# 演習問題 9.15

> 以下の補題 9.2 を示す。
>
> $t$ がランク $r$ のねじれ二項木であるとき、$2^r \leq |t| \leq 2^{r+1} - 1$

まず、$2^r \leq |t|$ であることは、ねじれ二項木のすべての部分木における Elem.T list が空であるとき、通常の二項木と一致することから明らか。

次に、$|t| \leq 2^{r+1} - 1$ を示す。ランク $n$ のねじれ二項木が、すべての部分木における Elem.T list に最大まで要素を持つ場合を考える。このときのねじれ二項木のサイズを $a_n$ で表すと、

$$
\begin{aligned}
a_n &= (\text{要素}) &&+ (\text{要素のリスト}) &&+ (\text{ランク} n-1 \text{のねじれ二項木のリスト}) \\
&= 1 &&+ n &&+ a_{n-1} + \cdots + a_0
\end{aligned}
$$

ここで、$a_{n+1}$ を考えると、

$$
\begin{array}{rl}
a_{n+1} &= 1 + n + 1 + a_n \ + a_{n-1} + \cdots + a_0 \\
a_n &= 1 + n \qquad\qquad\quad + a_{n-1} + \cdots + a_0 \\
\hline
a_{n+1} - a_n &= \qquad\qquad 1 + a_n
\end{array}
$$

整理して、

$$
a_{n+1} = 2a_n + 1
$$

特性方程式 $x = 2x + 1$ の根 $x = -1$ を用いて変形し、

$$
a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)
$$

これは初項 $a_1 + 1 = 2a_0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ 、等比 $2$ の等比数列なので、

$$
a_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}
$$

よって一般項は、

$$
a_n = 2^{n+1} - 1
$$

ゆえに、題意は示された。