矩阵的转置的意义是什么?

王赟 Maigo
算法等 7 个话题下的优秀答主

矩阵的转置操作看起来很简单，但是 A 与 A' 代表的线性映射是什么关系，却不是一个容易回答的问题。我最近想了一阵子，想到了两种理解方法，来分享一下。

在本文中，为了打字方便，我用一撇代表转置。

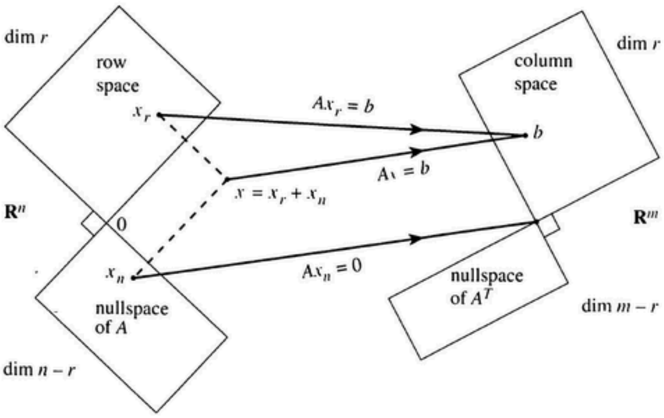
零、准备知识

设 A 是一个 m*n 的矩阵，则它表示了一个从 n 维空间到 m 维空间的映射；相应地，A' 的大小是 n*m，它表示了一个从 m 维空间到 n 维空间的映射。

另设 A 的秩为 r（A' 的秩亦为 r），则上面的 n 维、m 维空间会被分割成四个子空间，如下图所示（图片来自 Gilbert Strang 的线性代数教材）。

在左边的 n 维空间中任取一个向量 x，则 Ax 一定落在 A 的列空间中，即右边的 r 维子空间；

在右边的 m 维空间中任取一个向量 y，则 A'y 一定落在 A 的行空间中，即左边的 r 维子空间。



一、内积的角度

现在在左边的 n 维空间中取一个向量 x，并在右边的 m 维空间中取一个向量 y。

这两个向量属于不同的空间，我们想用线性映射的办法把它们映射到同一个空间中去。

为此，我们可以用 A 把左边的 x 映射到右边的 Ax，也可以用 A' 把右边的 y 映射到左边的 A'y。

我们对同一个空间中的两个向量求内积，可以发现，

$<x, A'y> = x'A'y = (Ax)'y = <Ax, y>$

也就是说，不管在哪一个空间中求内积，结果都是相等的。

于是我们可以这样描述转置的作用：「把左边的 x 映射到右边再与右边的 y 求内积」，可以与「把右边的 y 映射到左边再与左边的 x 求内积」相互替换，这两种操作中使用的映射，表示成矩阵时互为转置关系。

实际上，这两个映射互为**伴随映射**。

二、奇异值分解的角度

把 A 进行奇异值分解，得到 A = USV'；

那么，若把 A' 进行奇异值分解，就会得到 A' = VSU'。

这几个矩阵的大小分别为：U: m*r，S: r*r，V: n*r。

我们看到，A 和 A' 都可以分解成依次进行的三个映射。

其中，V、U 的各列分别是左、右两个 r 维子空间的单位正交基，所以三个映射中的第一步 V'、U' 的含义是把左、右两个空间中的向量投影到 r 维子空间中，再进行旋转操作（也可能包括翻转）。我们认为旋转的结果位于一个「中介 r 维空间」中，这个中介空间各个坐标轴上的单位向量对应着原空间的单位正交基。相应地，第三步 V、U 的含义就是把这个旋转逆过来，或者说把中介空间中的向量旋转回左、右两个 r 维子空间中去，但原先跟 r 维子空间垂直的分量就恢复不回来了。

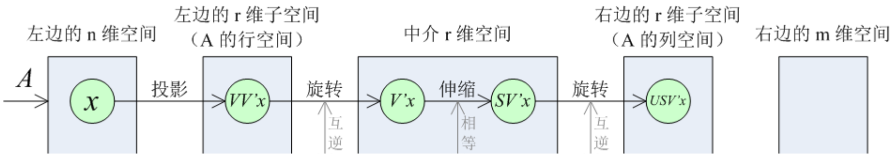
而 S 是对角矩阵，所以第二步做的是伸缩。

这样 A 与 A' 的关系就比较清晰了：

A 把左边 n 维空间中的 x 投影到左边的 r 维子空间中，旋转到中介 r 维空间里，沿各个坐标轴进行可能不同比例的伸缩，再旋转到右边的 r 维子空间中；

A' 把右边 m 维空间中的 y 投影到右边的 r 维子空间中，旋转到中介 r 维空间里，沿各个坐标轴进行可能不同比例的伸缩，再旋转到左边的 r 维子空间中。

这两套操作中使用的旋转是互逆的，而伸缩的比例相等。



46 条评论　　切换为时间排序

暗能量泡泡　2018-04-02
不够味。先从对向量的线性映射讲，转置首先是产生了对偶的两对线性映射，两个结合顺序相反【协变或逆变】。在某种语境下也可以理解为一个对表示的变换，一个对基的变换。
13

王赟 Maigo (作者) 回复 暗能量泡泡　2018-04-02
期待你的回答～
9

王云峰 回复 王赟 Maigo (作者)　2018-04-02

查看全部 8 条回复

Bluffey 2018-05-11

每一个字都认识系列

11

mathwater 2019-04-02

真的写得很好，有分析的思考味道！转置如此简单的动作，会有|A|=|A'|，(AB)'=B'A'，A'^(-1)=A^(-1)'，这么多记起来简单，想起来确不那么显然的性质; 若A=A'，则是对称阵，而对称阵的诸多优美性质几乎占去了代数研究的半壁江山....所有这些如果真的能看起来很显然了，一定来自于对 “转置 “的悟透。作者在此开启了两个视角，于我而言内积的方式还更好理解一点，SVD中把VV' 和UU'写成投影着实阻碍了我一阵子理解，若加一句VV'=E=UU'过渡可能更加普渡众生一点～，总之，非常感谢，转摘了！

7

一大杯桃汁 2019-07-01

...看不懂哇，枯了

3

思想盒 回复 一大杯桃汁 2020-10-30

没事，我也看不懂🤔

赞

「已注销」 2018-04-02

该评论已删除

王赟 Maigo (作者) 回复 「已注销」 2018-04-02

最后有一个点有点疑惑..【实际上，这两个映射互为伴随映射。】莫非是两个转置映射？那转置映射就等于伴随映射并不成立哇，那如果不是，【这两个映射】指什么呢

1

王赟 Maigo (作者) 回复 苏炭 2020-09-29

我找不到伴随映射的定义了😂

所以是不存在「伴随映射」这种叫法，还是说「伴随映射」和「转置映射」是两种不同的东西？

赞

苏炭 回复 王赟 Maigo (作者) 2020-09-29

我不太知道你说的【伴随映射】和【转置映射】是不是【伴随矩阵】和【转置矩阵】（虽然看起来至少后者是如此定义的(笑哭)），伴随矩阵的定义的话，是A的每一个元素位置都取该位置的代数余子式构成的矩阵，伴随矩阵和逆有些关联 和转置我好想每太发现有啊

赞

展开其他 1 条回复

过往 04-17

刚开始mn的矩阵前提是秩是m才行吧

王赟 Maigo (作者) 回复 过往 04-17

并不需要呀

赞

过往 回复 王赟 Maigo (作者) 04-17

不懂就问，向量空间的维度不是不是和秩相等吗

赞

展开其他 1 条回复

张小狗 03-27

这个回答和问题没关系吧，问题不是问转置的意义是什么吗?

赞

王赟 Maigo (作者) 回复 张小狗 03-27

你觉得问的「意义」是什么呢?

赞

YKueen 2020-12-24

对！我又来到了这里，你肯定不知道我在看什么书

赞

单建华 2020-03-24

赞

王赟 Maigo (作者) 回复 小Y同学 2020-03-22

嗯，奇异值我在本科的数学课程里也没学到，后来「野生」地学的

赞

走吧 2020-03-14

专业课用矩阵，看的我一脸懵逼，来搜搜想理解一下，是我太辣鸡，基本概念都忘了，还是看不懂

我一个工科生要纯靠记忆力学习，理解不了，我很难受

当初学线代，上课听不懂，为了考试就专门记住了应该怎么运算，2年后，连怎么运算都忘了。。

我这么学习真悲哀

赞

戴上手铐做舞者 回复 走吧 2020-11-16

你可以先看看b站3blue1brown的线代本质再来看这个，那个直观

赞

走吧 回复 戴上手铐做舞者 2020-11-16

四月份的时候看完了3b1b的线代，现在对向量空间和变换有初步的了解了，3b1b太强了

陈宇 2019-05-20
请问为什么X=VV'x?
赞

王赟 Maigo (作者) 回复 陈宇 2019-05-20
没有这个关系呀，VV' 表示一个投影变换
赞

不去新一 回复 王赟 Maigo (作者) 2019-10-24
同没理解，求解答：A=USV`，图片表示的部分，为什么会有一个VV`x的投影的步骤，Ax第一步不是V`x?
赞

展开其他 1 条回复

学海无涯 2019-04-08
记得奇异值分解中，U是m*m，S是m*n，V是n*n
赞

王赟 Maigo (作者) 回复 学海无涯 2019-04-08
一样的，你这样分解，S矩阵多出来的部分都是0
赞

guna 2019-03-03
不是很懂duality是什么意思...
赞

王赟 Maigo (作者) 回复 BsLee 2018-04-08
Visio
赞

BsLee 回复 王赟 Maigo (作者) 2018-04-08
好的 谢谢
赞

冯某某 2018-04-03
运筹学里面的对偶空间 2333
赞

蔡世勋 2018-04-02
请教，r与n、m的关系是什么，r的最小值是什么？感觉4元数的发明是这个想法的特例。
赞

王赟 Maigo (作者) 回复 蔡世勋 2018-04-02
0 <= r <= min(n,m)。这个用不着四元数吧......
2

写下你的评论...

以冬以东
抽象数学主义

38 人赞同了该回答

看了很多回答，总觉得还缺点意思。

我一直在思考一个问题，对标准正交矩阵而言，为什么列向量标准正交，行向量间就会标准正交，这背后的**几何意义**是什么？苦思多日，突然顿悟：如果列向量 A_i 的每个值 A_{ji} 看成是在标准坐标系统O里的坐标（即在每个坐标轴上的投影）。而行向量是什么？就是以这些列向量为坐标轴形成的新坐标系统A里，原坐标系统O每个单位向量 e_i 在这个新坐标系统A里的坐标。

标准正交矩阵转置的几何意义比较容易理解。一般矩阵转置的几何意义该如何理解呢？我们用刚才的思路，用坐标轴投影来理解。矩阵的一个值 M_{ij} ,可以看作两个坐标系统（标准坐标系O+某任意坐标系A）坐标轴之间的投影系数 $P(e_i, e_j^{'}) = P(e_j^{'}, e_i)$ ，这样看转置就很清楚了，转置后就是标准坐标系单位向量 e_i 在坐标系A上的“投影”，这也就是所谓的对偶。

理解到这样，对于理解行秩=列秩就有了几何认识：投影来投影去，标准坐标系O总是满秩的，那么dim总归是由坐标系A的坐标轴几个向量的线性无关性决定的。

编辑于 2018-11-21

▲ 赞同 38 ▼ 3 条评论 分享 收藏 取消喜欢 ···

知之
Esse Est Percipi.

53 人赞同了该回答

矩阵转置就是矩阵转置，正如它数学定义的那样。

你如果非得找出点意义来，那么必须把它放到具体的应用领域中去。

比如，如果把矩阵 $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ 看成线性空间 $P^n \to P^m$ 的一个线性算子，那么其转置 A^T 就是线性空间 $P^m \to P^n$ 的线性算子，称之为 A 的共轭算子(伴随算子)Hermitian adjoint

发布于 2015-12-10

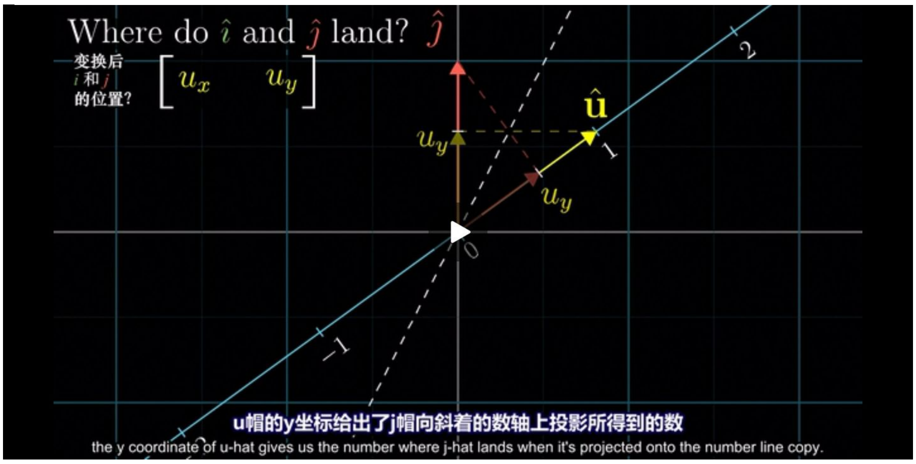
▲ 赞同 53 ▼ 14 条评论 分享 收藏 喜欢 ···

呱呱叫

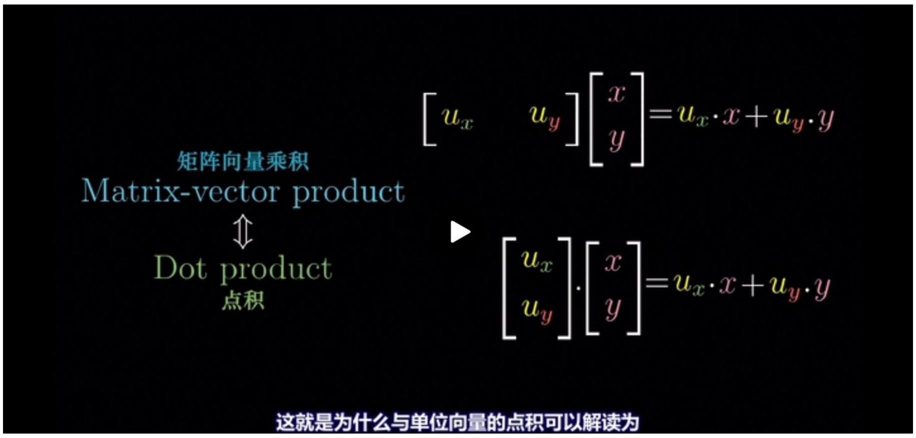
4 人赞同了该回答

3Blue1Brown的第七讲点积与对偶性中通过对偶性得到投影矩阵（project matrix），

▲ 赞同 527 ▼ 收起评论 分享 收藏 喜欢 ··· 收起



Where do $\hat{\imath}$ and $\hat{\jmath}$ land? $\hat{\jmath}$
变换后 i 和 j 的位置?
$\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}$
$\hat{\mathbf{u}}$
u_y
u_y
2
1
0
-1
u帽的y坐标给出了j帽向斜着的数轴上投影所得到的数
the y coordinate of u-hat gives us the number where j-hat lands when it's projected onto the number line copy.



$\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u_x \cdot x + u_y \cdot y$
矩阵向量乘积
Matrix-vector product
$\Updownarrow$
Dot product
点积
$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u_x \cdot x + u_y \cdot y$
这就是为什么与单位向量的点积可以解读为