

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Daniel Malinowski

Nr albumu: 292680

Metody dowodzenia prostoty grup

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Zbigniewa Marciniaka
Instytut Matematyki

Czerwiec 2013

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Słowa kluczowe

grupa prosta, grupa alternująca, grupa specjalna rzutowa liniowa, lemat Iwasawy

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

20. Group theory and generalizations

Tytuł pracy w języku angielskim

Methods of proving the simplicity of groups

Spis treści

Wprowadzenie	5
1. Wiadomości wstępne	7
1.1. Grupy proste	7
1.2. Twierdzenia o izomorfizmie	7
1.3. Komutant i abelianizacja	8
1.4. Działanie grupy na zbiorze	8
2. Prostota grupy alternującej A_n	11
3. Lemat Iwasawy	13
4. Prostota specjalnej rzutowej grupy liniowej $PSL_n(k)$	15
Bibliografia	17

Wprowadzenie

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

Rozdział ten zawiera przypomnienie pewnych definicji, własności i twierdzeń omawianych na podstawowym kursie algebry I oraz ustalenie oznaczeń.

W niniejszej pracy dużymi literami alfabetu (np. G, H, K) będą oznaczane grupy. Ich elementy będą oznaczane małymi literami alfabetu (np. g, h, k), przy czym przez e będzie zawsze oznaczany element neutralny. Rozważane grupy będą (w większości) nieprzemienne, w związku z tym będzie stosowany zapis multiplikatywny.

1.1. Grupy proste

Zacznijmy zatem od przypomnienia podstawowej definicji w tej pracy.

Definicja 1.1.1 *Nietrywialną grupę G nazwiemy grupą prostą, jeżeli nie ma ona podgrup normalnych różnych od $\{e\}$ oraz samej siebie.*

Fakt 1.1.1 *Jedynymi (z dokładnością do izomorfizmu) przemiennymi grupami prostymi są skończone grupy cykliczne o liczbie elementów będącą liczbą pierwszą.*

Jest to prosta konsekwencja tego, że w grupach przemiennych wszystkie podgrupy są podgrupami normalnymi.

1.2. Twierdzenia o izomorfizmie

Przejdźmy teraz do podstawowych twierdzeń o izomorfizmie.

Twierdzenie 1.2.1 (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie)

Niech G, H – grupy, $\varphi: G \rightarrow H$ homomorfizm, $K = \ker \varphi$ oraz $H' = \text{im} \varphi$.

Wówczas zachodzi izomorfizm

$$G/K \simeq H'$$

Twierdzenie 1.2.2 (Drugie twierdzenie o izomorfizmie)

Niech G – grupa, H_1, H_2 podgrupy normalne G , przy czym $H_2 \leq H_1$.

Wówczas $H_2 \trianglelefteq H_1$, $H_1/H_2 \trianglelefteq G/H_2$ i zachodzi izomorfizm

$$(G/H_2)/(H_1/H_2) \simeq G/H_1$$

Twierdzenie 1.2.3 (Trzecie twierdzenie o izomorfizmie)

Niech G – grupa, H_1 podgrupa normalna G , H podgrupa H_1 .

Wówczas $H \cap H_1 \trianglelefteq H$ oraz zachodzi izomorfizm

$$H/(H \cap H_1) \simeq H \cdot H_1/H_1$$

1.3. Komutant i abelianizacja

Poniżej przedstawionych jest kilka użytecznych wiadomości o komutancie.

Definicja 1.3.1 *Niech G będzie dowolną grupą. Wówczas komutantem grupy G nazywamy podgrupę G generowaną przez wszystkie elementy postaci $aba^{-1}b^{-1}$, gdzie $a, b \in G$. Komutant grupy G oznaczamy przez $[G, G]$.*

Twierdzenie 1.3.1 (O komutancie)

Komutant $[G, G]$ jest podgrupą normalną G , przy czym grupa ilorazowa $G/[G, G]$ jest grupą abelową. Ponadto dla dowolnej podgrupy normalnej $H \trianglelefteq G$ takiej, że G/H jest abelowa, zachodzi $[G, G] \leq H$.

Definicja 1.3.2 *Przekształcenie kanoniczne $G \rightarrow G/[G, G]$ (rzutowanie na grupę ilorazową) nazywamy abelianizacją.*

O abelianizacji (w przeciwieństwie do twierdzenia o komutancie) nie będzie więcej wspomniane w tej pracy, ale ta definicja została przytoczona w celu domknięcia podstawowych faktów o komutancie. Ważniejszym dla nas pojęciem jest pojęcie grupy doskonałej:

Definicja 1.3.3 *Grupą doskonałą nazwiemy dowolną grupę, która jest równa swojemu komutantowi.*

Grupami doskonałymi zajmiemy się w dalszej części pracy – przy lemacie Iwasawy. Na razie zauważmy prosty fakt:

Fakt 1.3.1 *Nieprzemienne grupy proste są grupami doskonałymi.*

1.4. Działanie grupy na zbiorze

Na koniec tego rozdziału przyjrzyjmy się jednej z ważniejszej własności grup – ich możliwości działania na zbiorach.

Definicja 1.4.1 *Niech G będzie grupą, a X – zbiorem. Mówimy, że ρ jest działaniem grupy G na zbiorze X , jeżeli dla każdego $g \in G$ przyporządkowane jest przekształcenie $\rho_g: X \rightarrow X$, takie, że:*

- $\rho_e = \text{id}_X$,
- $\rho_g \circ \rho_h = \rho(gh)$, dla dowolnych $g, h \in G$.

Jeżeli sposób działania (ρ) wynika z kontekstu, to zamiast $\rho_g(x)$ będziemy pisać x^g .

Zgrabniejszy opis działania grupy na zbiorze daje poniższe twierdzenie. Zanim jednak do niego przejdziemy, przypomnijmy sobie jeszcze jedną definicję.

Definicja 1.4.2 *Niech X będzie dowolnym zbiorem. Wówczas grupą symetrii zbioru X nazywamy zbiór bijekcji $X \rightarrow X$, wraz z operacją składania. Grupę tę oznaczamy S_X .*

Twierdzenie 1.4.1 (O działaniu grupy na zbiorze)

Niech G będzie grupą, a X – zbiorem. Wówczas ρ jest działaniem G na X wtedy i tylko wtedy, gdy ρ jest homomorfizmem z G w grupę symetrii zbioru X .

Z działaniem grupy na zbiorze związane jest dużo ważnych definicji i twierdzeń. Poniżej przytoczone są te najistotniejsze z punktu widzenia tej pracy.

Definicja 1.4.3 *Załóżmy, że ρ jest działaniem grupy G na zbiorze X oraz $x \in X$. Wówczas:*

- a) Stabilizatorem punktu x (grupą izotropii x) nazwiemy zbiór elementów $\{g \in G: x^g = x\}$. Stabilizator punktu x oznaczamy G_x .*
- b) Orbitą punktu x nazwiemy podzbiór X równy $\{y \in X: \exists g \in G x^g = y\}$. Orbitę punktu x oznaczamy $G(x)$.*

Podstawowe własności tych obiektów przedstawia następujący fakt:

Fakt 1.4.1 *Załóżmy, że ρ jest działaniem grupy G na zbiorze X oraz $x, y \in X$. Wówczas:*

- a) G_x jest podgrupą G .*
- b) $G(x)$ i $G(y)$ są równe lub rozłączne (orbity tworzą rozbiecie zbioru X).*

Zanim przejdziemy do ważniejszych twierdzeń opisujących orbity i stabilizatory, przypomnijmy wcześniej, jakie własności może mieć działanie grupy na zbiorze.

Definicja 1.4.4 *Załóżmy, że ρ jest działaniem grupy G na zbiorze X .*

- a) ρ jest działaniem tranzytywnym (przechodnim), jeżeli wszystkie elementy X tworzą jedną orbitę.*
- b) ρ jest działaniem wiernym, jeżeli ρ jest iniekcją jako homomorfizm $G \rightarrow S_X$.*

Jak to zostało wcześniej zapowiedziane, na koniec przytoczmy dwa ważne twierdzenie pokazujące zależność między orbitami a stabilizatorami.

Twierdzenie 1.4.2 (O orbitach i stabilizatorach)

Załóżmy, że ρ jest działaniem grupy G na zbiorze X , przy czym X jest zbiorem skończonym. Ponadto $x \in X$. Wówczas $|G(x)| = [G : G_x]$.

Twierdzenie 1.4.3 (Równanie klas)

Przy założeniach z poprzedniego twierdzenia zachodzi

$$|X| = \sum_{i=1}^k [G : G_{x_i}],$$

gdzie x_1, x_2, \dots, x_k to reprezentanci wszystkich orbit działania ρ .

Rozdział 2

Prostota grupy alternującej A_n

Rozdział 3

Lemat Iwasawy

Rozdział 4

Prostota specjalnej rzutowej grupy liniowej $PSL_n(k)$

Bibliografia

[A] C, *D*, E