

【国际数学竞赛】一题七解——几何知识点串讲



双木止月...

上海大学 运筹学与控制论硕士

+ 关注他

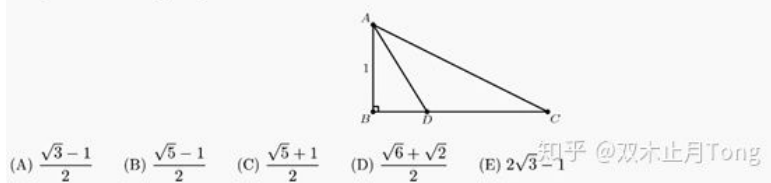
7 人赞同了该文章

几何(Geometry)是国际数学竞赛中一重要内容，无论是个人赛的AMC(美国数学竞赛)、Euclid(滑铁卢大学欧几里得竞赛)等，还是团队赛BMT(伯克利数学竞赛)、DMM(杜克数学大会)，AMT(美式数学竞赛)等都是必考内容，且BMT、AMT等都设有“几何”单项赛，由此可见“几何”的地位。

几何知识点有很多，本文就用一道题来串讲一些几何知识点。

2009-AMC10B-20

Triangle ABC has a right angle at B , $AB = 1$, and $BC = 2$. The bisector of $\angle BAC$ meets \overline{BC} at D . What is BD ?

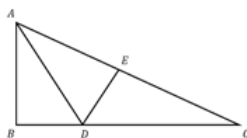


图：2009年美国数学竞赛10年级组B卷第20题

题意：三角形ABC是一个直角三角形， $AB=1$ ， $BC=2$ ，AD是 $\angle BAC$ 的角平分线，请问BD长？

这是一道比较常规的几何题，可以通过做一条辅助线进行求解。过点D作AC的垂线，垂足为E，如下图所示。由AAS可知三角形ABD全等于三角形AED，则 $BD=ED$ ，且设 $BD=ED=x$ 。

根据题意可知， $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}$ 。



赞同 7



6 条评论

分享

收藏



接下去提供七种解题方法：



第一种：勾股定理

在直角三角CDE中， $CD^2 = CE^2 + ED^2$ ， $CE = \sqrt{5} - 1$ 则
 $(2-x)^2 = 1^2 + (\sqrt{5}-1)^2$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (以下省略求解过程)}$$

第二种：三角形面积=1/2*底*高

三角形ABC的面积=三角形ABD的面积+三角形ADC的面积

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \\ S_{\triangle ABD} &= \frac{1}{2} \times 1 \times x \\ S_{\triangle ADC} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times x \end{aligned}$$

于是

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times x + \frac{1}{2} \times 1 \times x$$

可得

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

第三种：三角函数 $\sin \angle C$

根据正弦定义

$$\sin \angle C = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{DE}{CD} = \frac{x}{2-x}$$

可得

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(类似也可以用余弦定义)

第四种：余弦定理

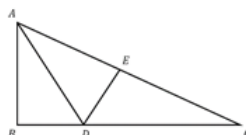
$$\cos \angle C = \frac{CB}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{CD^2 + CE^2 - DE^2}{2 \times CD \times CE} = \frac{(2-x)^2 + (\sqrt{5}-1)^2 - x^2}{2 \times (2-x) \times (\sqrt{5}-1)}$$

可得

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(计算量有点大，不太适合。)

第五种：相似三角形



因为 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

所以

▲ 赞同 7



● 6 条评论

➦ 分享

★ 收藏

...

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC}$$

则

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$$\text{可得: } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

第六种：角平分线定理

角平分线定理

若AM为 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的角平分线，则 $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$ 。

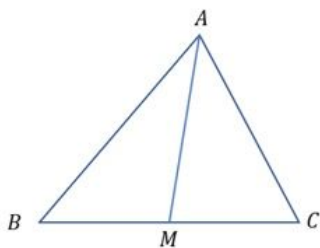


Figure: $\triangle ABC$

知乎 @双木止月Tong

于是需要辅助线，由“角平分线定理”可知

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{x}{2-x}$$

$$\text{可得: } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(角平分线定理是竞赛中常用定理，尤其在AMC中。)

第七种：割线定理

割线定理

从圆外一点L引两条割线与圆分别交于A, B, C, D, 则有 $LA \cdot LB = LC \cdot LD = LT^2$ 。

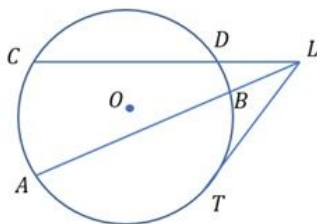
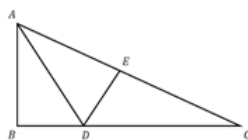


Figure: 圆O

知乎 @双木止月Tong

为什么能用割线定理？首先证明ABDE四点共圆。



由 $\angle B = \angle AED = 90^\circ$ ， $\angle B + \angle AED = 180^\circ$ ，所以ABDE四点共圆。

(关于四点共圆的知识可参阅：【“数”你好看】四点共圆)

于是根据割线定理，

赞同 7

6 条评论

分享

收藏

...



$CE \cdot CA = CD \cdot CB$

于是
 $(\sqrt{5}-1) \cdot \sqrt{5} = (2-x) \cdot x$
可得: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

至此，本文已经用了七种不同的方法计算BD的长度，多考虑“一题多解”可以发散思维，帮助我们加深对于知识的理解和运用能力。

那么，进一步考虑，BE的长度是多少呢？。。

不过几何中还有很多常见的定理没有讲解，如梅涅劳斯定理、塞瓦定理、托勒密定理、海伦公式等等，这些我们以后再来分享。

想了解更多国际数学竞赛及课程知识，可参阅：

双木止月Tong：国际数学竞赛及课程

@ zhuanlan.zhihu.com



编辑于 2019-11-21

数学竞赛

平面几何

高中数学

文章被以下专栏收录



国际理科
传播数学知识，接轨国际教育。

关注专栏

推荐阅读

一道似乎有点困难的平面几何题

稍微写一点评析吧，，题：如图，
Rt△ABC斜边上的高为AE，X为线段
AE上任一点，BX上一点满足
CN=CA，CX上一点M满足BM=BA，
BM交CN于D，AK为角BAC的角平分
线。求证：（1）DN=DM（2）...

不吐槽会死星人i



平面几何中的面积方法

姜子麟

发表于爱哖客栈

一场平面几何大赛的解答

本文为《与几何共舞》qq群第二次
群赛的解答，其中除5、7两道题外
均为本人自己的解答，5是因为我的
解法计算稍微繁琐而采用了“虫仙”
的解法，而7我由于时间没有仔细去
做，故采用了来自供题人...

张峻铭

发表于平面几何鉴...



北京大学
个证明

Be2SiO4

6条评论

切换为时间排序

写下你的评论...



名字不重要

8个月前

为啥进一步考虑。。BD知道AD不就知道了吗。。。

赞

赞同 7

6条评论

分享

收藏

...



双木止月Tong (作者) 回复 名字不重要

8 个月前

[飙泪笑]应该是BE，感谢评论

👍 赞



名字不重要 回复 双木止月Tong (作者)

8 个月前

唔。这样啊[捂脸][捂脸]我一时还看懂了

👍 赞



名字不重要 回复 双木止月Tong (作者)

8 个月前

BE垂直AD吧。。所以用面积可以求出来?? [调皮]

👍 赞



双木止月Tong (作者) 回复 名字不重要

8 个月前

[赞]，也可以用其他比较麻烦的方法，比如托勒密[捂嘴]

👍 赞



楚若儿

6 个月前

BE，暂时想到2种，过E作EF⊥BD，得到三角形EFC，DEC以及ABC相似。然后用勾股定理求。另一种是，可以容易证明BE⊥AD，再利用和ABD的相似来求。总感觉很丑。。

👍 赞



▲ 赞同 7



💬 6 条评论

🔗 分享

★ 收藏

