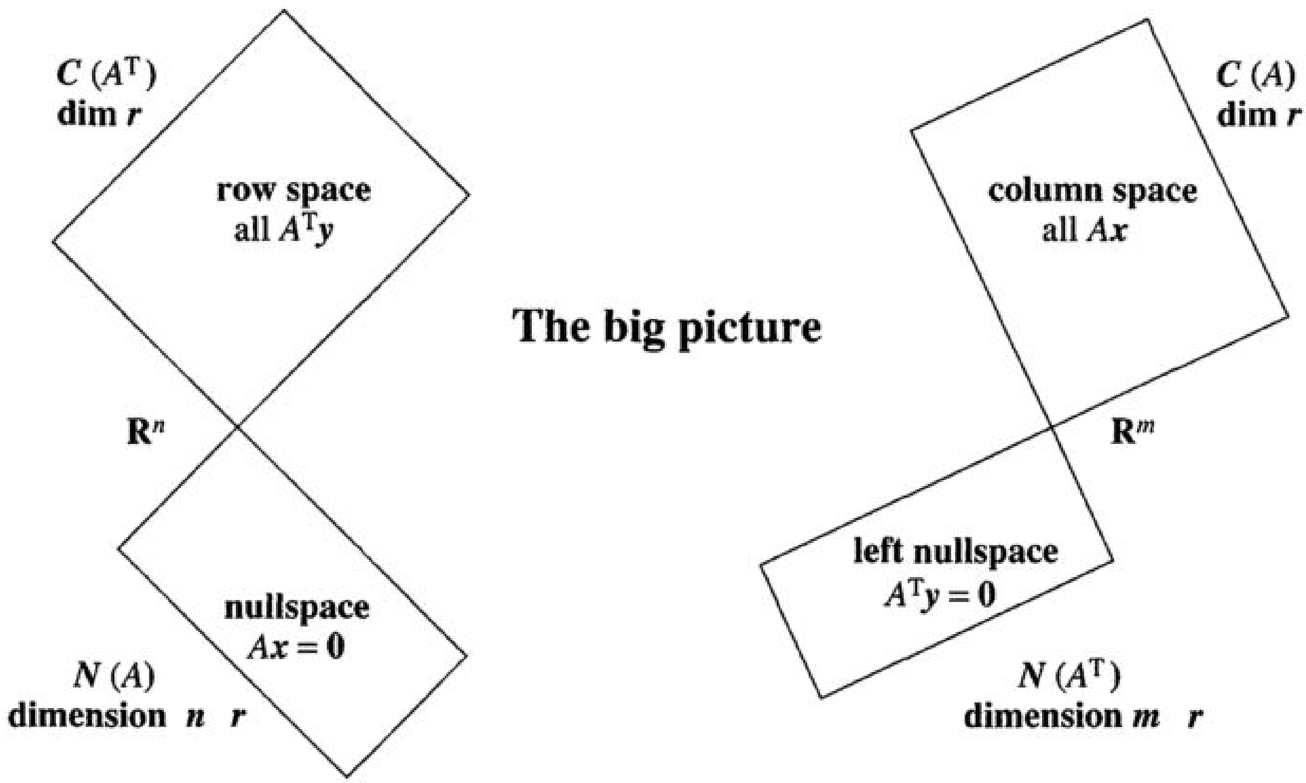

Figure 3.5: The dimensions of the Four Fundamental Subspaces (for R and for A).

图1

2.1 四个子空间的正交性(orthogonality)

起初看到这张图时我并不是很理解，但从直观上可以看出它是想表达 $row\ space \perp null\ space$ ，$column\ space \perp left\ null\ space$

在我们证明它们之前，首先，我们得知道**向量垂直的定义：**

若两向量内积为0，即 $v^\top w=0$ **，则称** $v \perp w$ **.**

将这个垂直（perpendicular）的概念从向量的层次扩展到空间的层次，给出以下定义：

> **定义一：Two subspaces V and W of a vector space are orthogonal if every vector v in V is perpendicular to every vector w in W**

举个栗子，垂直于一张平铺的纸（2-D空间）作该平面的法线（一条线是一个1-D空间），这两个空间即是垂直的。

> **Theorem1:** $nullspace \perp rowspace$ **Proof:**
> 根据nullspace的定义，我们有
> $\forall x \subset nullspace\ N(A)$ ，$Ax = \begin{bmatrix} row\ 1 \cdot x \\ \vdots \\ row\ m \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ，即 $row_i(i = 1, 2, \ldots, m)x = 0$
> 根据rowspace的定义，我们有
> $\forall r \subset rowspace, \exists$数对$a_1, a_2, \ldots, a_m \subset \mathbb{R}$, 使得$r = a_1row_1 + \cdots + a_mrow_m$ 所以
> $r \cdot x = (a_1row_1 + \cdots + a_mrow_m) \cdot x = 0$
> 即nullspace中任一向量与rowspace中任一向量垂直。
> 由定义一知: $nullspace \perp rowspace$

上面证明了big picture中的左半部分，接着证明右半部分

> **Theorem2:** $column\ space \perp left\ nullspace$ **Proof:**
> 根据left nullspace的定义，我们有
> $\forall y \subset left\ nullspace, A^\top y = \begin{bmatrix} column_1^\top \cdot y \\ \ldots \\ column_n^\top \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$
> 即 $column\ i^\top \cdot y = 0$
> 根据column space的定义，我们有
> $\forall c \subset column\ space, \exists b_1, b_2, \ldots, b_n \subset \mathbb{R}$, 使得$c = b_1column_1 + \cdots + b_ncolumn_n$
> 所以 $c^\top \cdot y = (b_1column_1^\top + \cdots + b_ncolumn_n^\top) \cdot y = 0$
> 因此： $column\ space \perp left\ nullspace$

2.2正交补(orthogonal complement)

在Part 1中我们知道了四个子空间的维度，其中

$$dim(row\ space) = dim(column\ space) = rank(A) = r$$
$$dim(nullspace) = n - r, dim(left - nullspace) = m - r$$

不难发现，当 $A_{m \times n}$ 给定以后， m 和 n 也就给定了，它们就成了常量(constant)

$dim(row\ space) + dim(nullspace) = n = constant$

$$dim(column\ space) + dim(left - nullspace) = m = constant$$

这两个式子也意味着 $$C(A^\top) \cup N(A) = \mathbb{R}^n, C(A) \cup N(A^\top) = \mathbb{R}^m \quad (1)$$

而**Part 2.1告诉我们** $$C(A^\top) \perp N(A), C(A) \perp N(A^\top) \quad (2)$$
不妨视 $\{\vec{0}\}$ 为“空集” ϕ ,根据空间垂直的定义**应该**可用反证法证得
$$C(A^\top) \cap N(A) = C(A) \cap N(A^\top) = \{\vec{0}\} := \phi \quad (3)$$

这样一来**借鉴集合论中关于绝对补集合的定义**，我们这样**理解四个子空间的正交补性质**

$C(A^\top)$是$N(A)$在$\mathbb{R}^n$中的补集，$C(A)$是$N(A^\top)$在$\mathbb{R}^m$中的补集

在**线性代数中，我们定义这样的成对空间互为正交补**。由正交补具有的特点可以**从另一角度**给出以下定义：

> **定义二：如果一个子空间 W 包含所有与子空间 V 垂直的向量，称 W 为 V 的正交补，记作 $V^\perp$（发音为"V perp"）**

> **Theorem3:** $nullspace\ is\ the\ orthogonal\ complement\ of\ row\ space$
> **Proof:**
> 我们根据**定义二**来证明，那么待证命题转化为：
> $nullspace(\mathbb{R}^{n-r})$ 包含 $\mathbb{R}^n$ 中**所有**与 $row\ space(\mathbb{R}^r)$ 垂直的向量
> 用反证法来证明这个全称命题，假设 $\exists s \in \mathbb{R}^n \wedge s \perp row\ space, s \notin nullspace$
> $\because s \perp row\ space \therefore A \cdot s = \begin{bmatrix} row_1 \\ \vdots \\ row_m \end{bmatrix} \cdot s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ，即 s 是 $Ax = 0$ 的解
> 根据 $nullspace$ 的定义(由 $Ax = 0$ 的全部解组成的空间)， $s \in nullspace$,与假设矛盾。
> 故 $\mathbb{R}^n$ 中**不存在**与 $rowspace$ 垂直而不在 $nullspace$ 中的向量，即 $\mathbb{R}^n$ 中所有与 $rowspace$ 垂直的向量都在 $nullspace$ 中。

类似地可以证明

> **Theorem4:** $left\ nullspace\ is\ the\ orthogonal\ complement\ of\ column\ space$

2.3 $Ax = b$ 的几何意义

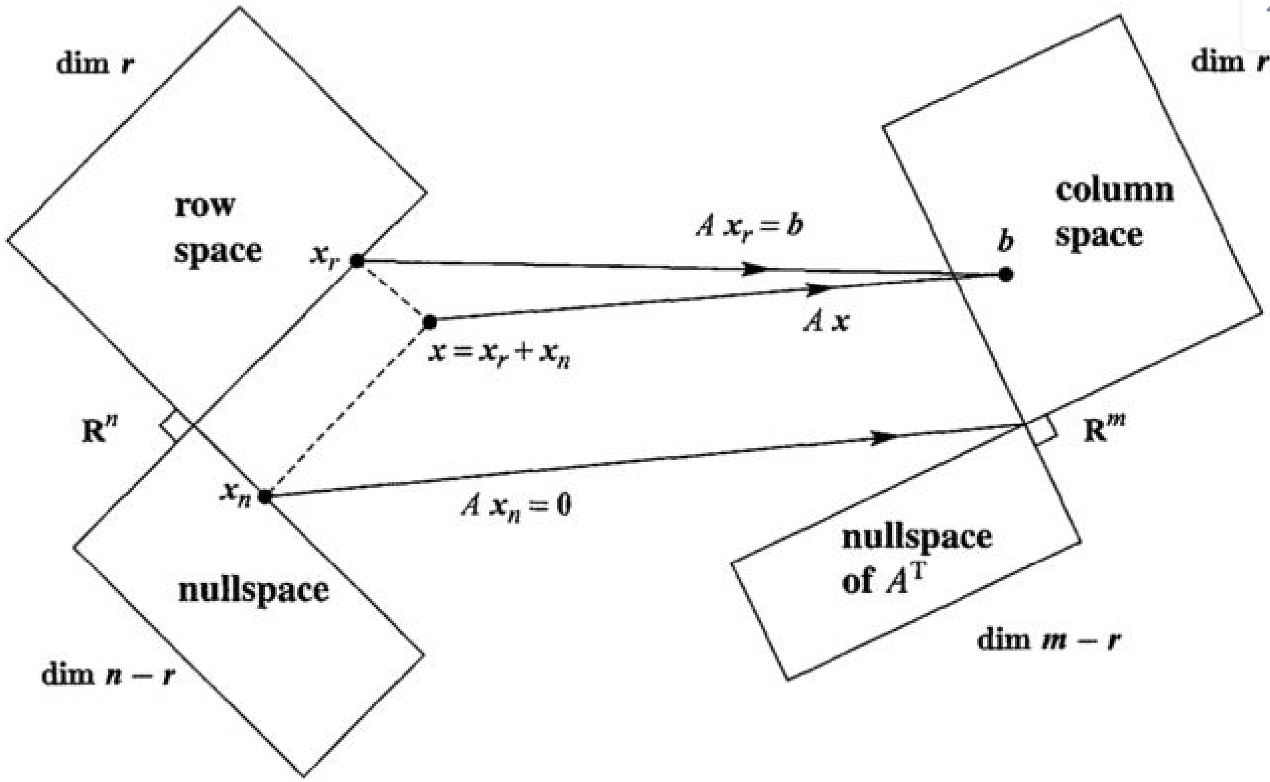

Figure 4.3: This update of Figure 4.2 shows the true action of A on $x = x_r + x_n$. Row space vector x_r to column space, nullspace vector x_n to zero.

图2

$A_{m\times n}\cdot x_{n\times 1}=b_{m\times 1}$ 这个方程中， x 是 n 维的，行空间也是 n 维的。 b 是 m 维的，列空间也是 m 维的。**所以这个方程可以解读为将 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量 x 映射到 $\mathbb{R}^m$ 中,**同时注意到 x 由分别来自行空间和零空间的 x_r 和 x_n 构成，这两个空间是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。而 b 来自列空间（$\mathbb{R}^m$ 的子空间）。我们在学习解方程 $Ax=b$ 时总是分别求出一个**particular solution** 和 **special solutions,再将它们相加，这两个部分即** x_r 和 x_n 。

> 结合图2 思考**3.4节**（3.4The Complete Solution to Ax=b）**关于** $Ax=b$ 解情况的判定（图3），可以从几何角度加深理解

The four possibilities for linear equations depend on the rank r:

$r = m$	and	$r = n$	*Square and invertible*	$Ax = b$	has 1 solution
$r = m$	and	$r < n$	*Short and wide*	$Ax = b$	has ∞ solutions
$r < m$	and	$r = n$	*Tall and thin*	$Ax = b$	has 0 or 1 solution
$r < m$	and	$r < n$	*Not full rank*	$Ax = b$	has 0 or ∞ solutions

图3

编辑于 2019-02-27

线性代数

Explore L1nks
Notebook

13 条评论

切换为时间排序

写下你的评论...

萧惑 2020-06-09

Gilbert老头的MIT线代

2

信息门下勃狗 (作者) 回复 萧惑 2020-06-09

1

DADDYz 2019-10-27

老哥对matrix的理解和我不是一个层次，理解完全不一样，受教受教。

2

Ziyun Li 2019-09-23

第一张图错了

1

信息门下勃狗 (作者) 回复 Ziyun Li 2019-09-23

你是指图一还是 PART1上面的文字截图

赞

Ziyun Li 回复 信息门下勃狗 (作者) 2019-09-23

rowspace和columnspace下面的公式反了

赞

下班啦下班啦 2019-05-01

感谢！又加深了不少映像

1

PAN PAN 2019-02-27

1.1最后column 1 , 2是pivot columns吗？不是column 1,4 吗?

1

信息门下勃狗 (作者) 回复 PAN PAN 2019-02-27

当时写的太快就没注意,谢谢指正

赞

下班啦下班啦 2019-05-01

最近在用一个干扰对齐。就是让两个干扰张成的子空间相等

赞

大恐龙 2018-03-05

谢谢!

赞

大恐龙 2018-03-04

咨询下四个基本子空间和SVD的关系：SVD分别为m维空间、n维空间提供了正交基，请问这些正交基与A的四个基本子空间有何关系?

赞

信息门下勃狗 (作者) 回复 大恐龙 2018-03-04

网易公开课

4