САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И УПРАВЛЕНИЯ
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ
И ПРОГРАММНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

С. А. Нестеров

СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций

Санкт-Петербург
2014

УДК 681.513.5
ББК 14.2.6
Н561

Нестеров С. А. Системы оптимального управления : конспект лекций — СПб. : Изд-во политехнического ун-та, 2014. — 73 с.

Настоящее пособие представляет собой конспект лекций по первой части курса «Оптимальное и адаптивное управление», читаемого на кафедре «Компьютерные системы и программные технологии» для студентов пятого курса, обучающихся по профилю «Встраиваемые системы управления».

Редакторы:
Дмитрий Александрович Киселёв
Артур Константинович Еников

Содержание

Введение

Для начала определимся, что понимается под управлением. Существует три фундаментальных принципа управления:

- Управление по заданию — необходимо получить заданный сигнал v на выходе объекта управления (ОУ). Для этого передаточная функция системы управления в целом (см. рис. 0.1) должна быть равна единице. Тогда передаточная функция устройства управления (УУ) равна:

$$W_{УУ} = \frac{1}{W_{ОУ}} \tag{0.1}$$

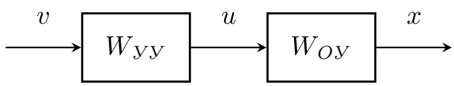


Рис. 0.1. Управление по заданию

- Управление по возмущению — возмущения f, действующие на объект, учитываются при формировании управляющего воздействия u (см. рис. 0.2). Передаточная функция от возмущений к выходу может быть выражена как $W_{fu}W_{ОУ} + W_{fx}$ и должна быть равна нулю. Тогда передаточная функция от возмущений к управлению равна:

$$W_{fu} = -\frac{W_{fx}}{W_{ОУ}} \tag{0.2}$$

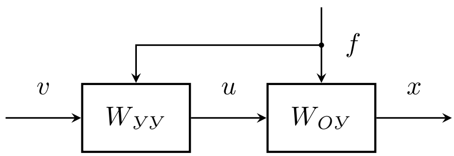


Рис. 0.2. Управление по возмущению

- Управление по ошибке — на вход регулятора подаётся отклонение e выходного сигнала объекта x от сигнала задания v (см. рис. 0.3). Если e устремить к нулю, то передаточная функция от e к x должна устремиться к бесконечности, чтобы получить на выходе заданную величину:

$$W_{УУ}W_{ОУ} \longrightarrow \frac{x_{уст}}{0} = \infty \tag{0.3}$$

Этого можно добиться, например, введением в регулятор очень больших коэффициентов усиления или интегрирующих звеньев.

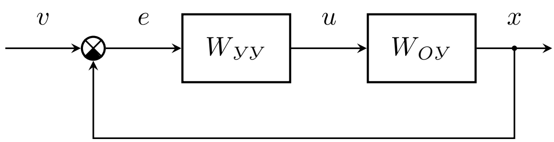


Рис. 0.3. Управление по ошибке

По решаемой задаче системы автоматического управления (САУ) можно разделить на системы:

- стабилизации
- программного управления
- слежения
- оптимального управления
- адаптивного управления (поисковые и самонастраивающиеся)

Анализ и синтез САУ предполагает, что кроме цели рассматривается путь решения задачи. Для этого используются различные показатели качества:

- Прямые:
  - Статические: статизм, добротность;
  - Динамические: время переходного процесса, перерегулирование, колебательность;

- Косвенные:
  - Корневые;
  - Частотные;
  - Интегральные.

Существует два основных подхода к синтезу САУ:

1) Обеспечить заданные показатели качества;
2) Обеспечить наилучшее (оптимальное) в каком-либо определённом смысле качество управления для заданного объекта при конкретных условиях работы и ограничениях.

Эти два подхода имеют право на жизнь и естественно широко применяются. При этом надо понимать, что второй подход даёт максимально возможный (в отличие от первого, который даёт минимально пригодный) результат. Однако, за предельно достижимое качество необходимо будет чем-то «заплатить». Поэтому должно быть оценено, что даёт выигрыш в качестве и чем за это надо «заплатить». Соответственно, дальнейшее и посвящено рассмотрению теоретических моментов по расчёту и реализации соответствующих систем.

При решении такой задачи естественно требовать от управляемого процесса (ОУ) выполнения условий полной управляемости и наблюдаемости.

1. Постановка задачи оптимального управления

В общем случае постановки задач оптимального управления характеризуются значительным разнообразием, что связано с тремя основными причинами:

- Конкретными «условиями» функционирования, к которым следует отнести:
  - начальное (исходное) и конечное (требуемое) состояния ОУ с временной привязкой $X_0\,(t_0)$, $X_к\,(t_к)$;
  - взаимосвязи, присущие реальным процессам, в форме:
    * алгебраических (голономных) уравнений $G\,(x,u)=0$,
    * дифференциальных (неголономных) уравнений $\varphi\,(x,u,t)=\dot{x}-Ax+Bu=0$,
    * интегральных (изопериметрических) уравнений $I\,(x,u,t)=\int\limits_{t_0}^{t_к}\varphi\,(x,u,t)\,dt=C$;
- Ограничениями на управляющие сигналы и переменные состояния $\underline{U}\le U\le\overline{U}$; $\underline{X}\le X\le\overline{X}$; $\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2\le A$
- Математическим видом критерия оптимальности.

Выбор критерия не является формальным актом, он не предписывается какой-либо теорией, а полностью определяется содержанием задачи управления. В общем виде критерий записывается функционалом:

$$J\left(U,X,\underset{t_к-t_0}{T}\right)=\Phi\left(\underset{X_0,\,X_к}{X\,(T)},T\right)+\int\limits_{t_0}^{t_к}F\big(X(t),U(t),t\big)\,dt, \qquad (1.1)$$

где $\Phi\big(X(T),T\big)$ — терминальная составляющая, характеризующая качество управления только по начальному и конечному состояниям ОУ (поэтому отсутствует U); $F\big(X(t),U(t),t\big)$ — подынтегральная целевая функция, характеризующая качество внутри интервала управления. Управление должно обеспечивать экстремальное значение критерия оптимальности $U = \underset{U}{extr}\, J\,(X, U, T)$.

Вид критерия $J(X, U, T)$ задаёт класс задач оптимальности:

1) Критерий максимального быстродействия (минимального времени реакции):

   а) $\Phi\big(X(T), T\big) = T = t_к - t_0, \quad F\big(X(t), U(t), t\big) \equiv 0$

   б) $\Phi\big(X(T), T\big) \equiv 0, \quad F\big(X(t), U(t), t\big) = 1 \to \int\limits_0^T 1\, dt = T$

2) Критерий минимального расхода управления (топлива):

$$\Phi\big(X(T), T\big) \equiv 0, \quad F\big(X(t), U(t), t\big) = R\,|U| = \sum_{i=1}^{n} r_i\,|u_i|$$

3) Критерий предельной точности (минимальной ошибки):

$$\Phi\big(X(T), T\big) \equiv 0, \quad F\big(X(t), U(t), t\big) = X^T Q X,$$

   где X — отклонение (ошибка) от заданного значения, Q — матрица весовых коэффициентов (важность каждой составляющей в общей ошибке).

4) Критерий минимума энергетических затрат:

$$\Phi\big(X(T), T\big) \equiv 0, \quad F\big(X(t), U(t), t\big) = U^T R U = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i^2$$

   на интервале $t_к - t_0 = T$

5) Критерий терминального управления (задача мягкой посадки или система управления конечным положением):

$$\Phi\big(X(T), T\big) \neq 0, \quad F\big(X(t), U(t), t\big) \equiv 0$$

Часто используются смешанные варианты критериев:

6) Квадратичный критерий качества управления (предельной точности при минимуме энергетических затрат):

$$\Phi\big(X(T),T\big) \equiv 0, \quad F\big(X(t),U(t),t\big) = X^T Q X + U^T R U$$

7) Критерий максимального быстродействия при минимальном расходе топлива (для управления автономными ОУ):

$$\Phi\big(X(T),T\big) \equiv 0, \quad F\big(X(t),U(t),t\big) = 1 + R\,|U| = 1 + \sum_{i=1}^{n} r_i\,|u_i|$$

8) Критерий минимизации энергетических затрат при фиксированном интервале времени и заданном состоянии:

$$J = X^T\,(T)\,SX\,(T) + \int\limits_0^T \big(X^T Q X + U^T R U\big)\;dt$$

Постановки задачи с критерием общего вида (двумя слагаемыми) принято называть задачей в форме Больца; терминальные постановки (только первое слагаемое) — в форме Майера; постановки только с интегралом (без первого слагаемого) — в форме Лагранжа.

В итоге: задачи оптимального управления являются задачами минимизации на множестве функций и могут быть решены методами классического вариационного исчисления. Однако, наличие ограничений в форме равенств (уравнения УП и ОУ) и особенно в форме неравенств (ограничения допустимых управлений и состояний) требует применения методов неклассического вариационного исчисления, к которым относятся принцип максимума Л. С. Понтрягина, метод динамического программирования Р. Беллмана, метод моментов Н. Н. Красовского, симплекс-метод линейного программирования, метод нелинейного программирования Табака-Куо, Куна-Таккера, символьные методы решения нелинейных алгебраических (например, трансцендентных) уравнений и т. п. (градиентные и методы прямого поиска).

2. Теория решения задач на экстремум

Формально достаточно общие задачи на отыскание max или min функции записываются в виде $\underset{x}{extr}\,F\left(x\right)$, $x \in X$, т. е. найти в множестве X точку x, при которой скалярная функция векторного аргумента $F\left(x\right)$ принимает экстремальное значение. При этом точки $x = \left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)^T \in X$ называют допустимыми, само множество может быть ограничено или $X \in R^n$, а задача поиска $\max F\left(x\right)$ сведена к задаче поиска $\min -F\left(x\right)$. Точку $x^* \in X^*$ такую, что $F\left(x^*\right) \underset{\leq}{\geq} F\left(x \in X,\, x \neq x^*\right)$ называют решением задачи на $\underset{\min}{\max}$ (экстремум), а $F\left(x^*\right)$ — значением экстремума.

Для сложных функций в заданной области может быть несколько таких точек (локальные экстремумы, также называемые слабыми, и абсолютные экстремумы, также называемые сильными).

Для отыскания решения задачи без ограничений необходимо:

- выписать условия экстремума:

$$grad\,F\left(x\right) = \frac{\partial F\left(x\right)}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

  (для скалярного аргумента: $\dfrac{df}{dx} = 0$);
- найти решения этих уравнений — полученные решения называют стационарными точками;
- отыскать среди них решения задачи или доказать, что его нет. Достаточным условием решения задачи на max (min) является отрицательная (положительная) определённость матрицы вторых производных $\dfrac{\partial^2 F\left(x\right)}{\partial x^2}$ — матрицы Гессе.

Пример 2.1

$$\min\ F\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + 4x_2^2\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 4x_2 \end{cases} \equiv 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Положительная определённость может быть подтверждена вычислением собственных чисел ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$) или анализом всех диагональных миноров ($\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 4$). Это доказывает, что стационарная точка $(0,0)$ абсолютный (глобальный) min.

Пример 2.2

$$\min F(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^* = (0,0)^T$$

Матрица Гессе $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$ положительно определённая — это достаточное условие $\min F(x^*) = 0$

Пример 2.3

$$f(x) = x^3\left(x^2 - 1\right) \to extr; \quad -1 \le x \le 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 3x^2 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/5}, x_3 = -\sqrt{3/5}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 20x^2 - 6x$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{x=x_1} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{x=x_2} = 6\sqrt{3/5} > 0 \ \Rightarrow \min \\ \left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{x=x_3} = -6\sqrt{3/5} < 0 \ \Rightarrow \max \end{cases}$$

$$f(x_1) = 0; \ f(x_2) = -\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0{,}2; \ f(x_3) = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0{,}2$$

$$f(-1) = 0; \ f(2) = 24$$

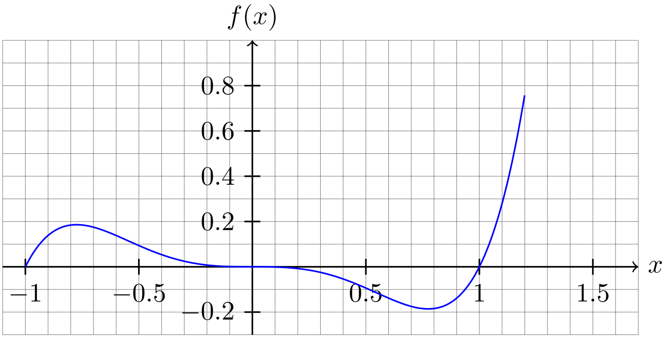


Рис. 2.1. График функции, рассмотренной в примере 2.3

В качестве точек возможного экстремума необходимо проанализировать не только стационарные точки, но ещё границы допустимой области и точки возможных разрывов оптимизируемой функции.

При отыскания решения задачи с ограничениями в форме равенств $X = \left\{x \in R^n, G(x) = \left(g_1(x), g_2(x), \ldots g_k(x)\right)^T = 0\right\}$ существует несколько методов. Наиболее просты и очевидны: метод прямой подстановки и метод составления функции Лагранжа. При решении методом составления функции Лагранжа необходимо:

- составить функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = F(x) + \lambda^T G(x), \tag{2.2}$$

  где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k)^T$ — вектор неопределённых множителей;
- выписать необходимые условия экстремума $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$;
- найти стационарные точки и отыскать среди них решения задачи или доказать, что решения нет.

Пример 2.4

Найти стационарные точки для $F(x) = 0.5\left(x_1^2 + 4x_2^2\right)$ при линейном ограничении на переменные $g(x) = x_1 + 2x_2 - 1 = 0$.

- $L(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + 4x_2^2\right) + \lambda\left(x_1 + 2x_2 - 1\right)$
- Необходимые условия: $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1 + \lambda = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -\lambda;$

  $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = -\dfrac{1}{2}\lambda;$

  $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -0.5$
- Стационарная точка: $\left(x_1, x_2\right) = (0.5, 0.25)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 1; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} = 1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 4; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda} = 2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_1} = 1; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_2} = 2; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial X, L} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$F = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{1}{4} = F\left(x^*\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + 4x_2^2\right) = C; \quad x_1^2 + 4x_2^2 = 2C = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7; \quad x_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.35$$

Задачи оптимизации без ограничений и с ограничениями в форме равенств называются классическими и могут быть решены аналитически. Все остальные (неклассические) очень редко могут решаться аналитически. Для их решения используют алгоритмы Куна-Таккера, градиентные методы, симплексные алгоритмы и методы прямого поиска.

Стационарные точки экстремальной задачи находятся путём решения уравнений вида $Q(x) = 0$, рекуррентным методом Ньютона.

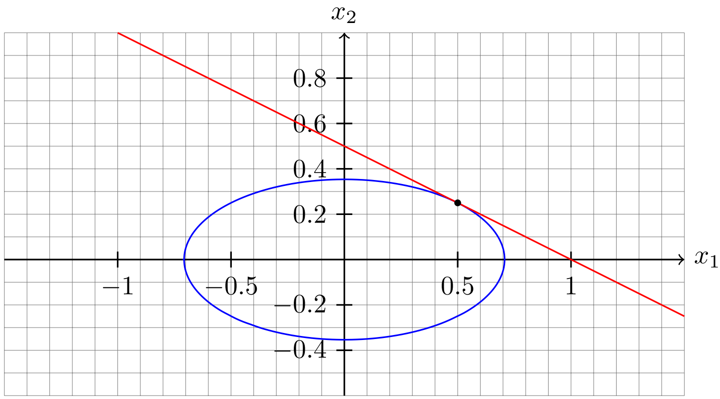


Рис. 2.2. Решение задачи, рассмотренной в примере 2.4

Последовательные приближения осуществляют по формуле $x_{n+1} = x_n - \dfrac{Q(x_n)}{\left(dQ(x_n)/dx\right)}$, геометрический смысл которой состоит в том, что точка x_{n+1} вычисляется как пересечение оси абсцисс с касательной к кривой $y = Q(x)$ в точке x_n.

Пример 2.5

Найти численное значение корня уравнения $x - \sin x = \dfrac{\pi}{2}$. Составляем рекуррентную формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin x_n - \pi/2}{1 - \cos x_n}$$

При $x_0 = 2.4$ получается итерационная последовательность:

$$x_1 = 2.31,\ \ x_2 = 2.3099,\ \ x_3 = 2.309884, \ldots$$

3. Основы вариационного исчисления

3.1. Оптимизация функционалов

Функционал — числовая скалярная функция, определяемая на множестве функций: $y = f(x)$ — функция от аргумента; $J(x) = \int\limits_0^T F(x, \dot{x}, t)\,dt$ — функция от функций (скалярная оценка различных функций).

Каждая функция $x(t)$ является точкой функционального пространства. Пусть эта функция однозначна, непрерывна и дифференцируема на рассматриваемом интервале (такие функции называются гладкими). Если значения функции соответствуют заданным в граничных точках их называют допустимыми. И тогда задача заключается в выборе среди допустимых функций такой, где функционал достигает наименьшего значения $\min\limits_{x \in \Omega} J(x)$. Решением таких задач занимается вариационное исчисление — аналог дифференциального исчисления для функций.

Итак, для функций условиями экстремума являются:

$$d\varphi(x) = 0 \quad \to \quad \delta J(x) = 0 \qquad (*)$$

$$d^2\varphi(x) \underset{\leq}{\geq} 0 \quad \to \quad \delta^2 J(x) \underset{\leq}{\geq} 0 \qquad (**)$$

Из условия $(*)$ выводится уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \qquad (3.1)$$

Все функции удовлетворяющие этому уравнению, называются экстремалями. Если они проходят через граничные точки, то они называются допустимыми экстремалями.

Из условия $(**)$ выводятся условия Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \underset{\leq}{\geq} 0 \qquad (3.2)$$

Пример 3.1

$$J = \int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr, \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = 1$$

$$F = \dot{x}^2 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \;\; \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$$

Уравнение Эйлера: $\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \;\; \to \;\; 0 - \dfrac{d}{dt}\,(2\dot{x}) = 0$

$$\ddot{x} = 0, \quad \dot{x} = C_1, \quad x = C_1 t + C_2$$

$$\begin{cases} x(0) = C_2 = 0 \\ x(1) = C_1 + C_2 = 1 \;\; \Rightarrow \;\; C_1 = 1 \end{cases}$$

Допустимая экстремаль: $\hat{x} = t$

Условие Лежандра: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = 2 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \min$

$$J_{\min} = \int\limits_0^1 \left(\dot{\hat{x}}\right)^2 dt = \int\limits_0^1 \left(\dot{t}\right)^2 dt = \int\limits_0^1 1^2 dt = t\Big|_0^1 = 1$$

Пример 3.2

Найти уравнение выхода $x(t)$ и характеристический полином СУ, для которой $J(x) = \int\limits_0^\infty \left(a_0 x^2 + a_1 \dot{x}^2\right) dt \;\; \to \;\; \min$, при условиях $a_0 > 0, a_1 > 0, x(0) = x_0, x(\infty) = 0$.

$$F = a_0 x^2 + a_1 \dot{x}^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2a_0 x, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2a_1 \dot{x}$$

Уравнение Эйлера: $2a_0 x - \dfrac{d}{dt}\,(2a_1 \dot{x}) = 0$

$$\ddot{x} - \frac{a_0}{a_1} x = 0, \quad \lambda^2 - \frac{a_0}{a_1} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a_0}{a_1}}$$

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{a_0/a_1}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{a_0/a_1}\,t}$$

$$\left.\begin{aligned} &x(0) = C_1 + C_2 = x_0 \\ &x(\infty) = C_1 \cdot \infty = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; C_2 = x_0$$

Допустимая экстремаль: $\hat{x} = x_0 e^{-\sqrt{a_0/a_1}\,t}$

Условие Лежандра: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = 2a_1 > 0 \;\Rightarrow\; \min$

Характеристический полином системы: $D(p) = p + \sqrt{\dfrac{a_0}{a_1}}$

Обобщим результаты в двух направлениях:

1) Многомерный случай: $X = \big(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)\big)^T$ — векторная функция.

$$J(X) = \int\limits_{t_0}^{t_к} F\left(X, \dot{X}, t\right)\, dt \;\to\; \min \qquad x_i(t_0) = x_{i0},\;\; x_i(t_к) = x_{iк} \tag{3.3}$$

Тогда первое необходимое условие (уравнение Эйлера):

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0, \quad i = \overline{1,n} \tag{3.4}$$

Второе условие требует анализа матрицы вторых частных производных:

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_n} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_n \partial \dot{x}_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_n \partial \dot{x}_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_n^2} \end{matrix}\right\|$$

Для минимума все диагональные миноры должны быть ≥ 0, для максимума ≤ 0. Строгие неравенства дают и достаточность условий.

Пример 3.3

$$J = \int_0^1 \left(x_1 x_2 + \dot{x}_1 \dot{x}_2\right) dt \;\to\; extr$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1,\; x_1(1) = e,\; x_2(1) = \frac{1}{e}$$

$$X = \left(x_1, x_2\right), \quad F = x_1 x_2 + \dot{x}_1 \dot{x}_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = \dot{x}_2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \;:\; \ddot{x}_2 - x_2 = 0$$

$$x_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = \dot{x}_1 \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \;:\; \ddot{x}_1 - x_1 = 0$$

$$x_1 = C_3 e^t + C_4 e^{-t}$$

Подставив начальные и конечные условия, получим:

$$\hat{x}_1 = e^t, \quad \hat{x}_2 = e^{-t}$$

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_2^2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$\Delta_1 = 0,\; \Delta_2 = -1 \;\Rightarrow\; \max$$

$$J_{\max} = \int_0^1 \left(e^t e^{-t} + e^t\left(-e^{-t}\right)\right) dt = 0$$

2) Задача со старшими производными:

$$\begin{gathered} J(x) = \int_{t_0}^{t_к} F\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots x^{(n-1)}, t\right) dt \\ x\left(t_0\right) = x_0,\; \dot{x}\left(t_0\right) = \dot{x}_0, \ldots\; x^{(n-1)}\left(t_0\right) = x_0^{(n-1)} \\ x\left(t_к\right) = x_к,\; \dot{x}\left(t_к\right) = \dot{x}_к, \ldots\; x^{(n-1)}\left(t_к\right) = x_к^{(n-1)} \end{gathered} \tag{3.5}$$

Существует два способа решения:

а) Рассматривается векторная функция, составляемая из исходной $x(t)$ и её $(n-1)$ производной, т. е. задача как многомерный случай.

б) Уравнение Эйлера преобразуется в уравнение Эйлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)-\ldots+(-1)^n\,\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\right)=0 \quad (3.6)$$

Условие Лежандра: $\dfrac{\partial^2 F}{\left(\partial x^{(n)}\right)^2} \underset{\leq}{\geq} 0$

Пример 3.4

$$J\left(x\right)=\int\limits_0^1 \ddot{x}^2dt \;\;\to\;\; extr$$

$$x\left(0\right)=\dot{x}\left(0\right)=0,\;\; x\left(1\right)=0,\;\; \dot{x}\left(1\right)=1$$

$$F=\ddot{x}^2\;: \qquad \frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)=0$$

$$0-0+\frac{d^2}{t^2}\left(2\ddot{x}\right)=0 \;\;\Rightarrow\;\; x^{(4)}=0$$

$$x^{(3)}=C_1,\quad \ddot{x}=C_1t+C_2,\quad \dot{x}=\frac{1}{2}C_1t^2+C_2t+C_3$$

$$x=\frac{1}{6}C_1t^3+\frac{1}{2}C_2t^2+C_3t+C_4$$

$$x(0)=C_4=0,\quad \dot{x}(0)=C_3=0$$

$$\begin{cases} x(1)=\frac{1}{6}C_1+\frac{1}{2}C_2=0 \\ \dot{x}(1)=\frac{1}{2}C_1+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=6 \\ C_2=-2 \end{cases}$$

$$\hat{x}=t^3-t^2,\quad \ddot{\hat{x}}=6t-2$$

$$J_{\min}=\int\limits_0^1 \left(6t-2\right)^2dt=12t^3\Big|_0^1-12t^2\Big|_0^1+4t\Big|_0^1=4$$

3.2. Задачи с нефиксированными границами

Как для начального момента времени (левого конца), так и для конечного момента времени (правого конца) могут быть следующие варианты (для удобства будем рассматривать правый конец):

- Задача со *свободным* правым концом — $t_к$ не задано, $x\big(t_к\big)$ не задано.
- Задача с *подвижным* правым концом — $t_к = T$, $x\big(t_к\big)$ не задано.
- Задача со *скользящим* правым концом — $t_к$ не задано, $x\big(t_к\big)$ не задано, но определена их взаимосвязь $x_к = \psi\big(t_к\big)$.

В этих случаях (когда отсутствует соответствующее граничное условие) необходимым условием экстремума, кроме уравнения Эйлера (3.1), становятся условия трансверсальности:

$$\left\{\begin{aligned} \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\bigg|_{t=t_к} &= 0, \quad \text{если не задано } t_к \text{ и } x\big(t_к\big) \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t=t_к} &= 0, \quad \text{если не задано } x\big(t_к\big) \\ \left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\left(\dot{x} - \dot{\psi}\right)\right)\bigg|_{t=t_к} &= 0, \quad \text{если конец скользящий} \end{aligned}\right. \tag{3.7}$$

В векторном случае — $X = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)\big)^T$ — необходимым условием достижения экструмума является система уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0, \quad i = \overline{1, n} \\ \left(F - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\Bigg|_{t=t_0} = 0; \qquad \left(F - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\Bigg|_{t=t_к} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t=t_0} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \qquad \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t=t_к} = 0, \quad i = \overline{1, n} \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Максимальное количество условий трансверсальности $2n + 2$.

Пример 3.5

$$J = \int\limits_0^1 \left(\dot{x}^2 + x\right) dt \quad \to \quad extr, \quad x(1) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \quad \text{уравнение Эйлера: } 1 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0$$

$$\text{условие трансверсальности: } 2\dot{x}(0) = 0$$

$$1 - 2\ddot{x} = 0, \quad \ddot{x} = \frac{1}{2}, \quad \dot{x}(t) = \frac{t}{2} + C_1, \quad x(t) = \frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$$

$$\dot{x}(0) = C_1 = 0, \quad x(1) = \frac{1}{4} + C_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{4}\left(t^2 - 1\right), \quad \dot{\hat{x}} = \frac{1}{2}t$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = 2 > 0 \;\Rightarrow\; \min: \quad J_{\min} = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}\left(t^2 - 1\right)\right) dt = -\frac{1}{12}$$

Подводя итог, отмечаем, что необходимые условия минимизации функционалов представляются дифференциальными уравнениями относительно неизвестной функции (при минимизации функций необходимые условия представляются алгебраическими уравнениями). Причём можно показать, что это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$$

$$F = F(x, \dot{x}, t), \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\dot{x} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x} = 0$$

Уравнение Эйлера может приобретать частный вид:

а) если $F(x, t)$ не зависит от $\dot{x}$, то $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$

б) если $F(\dot{x}, t)$ не зависит от x, то $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}} = const$

в) если $F(x, \dot{x})$ не зависит от t, то $F - \dot{x}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}} = const$

3.3. Оптимизация функционалов с ограничениями в форме равенств

При решении различных технических проблем нахождение экстремума требует учёта связей в форме алгебраических $G(x,u) = 0$, дифференциальных $\Phi(x,u,t) = \dot{x} - Ax - Bu = 0$ и интегральных $\int \varphi(x,u,t)dt = C$ уравнений, т. е. дополнительных условий. Тогда вместо функции $F(x, \dot{x}, t)$ берётся функция $L(x, u, t, \lambda) = F(x, \dot{x}, t) + \lambda^T(t) \cdot \Phi(x, u, t)$ — лагранжиан, где $\lambda(t)$ — вектор множителей Лагранжа, и уравнения приобретают вид Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Пример 3.6

Пусть динамическая система задана уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$$

с произвольным начальным состоянием $x_1(0), x_2(0)$ и нулевым конечным $x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0$. Требуется:

$$\min \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + 0.1u^2\right) dt$$

1) Составляем лагранжиан:

$$L(x, u, \lambda) = \left(x_1^2 + x_2^2 + 0.1u^2\right) + \lambda_1\left(\dot{x}_1 - x_2\right) + \lambda_2\left(\dot{x}_2 + x_1 - u\right)$$

2) Составляем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2x_1 + \lambda_2 - \dfrac{d}{dt}(\lambda_1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 2x_2 - \lambda_1 - \dfrac{d}{dt}(\lambda_2) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = 0.2u - \lambda_2 \end{cases}$$

Учитывая уравнения системы и исключая u, получим:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 5\lambda_2, \quad \dot{\lambda}_1 = 2x_1 + \lambda_2, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + 2x_2$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{A} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$|Ep - A| = \begin{vmatrix} p & -1 & 0 & 0 \\ 1 & p & 0 & -5 \\ -2 & 0 & p & -1 \\ 0 & -2 & -1 & p \end{vmatrix} = p^4 - 8p^2 + 11$$

$$p_{1,2} = \pm 2.5, \quad p_{3,4} = \pm 1.32$$

Зная, что условию устойчивого решения отвечают только левые корни, ищем решение в виде:

$$x_1(t) = C_1 e^{-2.5t} + C_2 e^{-1.32t} + \underbrace{C_3 e^{2.5t} + C_4 e^{1.32t}}_{x(\infty)=0}$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = -2.5\, C_1 e^{-2.5t} - 1.32\, C_2 e^{-1.32t}$$

$$\dot{x}_2 = 6.25\, C_1 e^{-2.5t} + 1.75\, C_2 e^{-1.32t}$$

$$u = \dot{x}_2 + x_1 = 3.75\, C_1 e^{-2.5t} + 0.43\, C_2 e^{-1.32t}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2.5 & -1.32 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1 e^{-2.5t} \\ C_2 e^{-1.32t} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} C_1 e^{-2.5t} \\ C_2 e^{-1.32t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1.12 & -0.85 \\ 2.12 & 0.85 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$$u = \left(3.75;\ 0.43 \right) \cdot \begin{pmatrix} -1.12 & -0.85 \\ 2.12 & 0.85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -3.2x_1 - 2.8x_2$$

3.4. Каноническая (Гамильтонова) форма уравнений Эйлера (Лагранжа)

Стремление избавится от двойного дифференцирования (по времени $\frac{d}{dt}$ и по производным $\frac{\partial}{\partial \dot{x}}$ состояния и $\frac{\partial}{\partial \dot{u}}$ управления) привело к предложению ввести канонические переменные $\psi_i(t)$, сопряжённые с переменными состояния ОУ, и функцию Гамильтона:

$$H = -F(x, u, t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i, \quad \psi_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \tag{3.10}$$

$$H = -L(x, u, \lambda, t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \dot{x}_i, \quad \psi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \tag{3.11}$$

Учитывая, что:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)}_{\psi_i} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\psi_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i = \overline{1,n} \\ \dfrac{d\psi_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad j = \overline{1,m} \end{cases} \tag{3.12}$$

При условии, что в уравнении ОУ $\dot{x} = Ax + Bu$ отсутствуют производные управления $\dot{u}$.

При нефиксированных граничных условиях уравнения трансверсальности в канонической форме имеют вид:

$$\begin{cases} \psi_i\left(t_0\right) = 0, \quad \psi_i\big(t_\text{к}\big) = 0 \\ H\left(t_0\right) = 0, \quad H\big(t_\text{к}\big) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Такая форма уравнений даёт большое преимущество, т. к. слева только дифференцирование по времени, а справа частные производные по переменным.

Для общей задачи Лагранжа канонические переменные $\psi(t)$ совпадают с неизвестными множителями Лагранжа $\lambda(t)$.

Кроме того, переход к функции Гамильтона позволяет снизить требования к гладкости изменения переменных состояния и управления и решать задачи в условиях ограничений в виде неравенства.

Для консервативных механических систем функция Гамильтона H имеет простой физический смысл — она совпадает с полной механической энергией, и равенство $H = const$ имеет смысл закона сохранения полной механической энергии.

В общем случае для линейного объекта в форме уравнений состояния $\dot{x} = Ax + Bu$ (n-размерности), в котором отсутствует зависимость от $\dot{u}$, уравнения вариационной задачи записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} = \left\| \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i} \right\| = AX + BU = \Phi_1, \quad i = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} = -\left\| \dfrac{\partial H}{\partial x_i} \right\| = \left\| \dfrac{\partial F}{\partial x_i} \right\| + \lambda^T \left\| \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} \right\|, \quad i = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = \dfrac{\partial F}{\partial u_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_{1i}}{\partial u_j} = 0, \quad j = \overline{1,r} \end{cases} \tag{3.14}$$

Определим оптимальное управление объектом:

$$T\dot{x} + x = ku, \quad \frac{x}{u} = \frac{k}{Tp+1} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{k}{T}u = ax + bu$$

$$J = \int\limits_0^{\infty} \left(qx^2 + ru^2\right) dt \quad \Rightarrow \quad L = qx^2 + ru^2 + \lambda\left(\dot{x} - ax - bu\right)$$

$$H = -qx^2 - ru^2 + \lambda\left(ax + bu\right)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = ax + bu \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 2qx - \lambda a \\ 0 = -\dfrac{\partial H}{\partial u} = 2ru - \lambda b \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{b}{2r}\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + \dfrac{b^2}{2r}\lambda \\ \dot{\lambda} = 2qx - a\lambda \end{cases} = \begin{vmatrix} a & \dfrac{b^2}{2r} \\ 2q & -a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ \lambda \end{vmatrix}$$

Для определения корней системы составим определитель:

$$\Delta(p) = |Ep - A| = \begin{vmatrix} p - a & -\dfrac{b^2}{2r} \\ -2q & p + a \end{vmatrix} = p^2 - \left(a^2 + q\frac{b^2}{r}\right) = 0$$

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + q\frac{b^2}{r}}$$

Условию устойчивости удовлетворяет только отрицательный корень, поэтому решение ищем в виде:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{p_2 t} \\ \lambda = C_2 e^{p_2 t} \end{cases}$$

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{(p_2 - a)\,2r}{b} C_1 = \frac{2q}{p_2 + a} C_1$$

Следовательно, искомое оптимальное управление:

$$u_{опт}(t) = \frac{b}{2r}\lambda(t) = \frac{bq}{r\left(p_2 - a\right)} \cdot \underbrace{C_1 e^{p_2 t}}_{x(t)} = \frac{p_2 - a}{b} \underbrace{C_1 e^{p_2 t}}_{x(t)} = \underbrace{\frac{p_2 - a}{b}}_{K_{опт}} x(t)$$

Такое решение определяет структуру оптимального регулятора в форме отрицательной пропорциональной обратной связи:

$$K_{опт} = \frac{p_2 - a}{b} = -\frac{a + \sqrt{a^2 + qb^2/r}}{b}$$

Вспоминая пример поиска характеристического полинома системы $D\left(p\right) = p + \sqrt{\frac{a_0}{a_1}}$, доставляющего $\min J = \int\limits_0^\infty \left(a_0 x^2 + a_1 \dot{x}^2\right) dt$, перепишем его в нашем случае:

$$J = \int\limits_0^\infty \left(qx^2 + ru^2\right) dt = \int\limits_0^\infty \left(qx^2 + r\left(\frac{\dot{x} - ax}{b}\right)^2\right) dt =$$
$$\int\limits_0^\infty \left[\left(q + r\frac{a^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{2ra}{b^2} x\dot{x} + \frac{r}{b^2}\dot{x}^2\right] dt$$

$$F = \left(q + r\frac{a^2}{b^2}\right) x^2 - \frac{2ra}{b^2} x\dot{x} + \frac{r}{b^2}\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\left(q + r\frac{a^2}{b^2}\right) x - \frac{2ra}{b^2}\dot{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -\frac{2ra}{b^2} x + \frac{2r}{b^2}\dot{x}$$

Уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \ \Rightarrow \ 2\left(q + r\frac{a^2}{b^2}\right) x - \frac{2ra}{b^2}\dot{x} + \frac{2ra}{b^2}\dot{x} - \frac{2r}{b^2}\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} - \left(a^2 + q\frac{b^2}{r}\right)x = 0$$

Соответствующий характеристический полином $p^2 - \left(a^2 + q\frac{b^2}{r}\right) = 0$ можно представить как $\left[p^2 - \sqrt{a^2 + q\frac{b^2}{r}}\right] \cdot \left[p^2 + \sqrt{a^2 + q\frac{b^2}{r}}\right] = 0$ — произведение полиномов с симметричным расположением левого и правого полюсов — это *факторизация*. Устойчивый характер процессов даёт полином $p^2 + \sqrt{a^2 + q\frac{b^2}{r}} = 0$.

Если мы ищем оптимальную обратную пропорциональную связь для объекта $\dot{x} = ax + bu$, то $u_{onm} = K_{onm} \cdot x$, $\dot{x} = ax + bK_{oc}x = (a + bK_{oc})\,x$ и $D\,(p) = p - (a + bK_{oc})$. Приравнивая два полинома $p + \sqrt{a^2 + q\frac{b^2}{r}} = p - (a + bK_{oc})$, получим:

$$K_{oc} = \frac{-\sqrt{a^2 + q\frac{b^2}{r}} - a}{b}$$

Как видно, решения совпадают. В литературе принято такой подход называть синтезом линейного оптимального регулятора в частотной области.

Записывая факторизацию для $D(p)$, получим:

$$\Big[p - \big(a + bK_{oc}\big)\Big] \cdot \Big[p + \big(a + bK_{oc}\big)\Big] = p^2 - \left(a^2 + q\frac{b^2}{r}\right)$$

$$p^2 - (a + bK_{oc})^2 = p^2 - \left(a^2 + \frac{b^2}{r}q\right)$$

$$K_{oc}^2 + \frac{2a}{b}K_{oc} - \frac{q}{r} = 0 \qquad (3.15)$$

Это скалярное стационарное уравнение Риккати. В итоге получаем:

$$K_{oc} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{q}{r}}$$

4. Принцип максимума

В целом ряде практических задач оптимизацию функционала при заданных дифференциальных (динамических) уравнениях объекта $\left\{\dot{X} = \Phi\left(x, u\right) = AX + BU\right\}$ требуется обеспечивать при ограниченных диапазонах допустимого изменения управлений $|u_i| \leq U_i$ и/или координат объекта $|x_i| \leq X_i$. В изменениях функций образуются переломы, в изменении производных — разрывы. Нарушаются условия, при которых были выведены уравнения Эйлера и Эйлера-Лагранжа в вариациях.

Коллективом учёных под руководством академика Л. С. Понтрягина (В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко и др.) был разработан принцип максимума, использующий понятие игольчатой вариации относительно оптимального управления и траектории движения, что позволило доказать применимость модифицированной функции Гамильтона для таких неклассических вариационных задач. Модификация заключалась в следующем:

- уравнение для критерия качества $J = \int\limits_{t_0}^{t_к} F_0\left(x, u\right) dt$ из интегральной формы преобразовывалось в дифференциальную

$$\dot{x}_0 = \dot{F}_0(x, u), \quad x_0 = J\Big|_{t_0}^{t_к} \tag{4.1}$$

- формирование расширенного вектора $\left[x_0, x\right]_{n+1}$ и новой функции Гамильтона

$$H^*\left(\psi_0, \psi, x, u\right) = \psi_0 F_0\left(x, u\right) + \psi^T \Phi\left(x, u\right) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i\left(x, u\right), \tag{4.2}$$

где $\psi_0 = -1$ для перехода от минимизации J к максимизации H.

Канонические уравнения Гамильтона тогда имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H^*}{\partial \psi_i}, \quad i = \overline{0,n} \\ \dfrac{\partial \psi_i}{dt} = -\dfrac{\partial H^*}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0,n} \\ \dfrac{\partial H^*}{\partial u} = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Их количество $2n + 2 + r$, и решение задачи при фиксированных начальной $x(t_0)$ и конечной $x(t_к)$ точках даётся следующей теоремой.

Теорема 4.1 (Л. С. Понтрягин, 1956 г.). *Для того, чтобы допустимое управление $u^*(t)$ и соответствующая ему траектория $x^*(t)$ были оптимальными необходимо существование такой ненулевой непрерывной векторной функции $\psi^*(t)$, отвечающей в силу уравнений Гамильтона функциям $u^*(t)$ и $x^*(t)$, что:*

1) *в любой момент времени $t_0 \leq t \leq t_к$, когда $u^*(t)$ непрерывна, функция $H^*(x^*, u^*) = \max\limits_{u \in U} H^*(\psi_0^*, \psi^*, x^*, u)$ достигает максимума;*
2) *в любой момент времени $\psi_0^* = -1$, $H^*\big(\psi^*(T), x^*(T)\big) = 0$.*

При этом наличие разрывов в изменении производных накладывает дополнительные условия (t_0^* — точка разрыва):

$$\left.\begin{aligned} &\psi_i\big(t^*_{+0}\big) = \psi_i\big(t^*_{-0}\big) \\ &H\big(t^*_{+0}\big) = H\big(t^*_{-0}\big) \end{aligned}\right\} \text{ условия Вейерштрасса-Эрдмана,}$$
$$x_i\big(t^*_{+0}\big) = x_i\big(t^*_{-0}\big) \quad \text{— условия припасовывания.}$$

Конструктивный вид этой теоремы позволяет построить алгоритмическую процедуру определения оптимального управления:

1) Составить гамильтониан системы:

$$H(\psi, x, u) = -F(x, u) + \psi^T \Phi(x, u)$$

2) Максимизировать его по $u(t) \in U$:

$$\max_{u \in U} H^*(\psi^*, x^*, u) = H^*(\psi^*, x^*),$$

определяя управление как функцию вектора состояния и вспомогательной переменной: $u^* = u(\psi^*, x^*)$

3) Составить систему однородных дифференциальных уравнений для вспомогательной переменной:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

4) Решить эту систему уравнений при неизвестных начальных условиях и заданных соответствующим сопряжённой системе условиям для $x\big(t_0\big)$ и $x\big(t_к\big)$ — краевым или условиям трансверсальности. Соответствующее решение ищется аналитически или численными методами.

Для неконсервативных систем $H^* = \psi\dot{X}$ будет мощностью, а ψ_i — импульсами воздействий, которые вводят в ОУ такое количество энергии, которое обеспечивало бы заданный закон движения и экстремум функционала критерия качества.

Пример 4.1

$$\min J = \int\limits_0^4 \big(x + u^2\big)\, dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(4) = 0, \quad |u| \le 1$$

1) $H\left(\psi, x, u\right) = -1\left(x + u^2\right) + \psi u$

2) $\max H = \max\limits_{u(t) \in U} \left(-x - u^2 + \psi u\right)$

$$\frac{\partial H^*}{\partial u} = -2u + \psi = 0 \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{2}\psi \;\; \big(|u| \le 1\big)$$

3) $\dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{\partial\left(-x - u^2 + \psi u\right)}{\partial x} = 1$

4) $\psi = t + C_1, \quad \psi(0) = 0 \;\Rightarrow\; \psi(t) = t$

$$u^* = \begin{cases} \dfrac{t}{2}, & 0 \le t \le 2 \\ 1, & 2 \le t \le 4 \end{cases}, \qquad x^* = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} + C_2, & 0 \le t \le 2 \\ t + C_3, & 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

$$x(4) = 0 \;\Rightarrow\; x(4) = 4 + C_3 = 0 \;\Rightarrow\; C_3 = -4$$

$$x\big(2_{+0}\big) = x\big(2_{-0}\big) \;\Rightarrow\; 2 - 4 = \frac{2^2}{4} + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = -3$$

$$x^* = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} - 3, & 0 \le t \le 2 \\ t - 4, & 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

$$J_{\min} = \int\limits_0^2 \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} - 3\right) dt + \int\limits_2^4 \big(1^2 + t - 4\big)\, dt =$$

$$\left(\frac{t^3}{6} - 3t\right)\bigg|_0^2 + \left(\frac{t^2}{2} - 3t\right)\bigg|_2^4 = -4\frac{2}{3}$$

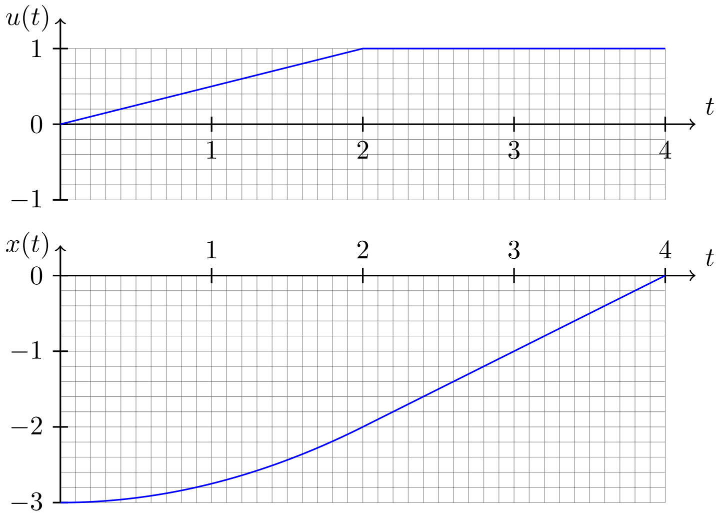


Рис. 4.1. Решение задачи, рассмотренной в примере 4.1

Пример 4.2

$$T\dot{x} + x = Ku \ \Rightarrow \ \dot{x} = ax + bu$$

$$\min \int\limits_{t_0}^{t_к} \left(qx^2 + ru^2\right) dt, \quad |u| \le U_{\max}$$

1) $H^* = -\left(qx^2 + ru^2\right) + \psi\left(ax + bu\right)$

2) $\dfrac{\partial H^*}{\partial u} = -2ru + \psi b = 0$

$$\begin{cases} u = \dfrac{b}{2r}\psi & \text{при} \left|\dfrac{b}{2r}\psi\right| \le U_{\max} \\ u = U_{\max} & \text{при} \left|\dfrac{b}{2r}\psi\right| \ge U_{\max} \end{cases}$$

3) $\dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 2qx - a\psi, \quad \dot{x} = ax + b\dfrac{b}{2r}\psi$

$$\psi = \frac{-a - \sqrt{a^2 + b^2 q/r}}{b^2} \cdot 2rx$$

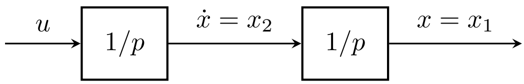
4) $U_{onm}(t) = \begin{cases} \underbrace{\dfrac{-a - \sqrt{a^2 + b^2 q/r}}{b}}_{K_{onm}} x & \text{при} \, |K_{onm} x| \le U_{\max} \\ \pm U_{\max} & \text{при} \, |K_{onm} x| \ge U_{\max} \end{cases}$

Наибольшее применение принцип максимума нашёл при минимизации времени переходного процесса (максимизации быстродействия), так как в этом случае $\min\limits_{u \in U} J = \int\limits_{t_0}^{t_к} F(x,u)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_к} 1\, dt = t_к - t_0$ имеет простейшую подынтегральную функцию и гамильтониан $H^* = -1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i(t)\Phi_i(x,u) = -1 + \psi^T(Ax + Bu)$, от управления зависит только последнее слагаемое и в условиях ограничений на управление $|u| \le U_m$ решение имеет естественный вид: $u =$

$U_m \cdot sign(\psi^T B)$, т. е. оптимальная система является релейной с определением переключения по знаку вспомогательной функции $B^T\psi$, где $\dot{\psi} = -A^T\psi \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = -e^{-A^T t}\psi(0)$, однако, поиск $\psi(0)$ приводит либо к системе трансцендентных уравнений, трудно решаемых в общем виде, либо к итерационному поиску.

В простейшем случае, когда объект представим последовательным соединением двух интеграторов:

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \le U_m$$



$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u$$

Гамильтониан $H(\psi, x, u) = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$ и max достигается при $u_{onm}(t) = U_m \cdot sign\,\psi_2$, где $\dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1$, $\dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0$ и $\psi_2(t) = C_1 t + C_2$, произвольные постоянные, при любом наборе которых ψ_2 может иметь только два интервала с разными знаками, соответственно $u_{onm}(t)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая значения $+U_m$ и $-U_m$. Отсюда, для перевода из нулевого начального состояния в заданное конечное (например, положительное $x(t_к) > 0$) будем иметь два интервала: разгон и торможение, и переключение произойдёт ровно посередине. Если будет ограничена скорость набора $|x_2| \le x_{2m}$, то в интервале $t_1 \to t_2$ потребуется обнулить управление и увеличится время переходного процесса $t'_к > t_к$, а управление будет иметь три интервала: $+U_m$, 0, $-U_m$.

$$u_{onm}^{огр.x_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \left|\psi_2\right| \le 1 \\ sign\,\psi_2 & \text{при} \left|\psi_2\right| > 1 \end{cases}$$

4.1. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейных систем

В общем случае задача синтеза оптимального по быстродействию управления линейным объектом

$$\dot{X} = \Phi(x,u) = Ax + Bu, \quad \min \int\limits_{t_0}^{t_к} 1\, dt = t_к - t_0$$

с возможными ограничениями на $|x_i| \leq X_i$ осуществляется с помощью принципа максимума на основе составления функции Гамильтона:

$$H(\psi, x, u) = -1 + \psi^T (AX + Bu)$$

$$u_{опт} = U_{\max} \cdot sign\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = U_{\max} \cdot sign\left(B^T\psi\right)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^T(t)\frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial x} = -\psi^T(t)A = -A^T\psi(t) \;\; \Rightarrow \;\; \psi(t) = e^{-A^T t}\cdot\psi(0)$$

Это набор экспонент, поиск которых в общем виде затруднён. Однако, в частных случаях был получен ряд важных результатов.

1) Если собственные числа матрицы A — различные вещественные, то сумма n экспонент $B^T\psi$ может пересекать ось абсцисс и менять знак только $(n-1)$ раз. Фельдбаум А. А. доказал теорему об n интервалах:

   Теорема 4.2. *Если объект управления описывается ЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и корни его характеристического уравнения вещественные отрицательные или нулевые, то для оптимального управления по t необходимо и достаточно не более n интервалов максимального по значению управления U_m, а знаки чередуются не более $(n-1)$ раз.*

2) Оптимальное управление для линейных систем с комплексными полюсами не удовлетворяет теореме Фельдбаума, число переключений управления не связано с порядком системы, а зависит от её начального состояния.

3) Наличие только ограниченного числа вариантов управляющего сигнала $\pm U_m$ позволяет разделить всё фазовое пространство СУ на области с помощью гиперповерхностей $S(x) = 0$,

в каждой из которых управление постоянно. Такой подход называется методом фазового пространства, и позволяет вычислять управление на основе анализа нелинейных зависимостей: $u_{onm} = -U_{\max} \cdot sign\big[S(x)\big]$.

Пример 4.3

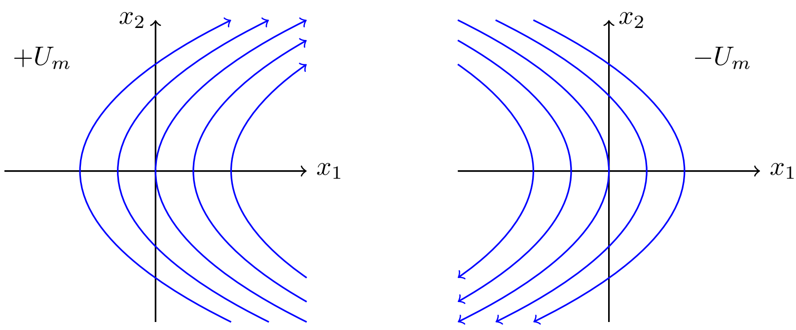
$$\ddot{x} = u(t), \qquad \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u, \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

$$\frac{dx_1}{dt} \Big/ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{u} \quad \Rightarrow \quad u\,dx_1 = x_2\,dx_2$$

$$u = +U_m \quad \Rightarrow \quad U_m x_1 = \frac{x_2^2}{2}$$

$$u = -U_m \quad \Rightarrow \quad -U_m x_1 = \frac{x_2^2}{2}$$

Откуда получаем траектории следующего вида:

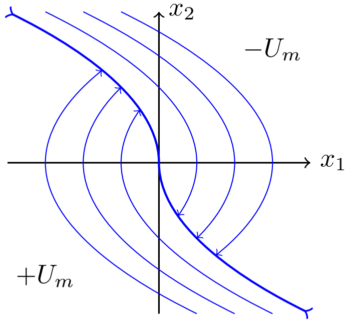


Выделим линию:

$$S(x_1, x_2) = x_1 + sign(x_2)\frac{x_2^2}{2U_m} = x_1 + \frac{x_2 \cdot |x_2|}{2U_m} = 0$$

$$u = -U_m \cdot sign\Big(S(x_1, x_2)\Big)$$

Тогда получим фазовые траектории в виде:



Аналитические представления для поверхностей переключения как функций координат полностью разрешимы для линейных систем второго порядка. Для большего порядка решения найдены только в частных случаях.

4) При построении оптимального управления реальными объектами существует как минимум три причины невозможности его технической реализации:

- неидеальность (неточность) математической модели объекта управления;
- упрощения, принимаемые при реализации закона (алгоритма) управления;
- неточность (непостоянство) характеристик реальных элементов, реализующих управление (гистерезис, зона нечувствительности и т. п.).

Поэтому на практике реализуются квазиоптимальные или субоптимальные системы, использующие скользящие режимы движения. Реализация устройства управления в этом случае не требует нелинейных операций, используются только линейные усилители (с различными коэффициентами усиления) и релейные переключатели.

4.2. Уравнение Риккати для синтеза оптимальных систем

Для линейных объектов управления $\dot{x} = Ax + Bu$ и минимизируемого квадратичного функционала $J = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_к}\big(x^T Q x + u^T R u\big)\,dt$ без учёта ограничений $u_{опт}(t) = K_{ос}x$.

Функция Гамильтона:

$$H^* = -\frac{1}{2}x^T Q x - \frac{1}{2}u^T R u + \psi^T(Ax + Bu)$$

$$\left.\frac{\partial H^*}{\partial u}\right|_{u=u_{опт}} = 0$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial u} = -Ru_{опт}(t) + \psi^T B = -Ru_{опт} + B^T\psi = 0$$

$$u_{опт}(t) = R^{-1}B^T\psi$$

При этом обеспечивается максимум H^*, т. к.

$$\left.\frac{\partial^2 H^*}{\partial u^2}\right|_{u=u_{опт}} = -R < 0$$

Запишем канонические уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BR^{-1}B^T\psi \\ \dot{\psi} = Qx - \psi^T A = Qx - A^T\psi \end{cases}$$

Сравнивая $u_{опт} = K_{ос}x$ и $u_{опт} = R^{-1}B^T\psi$, можно ввести $\psi = -P(t)x$, дифференцируя которое, получим $\dot{\psi} = -\dot{P}(t)x - P(t)\dot{x}$, тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T P(t)x \\ \dot{\psi} = Qx + A^T P(t)x \end{cases}$$

$$-\dot{P}(t)x - P(t)\big(Ax - BR^{-1}B^T P(t)x\big) = Qx + A^T P(t)x$$

$$\dot{P}(t) + A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) = Q \qquad (4.4)$$

Это дифференциальное уравнение Риккати, после решения которого можно получить:

$$u_{onm}(x) = -R^{-1}B^T P(t)x(t)$$

Для объектов с постоянными по времени параметрами $\dot{P}(t) = 0$ и при $t_к \to \infty$ $P(t) = \overline{P}$ — определённо положительная симметричная матрица коэффициентов. В случае ограничений типа $\left|u(t)\right| \leq U_m$ получим нелинейный закон с насыщением, аналогичный простейшему случаю.

5. Динамическое программирование

В технике и экономике существует класс объектов и процессов, управление которыми осуществляется на основе ограниченного числа решений, принимаемых последовательно в некоторые фиксированные моменты времени. Определение закона (алгоритма) управления для таких объектов связано с решением задачи по методу многошагового выбора, который был предложен американским учёным Р. Беллманом и назван *динамическим программированием.*

В основу положен принцип оптимальности, согласно которому оптимальное управление определяется конечной целью и состоянием системы в данный момент времени независимо от предыстории.

Задачей оптимизации считается определение оптимальных управлений $u^o(t)$ и траекторий $x^o(t)$ из условия минимума функционала $J = \int\limits_{t_0}^{t_к} F(x,u,t)\,dt$ при заданных уравнениях объекта $\dot{x} = \Phi(x,u) = Ax + Bu$ и граничных значениях $x(t_0)$, $x(t_к)$, $t_0 \le t \le t_к$, а также допустимых интервалах для $x(t) \in X$, $u(t) \in U$.

В методе динамического программирования вводится вспомогательная функция Беллмана:

$$S(t,x) = \min_{u \in U} \int\limits_{t_0}^{T} F(x,u,t)\,dt \tag{5.1}$$

В соответствии со сформулированным принципом минимум функционала зависит только от момента времени, значения x в этот момент и конечного момента. Тогда для любого промежуточного момента $t \in t_0 + \Delta t < T$ выполнено равенство

$$S\big(t_0 + \Delta t, T, x_{\Delta t}\big) = \min_{u \in U} \int\limits_{t_0+\Delta t}^{T} F(x,u,t)\,dt,$$

где $x_{\Delta t} = x\big(t_0\big) + \Delta x$.

$$S(t,x)=\min_{u\in U}\left[\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}F(x,u,t)\,dt+\int\limits_{t_0+\Delta t}^{T}F(x,u,t)\,dt\right]=$$

$$\min_{u\in U}\left[\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}F(x,u,t)\,dt+S\big(t_0+\Delta t,T,x_{\Delta t}\big)\right]$$

Это выражение должно использоваться для определения оптимальных управлений на интервале $\left[t_0,t_0+\Delta t\right]$. При решении либо решают функциональные уравнения Беллмана в частных производных, либо применяют численные методы.

5.1. Функциональное уравнение Беллмана для синтеза оптимального управления

Первое слагаемое с точностью до малых более высокого порядка, чем Δt, можно приблизительно записать так:

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}F(x,u,t)\,dt\approx F(x,u,t)\Delta t=\Delta J$$

Второе слагаемое, определяющее значение $S\left(t+\Delta t,x+\Delta x\right)$ для любого $t+\Delta t$ разложим в ряд Тейлора. Ограничиваясь линейными членами относительно Δx_i и Δt и переходя к пределу (если функция $S(t,x)$ имеет непрерывные частные производные по всем $x_i(t)$ и t), запишем:

$$S\left(t+\Delta t,x+\Delta x\right)=S\left(t,x\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}\cdot\Delta x_i+\frac{\partial S}{\partial t}\Delta t=$$

$$S\left(t,x\right)+\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial S}{\partial t}\right]\Delta t$$

Тогда можем записать:

$$S\left(t,x\right)=\min_{u\in U}\left\{F\left(x,u,t\right)\Delta t+S\left(t,x\right)+\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}\cdot\dot{x}_i+\frac{\partial S}{\partial t}\right]\Delta t\right\}$$

Откуда, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим нелинейное дифференциальное уравнение Беллмана в частных производных относительно неизвестной функции $S(t, x)$:

$$\min_{u \in U} \left\{ F(x, u, t) + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot \varphi_i(x, u, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right\} = 0 \qquad (5.2)$$

Необычность этого уравнения в том, что оно содержит операцию минимизации. Регулярных аналитических методов решения таких уравнений нет. Однако, Лётов А. М. предложил методику поиска $u^o(t) = u\left(\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)$, тогда уравнение (5.2) становится обычным уравнением в частных производных:

$$F(x, u, t) + grad_x^T\, S(x, t) \cdot \Phi(x, u) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = 0$$

с граничным условием $S\big(x^o, T\big) = 0$.

Если $S(x)$ не зависит явным образом от t, то $\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$ и поиск оптимального управления можно производить по уравнению:

$$\frac{\partial F(x, u, t)}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} = 0$$

Такой подход наиболее подходит, когда ищется решение для линейно-квадратичных задач и вспомогательная функция берётся в виде квадратичной формы $S(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$.

Пример 5.1

$$T\dot{x} + x = Ku \;\;\Rightarrow\;\; \dot{x} = ax + bu$$

$$\min \int_0^\infty \left(qx^2 + ru^2\right) dt, \qquad S(x) = Ax^2$$

Тогда функциональное уравнение Беллмана запишется в виде:

$$qx^2 + ru^2 + (ax + bu) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

$$2ru + b\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow \ u^o(t) = -\frac{b}{2r}\frac{\partial S}{\partial x} = \underbrace{-\frac{b}{r}A}_{K_{oc}}\,x(t)$$

Для нахождения A и K_{oc}:

$$qx^2 + r\Big(-\frac{b}{r}Ax\Big)^2 + \bigg(ax + b\Big(-\frac{b}{r}Ax\Big)\bigg)Ax = 0$$

Возведя в квадрат, вынеся x и сгруппировав, получим:

$$b^2A^2 - 2arA - qr = 0$$

$$A = \frac{r\left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2q/r}\right)}{b^2} \qquad (A > 0)$$

$$K_{oc} = -\frac{b}{r}A = \frac{-a - \sqrt{a^2 + b^2q/r}}{b}$$

Подводя итог, применение метода для задачи в форме Лагранжа можно сформулировать в виде алгоритмической процедуры:

1) составить функцию Беллмана

$$B\left(t, x, u, \frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right) = F(x, u, t) + grad_x^T\, S(x,t) \cdot \Phi(x, u, t)$$

2) минимизировать функцию Беллмана по $u \in U$

$$\min_{u \in U} B\left(t, x, u, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = B^*\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right),$$

определяя управление, как явную функцию x и $\dfrac{\partial S}{\partial x}$

$$u^* = u\left(x^*, \frac{\partial S}{\partial x}\right)$$

3) составить уравнение Беллмана

$$B^*\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) + \frac{\partial S(x^*, t)}{\partial t} = 0, \quad S\bigl(x^*, T\bigr) = 0$$

4) решением этого уравнения является функция $S(x, t)$, по которой определяются $\frac{\partial S}{\partial x}$, а затем искомое оптимальное управление $u^* = u\left(x^*, \frac{\partial S}{\partial x}\right)$.

Пример 5.2

Применим эту процедуру для управляемого объекта:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0$$

$$\min_u J(x, u) = \int_0^T \left(x^2 + cu^2\right) dt$$

Это задача Лагранжа с фиксированным временем и подвижным правым концом. При этом естественно искать решение в классе линейных функций $u(t) = K(t) \cdot x(t)$.

1) Составим функцию Беллмана

$$B = x^2 + cu^2 + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}(ax + bu)$$

2) Найдём её минимум

$$\frac{\partial B}{\partial u} = 2cu(t) + b\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; u^* = -\frac{b}{2c}\frac{\partial S(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} = 2c > 0 \;\Rightarrow\; \text{достаточность выполнена}$$

3) Составим дифференциальное уравнение Беллмана, подставляя u^* вместо u

$$x^2 - \frac{b^2}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + ax\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad S\bigl(x(T), T\bigr) = 0$$

Это нелинейное уравнение первого порядка в частных производных, в общем случае с труднонаходимым решением. Однако, если решение ищется как линейное, то $S(t) = p(t)x^2$. Составим уравнение относительно новой неизвестной $p(t)$:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2p(t) \cdot x, \quad u^* = -\frac{b}{c} p(t) \cdot x$$

$$x^2 \left(\dot{p}(t) - \frac{b^2}{4c^2} \cdot 4p^2(t) - 2ap(t) + 1 \right) = 0, \quad p(T) = 0$$

В скобках нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка типа Риккати с граничным условием на правом конце. Это уравнение можно решить методом разделения переменных, и решение принимает вид:

$$p(t) = p_1 p_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{b^2}{c^2} \cdot (p_1 - p_2)(T-t)\right)}{p_2 - p_1 \exp\left(-\frac{b^2}{c^2} \cdot (p_1 - p_2)(T-t)\right)},$$

где p_1, p_2 — корни уравнения $\frac{b^2}{c^2} p^2(t) + 2ap(t) - 1 = 0$. Если $T \to \infty$, то $p(t) = \max(p_1, p_2)$.

Рассмотрим задачу Лагранжа с закреплёнными концами и свободным временем для произвольной динамической системы:

$$\dot{x} = \Phi(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_\kappa, \quad u \in U$$

Следует найти допустимое управление, переводящее эту систему из x_0 в x_κ так, чтобы критерий качества $J(x, u, T) = \int\limits_0^T F(x, u)\, dt$ принимал наименьшее значение. Для решения этой задачи согласно процедуре метода введём функцию $R(x)$, которая совпадает с наименьшим значением критерия вдоль оптимальной траектории. Эта функция зависит только от текущего состояния. Уравнение Беллмана в этом случае принимает вид:

$$\min_{u \in U} \left[F\big(x(t), u(t)\big) + grad_x^T R(x) \Phi\big(x(t), u(t)\big) \right] = 0$$

Задача максимального быстродействия является частным случаем сформулированной задачи Лагранжа с закреплёнными концами и свободным временем, если положить в ней $F(x,u) \equiv 1$. Содержательный смысл функции $R(x)$ — наименьшее время перевода системы из текущего состояния $x(t)$ до цели $x_к$. Уравнение Беллмана для этой задачи принимает вид:

$$\min_{u(t)\in U} \left[grad_x^T R(x) \cdot \Phi(x,u) \right] = -1, \quad R\big(x_к\big) = 0$$

Уравнение Беллмана имеет простую геометрическую интерпретацию: пусть конечной целью является начало координат, тогда $R(x) = T^*$ — множество точек фазового пространства, для которых время перехода составляет ровно T^*. Эту гиперповерхность называют *изохроной.*

Записав уравнение Беллмана в форме максимизации (т. е. поменяв знак): $\max\limits_{u\in U} \left[\big(-grad_x^T R(x)\big) \Phi(x,u) \right] = 1$, получим геометрическое условие оптимальности в задаче быстродействия:

Оптимальное управление следует выбирать таким, чтобы в любой точке изохроны вектор нормали $-grad\, R(x)$ *и текущий вектор фазовой скорости* $\dot{x} = \Phi(x,u)$ *были предельно близки, и, если управление не ограничено, то оба вектора имеют одно направление.*

Пример 5.3

Найти допустимое управление $\big|u(t)\big| \le 1$ для быстрейшего перевода из произвольной точки фазового пространства в начало координат системы:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_0$$

1) Составим функциональное соотношение Беллмана:

$$\min_{|u|\le 1} \left[\frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial R}{\partial x_2} \cdot u \right] = -1, \quad R(0) = 0$$

2) Минимум выражения в скобках достигается при

$$u^* = -sign\left(\frac{\partial R}{\partial x_2} \right)$$

3) Дифференциальное уравнение Беллмана принимает вид:

$$1 + \frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot x_2 - \left| \frac{\partial R}{\partial x_2} \right| = 0, \quad R(0) = 0$$

4) Для решения этого уравнения рассмотрим варианты:

- Область **1** $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \ \frac{\partial R}{\partial x_2} > 0 \right\} \ \Rightarrow \ u^* = -1 \ \Rightarrow$ уравнение Беллмана принимает вид:

$$1 + \frac{\partial R}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial R}{\partial x_2} = 0 \ \Rightarrow \ R_1 = x_2 + 2\sqrt{\frac{x_2^2}{2} + x_1}$$

- Область **2** $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \ \frac{\partial R}{\partial x_2} < 0 \right\} \ \Rightarrow \ u^* = 1 \ \Rightarrow$ уравнение Беллмана принимает вид:

$$1 + \frac{\partial R}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial R}{\partial x_2} = 0 \ \Rightarrow \ R_2 = -x_2 + 2\sqrt{\frac{x_2^2}{2} - x_1}$$

Границей между областями **1** и **2** будет кривая:

$$x_1 + \frac{x_2^2 \cdot sign(x_2)}{2} = 0$$

А найденное оптимальное управление

$$u^* = -sign\left(x_1 + \frac{x_2^2 \cdot sign(x_2)}{2} \right)$$

имеет явную зависимость от фазовых координат, что позволяет синтезировать замкнутую структуру управления.

Отметим один замечательный результат. В каждой области можно выделить аналитическое выражение для семейства изохрон уровня T^*:

- в первой:

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{\left(T^* - x_2\right)^2}{4} = 0$$

- во второй:

$$x_1 - \frac{x_2^2}{2} + \frac{\left(T^* + x_2\right)^2}{4} = 0$$

А на границе:

$$x_1 + \frac{x_2 \cdot T^*}{2} = 0$$

Таким образом, можно изобразить семейство изохрон, и для любой точки, например, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ изобразить вектор $grad\, R = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$, а вектор фазовой скорости $\Phi(x, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$. Из всех возможных управлений лишь при $u = -1$ будет наибольшая проекция на направление антиградиента к изохроне в этой точке. Значит, оптимальное управление $u^* \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$.

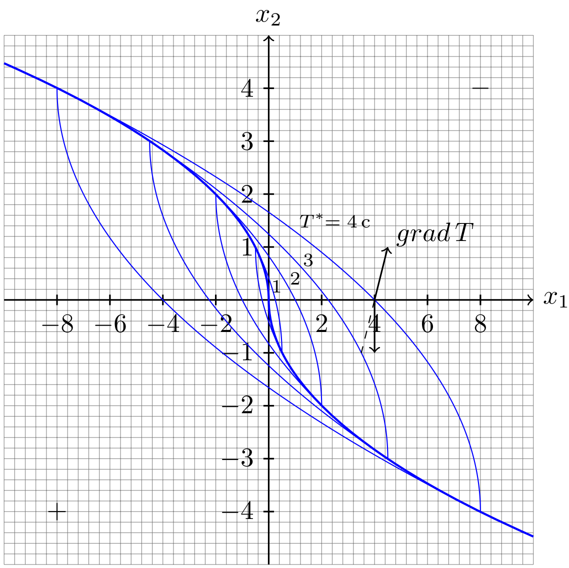


Рис. 5.1. Решение задачи, рассмотренной в примере 5.3

5.2. Численное решение уравнений динамического программирования

Уравнение минимизации

$$\min_{u \in U} \left\{ F(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial x_i} \cdot \varphi_i(x,u,t) + \frac{\partial s}{\partial t} \right\} = 0$$

или соответствующие ему функциональные уравнения в частных производных

$$\begin{cases} F(x,u,t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial s}{\partial x_i} \cdot \varphi_i(x,u,t) + \dfrac{\partial s}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial s}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} = 0, \quad j = \overline{1,r} \end{cases}$$

далеко не всегда удаётся решить аналитически. Поэтому применяется численный подход в виде многошагового процесса, являющегося приближенным. Для этого исходные уравнения объекта заменяют конечно-разностными:

$$\begin{cases} \Delta x_k = \Phi\big(x_{k-1}, u_k\big)\Delta t \\ x_k = x_{k-1} + \Delta x_k, \quad x_0 = x\big(t_0\big), \quad x_N = x(T) \\ u_k = u_{k-1} + \Delta u_k \\ \Delta t = \dfrac{T - t_0}{N}, \end{cases}$$

где N — число шагов (принятых расчётных интервалов).

$$J = \sum_{k=1}^{N} F_k\big(x_{k-1}, u_k\big)\Delta t$$

На каждом интервале (шаге) u_k сохраняет неизменное значение, определённое для его начала. Оптимальное управление можно определить, найдя оптимальные значения для каждого интервала $u_1^o, u_2^o, \ldots u_N^o$, такие, что $u_k \in U, \;\; x_k \in X$ и обеспечивается $\min J$.

При численном решении задачи участки процесса рассматриваются в последовательности обратной их номеру, т. е. от конца к началу. Рассмотрим начало последнего участка, т. е. момент времени

$t_{N-1} = (N-1)\Delta t$, ему соответствуют координаты x_{N-1}. Согласно принципу оптимальности необходимо, чтобы было выбрано оптимальное управление на последнем шаге u_N^o, переводящее объект из состояния x_{N-1} в x_N. Выбор u_N^o влияет лишь на последний член суммы в функционале $J_N = F_N\big(x_{N-1}, u_N\big)\Delta t$. Выбрав u_N^o, обеспечивающее минимум J_N, получим $s_N\big(x_{N-1}\big) = \min\limits_{u^o \in U}\Big[F_N\big(x_{N-1}, u_N^o\big)\Delta t\Big]$.

В результате решения задачи на последнем шаге получены значения $s_N\big(x_{N-1}\big)$, $x_{N-1}\big(t_{N-1}\big)$, $u_N^o\big(x_{N-1}\big)$, которые запоминаются. Перейдём к предпоследнему шагу $(N-2)$, т.е. моменту времени $t_{N-2} = (N-2)\Delta t$. Этому интервалу соответствуют координаты x_{N-2}. Теперь нужно выбрать u_{N-1}^o из условия min двух последних членов суммы:

$$J_{N-1} + J_N = F_{N-1}\big(x_{N-2}, u_{N-1}\big)\Delta t + F_N\big(x_{N-1}, u_N^o\big)\Delta t,$$

с учётом того, что u_N^o уже выбрано. Решая, получим:

$$s_{N-1}\big(x_{N-2}\big) = \min_{u_{N-1}^o \in U}\Big[F_{N-1}\big(x_{N-2}, u_{N-1}^o\big)\Delta t + s_N\big(x_{N-1}\big)\Big]$$

Так как $x_{N-1} = x_{N-2} + \Delta x_{N-1} = x_{N-2} + \Phi\big(x_{N-2}, u_{N-1}^o\big)\Delta t$, то можно записать:

$$s_{N-1}\big(x_{N-2}\big) = \min_{u_{N-1}^o \in U}\Big\{F_{N-1}\big(x_{N-2}, u_{N-1}^o\big)\Delta t + s_N\Big(x_{N-1}\big(x_{N-2}, u_{N-1}^o\big)\Big)\Big\}$$

На предпоследнем интервале (втором шаге назад) получаем значения $s_{N-1}\big(x_{N-2}\big)$, $x_{N-2}\big(t_{N-2}\big)$ и $u_{N-1}^o\big(x_{N-2}\big)$, которые запоминаются. Все расчёты повторяются аналогично, пока не придём к первому интервалу. В результате таких расчётов, получим значения $u_k^o\big(x_{k-1}\big)$, $x_k\big(t_k\big)$, так что $x_N\big(t_N\big) = x(T)$, по которым можно построить приближённое оптимальное управление $u^o(t)$ и приближённую оптимальную траекторию $x^o(t)$.

Наиболее успешно метод динамического программирования применяется для оптимизации дискретных систем, где уравнения динамики записаны в конечных разностях, вариационная задача оптимизации функций по $(N \times r)$ переменным, сводится к N простым задачам оптимизации функции малого числа (r) переменных. При многошаговом процессе решения легко учитываются ограничения на координаты и управления.

6. Синтез оптимальных стохастических систем

При оптимальном управлении реальными объектами теория детерминированного управления, определяющая закон управления как функцию времени и фазовых координат часто не применима, т. к. на ОУ действуют различные случайные возмущения, начальные значения координат произвольные, текущие значения не могут быть полностью измерены. В этом случае необходимо применять статистические методы, основанные на работах Н. Винера, А. Н. Колмогорова, Р. Калмана и др. При проектировании таких систем прежде всего важна точность управления, т. е. точность воспроизведения полезного входного сигнала, оцениваемая по величине ошибки:

$$\varepsilon(t,\tau) = v(t+\tau) - y(t)$$

При разных значениях τ эта ошибка называется по-разному:

- $\tau = 0 \;\Rightarrow$ ошибка фильтрации,
- $\tau < 0 \;\Rightarrow$ ошибка сглаживания,
- $\tau > 0 \;\Rightarrow$ ошибка прогноза.

Из-за наличия случайных факторов решение ищется по минимуму среднеквадратичной ошибки (дисперсии) $\min M\left\{\varepsilon^2(t,\tau)\right\}$. И ответ состоит либо в определении оптимальной передаточной функции (уравнения) такой СУ (оптимального фильтра), либо в определении наилучших значений параметров системы с заданной структурой.

Общая постановка задачи оптимального синтеза состоит в том, что для ОУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + v \\ y = Cx + f \end{cases}$$

где v, $x(0)$ и f — уставка, начальное состояние и помехи, приведённые к выходу, считаются случайными сигналами с известными характеристиками. В стандартной постановке они либо переменные с нулевым средним и заданной дисперсией (вид «белого» шума), либо результат его обработки дополнительной динамической структурой с известными параметрами:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_v z_1 + \mu_1(t) \\ v = C_v z_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{z}_2 = A_f z_2 + \mu_2(t) \\ f = C_f z_2 \end{cases}$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_1(t)$ — «белые» шумы интенсивностью Q_μ и Q_f соответственно, взаимно независимые в силу своего происхождения.

Необходимо найти управление, обеспечивающее отслеживание уставки $v(t)$ с минимизацией критерия качества:

$$\min J = M\left\{\int\limits_0^T \left(\varepsilon^T Q\varepsilon + u^T Ru\right) dt\right\}$$

Как мы видим, критерий может быть расширен и включать в себя требование не только минимизации дисперсии, но и экономии управляющего воздействия.

6.1. Синтез управления с минимальной дисперсией ошибки

Величину дисперсии ошибки фильтрации $J = M\{\varepsilon^2(t)\}$ можно найти по её автокорреляционной функции $R_\varepsilon(\tau)$ или спектральной плотности $S_\varepsilon(\omega)$:

$$M\{\varepsilon^2\} = R_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega)\, d\omega$$

Спектральную плотность ошибки фильтрации можно найти, зная спектральные плотности задающего сигнала (уставки) S_v и помехи S_f, приведённой ко входу замкнутой системы:

$$S_\varepsilon(\omega) = \left|W_з^\varepsilon(j\omega)\right|^2 S_v(\omega) + \left|1 - W_з^\varepsilon(j\omega)\right|^2 S_f(\omega) = \\ \left|1 - W_з(p)\right|^2 S_v(\omega) + \left|W_з(p)\right|^2 S_f(\omega),$$

где $W_з^\varepsilon(j\omega) = \dfrac{1}{1 + W_p(j\omega)}$ (для системы с единичной ООС), если помеха не приведена ко входу, то вместо $1 - W_з^\varepsilon(j\omega) = \dfrac{W_p}{1 + W_p}$ используют выражение $\dfrac{W_{fy}}{1 + W_p}$.

Выражение для спектральной плотности ошибки является дробно-рациональным, вычисление которого можно выполнить по таблицам Мак-Ленна или используя прямой матричный метод.

Случайная величина (СВ) — есть функция результата опыта или наблюдения, взятая из пространства элементарных событий. Она задаётся плотностью вероятностей $f(x)$ и функцией распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$. Числовыми характеристиками СВ являются математическое ожидание $M\{x\}$, дисперсия $D = M\{x^2\} - M^2\{x\}$ и вообще остальные моменты распределения.

Случайный процесс (СП) — есть случайная функция независимой переменной t, его можно рассматривать как совокупность случайных величин $\Big\{x\big(t_1\big), x\big(t_2\big)\dots\Big\}$ в моменты времени $t_1, t_2 \dots$ и, соответственно, описывается совокупностью совместных распределений случайной величины для всевозможных моментов времени.

Для этого используются:

- автокорреляционные функции

$$M\Bigg\{\Big[x\big(t_1\big)-m\big(t_1\big)\Big]\Big[x\big(t_2\big)-m\big(t_2\big)\Big]\Bigg\} = R_x\big(t_1, t_2\big) = R_x\big(t_2-t_1 = \tau\big)$$

- взаимнокорреляционные функции

$$M\Bigg\{\Big[x\big(t_1\big) - m_x\big(t_1\big)\Big]\Big[y\big(t_2 = t_1 + \tau\big) - m_y\big(t_2\big)\Big]\Bigg\} = R_{xy}(\tau)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$$

$$\big|R_{xy}(\tau)\big|^2 \leq R_x(0)R_y(0) = D_x D_y$$

$$R_{xy}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(t)\cdot R_x(\tau - t)\,dt$$

Или:

- спектральные плотности, как преобразование Фурье от корреляционной функции,

$$S_x(\omega) = F\big(R_x(\tau)\big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau \cdot \int\limits_{0}^{\infty} R_x(\tau)\cos(\omega\tau)\, d\tau$$

$$S_x(\omega) \geq 0, \quad S_x(\omega) = S_x(-\omega)$$

- взаимные спектральные плотности

$$S_{xy}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{xy} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Наиболее интересующие нас процессы:

1) «Белый» шум. Имеет постоянную спектральную плотность $S(\omega) = a^2\big(N^2\big)$ и $R(\tau) = a^2\delta$.

$$D_{БШ} = R(\tau) = a^2\delta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} a^2 d\omega$$

   Идеализация случайного сигнала (БШ) допустима тогда, когда в полосе пропускания линейной системы спектральная плотность входного воздействия меняется мало, что имеет место, когда эффективная полоса пропускания системы более узкая, чем полоса частот входного воздействия.

2) Альтернативой является константа $x = c$. $R_c(\tau) = c^2 = D_c \;\Rightarrow$ спектральная плотность существует только на нулевой частоте и равна:

$$S_c(\omega) = 2\int\limits_{0}^{\infty} c^2 \cos(\omega\tau)\, d\tau = 2c^2\, \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\Big|_0^{\infty} = 2c^2\pi\delta(\omega)$$

   Соотношение между спектральной плотностью $S(\omega)$ и корреляционной функцией $R(\tau)$, аналогично связи между частотной и переходной характеристиками: чем шире график корреляционной функции, тем уже график спектральной плотности, и наоборот.

3) Случайный процесс с корреляционной функцией экспоненциального типа $R_x(\tau) = D_x e^{-\lambda|\tau|}$, где $\lambda = \dfrac{1}{T}$ (параметр затухания) имеет бинарный случайный процесс принимающий значения $\pm A$ $\left(D_x = A^2\right)$, где смена знака происходит в соответствии с пуассоновским случайным процессом с параметром 0.5λ.

$$S_x(\omega) = A^2\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau\right) = \frac{2A^2\lambda}{\omega^2+\lambda^2}$$

Такой процесс может быть получен из БШ путём пропускания через динамическое звено: пусть $S_{БШ} = 1$.

$$S_x(\omega) = \frac{2A^2\lambda}{\omega^2+\lambda^2} \qquad S_x(\omega) = \big|W(j\omega)\big|^2 S_{БШ}$$

$$S_x(\omega) = \underbrace{S(j\omega)\cdot S(-j\omega)}_{\text{факторизация}} = W(j\omega)W(-j\omega)$$

$$W(p) = W(j\omega)\big|_{j\omega=p} = S(j\omega) = \frac{A\sqrt{2\lambda}}{j\omega+\lambda}$$

Пример 6.1

Желаемое $R_\rho(\tau) = 25\exp\big(-0.4|\tau|\big) \quad\Rightarrow$

$$S_\rho(\omega) = 25\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{0.4\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-0.4\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau\right) =$$

$$25\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(0.4-j\omega)\tau}d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{(-0.4-j\omega)\tau}d\tau\right) =$$

$$25\left(\frac{1}{0.4-j\omega}e^{(0.4-j\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{0.4+j\omega}e^{(-0.4-j\omega)\tau}\Big|_{0}^{\infty}\right) =$$

$$= 25\left(\frac{1}{0.4-j\omega} + \frac{1}{0.4+j\omega}\right) = \frac{25\cdot 2\cdot 0.4}{0.16+\omega^2} = \frac{20}{0.16+\omega^2} = \left|\frac{\sqrt{20}=4.47}{0.4+j\omega}\right|^2$$

Это инерционное звено с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{4.47}{p + 0.4}$$

Дифференциальное уравнение звена:

$$\dot{\rho} = -0.4\rho + 4.47\mu(t),$$

где $\mu(t)$ — БШ с интенсивностью $S(\omega) = 1$.

Пусть:

$$S(\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)} = \frac{b_0(j\omega)^{2n-2} + \ldots + b_{n-1}}{\big(a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n\big)\big(a_0(-j\omega)^n + \ldots + a_n\big)},$$

где степень полинома в числителе на единицу меньше степени полинома в знаменателе. Тогда фрагмент таблицы Мак-Ленна:

$n = 1$	$I = \dfrac{b_0}{2a_0a_1}$
$n = 2$	$I = \dfrac{-b_0a_2 + a_0b_1}{2a_0a_1a_2}$
$n = 3$	$I = \dfrac{-b_0a_2a_3 + b_1a_0a_3 - b_2a_0a_1}{2a_0a_3\big(a_0a_3 - a_1a_2\big)}$

Или матричным методом:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,d\omega = (-1)^{n+1} \cdot \frac{N}{2a_0G},$$

где G — определитель матрицы Гурвица многочлена $A(j\omega)$, N — определитель матрицы, которая получается из матрицы Гурвица многочлена $A(j\omega)$ заменой первой строки коэффициентами многочлена $B(j\omega)$.

$$G = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad N = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Например, для $n = 2$:

$$I = (-1)^{2+1} \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}}{2a_0 \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}} = -\frac{(b_0 a_2 - a_0 b_1)}{2a_0 (a_1 a_2)}$$

Пример 6.2

Пусть на систему с передаточной функцией $W(p) = \dfrac{1}{Tp+1}$ действует шум со спектральной плотностью $S_v(\omega) = \dfrac{2b}{\alpha^2 + \omega^2}$.

Найдём дисперсию выходного сигнала:

$$S_y(\omega) = \left|W(p)\right|^2 S_v(\omega) = \frac{1}{(T^2\omega^2 + 1)} \cdot \frac{2b}{(\alpha^2 + \omega^2)}$$

$$n = 2 = \frac{2b}{T^2\omega^4 + (T^2\alpha^2 + 1)\omega^2 + \alpha^2}$$

1) $b_0 = 0, \quad b_1 = 2b, \quad a_0 = T, \quad a_1 = (T\alpha + 1), \quad a_2 = \alpha$

$$D_y = \frac{2b(T\alpha + 1)}{2T(T\alpha + 1)^2 \alpha} = \frac{b}{(T\alpha + 1)\alpha}$$

2) $$D_y = (-1)^{2+1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2b \\ T & \alpha \end{vmatrix}}{2T \begin{vmatrix} T\alpha + 1 & 0 \\ T & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-(-2bT)}{2T \cdot (T\alpha + 1) \cdot \alpha} = \frac{b}{(T\alpha + 1)\alpha}$$

Величина оценки $J = M\{\varepsilon^2\}$ является функцией параметров системы $W(p, k, T)$, и тогда, рассматривая производные $\dfrac{\partial J}{\partial k}$, $\dfrac{\partial J}{\partial T}$, и приравнивая их к нулю, можно определить оптимальные значения параметров передаточной функции.

Пример 6.3

На вход замкнутой системы с передаточной функцией $W_з(p) = \dfrac{k}{Tp+1}$ действует полезный случайный сигнал со спектральной плотностью $S_v(\omega) = \dfrac{b}{\alpha^2+\omega^2}$ и помеха в виде БШ интенсивностью c^2.

Найти параметр K при заданных T, b, a такой, чтобы минимизировать дисперсию ошибки воспроизведения полезного сигнала:

$$S_\varepsilon(\omega) = \left|1 - W_з(j\omega)\right|^2 S_v(s) + \left|W_з(j\omega)\right|^2 S_f(\omega) = \\ - \frac{T^2\omega + (1-k)^2}{T^2\omega^2+1} \cdot \frac{b}{\omega^2+\alpha^2} + \frac{k^2}{T^2\omega^2+1}c^2$$

Тогда значение критерия качества:

$$M\left\{\varepsilon^2\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[-T^2 b(j\omega)^2 + (1-k)^2 b\right]}{\left[(Tj\omega+1)(j\omega+\alpha)\right]\left[(-Tj\omega+1)(-j\omega+\alpha)\right]}\,d\omega +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2c^2 d\omega}{(Tj\omega+1)(-Tj\omega+1)} = \frac{b\left(T(1-k)^2+\alpha T^2\right)}{2T\cdot(1+\alpha T)\alpha} + \frac{k^2c^2}{2T\cdot 1} = \\ \frac{b\left(1+T\alpha-2k+k^2\right)}{2\alpha\cdot(1+\alpha T)} + \frac{k^2c^2}{2T}$$

$$\frac{dJ}{dK} = \frac{b2(k-1)}{2\alpha(1+\alpha T)} + \frac{2kc^2}{T} = 0 \;\Rightarrow\; K_{опт} = \frac{Tb}{Tb + c^2\alpha(1+T\alpha)}$$

Вернёмся к общей постановке задачи. Пусть на вход фильтрующей динамической системы поступает сумма полезного сигнала $v(t)$ и помехи $f(t)$. Задача фильтрации состоит в том, чтобы установить передаточную функцию $W(p)$ или импульсную временную функцию $\omega(t)$ системы, при которой достигается $\min M\left\{\varepsilon^2\right\}$, где $\varepsilon = v(t) - y(t)$. Решение этой задачи было получено Н. Винером на основе следующей теоремы.

Теорема 6.1. *Искомая оптимальная импульсная функция* $\omega^*(t)$ *(и соответствующая* $W^*(p)$*), при которой* $M\left\{\varepsilon^2\right\}$ *достигает ми-*

нимального значения удовлетворяет интегральному уравнению Винера-Хопфа:

$$y(t) = \int\limits_0^{\infty} \omega(\tau) \cdot \underbrace{\big(v(t) + f(t)\big)}_{\varphi} \, d\tau$$

$$R_{\varphi}(\tau) - \int\limits_0^{\infty} \omega^*(\tau) R_{\varphi}(t-\tau) \, d\tau = 0, \quad t \geq 0$$

Это утверждение формирует необходимое и достаточное условие. Интеграл имеет вид свёртки.

Норберт Винер в 1943 г. предложил частотный метод решения этой задачи, который в результате можно записать в виде следующей конструктивной процедуры:

1) Вычислить спектральную плотность входного сигнала.

$$\varphi(t) = v(t) + f(t) \;\; \Rightarrow \;\; S_{\varphi}(\omega) = S_v(\omega) + S_f(\omega)$$

2) Выполнить факторизацию этой функции.

$$S_{\varphi}(\omega) = \psi(j\omega) \cdot \psi(-j\omega)$$

3) Вычислить функцию $N(j\omega) = \psi^{-1}(-j\omega) S_v(\omega)$.
4) Представить функцию $N(p) = N(j\omega)\big|_{j\omega = p}$ в виде суммы двух дробно-рациональных выражений $N(p) = N^+(p) + N^-(p)$, одно из которых имеет полюса только в левой полуплоскости, другое — только в правой. Такая операция называется **расщеплением**. Из условия физической реализуемости нас будет интересовать только составляющая $N^+(p)$.
5) Искомая передаточная функция, фильтрующая полезный сигнал на фоне независимой аддитивной помехи с min средним квадратом ошибки (дисперсией) определяется выражением:

$$W^*(p) = \frac{N^+(p)}{\psi(p)},$$

где $\psi(p) = \psi(j\omega)\big|_{j\omega = p}$.

Пример 6.4

Пусть полезное входное воздействие, описывается спектральной плотностью $S_v(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2+1}$, помеха — БШ с интенсивностью c^2. Найти $W_{о.ф.}(p)$.

1) $S_\varphi(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2+1} + c^2 = \dfrac{c^2\omega^2 + c^2 + 1}{\omega^2+1}$

2) $S_\varphi(\omega) = \underbrace{\dfrac{jc\omega + \sqrt{1+c^2}}{j\omega+1}}_{\psi(j\omega)} \cdot \underbrace{\dfrac{-jc\omega + \sqrt{1+c^2}}{-j\omega+1}}_{\psi(-j\omega)}$

$$\psi(p) = \frac{cp + \sqrt{1+c^2}}{1+p}$$

3) $N(j\omega) = S_v(\omega) \cdot \psi^{-1}(-j\omega) = \dfrac{1}{\omega^2+1} \cdot \dfrac{-j\omega+1}{-jc\omega + \sqrt{1+c^2}} =$

$$\frac{1}{(1+j\omega)\left(\sqrt{1+c^2} - jc\omega\right)}$$

$$N(p) = \frac{1}{(1+p)\left(\sqrt{c^2+1} - cp\right)}$$

4) $N(p) = \dfrac{1}{(1+p)\left(\sqrt{1+c^2} - cp\right)} =$

$$\frac{1}{c+\sqrt{1+c^2}} \cdot \left(\frac{1}{1+p} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2} - cp}\right)$$

$$N^+(p) = \frac{1}{c+\sqrt{1+c^2}} \cdot \frac{1}{1+p}$$

5) $W^*(p) = \dfrac{N^+(p)}{\psi(p)} = \dfrac{1}{c+\sqrt{1+c^2}} \cdot \dfrac{1}{1+p} \cdot \dfrac{1+p}{cp+\sqrt{1+c^2}} =$

$$\frac{\left.\dfrac{1}{c\sqrt{1+c^2}+1+c^2}\right\} k^*}{\underbrace{\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}}_{T^*} p + 1}$$

6.2. Фильтры Калмана

Современная теория стохастической фильтрации заложена в 40-х годах XX века трудами А. Н. Колмогорова и Н. Винера, которые независимо друг от друга использовали процедуры интерполяции и экстраполяции стационарных случайных последовательностей для решения задач измерения параметров траектории летательных аппаратов по радарным данным. Первые результаты получены на основе интегрального уравнения Винера-Хопфа. Решение искалось в частотной области с использованием разложения спектральной плотности на пару зеркально симметричных сомножителей и последующим порождением выходного процесса из белого шума. Предложенная процедура очень сложна, и область применения оказалась довольно узкой.

Дальнейшее развитие теории фильтрации связано с именами Р. Калмана и Р. Бьюси. Ими решена задача в пространстве состояний, найдены дискретный, а затем и непрерывный эквиваленты интегрального уравнения Винера-Хопфа в виде матричных разностного и дифференциального уравнений соответственно. Приведём эти результаты в виде теоремы и основанной на ней процедуры синтеза фильтра.

Пусть задана динамическая система:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + \alpha(t), \quad M\{x(0)\} \\ &y = Cx + \beta(t) \end{aligned}$$

Входной сигнал $\alpha(t)$ и ошибка измерения $\beta(t)$ являются случайными процессами типа БШ с известными матрицами ковариаций Q и R соответственно. Начальное состояние — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации S. Начальное положение, входной сигнал и ошибка измерения взаимно не коррелированы.

Необходимо по результатам измерения выхода $y(t)$ найти несмещённую оценку фазового вектора состояния системы $\bar{x}(t)$, оптимальную в смысле $\min\, D_\varepsilon$ ошибки оценивания $\varepsilon = x - \bar{x}$.

Теорема 6.2 (Теорема Калмана-Бьюси, 1961 г.). *Фильтр, формирующий линейную несмещённую оценку вектора состояния $x(t)$ с минимальной среднеквадратичной ошибкой для указанной системы описывается уравнением:*

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + F(t)\big(y(t) - C\bar{x}(t)\big), \quad \bar{x}(0) = 0,$$

где $F(t) = P(t)C^T R^{-1}$ и $P(t)$ — матрица ковариации ошибки оценивания, которая удовлетворяет уравнению Риккати:

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R^{-1} CP(t) + Q, \quad P(0) = S$$

А при стационарных стохастических возмущениях и длительном наблюдении матрица ковариаций стационарна (не зависит от t) и удовлетворяет алгебраическому уравнению:

$$AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q = 0$$

При этом матрицы Q и R — симметричные положительно определённые, а P — симметричная положительно полуопределённая.

Пример 6.5

Пусть полезный сигнал имеет спектральную плотность $S_v(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2+1}$, т. е. порождается динамической системой $\dot{v} = -v + \mu_1$, где μ_1 — белый шум с $Q = S_{\mu_1} = 1$. На выходе измерения зашумлены белым шумом со спектральной плотностью $R = S_f = c^2$. Тогда стационарное решение P удовлетворяет уравнению:

$$-1 \cdot p - 1 \cdot p - p \cdot 1 \cdot \frac{1}{c^2} \cdot 1 \cdot p + 1 = 0 \;\Rightarrow\; -2p - \frac{p^2}{c^2} + 1 = 0$$

$$p^2 + 2c^2 p - c^2 = 0 \;\Rightarrow\; p = -c^2 \pm \sqrt{c^4 + c^2}$$

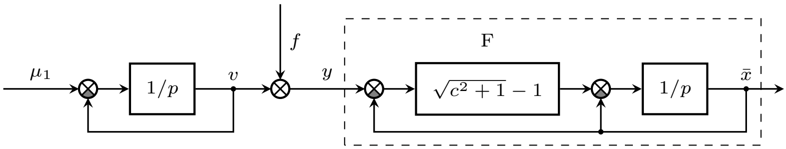
$$p > 0 \;\Rightarrow\; p = -c^2 + c^2\sqrt{c^2+1}$$

$$F = c^2\left(\sqrt{c^2+1} - 1\right) \cdot \frac{1}{c^2} = \sqrt{c^2+1} - 1$$

Т. е. уравнение для оптимального фильтра имеет вид:

$$\dot{\bar{x}} = -\bar{x} + \left(\sqrt{c^2+1} - 1\right)(y - \bar{x})$$

Структура всей системы:



Передаточная функция фильтра:

$$W_{\text{ф}}(p) = \frac{\sqrt{c^2+1}-1}{p+\sqrt{c^2+1}}$$

Теперь вернёмся к матричной постановке задачи оптимального синтеза:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + v \\ y = Cx + f \end{cases}$$

$$x(0) \qquad M\big\{x(0)\big\} = 0 \qquad M\big\{x^T(0)x(0)\big\} = Q_x$$

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = A_v z_1 + \mu_1(t) \qquad &&\dot{z}_2 = A_f z_2 + \mu_2(t) \\ &v = C_v z_1 &&f = C_f z_2, \end{aligned}$$

где μ_1 и μ_2 — взаимнонезависимые белые шумы с интенсивностями Q_1 и Q_2 соответственно.

Управление должно обеспечивать отслеживание уставки $v(t)$ с минимизацией критерия:

$$J = M\left\{\int\limits_0^T \big(\varepsilon^T Q \varepsilon + u^T R u\big)\, dt\right\}, \quad \varepsilon = v(t) - y(t)$$

Задача сводится к стандартной за счёт расширения вектора состояния и соответствующих матриц:

$$\underline{X} = \big(x, z_1, z_2\big) \qquad \underline{C} = \big(C, 0, C_f\big)$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A & C_v & 0 \\ 0 & A_v & 0 \\ 0 & 0 & A_f \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

При такой постановке задачи было доказано, что решение даётся расширенным матричным дифференциальным уравнением Риккати. При $T \to \infty$ и постоянных параметрах уравнение становится алгебраическим. Однако, интереснее всего то, что решение

$$u(t) = -Kx(t) + Fz(t)$$

распадается на независимое решение для обратных и прямых связей.

Пример 6.6

Исполнительным механизмом следящей системы является двигатель постоянного тока, модель которого описывается уравнением $\dot{x} = -0{,}1x + 1{,}5u$. Следует найти структуру УУ, чтобы система максимально точно отслеживала случайное задание уставки с $R_v(\tau) = 25e^{-0{,}4|\tau|}$.

Определим $S_v(\tau) = \dfrac{20}{\omega^2 + 0{,}16} = \dfrac{20}{|j\omega + 0{,}4|^2}$, т. е. такой процесс будет порождаться белым шумом μ с интенсивностью $20c^{-2}$, пропущенным через формирующий фильтр и $W(p) = \dfrac{1}{p + 0{,}4}$ или $\dot{v} = -0{,}4v + \mu(t)$.

Расширенная модель:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu$$

Для завершения постановки задачи в качестве критерия возьмём:

$$J = M\left\{ \int\limits_0^\infty \left[(x - v)^2 + 100u^2 \right] dt \right\}$$

Управление будем искать в виде $u(t) = -K \cdot x + F \cdot v$, где $K = R^{-1}B^T P_{11} = 0{,}01 \cdot 1{,}5 \cdot P_{11}$, $F = R^{-1}B^T P_{12} = 0{,}015 \cdot P_{12}$.

Для нахождения P_{11} и P_{12} составляется уравнение Риккати и получаем:

$$0{,}0225P_{11}^2 + 0{,}2P_{11} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; P_{11} = 12{,}46 \;\Rightarrow\; K = 0{,}187$$

$$(0{,}3 + 1{,}5K)P_{12} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; P_{12} = -1{,}723 \;\Rightarrow\; F = 0{,}0258$$

$$0{,}0225P_{12}^2 + 0{,}8P_{22} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; P_{12} = 1{,}166$$

$$J_{\min} = \lim_{\tau\to\infty} M\left\{\int\limits_0^\infty \left[(x-v)^2 + 100u^2\right] dt\right\} =$$

$$Tr\left[P\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 20\end{pmatrix}\right] = 23{,}32c^{-1}$$

6.3. Наблюдатели состояния линейной системы

Создание фильтра Калмана–Бьюси, в котором по измерениям выхода ОУ $y(t)$, искалась несмещённая оценка всего фазового вектора $\bar{x}(t)$ состояния системы в условиях действия помех, спровоцировало интерес к созданию наблюдателей, решающих задачу восстановления неизмеряемых координат состояния объекта по измерениям выхода $y(t)$.

И в 1964 г. Люенбергер предложил структуру асимптотического наблюдателя для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases}$$

искать в виде:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L\big(y - \hat{y}\big), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

При этом ошибка оценивания $\delta_x = x - \hat{x}$ удовлетворяет условию:

$$\dot{\delta}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L\big(Cx - C\hat{x}\big) = (A - LC)\delta_x$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с матрицей $A - LC$ и ненулевыми начальными условиями. Асимптотическая сходимость ошибки к нулю возможна тогда и только тогда, когда собственные числа матрицы $A - LC$ (называемые полюсами наблюдателя) располагаются в левой полуплоскости. Понятно, что при этом задача синтеза наблюдателя имеет решения только тогда, когда система полностью наблюдаема, т. е. когда:

$$rang \left| \begin{array}{c:c:c:c} C^T & A^T C^T & \dots & \left(A^T\right)^{n-1} C^T \end{array} \right| = n$$

В отличие от фильтра Калмана–Бьюси, где выбор матрицы $F(t)$ определялся свойствами полезного сигнала и шумов, выбор матрицы L наблюдателя допускает произвольное расположение полюсов.

Для стационарного наблюдателя ошибка δ_x тем быстрее стремится к нулю, чем левее полюса, чем больше L. Однако, при этом наблюдатель Люенбергера становится слишком чувствительным к возможным ошибкам измерения и шумам. Поэтому обычно стараются ограничиться выбором полюсов так, чтобы наблюдатель был в 2–4 раза более быстродействующим, чем регулятор.

Общая динамика системы описывается уравнением:

$$\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{\delta}_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ \delta_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B \\ 0 \end{vmatrix} K_0 v(t)$$

и синтез регулятора и наблюдателя можно производить независимо.

Эти идеи были строго доказаны математически и получили название двух основных принципов:

- Принцип стохастической эквивалентности — утверждает возможность замены реальных переменных состояния x в регуляторе их оценками $\hat{x}$, вычисляемыми по измеряемому выходу y;
- Принцип разделения — утверждает, что синтез регулятора и наблюдателя для линейных систем можно производить независимо друг от друга.

Структура наблюдателя полного порядка, очевидно, избыточна, т. к. в ней определяются и те координаты, которые доступны для измерения. Поэтому в 1968 году Люенбергер предложил идею построения наблюдателей сокращённой размерности.

Пусть в системе n-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) \\ y = Cx \end{cases}$$

имеется m измеряемых координат. Введём вспомогательный вектор $r_{(n-m)}$ и матрицу D так, чтобы $r = Dx$ и квадратная матрица $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ была бы невырожденной. Тогда в блочном виде:

$$x = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} y \\ r \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} L_1 & L_2 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = L_1 y + L_2 r$$

Найдём структуру наблюдателя для вспомогательного вектора r:

$$\dot{r} = D\dot{x} = D(Ax + Bu) = DAL_1 y + DAL_2 r + DBu$$

На основании этого составим оценку вспомогательного вектора

$$\dot{\bar{r}} = DAL_1 y + DAL_2 \bar{r} + DABu + G\frac{d}{dt}\big(y - C\bar{x}\big),$$

где $\bar{x} = L_1 y(t) + L_2 \bar{r}$.

$$\frac{d}{dt}\big(y - C\bar{x}\big) = \dot{y} - C\dot{\bar{x}} = \dot{y} - C\big(A\bar{x} + Bu\big) = \dot{y} - CAL_1 y - CAL_2 \bar{r} - CBu$$

Подставим это в модель наблюдателя и выполним алгебраические преобразования:

$$\dot{z} = \dot{\bar{r}} - G\dot{y} = \big(DAL_2 - GCAL_2\big) \cdot \big(\bar{r} - Gy\big) + \big(DAL_1 + DAL_2 G - GCAL_1 - GCAL_2 G\big) y + (DB - GCB)u$$

$$\dot{z} = (D - GC) \cdot \Big(AL_2 z + \big(AL_1 + AL_2 G\big) y + Bu\Big), \quad z(0) = 0$$

$$\bar{x} = L_1 y + L_2 \bar{r} = L_1 y + L_2 (z + Gy) = L_2 z + \big(L_1 + L_2 G\big) y$$

Структура наблюдателя Люенбергера сокращённой размерности показана на рисунке 6.1.

Матрица G в наблюдателе подбирается (аналогично L) так, чтобы обеспечить качество динамического процесса восстановления координат состояния. Исследования показали, что наблюдатели неполного порядка менее чувствительны к помехам, чем наблюдатели полного порядка.

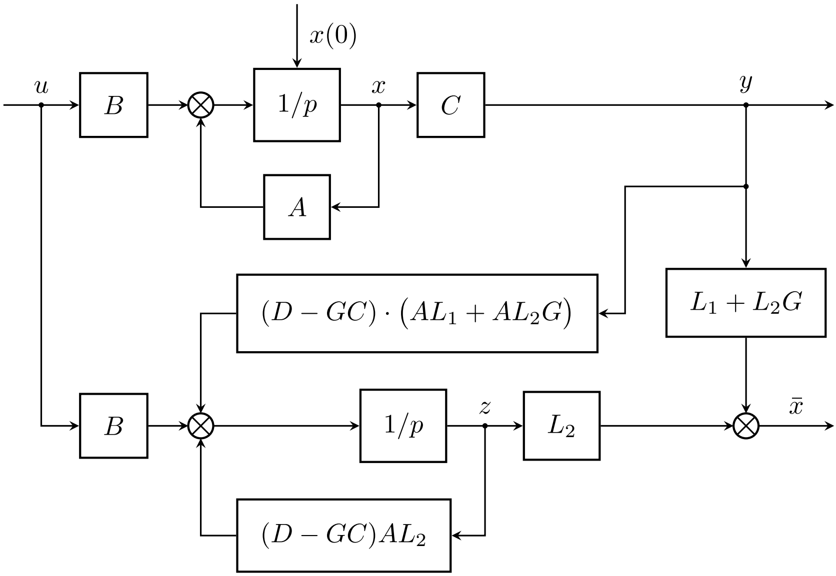


Рис. 6.1. Наблюдатель Люенбергера сокращённой размерности

Пример 6.7

Пусть в системе управления положением:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} u(t)$$

измеряется лишь переменная $y = x_1$, т. е. $C = \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix}$. Построим наблюдатель полного (2) порядка, восстанавливающий оценки $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Матрица наблюдателя:

$$L = \begin{pmatrix} l_1, & l_2 \end{pmatrix}^T$$

$$(A - LC) = \begin{pmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & -5 \end{pmatrix}$$

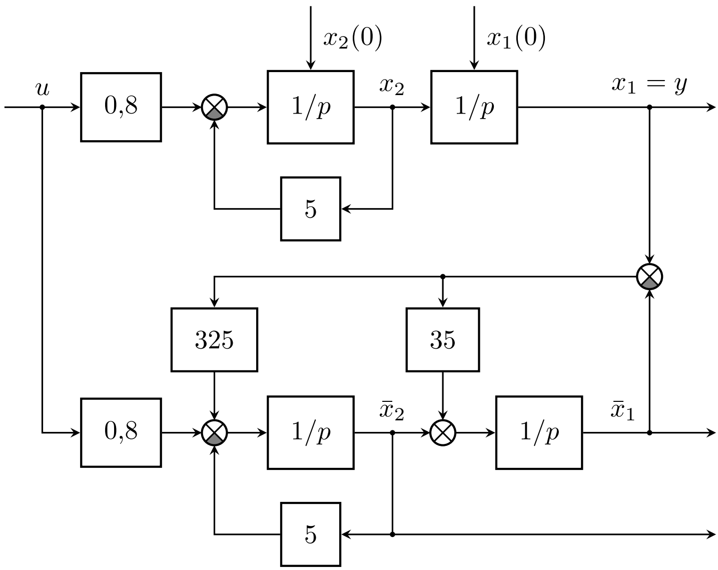


Рис. 6.2. Наблюдатель Люенбергера полной размерности для объекта в примере 6.7

Полюса наблюдателя определяются уравнением:

$$\det(\lambda E - A + LC) = \det \begin{vmatrix} \lambda + l_1 & -1 \\ l_2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \big(\lambda + l_1\big) \cdot \big(\lambda + 5\big) + l_2 =$$
$$\lambda^2 + \big(5 + l_1\big)\lambda + \big(5l_1 + l_2\big) = 0$$

Поскольку характеристические числа системы $\{0; -5\}$, зададим полюса наблюдателя $\{\alpha \pm j\beta\} = \{-20 \pm j10\}$, т. е. характеристический полином наблюдателя имеет вид:

$$\lambda^2 + 40\lambda + 500 = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2$$

$$l_1 = 35, \qquad l_2 = 500 - 5 \cdot 35 = 325$$

Модель асимптотического наблюдателя имеет вид:

$$\dot{\bar{x}} = (A - LC)\bar{x} + Bu + Ly = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 \\ 325 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix}\right] \bar{x} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 35 \\ 325 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -35 & 1 \\ -325 & -5 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 35 \\ 325 \end{pmatrix} y$$

$$x(0) = 0$$

Структура системы показана на рисунке 6.2.

Пример 6.8

Синтезируем наблюдатель Люенбергера первого порядка. Для этого выберем матрицу D так, чтобы матрица $\begin{vmatrix} C \\ D \end{vmatrix}$ была единичной $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, тогда $L_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $L_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$. Матрица G — скаляр, равный g, $(D - GC) = \begin{pmatrix} -g, & 1 \end{pmatrix}$.

Дифференциальное уравнение для вспомогательной переменной z и соотношение для оценки принимают вид:

$$\dot{z} = (-g, \quad 1)\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z + \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g\right) y +\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} u\right] = (-g, \quad 1)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} gy + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} u\right] =$$

$$-(g+5)z - (g+5)gy + 0{,}8u$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g\right] y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix} y$$

Полюс наблюдателя равен $-(g + 5)$. Выберем в точке -20, тогда $g = 15$, и окончательно получаем:

$$\dot{z} = -20z - 300y + 0.8u, \qquad z(0) = 0, \qquad \bar{x}_1 = y, \qquad \bar{x}_2 = z + 15y$$

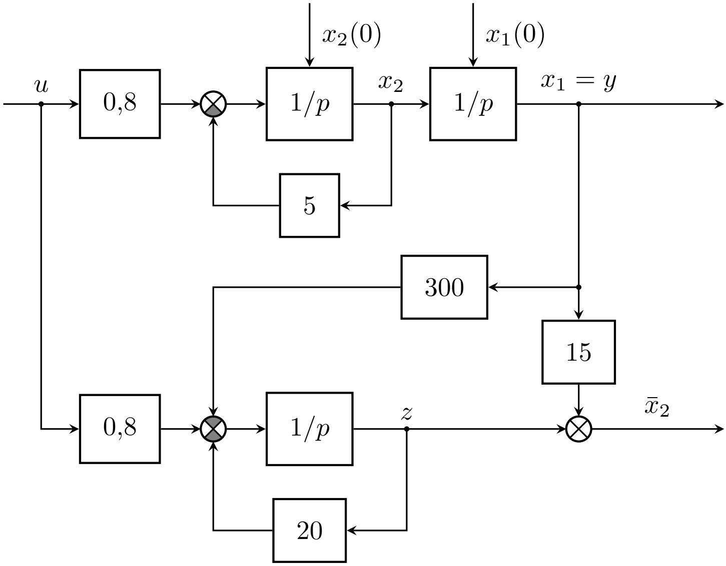


Рис. 6.3. Наблюдатель Люенбергера сокращённой размерности для объекта в примере 6.8

Список литературы

1) *Певзнер Л. Д.* Теория систем управления. — М.: Изд. МГГУ, 2002. — 472 с.

2) *Сейдж Э. П., Уайт Ч. С. III.* Оптимальное управление системами : Пер. с англ. / Под ред. Б.Р. Левина. — М.: Радио и связь, 1982. — 392 с.

3) *Чураков Е. П.* Оптимальные и адаптивные системы : Учебное пособие для вузов. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 256 с.

4) *Куропаткин П. В.* Оптимальные и самонастраивающиеся системы : Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 1980.