$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

【“数”你好看】求导

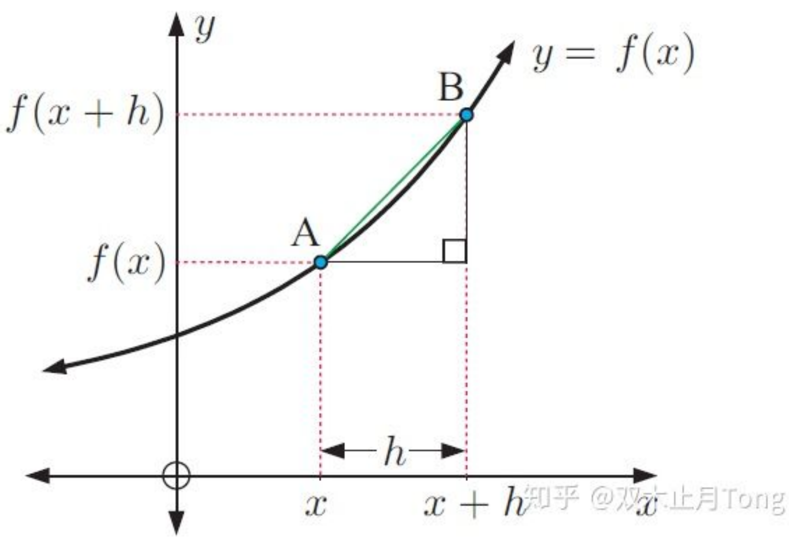
双木止月...
上海大学 运筹学与控制论硕士

微积分的核心是**极限(Limit)**，**求导(Derivative)**是微积分的重要内容，本质就是求极限。导数公式有很多, 靠死记还是比较麻烦的，但这又是微积分的基础，不然接下去导数的应用(求切线、求法线、增减性、求极值、求凹凸性等)都没法学，更不用说导数的逆运算——求积分了。所以本文想系统的梳理一下**求导法则**及**常见函数求导公式**，**争取利用最少的知识把下面公式都推导出来。**

$$
\begin{aligned}
&(C)'=0 && (x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}\\
&(\sin x)'=\cos x && (\cos x)'=-\sin x\\
&(\tan x)'=\sec^2 x && (\cot x)'=-\csc^2 x\\
&(\sec x)'=\sec x\tan x && (\csc x)'=-\csc x\cot x\\
&(a^x)'=a^x\ln a && (e^x)'=e^x\\
&(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} && (\ln x)'=\frac{1}{x}\\
&(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
&(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} && (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

图：常见函数求导公式

一、导数的定义



AB弦的斜率是 $\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ，当B点不断向A点靠近时，AB弦的斜率就变成了 $f(x)$ 在点A处的切线斜率(**可以类比平均速度和瞬时速度**)，可以得到求导公式：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(Differentiation from first principle)

也可以用如下公式求 $f(x)$ 在 x_0 处的切线斜率：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

那么根据上述定义，我们计算几个常见的求导公式。

（1） $(C)'=0$

> $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0$$

（2） $(x^n)'=nx^{n-1}$

> $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
>
> 因为 $$\begin{aligned}(x+h)^n&=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n}h^n\\&=x^n+nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+h^n\end{aligned}$$
>
> 所以
>
> $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+h^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

（3） $(\sin x)'=\cos x$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\\
&= \cos x\times 1\\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

注： $\sin S-\sin D=2\cos\left(\frac{S+D}{2}\right)\sin\left(\frac{S-D}{2}\right)$ ， $\lim_{\theta\to 0}\frac{sin\theta}{\theta}=1$

（4） $(\cos x)'=-\sin x$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\\
&= -\sin x\times 1\\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

注： $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

（5） $(b^x)'=b^xf'(0)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{b^{x+h}-b^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{b^x\left(b^h-1\right)}{h}\\
&= b^x\times\left(\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}\right)
\end{aligned}
$$

又因为 $\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}\end{aligned}$

所以 $f'(x)=b^xf'(0)$

$f(x)=b^x$ 的导数等于其本身乘以在 $x=0$ 处的导数，那么什么时候 $f(x)$ 的导数等于其本身呢？

即 $\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=1$ ， $\lim_{h\to 0}b^h=\lim_{h\to 0}(1+h)$

这里，令 $h=\frac{1}{n}$ ，

$$\lim_{n\to\infty}b^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

所以

$$b=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ ,$$

那么 $(e^x)'=e^x$

注：根据 $(e^x)'=e^x$ 结合后面复合函数求导法则可以推导出 $(a^x)'=a^x\ln a$ 。

二、导数的四则运算及复合函数求导(The chain rule)

设 $u(x),v(x)$ 是关于x的两个可导函数，则

> Scalar muptiplication rule: $(cu(x))'=cu'(x)$
> Addition rule: $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$
> The product rule: $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
> The quotient rule: $(\dfrac{u(x)}{v(x)})'=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v'(x)^2}$

对于 $(cu(x))'=cu'(x)$ 与 $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$ 直接根据定义就可以证明了，比较容易，下面证明求导的乘法与除法公式。

（1）The product rule

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(uv)=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]\\
&=\lim_{h\to0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\\
&\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}
\end{aligned}
$$

（2）The quotient rule

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{v(x)u(x+h)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\
&\lim_{h\to0}\frac{v(x)u(x+h)-v(x)u(x)+v(x)u(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\\
&\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}
\end{aligned}
$$

根据导数的乘法与除法法则，我们就可以计算

$$(\tan x)'=\sec^2 x,(\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$(\sec x)'=\sec x\tan x,(\csc x)'=-\csc x\cot x$$

比如下面计算一下 $(\tan x)'=\sec^2 x$

> $$(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

其他三个也可以类似的推导得到，所以只需要记住 $(\cos x)'=-\sin x,(\sin x)'=\cos x$ 就够了。

接下去讲一个非常重要的复合函数求导——**链式法则(The chain rule)**：

若 $g(x)$ 在 x 处可导，且 $f(x)$ 在 $g(x)$ 处可导，则复合函数 $F(x)=f(g(x))$ 的求导结果为：
$F'(x)=f'(g(x))\cdot g'($

用莱布尼兹表示，若 $y = f(x), u = g(x)$ 都是可导函数，则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

学了链式法则，那么我们就可以推导 $(a^x)' = a^x \ln a$

> $y = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)x}$
> 则根据 $(e^x)' = e^x$ 和链式法则有
> $\frac{dy}{dx} = e^{(\ln a)x} \times \ln a = a^x \ln a$

三、隐函数求导

把能够写成 $y = f(x)$ 的函数称为显函数，但是有些情况下如 $y^2 + yx + x^3 + 4 = 0$ 我们不能把x,y分离开，只知道x,y存在一定的关系 $F(x, y) = 0$,把这样的称为隐函数。隐函数求导就是对 $F(x, y) = 0$ 两边同时对x进行求导，且在求导过程中把y看成是一个关于x的函数，求导完成后只需要把 $\frac{dy}{dx}$ 分离开来就得到了y关于x的导数。

接下去我们根据隐函数求导来推导一下求导公式表中的剩下公式。

（1） $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

> $y = \ln x$ ，则 $e^y = x$,两边对x进行求导可得：
> $e^y \cdot y' = 1$,那么 $y' = \frac{1}{e^y}$ 。
> 又因为 $y = \ln x$ ，
> 所以 $y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

那么我们也可以知道 $(\log_a^x)' = \frac{1}{x \ln a}$

> $(\log_a^x)' = (\frac{\ln x}{\ln a})' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$

类似的我们也可以算得剩下三个反三角函数的导数

（2） $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

> $y = \arcsin x$,则 $\sin y = x$,两边对x求导可得
> $\cos y \cdot y' = 1$ ，$y' = \frac{1}{\cos y}$
> 又因为 $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$
> 所以 $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

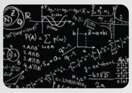
$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$ 也可以类似得到，其中要用到两个三角恒等式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ 。

总结，**我们通过导数的定义，推导了导数四则运算法则、链式法则，以及借助隐函数求导，把常见函数求导公式都推导了一遍。**所以我们只需要记忆一些最基本的定义、最常见的函数求导就够了，其它复杂的忘记了现推一下也很快知道了。

这是我认为的推导常

想了解更多数学知识，可参阅

双木止月Tong：国际数学竞赛及课程
zhuanlan.zhihu.com



微信订阅号：数你好看

编辑于 2019-06-28

导数 微积分 高等数学

文章被以下专栏收录

国际理科
传播数学知识，接轨国际教育。

关注专栏

3 条评论

切换为时间排序

写下你的评论...

FFout 7 个月前
任何正实数b都满足limb^(1/n)=lim(1+1/n)，因为都是1。在引入e那里的推导是错误的。
1

双木止月Tong (作者) 回复 **FFout** 7 个月前
不知道哪里错了？我们现在要找到一个常数b，使得(b^x)'=b^x,那就是(b^x)在0处的导数值为1，经过推导b=e。
赞

FFout 回复 **双木止月Tong** (作者) 7 个月前
错误我已经指出了，两边^n那里有问题
1

赞同 34 · 3 条评论 · 分享 · 收藏 · ...