Dawid Łydka 184440

Metody numeryczne – Projekt 3

Aproksymacja profilu wysokościowego

1. Cel projektu, informacje wstępne

Celem projektu było zaimplementowanie interpolacji wielomianowej Lagrange'a oraz interpolacji funkcjami sklejanymi z wykorzystaniem funkcji trzeciego stopnia. Obie metody zastosowano do interpolacji profili wysokościowych trzech, zróżnicowanych tras aby odpowiednio móc porównać otrzymane wyniki. Próbki węzłów pobierane były w sposób równomierny. Do zrealizowania zadania wykorzystano język *Python* oraz bibliotekę *matplotlib* do wykreślania końcowych wykresów. Do rozwiązania układu równań, które pojawia się przy okazji metody funkcji sklejanych użyto faktoryzacji LU z pivotingiem, pozwajającym uniknąć dzielenie przez 0.

2. Aproksymacja a interpolacja

Aproksymacja jest działaniem mającym na celu wyznaczenie przybliżenia nieznanej wartości na podstawie innych, znanych wartości, które są jej wystarczająco bliskie. Najczęściej wykorzystuje się ją do wyznaczenia postaci całej funkcji ciągłej, na podstawie zbioru znanych wejściowych, które funkcja ta przyjmuje w pewnych punktach swojej dziedziny.

Interpolacja to szczególny przypadek aproksymacji. Interpolacja wymaga aby dla danych węzłów interpolacji wartość interpolowanej funkcji była dokładnie taka sama jak dane pomiarowe, względem których zdecydowano się zastosować interpolację. Jednymi z bardziej popularnych i często używanych metod interpolacji są interpolacja wielomianowa Lagrange'a oraz interpolacja funkcjami sklejanymi. Obie metody wykonują to samo zadanie ale ich wyniki, efektyność się różni co zostanie przedstawione w dalszej części dokumentu.

3. Wybór profili wysokościowych

Do przeprowadzenia testów wybrano trzy trasy, których charakterystyka profili wysokościowych była możliwie jaknajbardziej zróżnicowana. Wybrane trasy to:

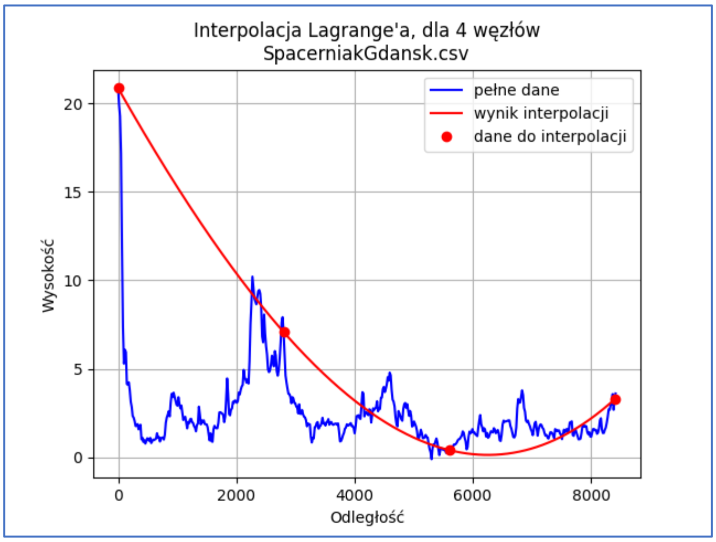
- SpacerniakGdansk.csv – profil generalnie płaski (brak większych wachań w wysokości terenu)
- WielkiKanionKolorado.csv – teren zróżnicowany, kilka wzniesień ze znaczącymi różnicami w wysokości
- MountEverest.csv – jedno duże wzniesienie, profil łagodny, przypomina parabolę

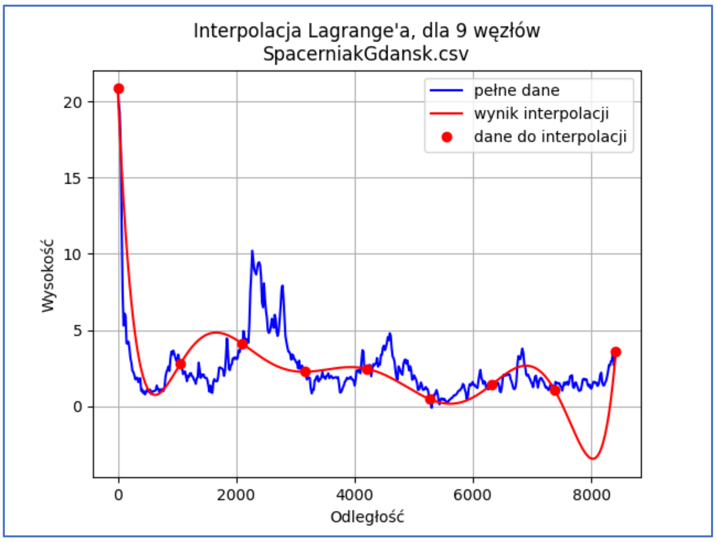
Dane pochodzą z archiwum zamieszczonego na stronie przedmiotu na portalu eNauczanie.

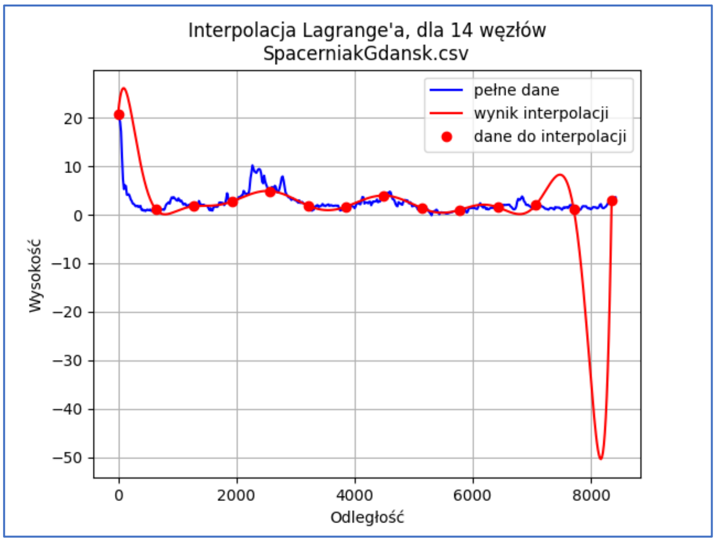
4. Interpolacja Lagrange'a

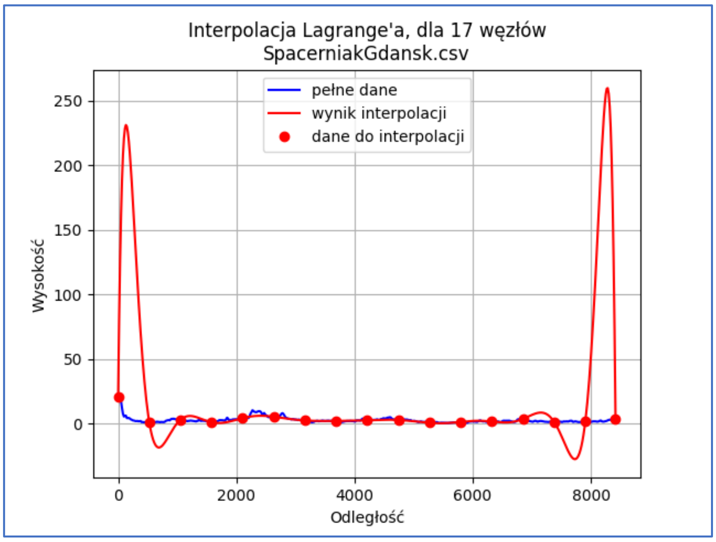
Ta metoda interpolacji, zwana także interpolacją wielomianową, opiera się na twierdzeniu które mówi, że każdą funkcję ciągłą przyjmującą na przedziale [a, b] wartości rzeczywiste można przybliżyć z dowolną dokładnością za pomocą funkcji wielomianowej. Interpolacja Lagrange'a charakteryzuje się przede wszystkim prostą implementacją, która polega na przybliżaniu wielomianem n stopnia w n+1 punktach, zwanych węzłami. Z łatwością implementacji wiąże się również krótki czas wykonania algorytmu – jest on zależny od tego ile próbek weźmiemy oraz ile węzłów wybierzemy i jest zdecydowanie krótszy od interpolacji funkcjami sklejanymi. Niestety metoda ta jest bardzo narażona na tzw. efekt Rungego - oscylacje na krańcach przedziału.

Poniżej zaprezentowano w formie wykresów wyniki interpolacji wielomianowej Lagrange'a dla pierwszej z tras czyli *Spacerniak Gdańsk*

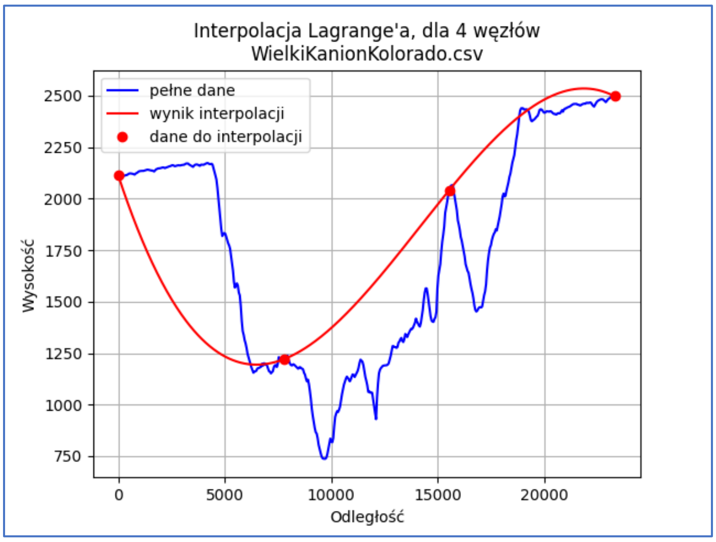


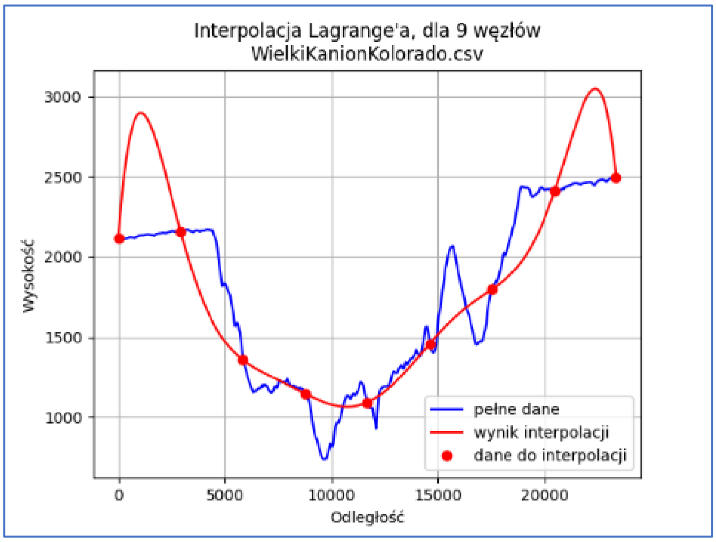


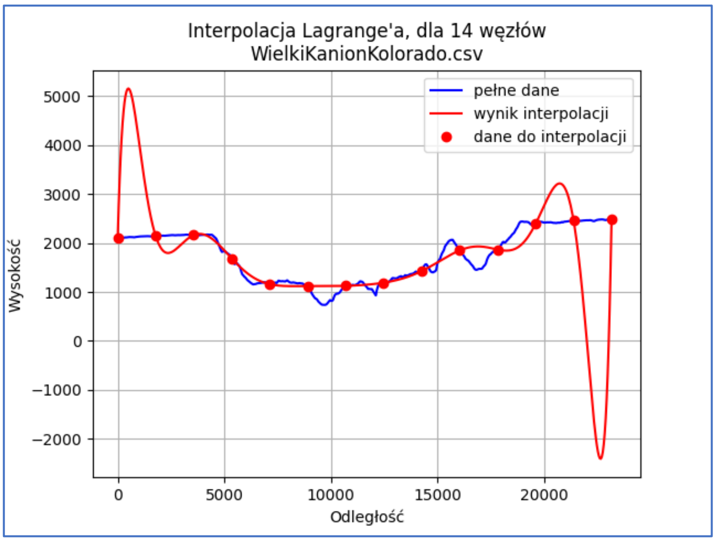


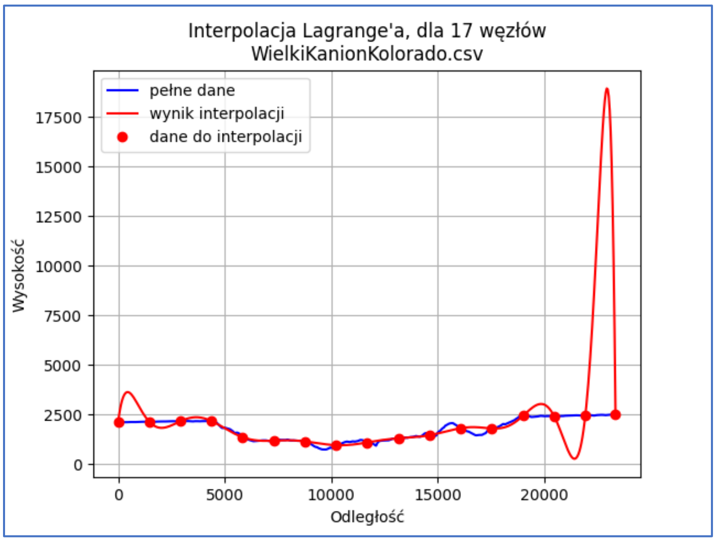


Metoda interpolacji Lagrange'a niezbyt dobrze odwzorowuje funkcje pełnych danych. Pomimo profilu, który nie jest w teorii zbyt zmienny posiada dość znaczące, w przypadku interpolacji, szybkie zmiany, których nie potrafi uwzględnić metoda Lagrange'a. Zwiększenie liczby węzłów nie poprawia sytuacji globalnie. Pomimo poprawy dokładności w środku przedziału wartości odległości, pojawiają się coraz większe oscylacje na krańcach. Zjawisko to nosi nazwę efektu Rungego, które oznacza pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej mimo zwiększenia liczby węzłów.

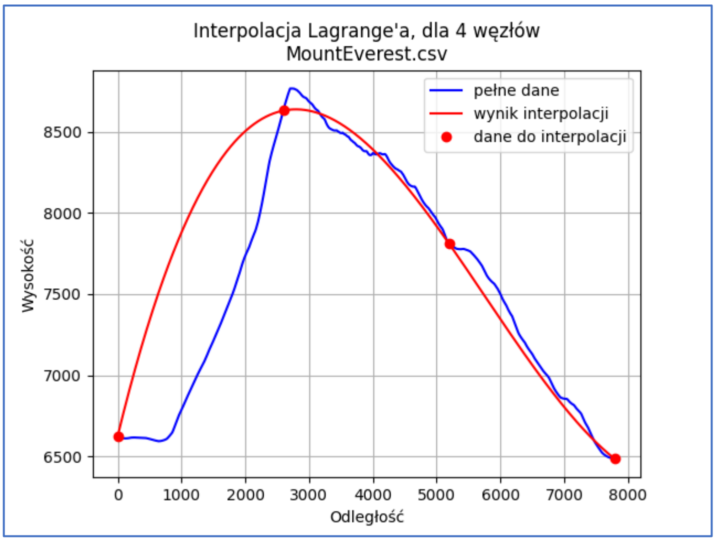


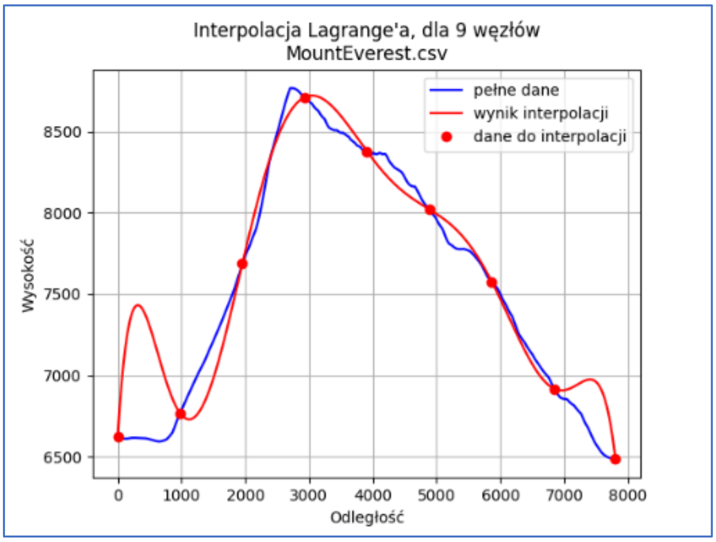


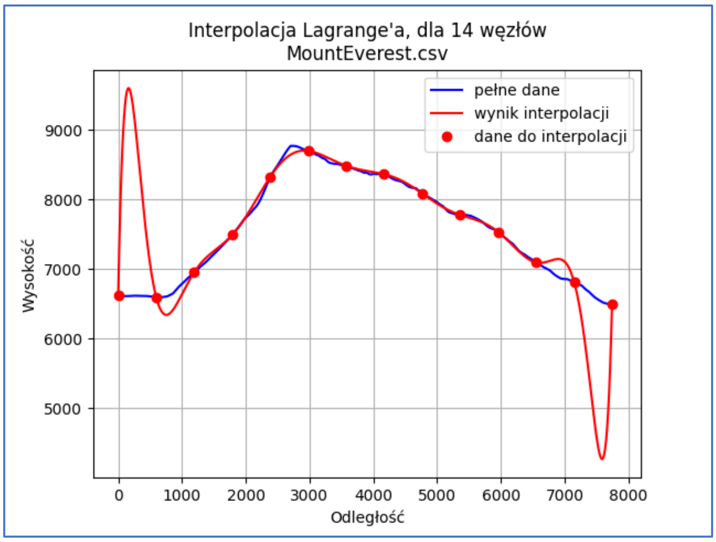


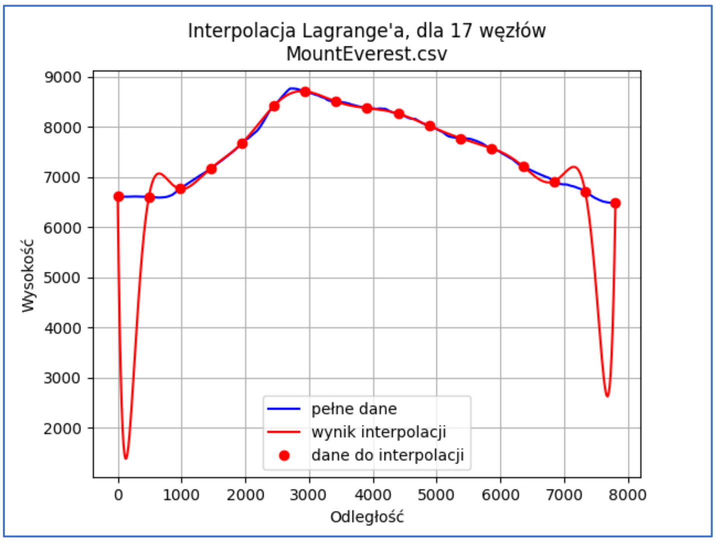


Dla terenu, jak w przykładzie Wielkiego Kanionu Kolorado, czyli takiego dla którego wysokość dość gwałtownie się zmienia wynik jest gorszy niż dla profilu o małych zmianach, które można uznać jako teraz płaski (Spacerniak Gdańsk). Żadna liczba węzłów w tym wypadku nie była by odpowiednia. Przekłamania są zbyt duże żeby móc wykorzystać sensownie taką interpolacje dla rzeczywistych zastosowań gdzie często oczekujemy dużej dokładności. W porówaniu do poprzedniego profilu trasy Spacerniaka w Gdańsku, Wielki Kanion Kolorado wypada znacznie gorzej. Nawet nie zbliża się do wzorcowych wartości w środku badanego przedziału. Widoczne jest niepełne dostosowanie się do kształtu oryginalnej funkcji.





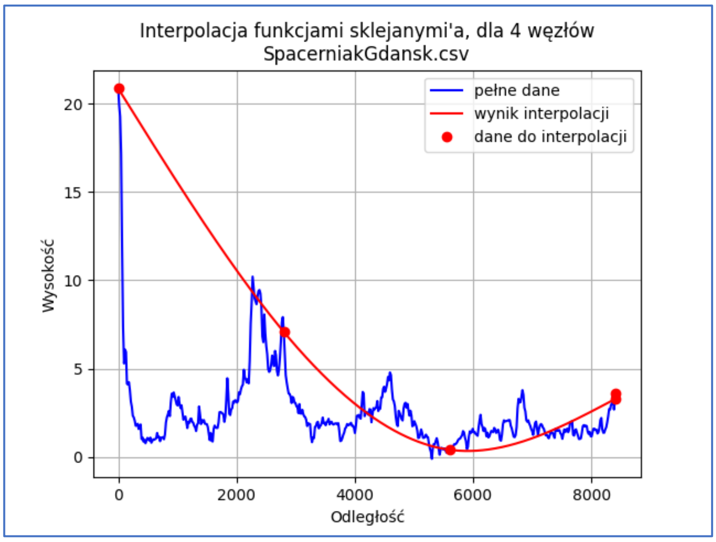


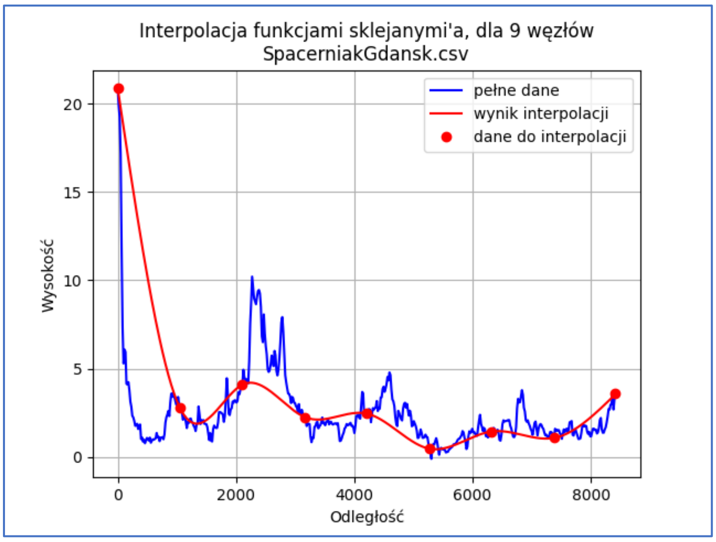


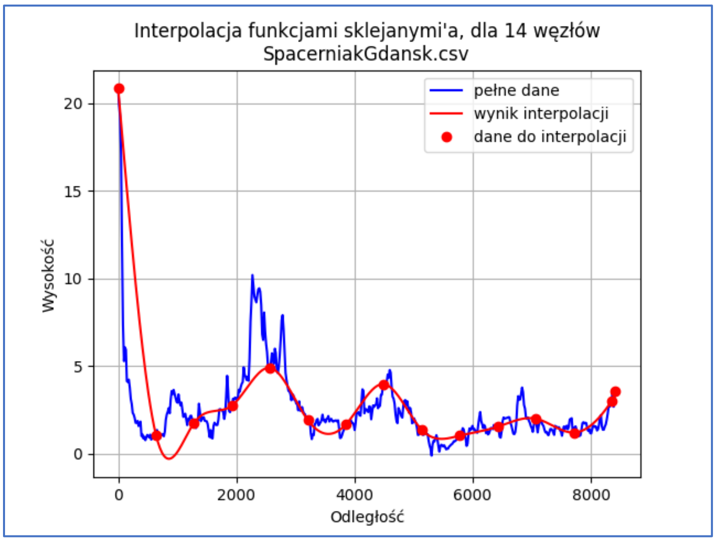
Zastosowanie interpolacji wielomianowej Lagrange’a do profilu trasy jakim charateryzuje się Mount Everest jest najbardziej sensowne. Widać, że spośród wszystkich typów tras jakie przetestowano dla metody Lagrange’a to tutaj efekt jest najbardziej zadowalający. Nie jest to bardzo dokładne przyblizenie jednakże można je uznać jako zadowalające. Dla zastosowań gdzie nie potrzebna jest duża dokładność można by pokusić się o wykorzystanie tej metody do interpolacji, oczywiście dla funkcji podobnych do tej, którą kreśli profil wysokościowy Mount Everest (paraboliczny kształt bez nagłych skoków, gładko narastajacy lub malejący). Interpolacja Lagrange’a również tu uwidoczniła swoją największą wadę, jaką jest efekt Rungego na krańcach przedziału. Aby zapobiec temu problemowi należałoby wybierać węzły w sposób nierównomierny wraz z zwiększoną ich liczbą na krańcach badanego przedziału. Jednak w tych rozważaniach założono istnienie narzędzia mierzącego jedynie w pewnych, stałych interwałach czasowych.

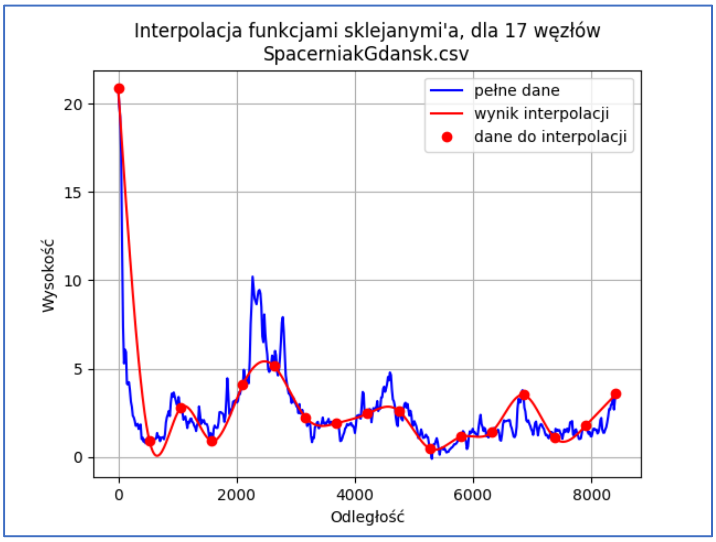
5. Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia

Ze względu na pojawiające się oscylacje na krańcach przedziałów w interpolacji Lagrange'a, zastosujmy interpolację funkcjami sklejanymi. Technika ta wykorzystuje nie jedną, ale szereg funkcji, z których każda aproksymuje tylko jeden z podprzedziałów wyznaczonych przez wybrane węzły interpolacji. Przy liczbie węzłów równej n funkcji tych jest zatem n – 1. Konieczne jest rozwiązanie układu 4 · (n – 1) równań liniowych. Implementacja jest bardziej skomplikowana niż w przypadku wcześniej omawianej metody ale wyniki wynagradzają koszt implementacji.

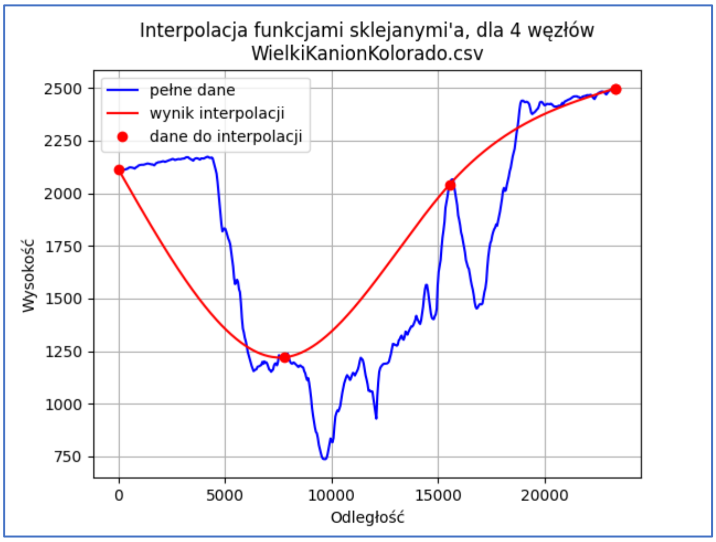


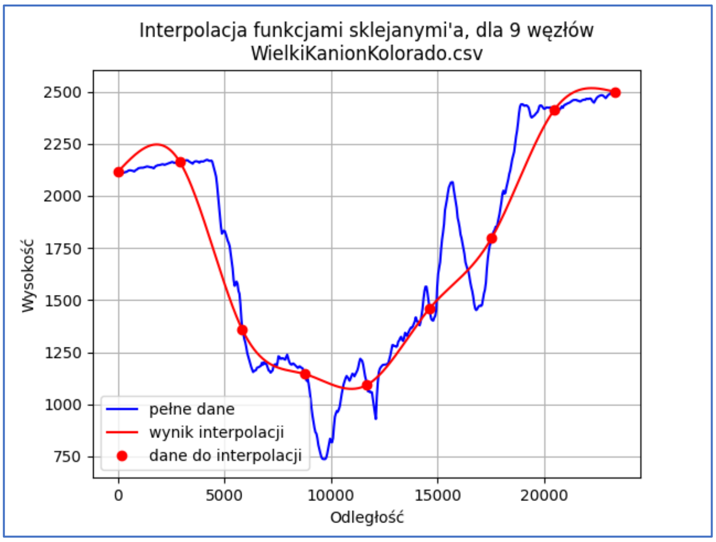


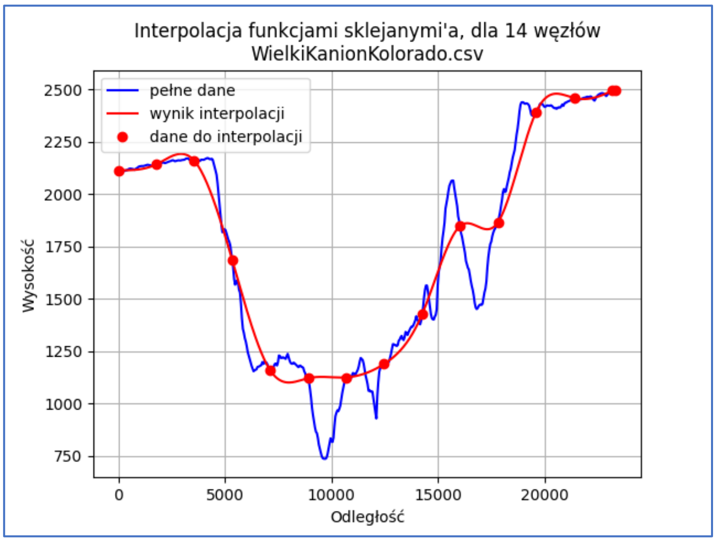


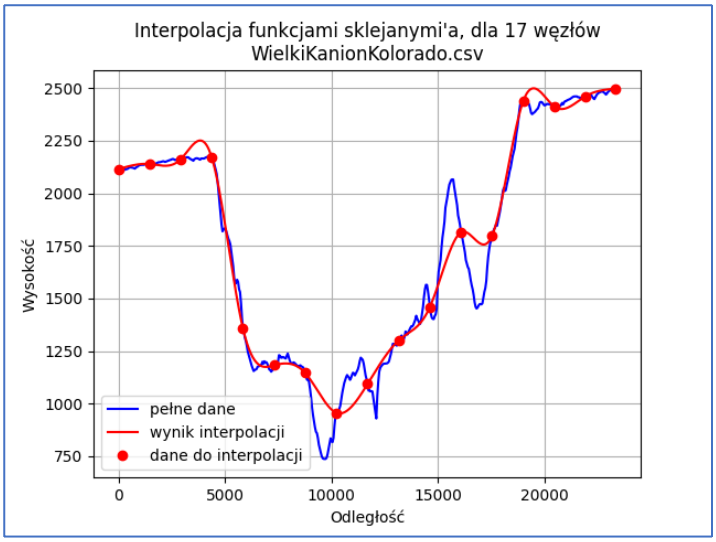


Jak widać na powyższych wykresach wykresy wynikowe z metody interpolacji funkcjami sklejanymi są o wiele bardziej zbliżone do wykesu pełnych danych. Ponadto metoda ta jest pozbawiona efektu Rungego – oscylalcji funkcji na krańcach przedziału oraz wraz ze wzrostem liczby węzłów przybliżenie jest coraz lepsze. Kształt jest zachowany przy czym metoda nie radzi sobie z nagłymi zmianami w wartości funkcji wzorcowej. Pomysłem może być zagęszczenie liczby węzłów w tych miejscach gdzie przyrost jest największy.

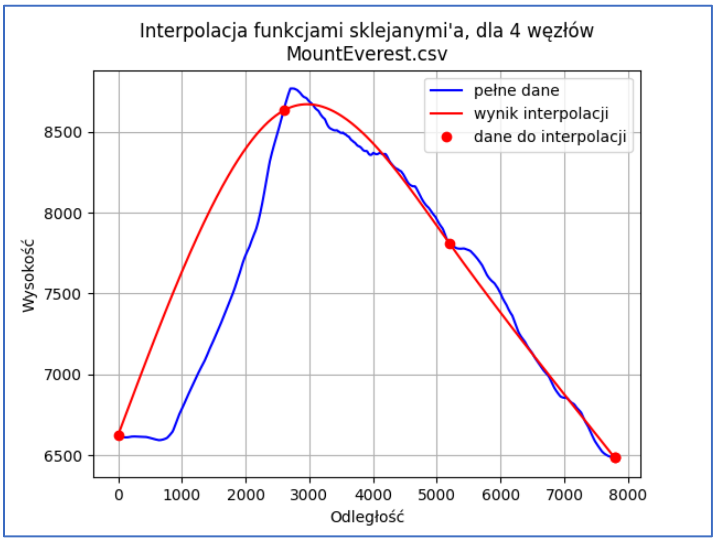


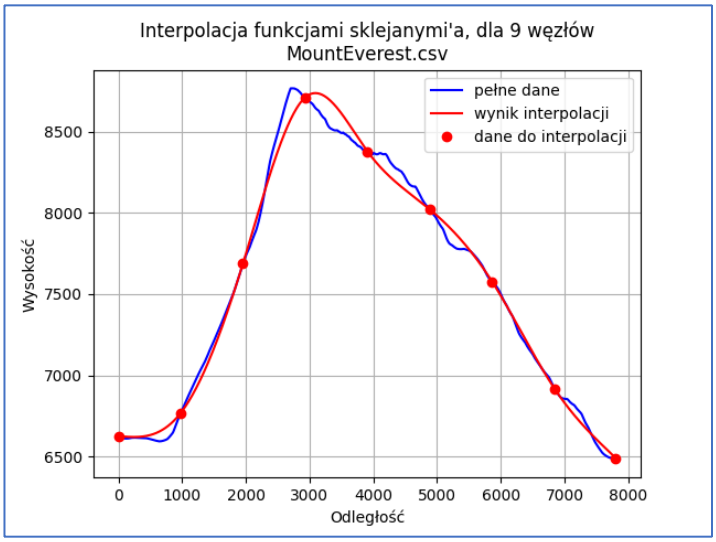


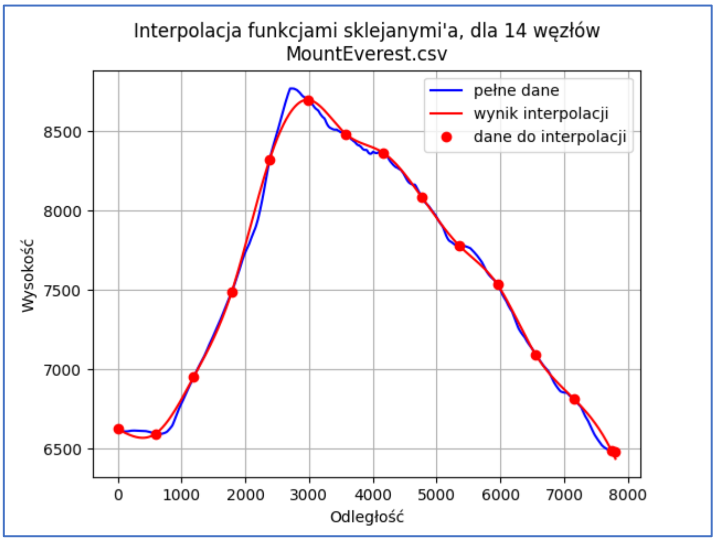


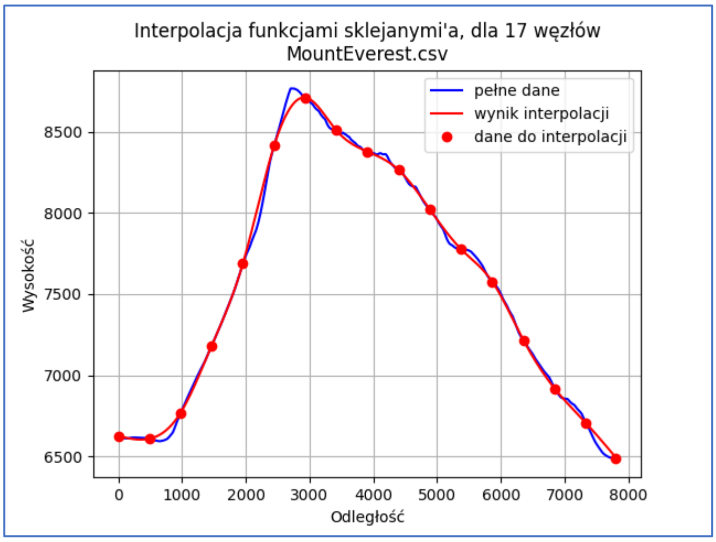


Metoda z wykorzystaniem tzw. splajnów znowu jest lepsza od Lagrange'a. W porówaniu do metody funkcji sklejanych dla Wielkiego Kanionu z wynikiem dla Spacerniaka w Gdańsku widać, że większe zmiany wysokościowe w przypadku Kanionu wpływają negatywanie na jakość funkcji wynikowej. Podobieństwo funkcji wzorcowej a tej z interpolacji tutaj jest duże, chociaż widać niedokładności w miejscach gdzie funkcja gwałtownie wzrasta lub maleje. Zagęszczenie liczby węzłów w tych obszarach powinno poprawić wynik, jednakże w tych badaniach założono możliwość dokonywania pomiaru tylko w pewnych z góry ustalonych interwałach czasowych. Powyższe, cztery wykresy pokazują wyraźnie, że metoda funkcji sklejanych polepsza wynik wraz ze wzrostem liczby wykorzystanych węzłów.









Znowu profil Mount Everest jest najlepszy jeśli chodzi o dopasowanie funkcji interpolowanej i funkcji odniesienia. Dzieje się tak, ponieważ profil Mount Everest pozbawiony jest nagłych zmian wysokości co korzystnie wpływa na równomierne rozmieszczone węzły pomiarowe. Standarodo już dla funkcji sklejanych zauważyć można poprawę dokładności zgodnie ze zwiększeniem liczby węzłów pomiarowych i jest to jednocześnie jedna z większych różnic obu metod interpolacji.

6. Podsumowanie

Na podstawie powyższych wykresów możemy wysunąć kilka podstawowych wniosków:

- Interpolacja splajnami jest znacznie lepszą metodą aproksymacji, dającą więcej możliwości w kwestii doboru stopnia dokładności oraz zapewniającą bardziej wiarygodne i czytelne rezultaty – może to być błędny wniosek biorąc pod uwagę duże zapotrzebowanie czasowe i pamięciowe metody funkcji sklejanych (należy dostosować metodę do potrzeb i możliwości sprzętowych)
- Rozwiązaniem, które daje dokładniejsze rezultaty jest metoda interpolacji funkcjami sklejanymi. Jest to metoda o większym zapotrzebowaniu zarówno pamięciowym, jak i czasowym, ale generuje znacznie lepsze rezultaty. Nie jest podatna na efekt Rungego. Wraz ze zwiększaniem się liczby podprzedziałów, otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie.
- Metoda interpolacyjna Lagrange'a pomimo swojej szybkości, prostocie implementacyjnej oraz mniejszego zapotrzebowania pamięci generuje efekt Rungego, czyli oscylacje dla krańcach.
- Interpolacja w obu metodach jest zależna od liczby punktów - im jest ich więcej, tym dokładniejsze przybliżenie otrzymujemy. Dla metody Lagrange'a generuje za to ogromne krańcowe oscylacje.
- Ostatnim badanym aspektem był wpływ terenu. Na podstawie uzyskanych rezultatów, można stwierdzić, że dla dla regularnie rosnących lub malejących tras przybliżenia są dokładniejsze. Kiedy pojawią się gwałtowne skoki, przybliżenie dla tej samej ilości punktów okazuje się być mniej dokładne.