

## 演習問題 8.5

定理8.1を証明せよ

不変条件:  $D(i) \leq \min(ci + i, cs + 1 - t)$  ただし  $s = \min(|f|, |r|), t = \max(|f|, |r|)$

- 回転を起こさない `cons`
  - 先頭側ストリームに要素を追加、 $|f|$  が 1 増える
    - $|f| < |r|$  のとき、 $cs + 1 - t = c|f| + 1 - |r|$  も 1 増えるので問題なし
    - $|f| \geq |r|$  のとき、 $cs + 1 - t = c|r| + 1 - |f|$  は 1 減る
      - 不変条件を守るには、キューの末尾の負債を返済し、全ての後続の累積負債を 1 ずつ減らす
- 回転を起こさない `tail`
  - 先頭側ストリームから要素を削除、 $|f|$  が 1 減る
    - $|f| > |r|$  のとき、 $cs + 1 - t = c|r| + 1 - |f|$  は 1 増えるので問題なし
    - $|f| \leq |r|$  のとき、 $cs + 1 - t = c|f| + 1 - |r|$  は c 減る
      - 不変条件を守るには、キューの先頭 c 個の負債を返済し、全ての後続の累積負債を c ずつ減らす
- 回転を引き起こす `cons` と `tail`
  - $|f| > c|r| + 1$  のとき、 $|f| = cm + 2, |r| = m$  とすると、
    - `r' = r ++ reverse (drop i f)` なので ( $i = \frac{|f|+|r|}{2} = \frac{(c+1)m}{2} + 1 > m + 1$ )
    - `++` のために  $|r| = m$  の負債: 末尾  $m$  ノードに 1 ずつ負わせる
    - `reverse` のために  $\frac{(c+1)m}{2} + 1$  の負債: 末尾から  $m + 1$  番目のノードにまとめて負わせる
    - 負債は次を満たすように分散される
 
$$d(j) = \begin{cases} 1 & j < m \text{ のとき} \\ \frac{(c+1)m}{2} + 1 & j = m \text{ のとき} \\ 0 & j > m \text{ のとき} \end{cases} \quad \text{かつ} \quad D(j) = \begin{cases} j + 1 & j < m \text{ のとき} \\ \frac{(c+3)m}{2} + 1 & j \geq m \text{ のとき} \end{cases}$$
    - あとは、ノード 0 の負債を返済すれば不変条件を守ることができる
  - $|r| > c|f| + 1$  のとき
    - 略