Расчетно-графическая работа №3

Мамылин Дмитрий, МТ-301

3 июня 2015 г.

Постановка задачи

Дана краевая задача на отрезке $[0, 1]$:

$$(1): \begin{cases} y'' = y + 16.8 + 7.4 \cdot x(1-x) \\ y(0) = 0 \\ y'(1) + y(1) = 2e + 1.7 \end{cases}$$

где $f(x, y, y') = y + 16.8 + 7.4 \cdot x(1-x)$.

Необходимо решить ее методом стрельбы и методом прогонки, используя:

- Метод Рунге-Кутта четвертого порядка для решения задачи Коши в методе стрельбы
- Метод Ньютона для решения нелинейного уравнения в методе стрельбы
- Метод введения фиктивного узла для аппроксимации краевых условий в методе прогонки.

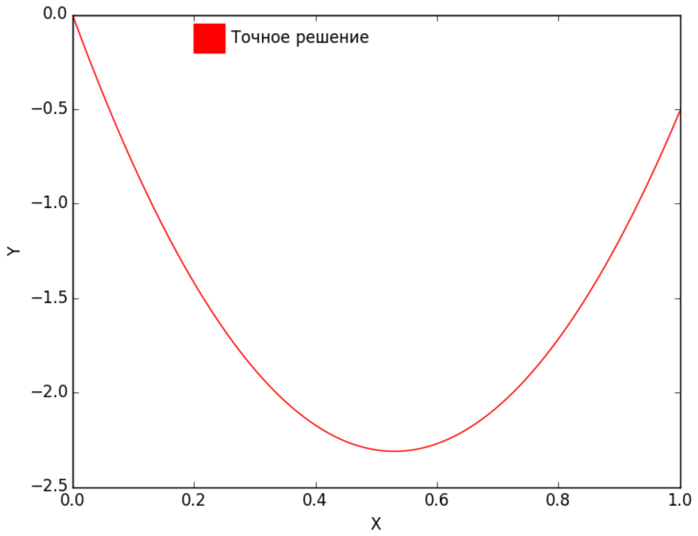
Точное решение

Найдем точное решение задачи (1).
Соответствующее однородное уравнение:
$y'' - y = 0$
Его характеристическое уравнение:
$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$
Общее решение однородного: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$
Частное решение неоднородного: $y(x) = 7.4x^2 - 7.4x - 2$
Тогда общее решение неоднородного: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 7.4x^2 - 7.4x - 2$

Найдем константы:
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 e^{-1} + C_2 e + 7.4 = -C_1 e^{-1} - C_2 e + 2 + 2e + 1.7 \end{cases}$$

Откуда:
$C_2 = \frac{2e-3.7}{2e}$
$C_1 = 2 - C_2 = \frac{2e+3.7}{2e}$

Точное решение:
$y(x) = \frac{2e+3.7}{2e} e^{-x} + \frac{2e-3.7}{2e} e^x + 7.4x^2 - 7.4x - 2$



Метод стрельбы

Рассматриваем вспомогательную задачу Коши с некоторым параметром μ:

$$(2) : \begin{cases} y'' = y + 16.8 + 7.4 \cdot x(1 - x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \mu \end{cases}$$

Сделаем замену: $z = y'$, тогда система (2) примет вид:

$$(2') : \begin{cases} y' = z \\ z' = y + 16.8 + 7.4 \cdot x(1 - x) \\ y(0) = 0 \\ z(0) = \mu \end{cases}$$

Где:
$f_1(x, y, z) = z$
$f_2(x, y, z) = f(x, y, z) = f(x, y, y') = y + 16.8 + 7.4 \cdot x(1 - x)$.

Общий вид метода Рунге-Кутта четвертого порядка для системы ОДУ второго порядка:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4)$
$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_i^1 + 2l_i^2 + 2l_i^3 + l_i^4)$

Где:
$k_i^1 = hf_1(x_i, y_i, z_i)$
$l_i^1 = hf_2(x_i, y_i, z_i)$
$k_i^2 = hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}, z_i + \frac{l_i^1}{2})$
$l_i^2 = hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}, z_i + \frac{l_i^1}{2})$
$k_i^3 = hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}, z_i + \frac{l_i^2}{2})$
$l_i^3 = hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}, z_i + \frac{l_i^2}{2})$
$k_i^4 = hf_1(x_{i+1}, y_i + k_i^3, z_i + l_i^3)$
$l_i^4 = hf_2(x_{i+1}, y_i + k_i^3, z_i + l_i^3)$
$i = 0, 1, \ldots, n$
$\{x\}_{i=0}^n$ - сетка на отрезке $[0, 1]$

Применяем к задаче $(2')$:
$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4)$
$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_i^1 + 2l_i^2 + 2l_i^3 + l_i^4)$
Где:
$k_i^1 = hz_i$
$l_i^1 = h(y_i + 7.4x_i(1 - x_i) + 16.8)$
$k_i^2 = h(z_i + \frac{l_i^1}{2})$
$l_i^2 = h(y_i + \frac{k_i^1}{2} + 7.4(x_i + \frac{h}{2})(1 - \frac{h}{2} - x_i) + 16.8)$
$k_i^3 = h(z_i + \frac{l_i^2}{2})$
$l_i^3 = h(y_i + \frac{k_i^2}{2} + 7.4(x_i + \frac{h}{2})(1 - \frac{h}{2} - x_i) + 16.8)$
$k_i^4 = h(z_i + l_i^3)$
$l_i^4 = h(y_i + k_i^3 + 7.4x_{i+1}(1 - x_{i+1}) + 16.8)$

После этого шага получим набор значений:
$0 = y(0) = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n = y(\mu, 1)$
$\mu = z(0) = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z(\mu, 1)$

Ищем параметр μ. Решаем уравнение $F(\mu) = 0$
где $F(\mu) = y(\mu, 1) + z(\mu, 1) - 2e - 1.7$
Применяем метод Ньютона:
$\mu_{j+1} = \mu_j - F(\mu_j)/F'(\mu_j)$, где $j = 0, 1, \ldots$
Считаем, что изначально был задан μ_0 - некоторый начальный параметр.

Для поиска $F'(\mu_j) = y'_\mu(\mu, 1) + z'_\mu(\mu, 1)$ продифференцируем задачу $(2')$ по параметру μ:

$$(3) : \begin{cases} y''_{x\mu} = z'_\mu \\ z''_{x\mu} = y'_\mu \\ y'_\mu(0) = 0 \\ z'_\mu(0) = 1 \end{cases}$$

Обозначим: $v = y'_\mu; u = z'_\mu$
Получим новую задачу Коши:

$$(3') : \begin{cases} v' = u \\ u' = v \\ v(0) = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Где:
$g_1(x, v, u) = u$
$g_2(x, v, u) = v$

Для решения задачи $(3')$ применяем метод Рунге-Кутта четвертого порядка:
$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(s_i^1 + 2s_i^2 + 2s_i^3 + s_i^4)$
$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(t_i^1 + 2t_i^2 + 2t_i^3 + t_i^4)$
Где:
$s_i^1 = hu_i$
$t_i^1 = hv_i$
$s_i^2 = h(u_i + \frac{s_i^1}{2})$
$t_i^2 = h(v_i + \frac{t_i^1}{2})$
$s_i^3 = h(u_i + \frac{s_i^2}{2})$
$t_i^3 = h(v_i + \frac{t_i^2}{2})$
$s_i^4 = h(u_i + s_i^3)$
$t_i^4 = h(v_i + t_i^3)$

Когда для некоторой заданной точности $\varepsilon > 0$ будет выполнено: $|\mu_j - \mu_{j+1}| < \varepsilon$, завершаем алгоритм.

Метод прогонки

Применим формулы численного дифференцирования по трем узлам:
$y_i' = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$
$y_i'' = \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}$
К задаче (1) (обе формулы имеют порядок точности $O(h^2)$)

Проведем преобразования задачи (1):

$$\begin{cases} y'' = y + 16.8 + 7.4x(1-x) \\ y(0) = 0 \\ y'(1) + y(1) = 2e + 1.7 \end{cases}$$

Подставляем формулы численного дифференцирования:

$$\begin{cases} \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2} = y_i + 16.8 + 7.4x_i(1-x_i), i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \frac{y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}}{h^2} = y_n + 16.8 + 7.4x_n(1-x_n) \\ y_0 = 0 \\ \frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h} + y_n = 2e + 1.7 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} (I) : y_{i-1} + (-2-h^2)y_i + y_{i+1} = h^2(16.8 + 7.4x_i(1-x_i)), i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ (II) : y_{n-1} + (-2-h^2)y_n + y_{n+1} = h^2 16.8 \\ (III) : y_0 = 0 \\ (IV) : -y_{n-1} + 2hy_n + y_{n+1} = 2h(2e+1.7) \end{cases}$$

Сложим уравнение (II) с (IV), умножив уравнение (IV) на -1:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{i-1} + (-2-h^2)y_i + y_{i+1} = h^2(16.8 + 7.4x_i(1-x_i)), i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 2y_{n-1} + (-2-h^2-2h)y_n = h^2 16.8 - 2h(2e+1.7) \end{cases}$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & (-2-h^2) & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & (-2-h^2) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 & -2-h^2-2h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h^2(16.8 + 7.4x_1(1-x_1)) \\ h^2(16.8 + 7.4x_2(1-x_2)) \\ \ldots \\ h^2 16.8 - 2h(2e+1.7) \end{pmatrix}$$

Заметим:
$|-2-h^2| = 2 + h^2 > 2$
$|-2-h^2-2h| = 2 + h^2 + 2h > 2$
То есть выполнено диагональное преобладание, значит, метод прогонки применим.

Вывод

Метод стрельбы сходится быстрее метода прогонки, поскольку в нем используется метод Рунге-Кутта второго порядка, в то время как в методе прогонки применяются методы численного дифференцирования лишь второго порядка.