

Задача об оптимальной остановке в случае наличия инсайдерской информации

Дмитрий Крылов, Андрей Стрелков

21 января 2026 г.

1 Введение

В данной работе рассматривается задача оптимальной продажи актива при наличии инсайдерской информации.

Существует разные виды инсайдерской информации. Например, это может быть информация об объёме торгов на рынке или о продаже/покупке большого пакета активов. На основе такого рода информации можно сделать выводы о цене базового актива в конечный момент времени. Данная задача была исследована в работах [EkstrГцm2009, Kulikov2017].

Также к инсайдерской информации мы относим известные верхнюю и нижнюю границы цен актива, устанавливаемые регулятором или полученные инвестором из других соображений, действующие весь период. В работе [Kulikov2017] был изучен случай границ, не зависящих от времени. Мы рассматриваем более общий случай двух произвольных линейных по времени границ. В нашей работе цена актива моделируется с помощью симметричного случайного блуждания.

В последние годы активно развивается направление, связанное с применением методов машинного обучения к задачам оптимальной остановки и финансового прогнозирования. Такие подходы позволяют строить аппроксимации оптимальных стратегий без необходимости аналитического решения сложных стохастических уравнений. В частности, в работах [Becker2020, Chen2019] предложены методы на основе глубоких нейронных сетей и обучения с подкреплением (reinforcement learning), позволяющие агенту по историческим данным или сгенерированным траекториям случайного процесса обучаться принимать решение о моменте остановки, максимизирующем ожидаемую прибыль.

2 Постановка задачи

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P}\}$ — фильтрованное вероятностное пространство, X_t — согласованный с фильтрацией случайный процесс, означающий цену актива. Тогда задачей оптимальной продажи в пределах интервала $[0, T]$ будет являться решения следующей задачи:

$$\mathbb{E}(X_t) \rightarrow \max, t \leq T$$

и оптимального момента остановки τ^* ,

$$\tau^* = \inf_{\tau \leq T} \left(\sup_{\tau \leq t \leq T} \{\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_\tau)\} \leq X_\tau \right)$$

В данном случае рассматриваются фильтрация

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t, -b - y \cdot t \leq X_\tau \leq a + x \cdot t, \tau \leq T), t \leq T$$

и случайное блуждание

$$X_n = (S_n \mid -b - y \cdot k \leq S_k \leq a + x \cdot k, k \in \{1, \dots, N\}).$$

Мы будем обозначать верхнюю и нижнюю границу на шаге n как U_n и L_n . Дополнительно потребуем $U_n - L_n > 2$

3 Методы решения

3.1 Теоретическое решение задачи

3.1.1 Функция $m(n, k)$

Рассматриваемая задача является более общим случаем задачи, рассмотренной в части 2 работы [Kulikov2017]. Отличие заключается в типе ограничений: линейная функция вместо константы. Используя обозначения, предложенные в этой работе, мы покажем, как результаты из неё переносятся на нашу задачу.

Определим функцию, необходимую для решения поставленной задачи:

$$m(n, k) = \sup_{n \leq \tau \leq N} \mathbb{E}(X_\tau | X_n = k),$$

где $n = 1, \dots, N$. Если выполнено равенство $m(n, k) = k$, то данное состояние (n, k) , где n — момент времени, а $X_n = k$ — состояние случайного процесса X_n , является решением задачи об оптимальной остановке.

Заметим, что $\forall k m(N, k) = k$. Также так как при вычислении этой функции используются только шаги от текущего до последнего, значение на n -м шаге можно выразить через значения на следующем. Для этого при нахождении супремума мы отделяем X_n и преобразуем матожидание по определению:

$$m(n, k) = \sup_{n \leq \tau \leq N} \mathbb{E}(X_\tau | X_n = k) = \max \left(k, \sup_{n+1 \leq \tau \leq N} \mathbb{E}(X_\tau | X_n = k) \right) \quad (1)$$

$$\mathbb{E}(X_\tau | X_n = k) = \sum_p p \cdot \mathbb{P}\{X_\tau = p | X_n = k\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_\tau = p | X_n = k\} &= \frac{\mathbb{P}\{X_\tau = p, X_n = k\}}{\mathbb{P}\{X_n = k\}} = \frac{\mathbb{P}\{X_\tau = p, X_n = k, X_{n+1} = k \pm 1\}}{\mathbb{P}\{X_n = k\}} = \\ &= \frac{\mathbb{P}\{X_\tau = p | X_n = k, X_{n+1} = k + 1\} \cdot \mathbb{P}\{X_n = k, X_{n+1} = k + 1\}}{\mathbb{P}\{X_n = k\}} + \\ &+ \frac{\mathbb{P}\{X_\tau = p | X_n = k, X_{n+1} = k - 1\} \cdot \mathbb{P}\{X_n = k, X_{n+1} = k - 1\}}{\mathbb{P}\{X_n = k\}} \end{aligned} \quad (3)$$

Удобно ввести обозначение для вероятности из значения k на n -м шаге перейти выше, то есть в $k + 1$ на следующем шаге: $p(n, k) = \mathbb{P}\{X_{n+1} = k + 1 | X_n = k\}$. По условию мы также получаем $\mathbb{P}\{X_{n+1} = k - 1 | X_n = k\} = (1 - p(n, k))$. После подстановки (3) в исходные выражения (2) и (1) получается искомая зависимость:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_\tau | X_n = k) &= \mathbb{E}(X_\tau | X_{n+1} = k + 1, X_n = k) \cdot p(n, k) + \\ &+ \mathbb{E}(X_\tau | X_{n+1} = k - 1, X_n = k) \cdot (1 - p(n, k)) \Rightarrow \\ m(n, k) &= \max(k, p(n, k) \cdot m(n + 1, k + 1) + (1 - p(n, k)) \cdot m(n + 1, k - 1)). \end{aligned}$$

Вероятность перехода $p(n, k)$ также может быть вычислена рекурсивно, если выразить её через число траекторий $l(n, k)$, удовлетворяющих исходным условиям и проходящих через состояние (n, k) :

$$p(n, k) = \mathbb{P}\{X_{n+1} = k + 1 \mid X_n = k\} = \frac{l(n+1, k+1)}{l(n, k)},$$

$$l(n, k) = \begin{cases} l(n+1, k-1), & a + x \cdot (n+1) + 1 \geq k + 1 > a + x \cdot (n+1) \\ l(n+1, k+1), & -b - y \cdot (n+1) - 1 \leq k - 1 < -b - y \cdot (n+1) \\ l(n+1, k-1) + l(n+1, k+1), & -b - y \cdot (k+1) + 1 \leq k \leq a + x \cdot (k+1) - 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

На рис. 1 приведён пример вычисления значения $m(n, k)$ с помощью формул, полученных выше.

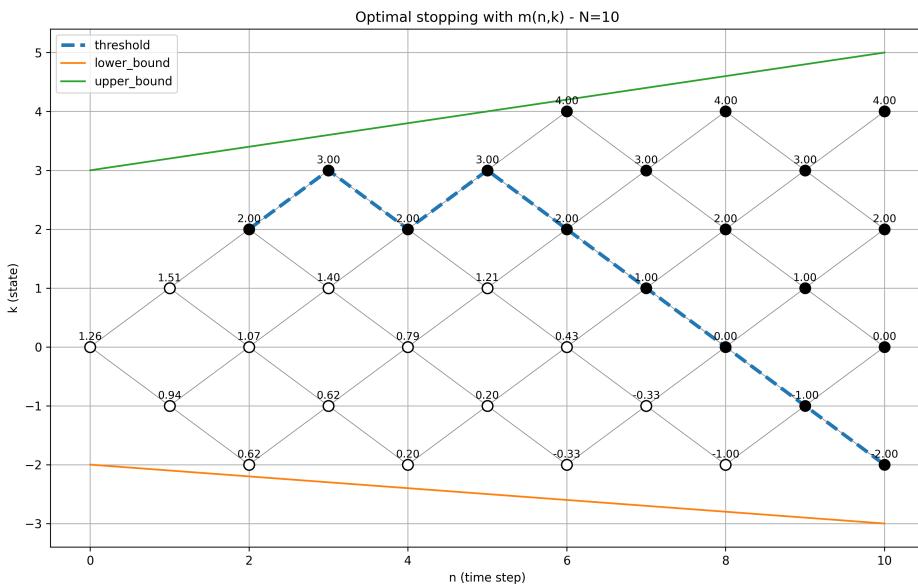


Рис. 1: Пример вычисления $m(n, k)$ для $N = 5$ и ограничений $-2 \leq X_n \leq 3 + n$. Синей линией обозначена оптимальная граница остановки

Итак, выше получены формулы для рекурсивного вычисления функции $m(n, k)$ для принятия решения об остановке. Этот алгоритм требует двух проходов по всем возможным состояниям при фиксированных границах и числе шагов, поэтому имеет сложность $\mathcal{O}((x - y)N^2)$.

3.1.2 Свойства $m(n, k)$

В этом разделе будут доказаны свойства функции $m(n, k)$, позволяющие сделать выводы о характере оптимальной границы остановки. Раздел основан на теоремах 2.4 и 2.5 из работы [Kulikov2017]. Отсутствие симметрии в данной постановке не позволяет сразу

воспользоваться упомянутыми теоремами. Необходимо доказать свойства функций $p(n, k)$ и $l(n, k)$, на которые опираются теоремы, другими способами.

Лемма 3.1. Для функции $l(n, k)$ выполнено неравенство $l(n, k)^2 \geq l(n, k - 2) \cdot l(n, k + 2)$, при этом если какой-то из входящих в него членов подразумевает выход за заданные границы, он считается равным нулю.

Доказательство. Будем считать, что выход за границы не происходит. Докажем обратной индукцией по n .

База индукции. Если $n = N$, то по определению $l(N, k) = 1$ для любого k . Неравенство выполнено.

Индукционный переход. Пусть неравенство верно для шага $n + 1$.

$$A_j := l(n + 1, j), \quad A_j^2 \geq A_{j-2}A_{j+2}$$

Перейдём к шагу n :

$$\begin{aligned} B_k &:= l(n, k) = l(n + 1, k - 1) + l(n + 1, k - 1) = A_{k-1} + A_{k+1} \\ B_{k-2} &= A_{k-3} + A_{k-1}, \quad B_{k+2} = A_{k+3} + A_{k+1} \\ B_k^2 - B_{k-2} \cdot B_{k+2} &= A_{k-1}^2 + 2A_{k-1}A_{k+1} + A_{k+1}^2 - A_{k-3}A_{k+3} - A_{k-3}A_{k+1} - A_{k-1}A_{k+3} - A_{k-1}A_{k+1} = \\ &= \underbrace{A_{k-1}^2 - A_{k-3}A_{k+1}}_{T_1} + \underbrace{A_{k+1}^2 - A_{k-1}A_{k+3}}_{T_2} + \underbrace{A_{k-1}A_{k+1} - A_{k-3}A_{k+3}}_{T_3} \end{aligned}$$

Слагаемые T_1 и T_2 неотрицательны по предположению индукции.

$$\begin{cases} A_{k+1}^2 \geq A_{k-1}A_{k+3} \\ A_{k-1}^2 \geq A_{k-3}A_{k+1} \end{cases} \Rightarrow A_{k+1}^2 A_{k-1}^2 \geq A_{k-1}A_{k+3}A_{k-3}A_{k+1} \Rightarrow \\ A_{k-1}A_{k+1} \geq A_{k-3}A_{k+3} \Rightarrow T_3 \geq 0$$

Третье слагаемое также неотрицательно. Значит, выполнено неравенство $B_k^2 - B_{k-2}B_{k+2} \geq 0$ и индукционный переход доказан. \square

Лемма 3.2. Функция $k \mapsto p(n, k)$ нестрого убывает по k при фиксированном n .

Доказательство. Сравним $p(n, k)$ и $p(n, k + 2)$:

$$\begin{aligned} p(n, k) - p(n, k + 2) &= \frac{l(n + 1, k + 1)}{l(n, k)} - \frac{l(n + 1, k + 3)}{l(n, k + 2)} = \\ &= \frac{l(n + 1, k + 1) \cdot l(n, k + 2) - l(n + 1, k + 3) \cdot l(n, k)}{l(n, k) \cdot l(n, k + 2)} \end{aligned}$$

Соотношение между $p(n, k)$ и $p(n, k + 2)$ определяется чисчителем. Используя обозначения из леммы 3.1 и равенства $l(n, k + 2) = l(n + 1, k + 3) + l(n + 1, k + 1)$ и $l(n, k) =$

$l(n+1, k+1) + l(n+1, k-1)$, его можно преобразовать так:

$$A_{k+1}(A_{k+3} + A_{k+1}) - A_{k+3}(A_{k+1} + A_{k-1}) = A_{k+1}^2 - A_{k-1}A_{k+3} = A_{k+1}^2 - A_{k+1-2}A_{k+1+2}.$$

Последнее выражение неотрицательно в силу леммы 3.1. Это завершает доказательство неравенства $p(n, k) \geq p(n, k+2)$. \square

Первая теорема — о монотонности функции $m(n, k)$ по её аргументам.

Теорема 3.1. Функция $m(n, k)$ обладает следующими свойствами:

1. (Монотонность по k) При фиксированном n $m(n, k)$ строго возрастает по k . В частности, $m(n, k) > m(n, k-2)$.
2. (Монотонность по n) При фиксированном k $m(n, k)$ нестрого убывает по n . В частности, $m(n, k) \geq m(n+2, k)$.
3. $m(n-1, k+1) \leq m(n, k) + 1$.
4. $m(n, k+2) \leq m(n, k) + 2$.

Доказательство. Верно доказательство теоремы 2.4 из [Kulikov2017] со следующими уточнениями.

1. Вместо случая ($k = a$, $k-2 = -a$) нужно рассмотреть ($k = U_n$, $k-2 = L_n$). При наложенных ограничениях эти два равенства не могут быть выполнены одновременно.
3. Нестрогое убывание функции $k \mapsto p(n, k)$ доказано в лемме 3.2. \square

Следующая теорема показывает [Kulikov2017], что из принадлежности границе остановки состояния (n, k) следует принадлежность границе состояний $(n-1, k+1)$, $(n-2, k+2)$, $(n, k+2)$. С другой стороны, если состояние (n, k) не является частью оптимальной границы остановки, то это верно для состояний $(n-1, k-1)$, $(n-2, k)$, $(n, k-2)$. В итоге, можно сделать вывод, что при переходе к непрерывному времени, оптимальная граница остановки должна быть убывающей и выпуклой кверху.

Для этой теоремы справедливо доказательство соответствующих пунктов теоремы 2.5 в [Kulikov2017].

Теорема 3.2. (Оптимальная граница остановки)

1. Если $m(n, k) = k$, то $m(n-1, k+1) = k+1$, $m(n-2, k+2) = k+2$, $m(n, k+2) = k+2$.
2. Если $m(n, k) > k$, то $m(n-1, k-1) > k-1$, $m(n-2, k) > k$, $m(n, k-2) > k-2$.

3.2 Решение с помощью ML

3.2.1 Постановка задачи

Рассматривается задача оптимальной остановки на случайному процессе цен. Требуется найти момент времени $\tau \leq T$, максимизирующий доход:

$$\text{profit}(\tau) = X_\tau - X_0.$$

Оптимальная стратегия не известна.

Цель: обучить модель, которая в каждый момент времени решает, останавливать ли процесс. Это бинарная классификация:

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t = \text{оптимальная точка остановки,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.2.2 Генерация данных

Для каждой траектории генерируется случайное блуждание длины N :

$$X_{t+1} = X_t + \xi_t, \quad \xi_t = \begin{cases} +1 & \text{с вероятностью } p, \\ -1 & \text{с вероятностью } 1 - p, \end{cases}$$

где $p = 0.5$ для каждой новой симуляции.

Таргет - $y_t = \text{bool}(X_t == \max_{\tau \in [t, N]}(X_\tau))$

Также строятся верхняя и нижняя линейные границы методом наименьших квадратов:

$$X_t \approx at + b,$$

$$\text{upper}_t = at + b + R_{\max} = a_u t + b_u, \quad \text{lower}_t = at + b + R_{\min} = a_l t + b_l,$$

где R_{\max}, R_{\min} — максимальные и минимальные остатки.

Каждый временной шаг кодируется шестью признаками:

$$f_t = \{X_t, N - t, a_u, b_u, a_l, b_l\}$$

Такая кодировка является общей для любого выбора границ в рамках этой задачи.

3.2.3 Архитектура модели

Используется однонаправленная рекуррентная нейросеть GRU:

$$\text{GRU}_\theta : \mathbb{R}^{N \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times 1},$$

где $d = 6$ — размерность входных признаков.

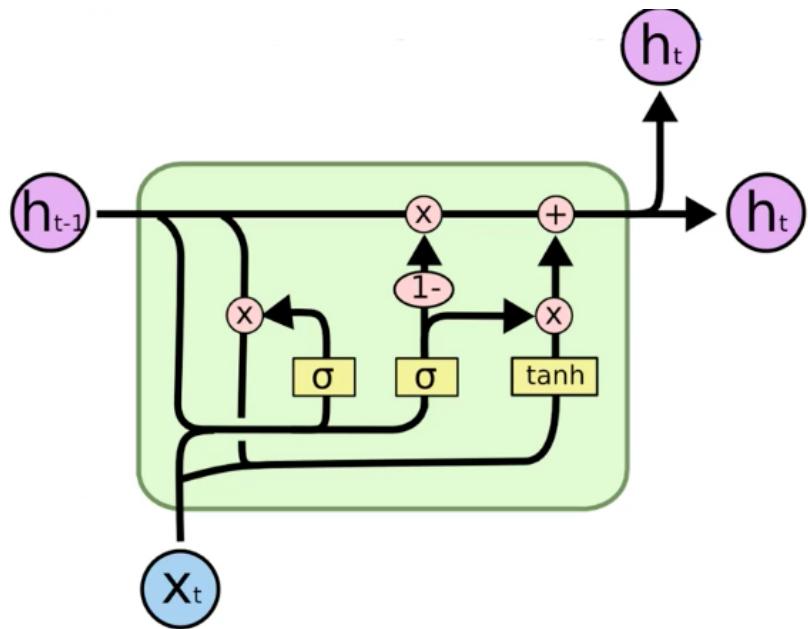


Рис. 2: GRU

Формально:

$$h_t = \text{GRUCell}(f_t, h_{t-1}), \quad \hat{y}_t = \sigma(Wh_t + b).$$

Параметры модели:

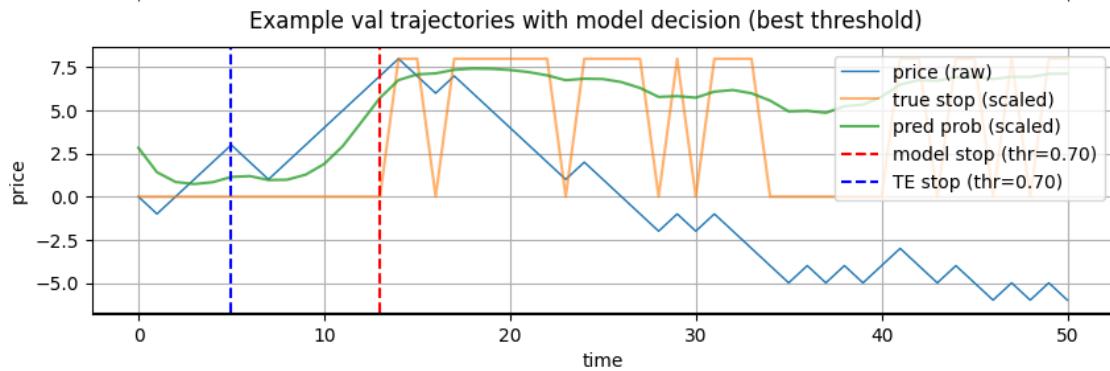
- input size: 6
- hidden size: 32
- num layers: 1
- activation на выходе: sigmoid

Выход модели — вероятности остановки:

$$\hat{y}_t = \mathbb{P}(\text{stop at } t).$$

Фактическая точка остановки определяется как

$$\tau_{\text{model}} = \begin{cases} \min\{t : \hat{y}_t \geq \text{threshold}\}, & \text{если есть срабатывание,} \\ N - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рис. 3: Пример работы модели для $N = 50$

3.3 Функция потерь

Используется бинарная кросс-энтропия:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} [y_t \log(\hat{y}_t) + (1 - y_t) \log(1 - \hat{y}_t)].$$

Оптимизация: Adam.

3.4 Метрики

Оценка проводится на валидационном наборе.

3.4.1 ROC-AUC

Для всех временных шагов t сравнивается распределение:

$$(\hat{y}_t, y_t),$$

и вычисляется ROC-AUC.

3.5 Прибыль модели

Для каждой траектории X_t :

$$\text{profit}_{\text{model}} = X_{\tau_{\text{model}}} - X_0.$$

Максимальная возможная прибыль:

$$\text{profit}_{\max} = \max_t X_t - X_0.$$

Средняя прибыль на тесте:

$$\mathbb{E}[\text{profit}].$$

4 Результаты

Мы протестировали описанную выше модель и теоретические расчёты на сгенерированных данных. Во всех датасетах было по 500 траекторий, а длина траектории (N) изменялась от 50 до 400.

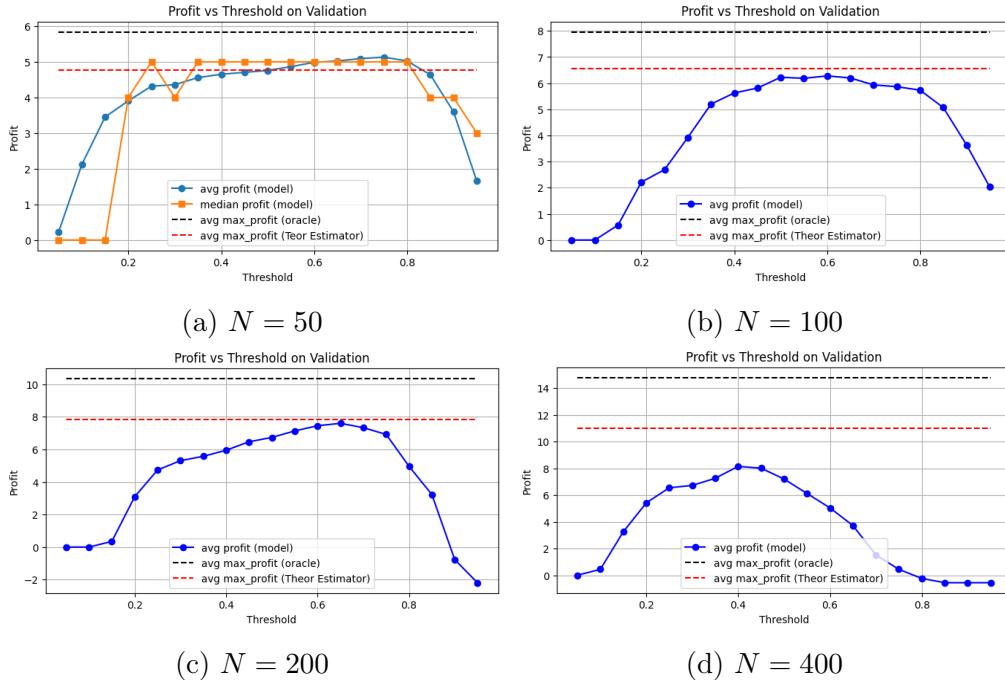


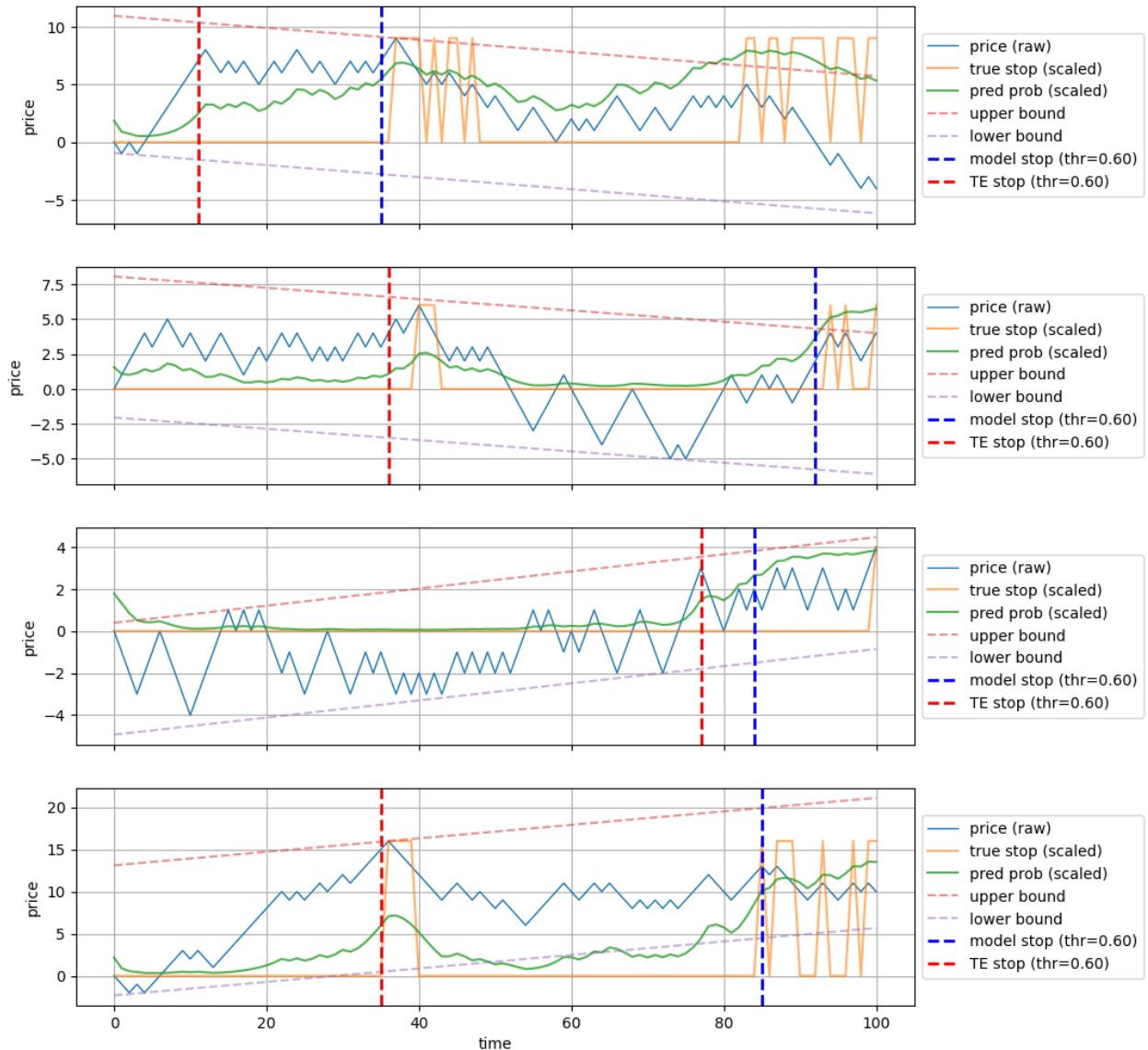
Рис. 4: Прибыль модели и прибыль при использовании теоретических расчётов $m(n, k)$

N	model average	model median	theor average	oracle average
100	6.68	6.00	6.55	7.96
200	7.99	6.00	7.83	10.36
400	11.51	10.00	11.00	14.80

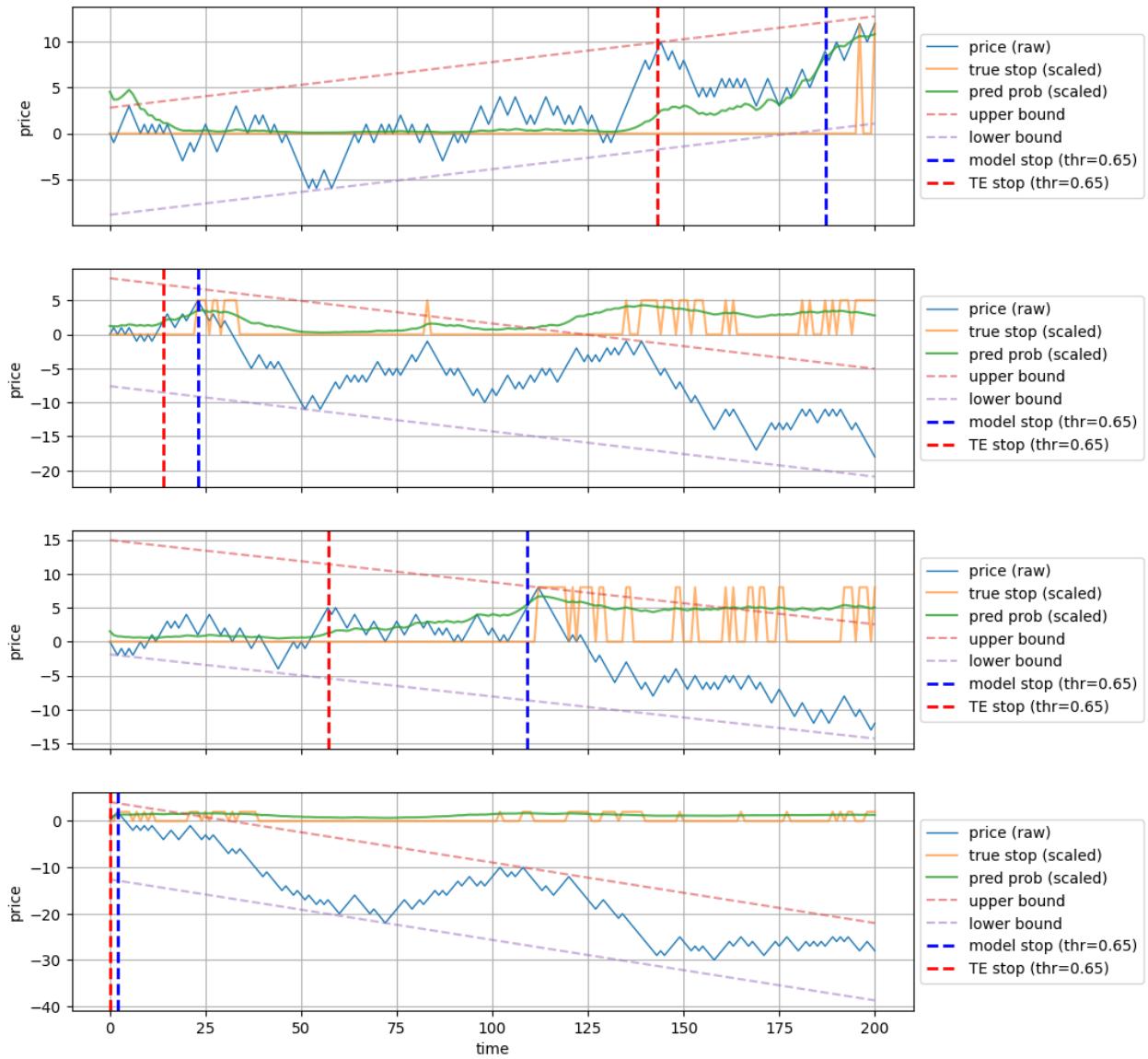
Таблица 1: Прибыль модели при наилучшем пороговом значении (threshold) и прибыли при использовании теоретических расчётов $m(n, k)$.

По рис. 4 видно, что оптимальное пороговое значение у модели сдвигается влево при росте N , но для $N \in \{100, 200, 400\}$ оптимальным оказалось значение 0.6. Результаты для этого значения приведены в таблице 1. В последнем столбце в ней указано среднее из максимумов по каждой траектории. В среднем модель показала лучшие результаты, чем теоретические расчёты. Различие наименьшее при $N = 100$ и достаточно существенно при $N = 400$.

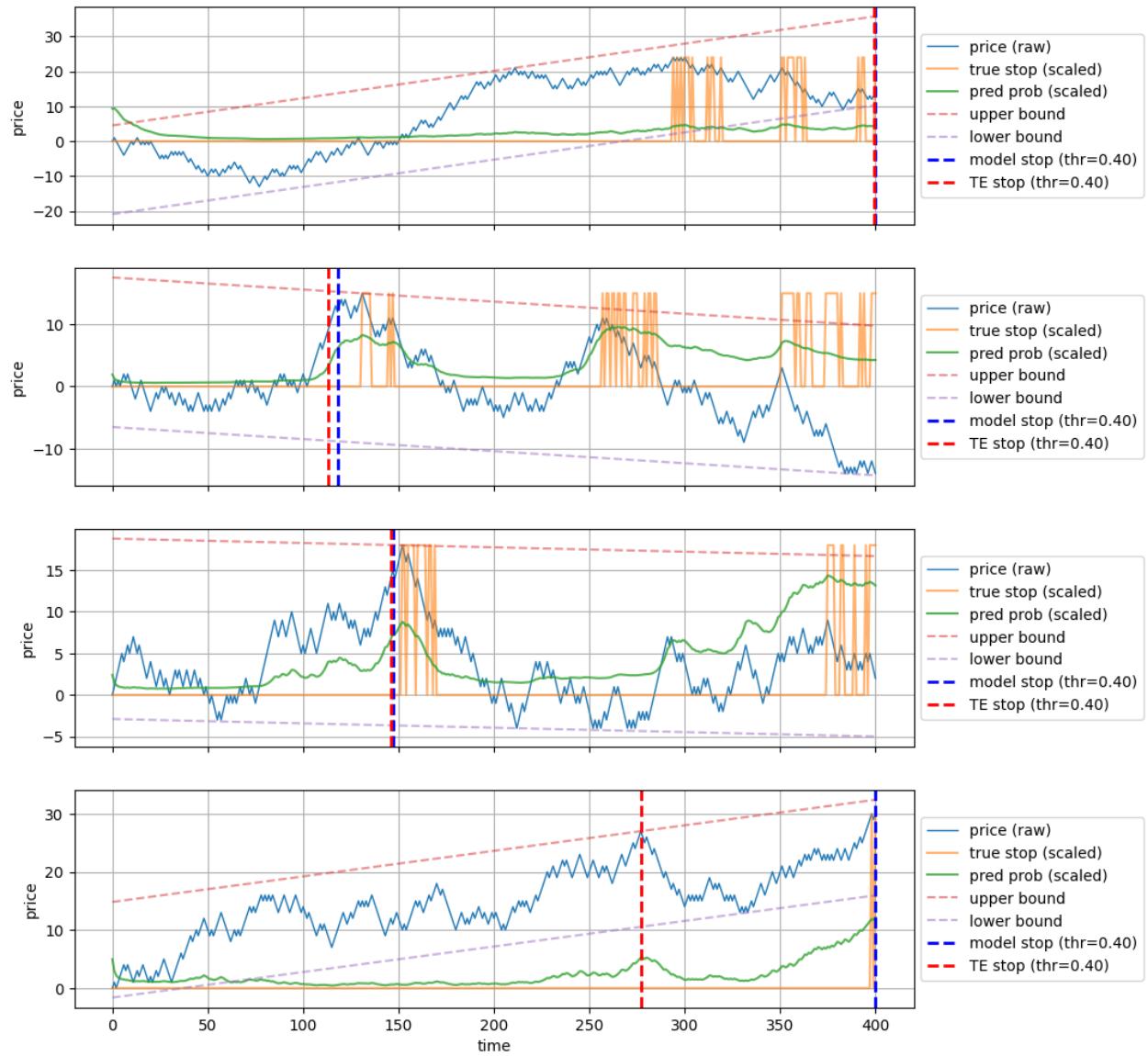
Example val trajectories with model decision (best threshold)

Рис. 5: Примеры модельных и теоретических расчётов для конкретных траекторий, $N = 100$

Example val trajectories with model decision (best threshold)

Рис. 6: Примеры модельных и теоретических расчётов для конкретных траекторий, $N = 200$

Example val trajectories with model decision (best threshold)

Рис. 7: Примеры модельных и теоретических расчётов для конкретных траекторий, $N = 400$