

Задача об оптимальной остановке в случае наличия инсайдерской информации

Дмитрий Крылов, Андрей Стрелков

9 декабря 2025 г.

Случайное блуждание

Задача оптимальной продажи:

$$\mathbb{E}(X_t) \rightarrow \max, \quad t \leq T$$

Фильтрованное вероятностное пространство

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t, -b - y \cdot t \leq X_\tau \leq a + x \cdot t, \tau \leq T), \quad t \leq T$$

Случайное блуждание

$$X_n = (S_n \mid -b - y \cdot k \leq S_k \leq a + x \cdot k, k \in \{1, \dots, N\}).$$

План

- 1 Найти оптимальную границу остановки для симметричного случайного блуждания.
- 2 Обучить ML-модель для решения задачи с инсайдерской информацией.

Теоретическая часть

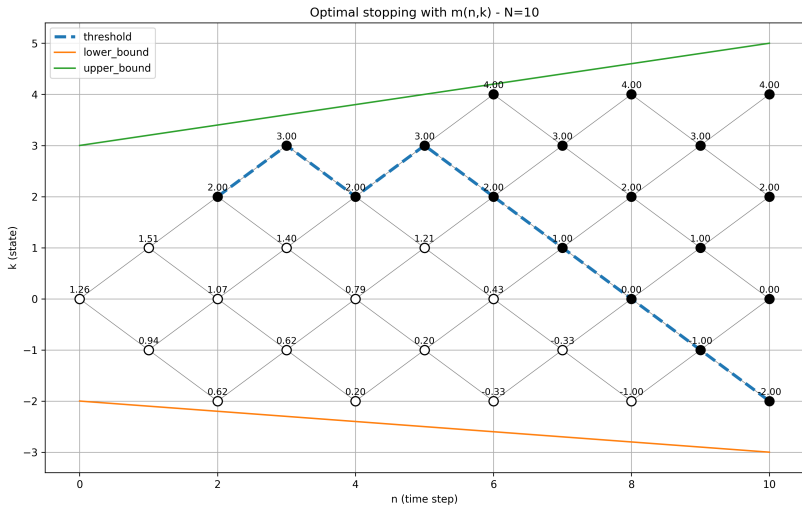
$$m(n, k) = \sup_{n \leq \tau \leq N} \mathbb{E}(X_\tau \mid X_n = k)$$

$$m(n, k) = \max(k, p \cdot m(n+1, k+1) + (1-p) \cdot m(n+1, k-1))$$

Правило: продавать, если $m(n, k) = k$. По определению $m(n, k) \geq k$.

Сложность вычислений: предподсчёт за $\mathcal{O}((x-y)N^2)$,
решение для конкретного шага за $\mathcal{O}(1)$.

Теоретическая часть



Генерация данных

Для каждой траектории генерируется случайное блуждание длины N .

Таргет - $y_t = \text{bool}(X_t == \max_{\tau \in [t, N]}(X_\tau))$

Также строятся верхняя и нижняя линейные границы по МНК:

$$X_t \approx at + b,$$

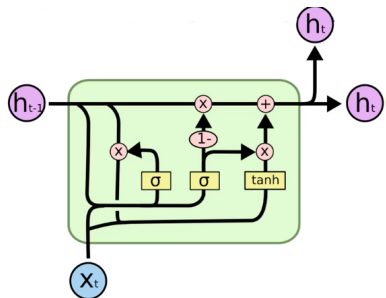
$$\text{upper}_t = at + b + R_{\max}, \quad \text{lower}_t = at + b + R_{\min},$$

где R_{\max}, R_{\min} — максимальные и минимальные остатки.
Каждый временной шаг кодируется шестью признаками:

$$f_t = \{X_t, N - t, a_u, b_u, a_l, b_l\}$$

ML-модель

$$\text{GRU}_{\theta} : \mathbb{R}^{N \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times 1},$$



Параметры модели: input size: 6, hidden size: 32, num layers: 1, activation на выходе: sigmoid.

Результаты

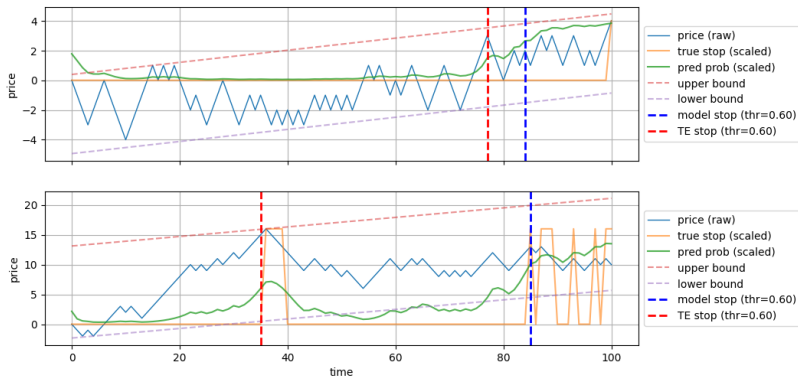


Рис. 1: $N = 100$, epochs=50

Результаты

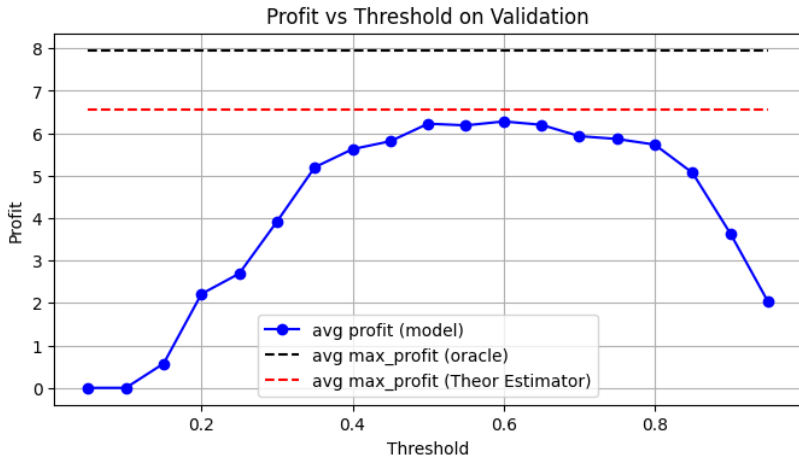


Рис. 2: $N = 100$, epochs=50

Результаты

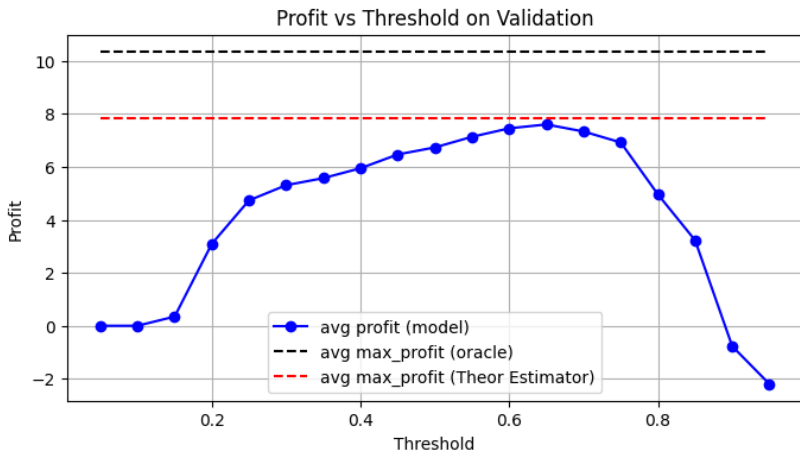


Рис. 3: $N = 200$, epochs=50

Результаты

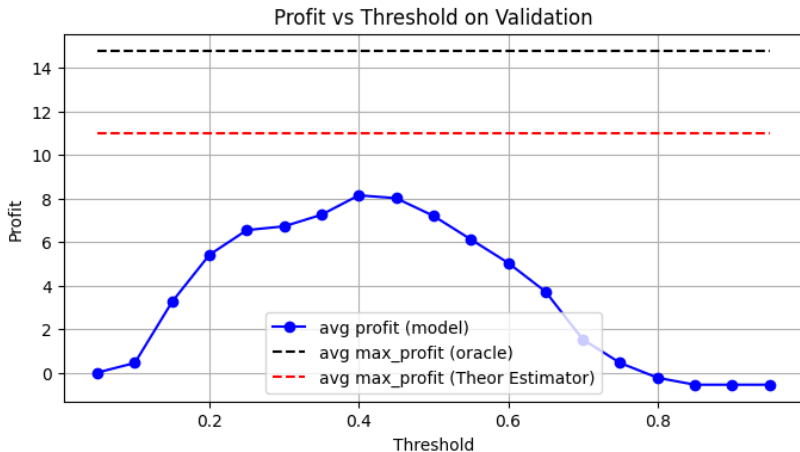


Рис. 4: $N = 400$, epochs=50

Результаты

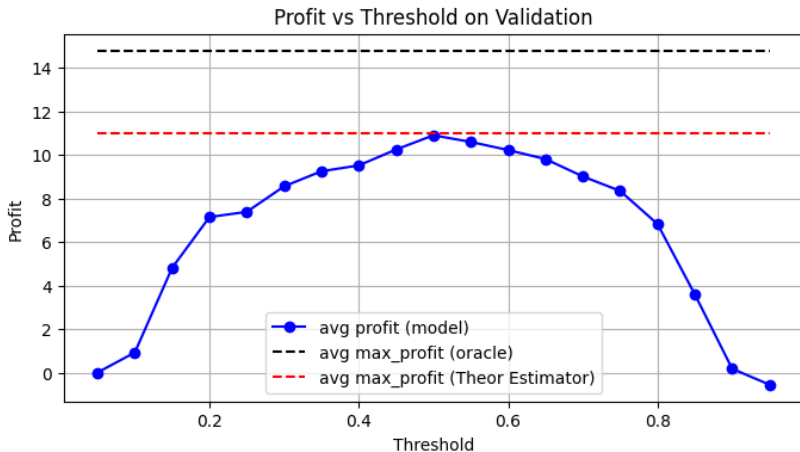


Рис. 5: $N = 400$, epochs=100

Сравнение

N	epochs	model average	theor average
100	50	0.79	0.82
200	50	0.73	0.76
400	50	0.55	0.74
400	100	0.74	0.74

Таблица 1: Прибыль модели при наилучшем пороговом значении (threshold) и прибыль при использовании теоретических расчётов $m(n, k)$. Нормировка на максимальную среднюю прибыль

План

- 1 Новый подход к генерации данных и обучению модели: обучить модель для предсказания оптимальной границы остановки.
- 2 Адаптация для реальных данных.