Расчетно-графическая работа №3

Мамылин Дмитрий, МТ-301

21 мая 2015 г.

Постановка задачи

Дано уравнение:
$y'' = y + 16.8 + 7.4 \cdot x(1 - x)$
на отрезке $[0, 1]$ решить краевую задачу:
$y(0) = 0$
$y'(1) + y(1) = 2e + 1.7 \iff y'(1) = -y(1) + 2e + 1.7$
методом стрельбы и методом прогонки.
Используя:
Метод Рунге-Кутта 4 порядка для решения задачи Коши в методе стрельбы
Метод Ньютона для решения нелинейного уравнения в методе стрельбы
Метод введения фиктивного узла для аппроксимации краевых условий в методе прогонки.

Точное решение

Найдем точное решение. Соответствующее однородное уравнение:
$y'' - y = 0$
$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$
Общее решение однородного: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ Частное решение неоднородного: $y(x) = 7.4x^2 - 7.4x - 2$
Тогда общее решение неоднородного: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 7.4x^2 - 7.4x - 2$
Найдем константы:
$C_1 + C_2 = 2$
$-C_1 e^{-1} + C_2 e + 7.4 = -C_1 e^{-1} - C_2 e + 2 + 2e + 1.7$
Тогда:
$C_2 = \frac{2e-3.7}{2e}$; $C_1 = 2 - C_2 = \frac{2e+3.7}{2e}$
Точное решение:
$y(x) = \frac{2e+3.7}{2e} e^{-x} + \frac{2e-3.7}{2e} e^x + 7.4x^2 - 7.4x - 2$

Метод стрельбы

Рассматриваем вспомогательную задачу Коши:
$y'' = y + 16.8 + 7.4 \cdot x(1 - x)$
$y(0) = 0$
$y'(0) = \mu$
Сделаем замену: $z = y'$, тогда система примет вид:
$y' = z$
$z' = y + 16.8 + 7.4 \cdot x(1 - x)$
Краевые условия меняем на начальные:
$y(0) = 0$
$z(0) = \mu$

Метод Рунге-Кутта для системы ОДУ второго порядка:
$y' = f_1(x, y, z)$
$z' = f_2(x, y, z)$
$y(x_0) = y_{1,0}$
$z(x_0) = y_{2,0}$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4)$
$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_i^1 + 2l_i^2 + 2l_i^3 + l_i^4)$
Где:
$k_i^1 = hf_1(x_i, y_i, z_i)$
$l_i^1 = hf_2(x_i, y_i, z_i)$
$k_i^2 = hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}, z_i + \frac{l_i^1}{2})$
$l_i^2 = hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}, z_i + \frac{l_i^1}{2})$
$k_i^3 = hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}, z_i + \frac{l_i^2}{2})$
$l_i^3 = hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}, z_i + \frac{l_i^2}{2})$
$k_i^4 = hf_1(x_{i+1}, y_i + k_i^3, z_i + l_i^3)$
$l_i^4 = hf_2(x_{i+1}, y_i + k_i^3, z_i + l_i^3)$

Применяем к данной задаче:
$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4)$
$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_i^1 + 2l_i^2 + 2l_i^3 + l_i^4)$
Где:
$k_i^1 = hz_i$
$l_i^1 = h(y_i + 7.4x_i(1 - x_i) + 16.8)$
$k_i^2 = h(z_i + \frac{l_i^1}{2})$
$l_i^2 = h(y_i + \frac{k_i^1}{2} + 7.4(x_i + \frac{h}{2})(1 - \frac{h}{2} - x_i) + 16.8)$
$k_i^3 = h(z_i + \frac{l_i^2}{2})$
$l_i^3 = h(y_i + \frac{k_i^2}{2} + 7.4(x_i + \frac{h}{2})(1 - \frac{h}{2} - x_i) + 16.8)$
$k_i^4 = h(z_i + l_i^3)$
$l_i^4 = h(y_i + k_i^3 + 7.4x_{i+1}(1 - x_{i+1}) + 16.8)$

Ищем параметр μ, используя второе граничное условие исходной задачи; решаем уравнение:
$F(\mu) = z(\mu, 1) + y(\mu, 1) + 2e + 1.7 = 0$
Применяем метод Ньютона:
$\mu_{j+1} = \mu_j - F(\mu_j)/F'(\mu_j)$, где $\mu_0 = 1$.
Останавливаемся, когда $|\mu_{j+1} - \mu_j| < \varepsilon$.