Расчетно-графическая работа №2

Мамылин Дмитрий, МТ-301

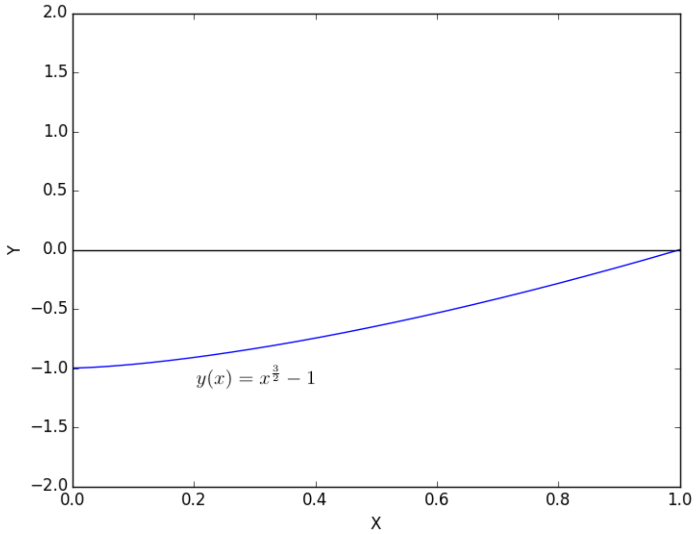
31 мая 2015 г.

Постановка задачи

Дана задача Коши:

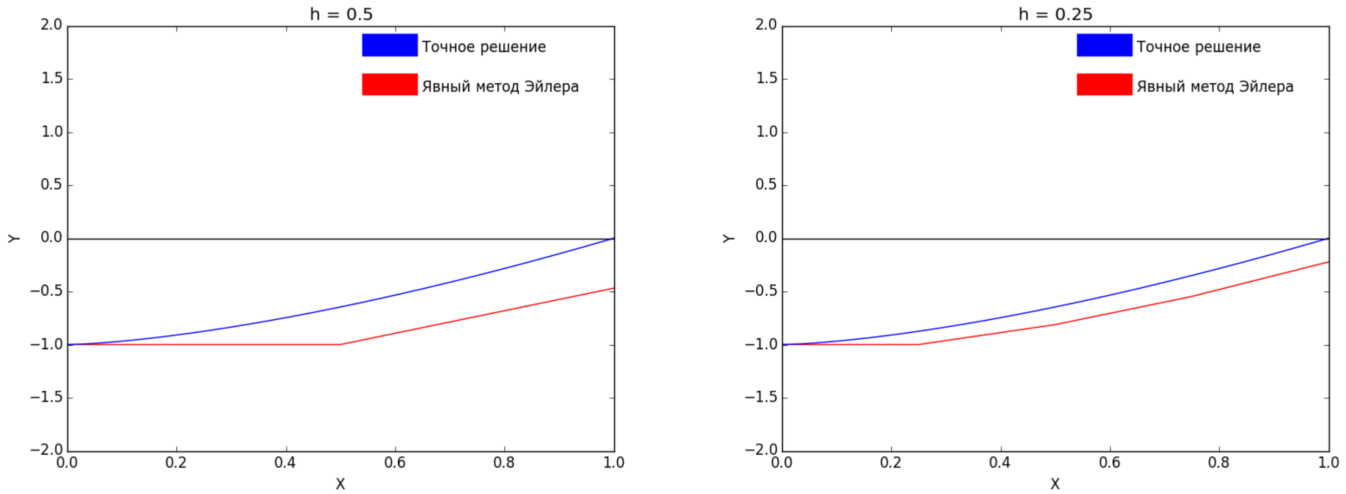
$$y' = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$$
$$y(0) = -1$$

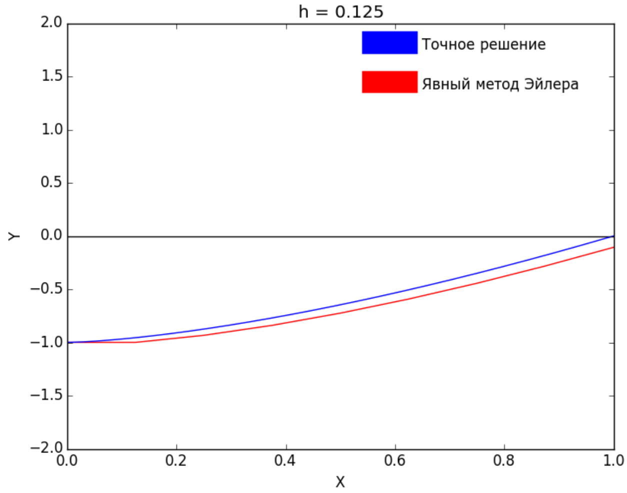
Будем решать задачу на отрезке $[0, 1]$. Зафиксируем на этом отрезке равномерную сетку $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ с шагом h, где $x_0 = 0, x_1 = 1$.
Задачу необходимо решить явным методом Эйлера, неявным методом Эйлера и явным двушаговым методом Адамса.
Точное решение: $y(x) = x^{\frac{3}{2}} - 1$

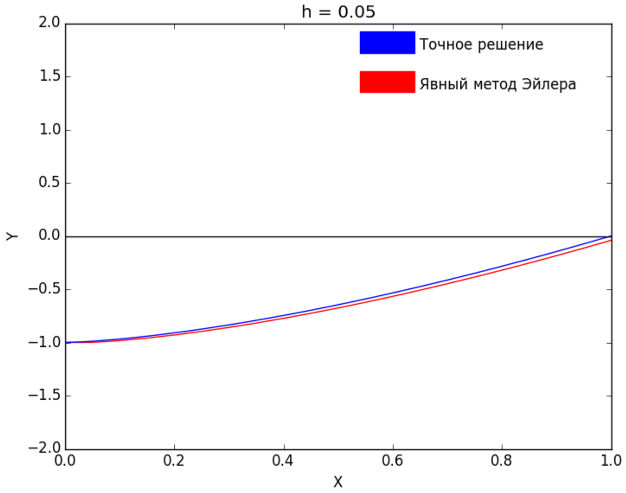


Решение явным методом Эйлера

Общий вид: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, где h - шаг.
Формула: $y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x_i}$.

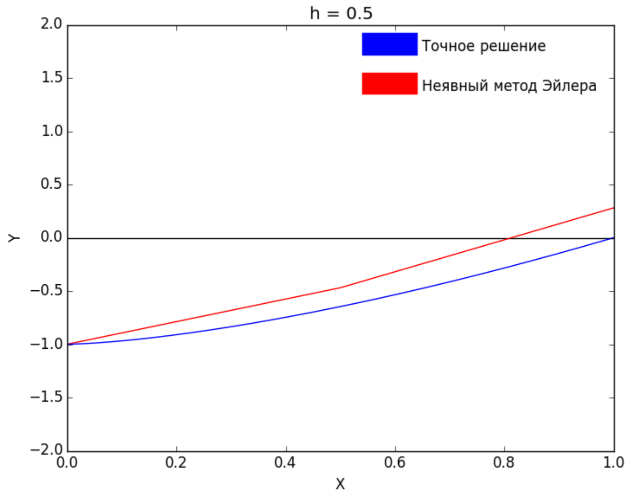


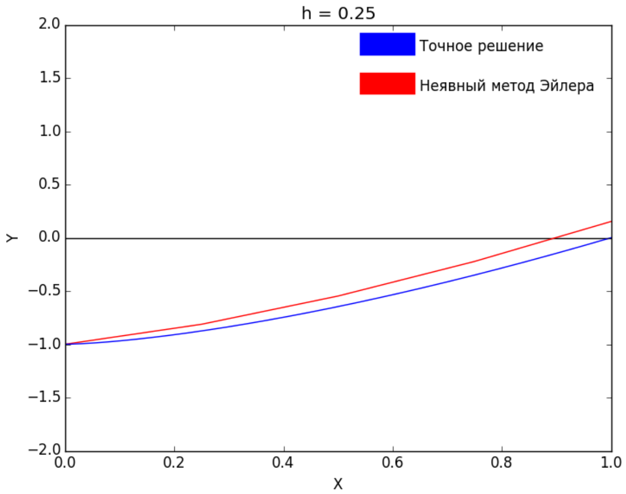


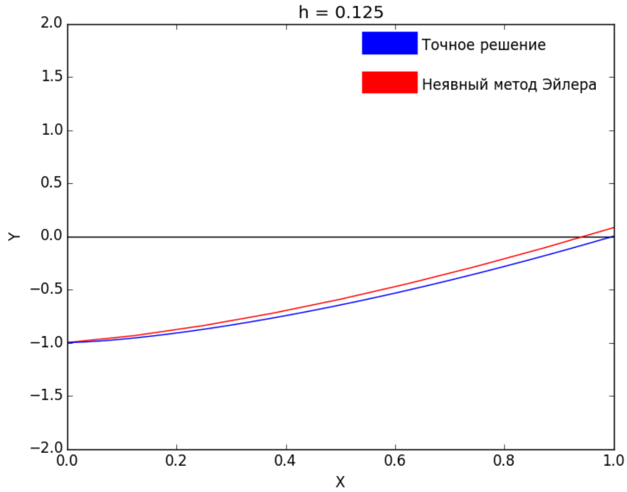


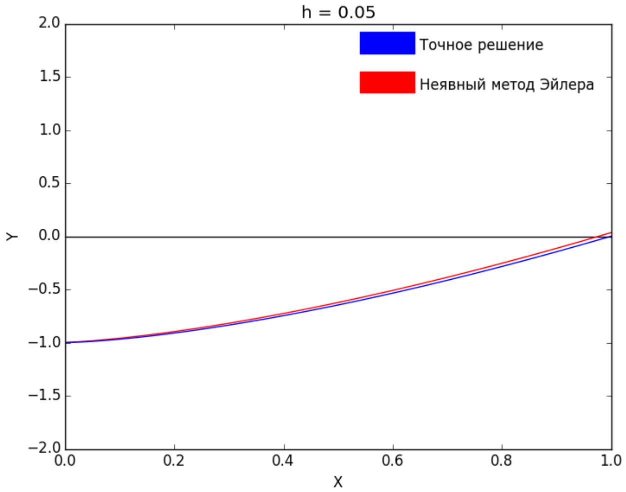
Решение неявным методом Эйлера

Общий вид: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})$.
Формула: $y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x_{i+1}}$.



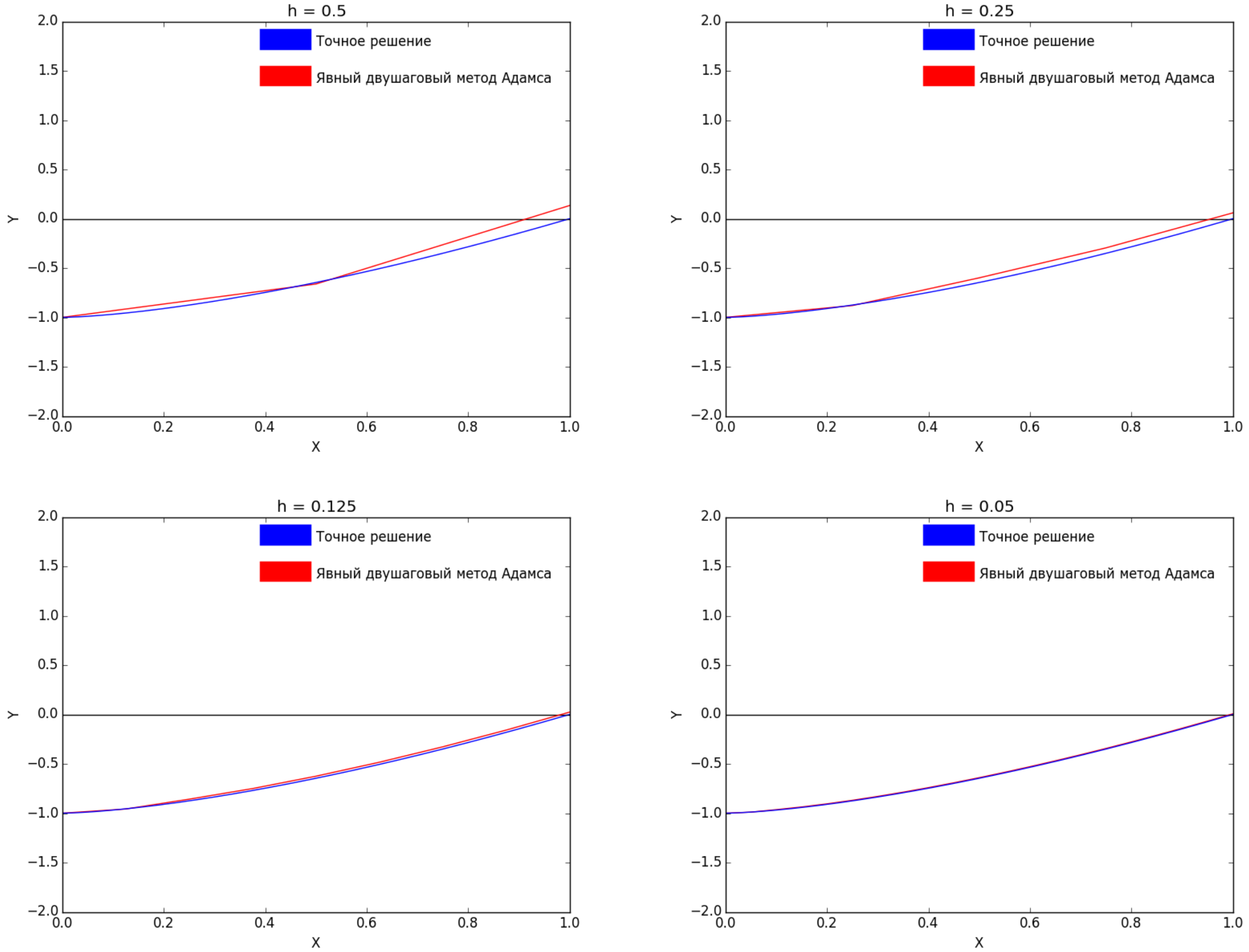






Решение явным двушаговым методом Адамса

Выведем формулу:
Интегральное представление точного решения: $y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{xi+1} L_{k-1}(s)\,\mathrm{d}s$.
Запишем многочлен Лагранжа $L_{k-1}(x) = [$при $k = 2] = L_1(x)$ в форме Ньютона:
$L_1(x) = f_i + f(x_i, x_{i-1})(x - x_i) = f_i + \frac{f_i - fi-1}{h}(x - x_i)$.
Подставим в интегральное представление. После интегрирования и приведения подобных получим формулу: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}) = y_i + \frac{h}{2}(\frac{9}{2}\sqrt{x_i} - \frac{3}{2}\sqrt{x_{i-1}})$, где $i = 1, 2, .., n-1$.
Будем проводить разгон методом Рунге-Кутты третьего порядка.
$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2 + \frac{4}{6}k_3$. Где:
$k_1 = hf(x_0, y_0) = h \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x_0} = 0$
$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = hf(h, y_0) = h \cdot \frac{3}{2}\sqrt{h}$
$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2) = hf(\frac{h}{2}, -1 + \frac{1}{4}k_2) = h \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{2}}$
То есть: $y_1 = -1 + \frac{3h}{12}(\sqrt{h} + 4\sqrt{\frac{h}{2}}) = \frac{3h}{12}\sqrt{h}(1 + 4\sqrt{0.5}) - 1$.



Вывод

На данном примере методы Эйлера почти полностью повторяют друг друга, в то время как метод Адамса сходится быстрее, поскольку он является многошаговым, то есть при пересчете следующих значений учитываются предыдущие шаги.

Приложение

```
def explicit_euler(y0, grid):
    grid_size = len(grid)
    assert (grid_size >= 2)
    h = grid[1] - grid[0]
    result = [(grid[0], y0)]
    for i in range(grid_size - 1):
        (xi, yi) = result[i]
        yi1 = yi + h * 1.5 * math.sqrt(xi)
        result.append((grid[i + 1], yi1))
    return result


def implicit_euler(y0, grid):
    grid_size = len(grid)
    assert (grid_size >= 2)
    h = grid[1] - grid[0]
    result = [(grid[0], y0)]
    for i in range(grid_size - 1):
        yi = result[i][1]
        xi1 = grid[i + 1]
        yi1 = yi + h * 1.5 * math.sqrt(xi1)
        result.append((xi1, yi1))
    return result


def two_step_adams(y0, grid):
    y1 = (3 * H / 12) * math.sqrt(H) * (1 + 4 * math.sqrt(0.5)) - 1
    result = [(grid[0], y0), (grid[1], y1)]
    for i in range(2, len(grid)):
        y_next = result[i - 1][1] + (H / 2) *
                   (math.sqrt(grid[i - 1]) * 9.0 / 2.0 -
                    math.sqrt(grid[i - 2]) * 3.0 / 2.0)
        result.append((grid[i], y_next))
    return result
```