

演習問題 5.2

二項ヒープの `insert` が $O(1)$ 償却時間で実行されることを銀行家法を用いて示す。

物理学者法: 二項ヒープのポテンシャルをヒープの木の数としていた。

銀行家法の方針: ヒープ中の各木に対して貯金を1ずつ割り当てる。

`insert` の呼び出しは $k+1$ ステップかかる。(ただし k は `link` の呼び出し回数)

このとき、 k 個の木を消費しているので貯金は k 減少、1 個の木を生んでいるので貯金は 1 増加する。

そのため、償却コストは $a_i = t_i + c_i - \bar{c}_i = (k+1) + 1 - k = 2$ となる。

補足

木の有無を 2 進数表現してみる。

例えば要素数 11 の二項ヒープは $(1011)_2$ と表現できる。

`insert` を呼び出すことは $(1011)_2 + (1)_2 = (1100)_2$ という計算に似ている。

このとき、繰り上がりが連鎖している。これをスロー再生してみよう。

$$(1011)_2 + (1)_2$$

$$= (1011_{+1})_2 \quad \text{-- } (1_{+1})_2 \text{ はその位に 1 が足されようとしていることを表す}$$

$$= (101_{+1}0)_2 \quad \text{-- 1 の位の値は 0 になり、繰り上がった 1 が 2 の位に足されようとしている (貯金 - 1)}$$

$$= (10_{+1}00)_2 \quad \text{-- 2 の位の値は 0 になり、繰り上がった 1 が 4 の位に足されようとしている (貯金 - 1)}$$

$$= (1100)_2 \quad \text{-- 4 の位の値が 1 になった (貯金 + 1)}$$

ここで、`link` が呼び出される回数こそが、繰り上がりの回数、すなわち貯金が減る回数を表している。