

# 演習問題 5.5

## の前に

### 記号

- $\#t$ 
  - $t$  のサイズ +1
  - $t = T(a, z, b) \rightarrow \#t = \#a + \#b$
- $\phi(t)$ 
  - 個々のノードのポテンシャル
  - $\phi(t) = \log(\#t)$
- $\Phi(t)$ 
  - 木全体のポテンシャル
  - 木の個々のノードの全てのポテンシャルの合計
- $\mathcal{T}(t)$ 
  - $t$  に対する `partition` 呼び出しの実コスト
  - `partition` の再帰呼び出しの合計回数
- $\mathcal{A}(t)$ 
  - 木  $t$  に対する `partition` 呼び出しの償却コスト
  - $\mathcal{A}(T) = \mathcal{T}(t) + \Phi(a) + \Phi(b) - \Phi(t)$ 
    - `(a, b) = partition(pivot, t)`

### 補題 5.1

$y + z \leq x$  なるすべての正の  $x$ 、 $y$ 、 $z$  について、

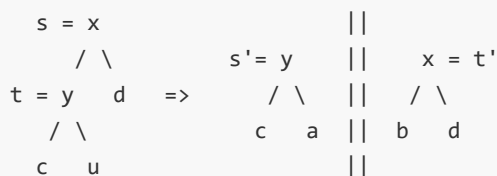
$$1 + \log y + \log z < 2 \log x$$

### 定理 5.2

$$\mathcal{A}(t) \leq 1 + 2\phi(t) = 1 + 2\log(\#t)$$

## では

定理 5.2 における zig-zag ケースを証明する。



ただし、 $a$  と  $b$  は `partition (pivot, u)` の返り値とする。すると、

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}(s) \\
= & \quad \{\mathcal{A} \text{ の定義} \} \\
& \mathcal{T}(s) + \Phi(s') + \Phi(t') - \Phi(s) \\
= & \quad \{\mathcal{T}(s) = 1 + \mathcal{T}(u)\} \\
& 1 + \mathcal{T}(u) + \Phi(s') + \Phi(t') - \Phi(s) \\
= & \quad \{\mathcal{T}(u) = \mathcal{A}(u) - \Phi(a) - \Phi(b) + \Phi(u)\} \\
& 1 + \mathcal{A}(u) - \Phi(a) - \Phi(b) + \Phi(u) + \Phi(s') + \Phi(t') - \Phi(s) \\
= & \quad \{\Phi(s'), \Phi(t'), \Phi(s) \text{ を展開して単純化} \} \\
& 1 + \mathcal{A}(u) + \phi(s') + \phi(t') - \phi(s) - \phi(t) \\
\leq & \quad \{\text{帰納法の仮定: } \mathcal{A}(c) \leq 1 + 2\phi(c)\} \\
& 2 + 2\phi(c) + \phi(s') + \phi(t') - \phi(s) - \phi(t) \\
< & \quad \{\phi(c) < \phi(s) \text{ と } \phi(s') \leq \phi(t)\} \\
& 2 + \phi(c) + \phi(t') \\
< & \quad \{\#c + \#t' < \#s \text{ と補題5.1} \} \\
& 1 + 2\phi(s)
\end{aligned}$$

となる。

## 補足

- $\Phi(s') = \phi(s') + \Phi(c) + \Phi(a)$
- $\Phi(t') = \phi(t') + \Phi(b) + \Phi(d)$
- $\Phi(s) = \phi(s) + \phi(t) + \Phi(c) + \Phi(d) + \Phi(u)$