練習問題 3.8

サイズ n の赤黒木におけるノードの最大の深さがたかだか $2\lfloor\log_2(n+1)\rfloor$ であることを示す

対偶: ノードの最大の深さが $2\lfloor\log_2(n+1)\rfloor$ より大きいとき、サイズ n の赤黒木を構成することはできない

不変条件 1. 赤いノードは赤い子ノード

不変条件 2. 根から空ノードへの経路は全て、同じ数の黒いノードを持つ

→ 最長の経路が最短の経路のたかだか 2 倍であることが保証される

1. $n = 2^k - 1 \ (k \in \mathbb{Z}_0)$ と表せるとき

$$2\lfloor\log_2(n+1)\rfloor = 2\lfloor\log_2(2^k - 1 + 1)\rfloor = 2\lfloor k\rfloor = 2k$$

なので、最長深さ $2k+1$ の赤黒木を構成することを考える。

深さ最長の部分は k 個の赤ノードと $k+1$ 個の黒ノード（そのうち 1 つは葉ノード）で構成されるため、最短部分は k 個の赤ノードを除いた深さ k となる。（根と葉は黒なので、赤ノードは深さの半分未満のノード数しか存在しない）

この赤黒木では全てのパスが深さ k 以上である。高さ k の完全二分木の要素数は $2^k - 1 = n \quad (n \geq 0)$ であり、この赤黒木では少なくとも1つのパスが $2k+1$ のパスを持つため、要素数は n を超える。

そのため、サイズ n の赤黒木を構成することはできない。

2. $n \neq 2^k - 1 \ (k \in \mathbb{Z}_0,\ k > 1)$ と表せるとき

$$2k - 2 < 2\log_2(2^{k-1} + 1) \leq 2\lfloor\log_2(n+1)\rfloor < 2k \quad (2^{k-1} \leq n < 2^k - 1)$$

なので、最長深さ $2k$ の赤黒木を構成することを考える。

深さ最長の部分は $k-1$ 個の赤ノードと $k+1$ 個の黒ノード（そのうち 1 つは葉ノード）で構成されるため、最短部分は深さ k となる。

あとは1. の場合と同様にして、サイズ n の赤黒木を構成することはできないことを示すことができる。