Расчетно-графическая работа №1

Мамылин Дмитрий, МТ-301

1 апреля 2015 г.

Постановка задачи

Дан интеграл $\int_2^3 e^{-\cos(x)}\,\mathrm{d}x$. Необходимо вычислить значение интеграла по двум составным формулам: по формуле средних прямоугольников и формуле Грегори с шагом $0.1, 0.05, 0.025$, оценить погрешность по Рунге и вычислить значение, используя формуле Гаусса (по двум узлам).

Формула средних прямоугольников

- Шаг $h = 0.1$:
  $n = \frac{3-2}{0.1} = 10$; $x_i = 2 + i \cdot h = 2 + i \cdot 0.1$, где $i = 0, \cdots, 10$
  $\int_2^3 e^{-\cos(x)}\,\mathrm{d}x \approx I_h = \sum_{k=0}^{9}(3-2)\cdot(x_{i+1}-x_i)\cdot e^{\frac{x_{i+1}+x_i}{2}} = \sum_{k=0}^{9}(x_{i+1}-x_i)\cdot e^{\frac{x_{i+1}+x_i}{2}} \approx 2.18713.$
- Шаг $h = 0.05$:
  $n = \frac{3-2}{0.05} = 20$; $x_i = 2 + i \cdot h = 2 + i \cdot 0.05$, где $i = 0, \cdots, 20$
  $\int_2^3 e^{-\cos(x)}\,\mathrm{d}x \approx I_{\frac{h}{2}} = \sum_{k=0}^{19}(3-2)\cdot(x_{i+1}-x_i)\cdot e^{\frac{x_{i+1}+x_i}{2}} = \sum_{k=0}^{19}(x_{i+1}-x_i)\cdot e^{\frac{x_{i+1}+x_i}{2}} \approx 2.18681.$
- Шаг $h = 0.025$:
  $n = \frac{3-2}{0.05} = 40$; $x_i = 2 + i \cdot h = 2 + i \cdot 0.025$, где $i = 0, \cdots, 40$
  $\int_2^3 e^{-\cos(x)}\,\mathrm{d}x \approx I_{\frac{h}{4}} = \sum_{k=0}^{39}(3-2)\cdot(x_{i+1}-x_i)\cdot e^{\frac{x_{i+1}+x_i}{2}} = \sum_{k=0}^{39}(x_{i+1}-x_i)\cdot e^{\frac{x_{i+1}+x_i}{2}} \approx 2.18674.$
- Погрешность:
  $R_h \sim 2 = m$; применим метод Рунге для оценки погрешностей:
  $R_{\frac{h}{2}} \approx \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^m - 1} = \frac{2.18681 - 2.18713}{2^2 - 1} = \frac{-0.00032}{3} \approx -1.1 \cdot 10^{-4}$
  $R_{\frac{h}{4}} \approx \frac{I_{\frac{h}{4}} - I_{\frac{h}{2}}}{2^m - 1} = \frac{2.18674 - 2.18681}{2^2 - 1} = \frac{-0.00032}{3} \approx -2.3 \cdot 10^{-5}$

Формула Грегори

- Шаг $h = 0.1$:
  $\int_2^3 e^{-\cos(x)}\,\mathrm{d}x \approx I_h = \frac{5\cdot h}{12}\cdot(e^{-\cos(2)} + e^{-\cos(3)}) + h \cdot \sum_{k=1}^{9} e^{-\cos(x_k)} + \frac{h}{12}\cdot(e^{-\cos(x_1)} + e^{-\cos(x_9)}) \approx 2.18663.$
- Шаг $h = 0.05$:
  $\int_2^3 e^{-\cos(x)}\,\mathrm{d}x \approx I_h = \frac{5\cdot h}{12}\cdot(e^{-\cos(2)} + e^{-\cos(3)}) + h \cdot \sum_{k=1}^{19} e^{-\cos(x_k)} + \frac{h}{12}\cdot(e^{-\cos(x_1)} + e^{-\cos(x_{19})}) \approx 2.18670.$
- Шаг $h = 0.025$:
  $\int_2^3 e^{-\cos(x)}\,\mathrm{d}x \approx I_h = \frac{5\cdot h}{12}\cdot(e^{-\cos(2)} + e^{-\cos(3)}) + h \cdot \sum_{k=1}^{39} e^{-\cos(x_k)} + \frac{h}{12}\cdot(e^{-\cos(x_1)} + e^{-\cos(x_{39})}) \approx 2.18671.$
- Погрешность:
  $R_h \sim 3 = m$; применим метод Рунге для оценки погрешностей:
  $R_{\frac{h}{2}} \approx \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^m - 1} = \frac{2.18670 - 2.18663}{2^3 - 1} = \frac{0.00007}{7} \approx 1 \cdot 10^{-4}$
  $R_{\frac{h}{4}} \approx \frac{I_{\frac{h}{4}} - I_{\frac{h}{2}}}{2^m - 1} = \frac{2.18671 - 2.18670}{2^3 - 1} = \frac{0.00001}{7} \approx 1.4 \cdot 10^{-6}$

Формула Гаусса

Используем оптимальные узлы и веса на отрезке $[-1, 1] : x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}, w_{1,2} = 1.$
Сведем исходный интеграл по промежутку $[2, 3]$ к интегралу по промежутку $[-1, 1]$:
$\int_2^3 e^{-\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} e^{-\cos(0.5\cdot z + 2.5)}\,\mathrm{d}z \approx 0.5 \cdot (e^{-\cos(0.5\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}+2.5)} + e^{-\cos(0.5\cdot(-\sqrt{\frac{1}{3}})+2.5)}) \approx 2.186797$

Вывод

Метод Рунге позволяет оценивать погрешности по ходу вычислений, причем для методов большего порядка точность будет выше, чем для методов меньшего.

Приложение

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

const double A = 2.0;
const double B = 3.0;
const double STEPS[] = { 0.1, 0.05, 0.025 };

double f(double x) {
    return exp(-cos(x));
}

double midRectangles(double a, double b, double h) {
    double result = 0.0;
    int i;
    int n = (int)floor((b - a) / h);

    for (i = 0; i < n; i++) {
        double xPrev = a + i * h;
        double xNext = a + (i + 1) * h;
        double middlePoint = (xPrev + xNext) / 2.0;

        result += f(middlePoint);
    }

    return result * h;
}

double gregory(double a, double b, double h) {
    double x1 = a + h;
    double xn_1 = b - h;
    double result = 0.0;
    int i;
    int n = (int)floor((b - a) / h);

    result += (5 * (f(a) + f(b)) + f(x1) + f(xn_1)) / 12.0;

    for (i = 1; i < n; i++) {
        result += f(a + i * h);
    }

    return result * h;
}
```