Laboratorium IV

Aproksymacja

Dominik Marek

26 marca 2024

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

Zadania

1. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0,1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla $w(x)=1$.
2. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0,1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a.

Zadania domowe

1. Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia
2. Oblicz wartości funkcji $f(x) = 1 - x^2$ w dyskretnych punktach $x_i = -1 + 0.5$ i , $i = 0,1, \dots, 4$, a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego
3. Wykonać aproksymację funkcję $|\sin(x)|$ funkcjami trygonometrycznymi w zakresie $[-\pi, \pi]$.

2.Rozwiązania

2.1 Zadania.

1.

Mamy:

$$f(x) = 1 + x^3, \omega(x) = 1, \phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x$$

Aproksymujemy wielomianami $\phi_n(x) = x^n$, tak więc funkcja aproksymująca ma postać:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)\,, c_i \in \mathbb{R}$$

Odległość od funkcji aproksymowanej w metryce $L_1^2([0,1])$ wynosi:

$$\delta(f, F) = \int\limits_0^1 [F(x) - f(x)]^2\, dx = \int\limits_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x) - f(x)\right]^2 dx$$

Aby znaleźć minimum funkcji w zależności od współczynników c_i porównujemy jej pochodne względem tych współczynników do 0:

$$\frac{\partial\delta}{\partial c_i} = 2\int_0^1 [F(x) - f(x)]\phi_i(x)\, dx = 0$$

$$\int_0^1 [F(x) - f(x)]\phi_i(x)\, dx = 0$$

$$\int_0^1 F(x)\phi_i(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\, dx$$

$$\int_0^1 \sum_{j=0}^{n} c_j\phi_j(x)\,\phi_i(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\, dx$$

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \int_0^1 \phi_j(x)\phi_i(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\, dx\,, i \in \{0,1,\cdots,n\}$$

Dla przypadku $\mathrm{n} = 1$, równania te w postaci macierzowe przedstawiają się następująco:

$$\begin{bmatrix} \int\limits_0^1 \phi_0(x)\phi_0(x)\, dx & \int\limits_0^1 \phi_0(x)\phi_1(x)\, dx \\ \int\limits_0^1 \phi_1(x)\phi_1(x)\, dx & \int\limits_0^1 \phi_1(x)\phi_1(x)\, dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int\limits_0^1 f(x)\phi_0(x)\, dx \\ \int\limits_0^1 f(x)\phi_1(x)\, dx \end{bmatrix}$$

(1)

Obliczamy zatem następujące całki:

$$\int_0^1 \omega(x)\phi_0(x)\phi_0(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$\int_0^1 \omega(x)\phi_0(x)\phi_1(x)\,dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \omega(x)\phi_1(x)\phi_1(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \omega(x)f(x)\phi_0(x)\,dx = \int_0^1 (1+x^3)dx = \frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 \omega(x)f(x)\phi_1(x)\,dx = \int_0^1 (x+x^4)dx = \frac{7}{10}$$

Powyższe obliczenia pozwalają uzyskać poniższy układ równań:

$$\begin{cases} c_0\left(\int_0^1 \omega(x)\phi_0(x)\phi_0(x)\,dx + \int_0^1 \omega(x)\phi_0(x)\phi_1(x)\,dx\right) = \frac{5}{4} \\ c_1\left(\int_0^1 \omega(x)\phi_1(x)\phi_0(x)\,dx + \int_0^1 \omega(x)\phi_0(x)\phi_0(x)\,dx\right) = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Upraszczając ten układ otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

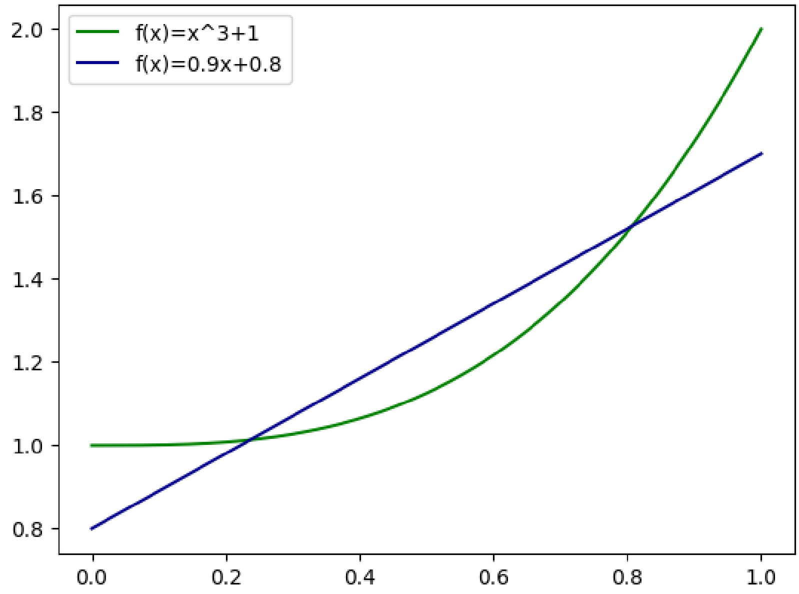
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4c_0 + 2c_1 = 5 \\ -5c_0 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = \frac{4}{5} \\ c_1 = \frac{9}{10} \end{cases}$$

Z tego wynika, że nasza funkcja aproksymująca ma postać:

$$F(x) = 0.9x + 0.8$$



Rysunek 1: Wykres funkcji aproksymowanej i aproksymującej

2.

Pierwsze trzy wielomiany Legendre'a:

$$L_0(\chi) = 1$$
$$L_1(x) = x$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Są one ortogonalne z wagą 1 w sensie metryki L^2 na przedziale $[-1,1]$.W związku z tym:

$$\forall i \neq j_{.i,j\in\{0,1,2\}} \int_{-1}^{1} L_i(x)L_j(x)\,dx = 0$$

(2)

Nasz badany przedział jest od niego różny, w związku z tym zastosujemy podstawienie transformujące nam przedział [0,1] na [-1, 1]:

$$t = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}(t+1)$$

Nasza funkcja aproksymowana przyjmie postać:

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}(t+1)\right)^3 + 1, t \in [-1,1]$$

A nasza funkcja aproksymująca przyjmie poniższą postać:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{2} c_i L_i(t)\,, t \in [-1,1]$$

Powróciwszy do zmiennej x otrzymamy funkcję interpolującą. Zatem analogicznie do zadania pierwszego nasz problem sprowadza się do rozwiązania poniższego równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)\,dt & \int_{-1}^{1} L_0(t)L_1(t)\,dt & \int_{-1}^{1} L_0(t)L_2(t)\,dt \\ \int_{-1}^{1} L_1(t)L_0(t)\,dt & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)\,dt & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_2(t)\,dt \\ \int_{-1}^{1} L_2(t)L_0(t)\,dt & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_1(t)\,dt & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)\,dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Wykorzystując pierwszą zależność (1) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)\,dt & 0 & 0 \\ 0 & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)\,dt & 0 \\ 0 & 0 & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)\,dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Zatem:

$$\begin{bmatrix} c_0 \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)\,dt \\ c_1 \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)\,dt \\ c_2 \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Czyli:

$$C_i = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)L_i(t)\,dt}{\int_{-1}^{1} L_i^2(t)dt}$$

(3)

Wyliczamy poszczególne całki potrzebne do rozwiązania:

$$\int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 + 1\right] dt = \frac{5}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \left[t\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 + t\right] dt = \frac{3}{10}$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{3t^2-1}{2}\right)\left(\left(\frac{t+1}{2}\right)^3+1\right)\right] dt = \frac{1}{10}$$

$$\int_{-1}^{1} L_0^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

$$\int_{-1}^{1} L_1^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} dt = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} L_2^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3t^2-1}{2}\right)^2 dt = \frac{4}{10}$$

Podstawiając do wzoru (3) dostajemy:

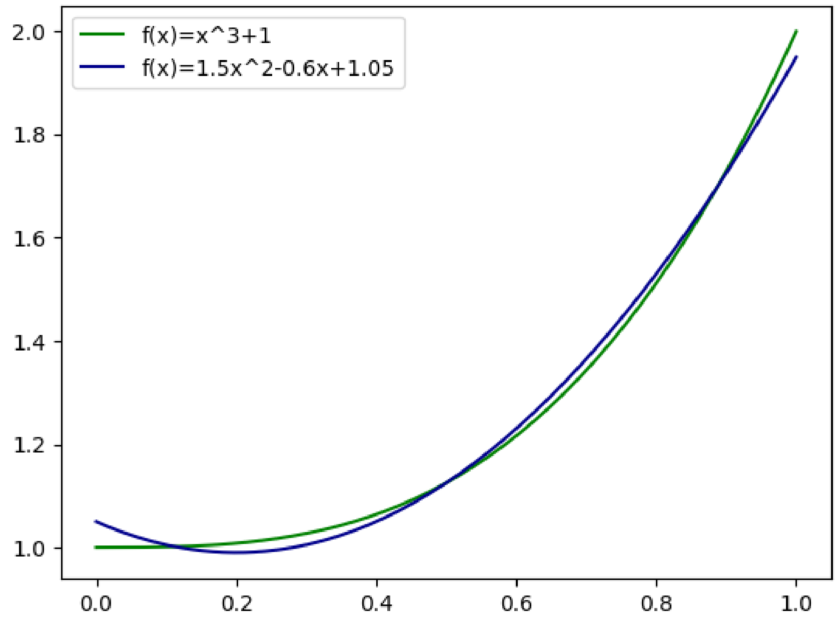
$$\begin{cases} c_0 = 1{,}25 \\ c_1 = 0{,}45 \\ c_2 = 0{,}25 \end{cases}$$

Zatem nasza funkcja aproksymująca ma postać:

$$F(t) = 0.25 \cdot \frac{3t^2-1}{2} + 0.45t + 1.25$$

Wracając do zmiennej x otrzymujemy:

$$F(x) = 0.25 \cdot \frac{1}{2}(3(2x-1)^2-1) + 0.45(2x-1) + 1.25 = 1.5x^2 - 0.6x + 1.05$$



Rysunek 2: Wykres funkcji aproksymowanej i aproksymującej

2.2 Zadania domowe

1.

W celu aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia należy postępować według poniższych kroków:

1. Wczytanie danych o znanych punktach x_i oraz wartości funkcji aproksymowanej $f(x_i)$.
2. Rozwiązanie następującego równania w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i\, f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2\, f(x_i) \end{bmatrix}$$

3. Otrzymujemy rozwiązanie w postaci poniższej funkcji:

$$F(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

2.

Dla danego zbioru wielomianów nasza funkcja będzie ich kombinacją liniową:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x)\,, c_i \in \mathbb{R}$$

Rozwiązanie naszego zadania sprowadza się do wyznaczenia wartości współczynników c_i, rozwiązując poniższe równania postaci:

$$A_{m \times m} \cdot C_{m \times 1} = F_{m \times 1}$$

Gdzie:

$$A_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k) \phi_j(x_k)$$

$$C_i = c_i$$

$$F_i = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k) y_k$$

y_k- wartość aproksymowanej funkcji w i-tym punkcie. Macierz A można sprowadzić do macierzy diagonalnej poprzez zastosowanie wielomianów ortogonalnych na zbiorze punktów znanych do aproksymacji. Przykładem takich wielomianów są wielomiany Grama. Są one zdefiniowane następująco:

$$F_{k,n}(x) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{x^{[s]}}{n^{[s]}}$$

Gdzie:

$$r^{[s]} = r(r-1) \cdots (r-s+1)$$

Powyższe wielomiany do trzeciego stopnia mają następującą postać:

$$P_{0,n} = 1$$
$$P_{1,n} = 1 - \frac{2t}{n}$$
$$P_{2,n} = 1 - \frac{6t}{n} + \frac{6t(t-1)}{n(n-1)}$$
$$P_{3,n} = 1 - \frac{12t}{n} + \frac{30t(t-1)}{n(n-1)} - \frac{20t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

Są one ortogonalne w punktach 0,1,2,3,... Aby zmienić ortogonalność na podane równoodległe punkty stosujemy podstawienie:

$$q = \frac{x - x_o}{h}$$

Zatem nasze wielomiany dla $n = 4$ będą postaci:

$$P_{0,4} = 1$$
$$P_{1,4} = -x$$
$$P_{2,4} = 2x^2 - 1$$
$$P_{3,4} = -\frac{20}{3}x^2 + \frac{17}{3}x$$

Korzystając z faktu, że macierz jest diagonalna możliwe jest wyprowadzenie wzorów na poszczególne współczynniki:

$$c_i = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i P_{k,n}(t_i)}{\sum_{i=0}^{n} P_{k,n}^2(t_i)}$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy poniższe wartości współczynników:

$$\begin{cases} c_0 = 0.5 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -0.5 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Finalnie otrzymujemy:

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{(2x^2 - 1)}{2} = 1 - x^2$$

Wnioski:

Uzyskana funkcja jest dokładnie zadaną funkcją - ma to sens ponieważ aproksymujemy wielomian drugiego stopnia wielomianami stopnia trzeciego i minimalizujemy w pewnym sensie odległość między nimi.

3.

Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji f na przedziale $[-\pi, \pi]$ nazywa się szereg postaci:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Gdzie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Podana w zadaniu funkcja $f(x) = |sin(x)|$ spełnia warunki Dirichleta na przedziale $[-\pi, \pi]$. Ponadto jest to funkcja parzysta co implikuje, że współczynnik b_n w powyższym wzorze jest stale równy 0, zatem możemy go pominąć we wzorze na szereg Fouriera. W tym przypadku będziemy naszą funkcję rozwijać w szereg cosinusów następującej postaci:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Gdzie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = \frac{2}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(x) \cos(nx)\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin x \sin(nx) + \cos x \cos(nx)}{n^2 - 1} \right]_0^{\pi} = -\frac{2(\cos(\pi n) + 1)}{\pi(n^2 - 1)}$$

Rozwijając funkcję $f(x) = |sin\, x|$ w szereg Fouriera otrzymujemy poniższy wzór na $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 4\, cos(2nx)}{\pi((2n)^2 - 1)}$$

3.Bibliografia.

1. https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab4/aproksymacja.pdf
2. https://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab4/wielomianygrama.pdf
3. https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Legendre%E2%80%99a
4. https://pl.wikipedia.org/wiki/Szereg_Fouriera,
5. Katarzyna Rycerz: Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice