

演習問題 8.7

実時間両端キューにおいて

- 挿入で 1
- 削除で 2

停止計算を進行させれば、次の回転より前にスケジュールが実行完了するには十分であることを示せ

- 連続で cons, tail する場合を考える
- snoc, init は省略

cons

次の回転までの cons の回数と、回転時に作られるスケジュールの長さを比較する。

次の回転までの cons の回数

cons によって回転が開始するとき $|f| = c|r| + 2$ となっている。

$|r| = m$ とすると、 $|f| = cm + 2$ となり、 $i = \lfloor \frac{|r|+|f|}{2} \rfloor = \lfloor \frac{c+1}{2} \rfloor m + 1$ である。

回転が完了するときの先頭ストリームの長さは i であり、次の回転までの cons の回数は、 $ci + 2 - i = (c - 1)i + 2$ 回となる。

回転時に作られるスケジュールの長さ

`take i f` より先頭側スケジュールの長さは i である。

末尾側スケジュール長さは `rotateDrop r i f` を完全に消化する回数である。

`rotateDrop` は 1 ステップ毎に r を 1 回、 f を c 回（合計 i まで）進行させる。合計のステップ数を比較すると $|r| + 1 - \frac{i}{c} = m + 1 - (\lfloor \frac{c+1}{2c} \rfloor m + 1) = \lfloor \frac{c-1}{2c} \rfloor m > 0$ ($c > 1, m > 0$) なので、`rotateDrop` による末尾側スケジュールの長さは $|r| + 1$ として考える。

- 比較を簡単にするため $|r| + 1$ としていることに注意

スケジュールは先頭側も末尾側も同時に進行するが、 $i \geq |r| + 1$ ($c > 1$) より、スケジュールが完了するまでにかかるステップ数は i となる。

以上より、 $(c - 1)i + 2 - i = (c - 2)i + 2 > 0$ ($c > 1$) であるため、停止計算を 1 つずつ実行すれば次の回転までに間に合う。

tail

次の回転までの tail の回数

tail によって回転が開始するとき $|r| = c|f| + 1$ となっている。（cons とは関係が逆）

$|f| = m$ とすると、 $|r| = cm + 1$ となり、 $i = \lfloor \frac{|r|+|f|}{2} \rfloor = \lfloor \frac{c+1}{2} \rfloor m$ である。また、 $j = |f| + |r| - i = \lceil \frac{c+1}{2} \rceil m + 1$

回転が完了するときの先頭ストリームの長さは j であり、次の回転までの tail の回数は、 $j - \frac{i-2}{c}$ 回となる。

回転時に作られるスケジュールの長さ

`take j f` より先頭側スケジュールの長さは j である。

末尾側スケジュール長さは `rotateDrop f j r` を完全に消化する回数である。

`cons` の場合と同じように考えると、末尾側スケジュールの長さは $|f| + 1$ として考える。

$j \geq |f| + 1$ ($c > 1$) より、スケジュールが完了するまでにかかるステップ数は j となる。

以上より、停止計算を 2 つずつ実行することを考慮して、

$$2(j - \frac{i-2}{c}) - j = j - \frac{2(i-2)}{c} \geq i - \frac{2(i-2)}{c} = \frac{(c-2)i+4}{c} > 0 \quad (c > 1)$$